О критерии нормальности Пятецкого-Шапиро для цепных дробей*

И. Д. ШКРЕДОВ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН*
e-mail: ishkredov@rambler.ru

УДК 511.4+517.938

Ключевые слова: критерий нормальности Пятецкого-Шапиро, цепные дроби, динамические системы с перемешиванием.

Аннотация

В настоящей статье мы доказываем аналог критерия нормальности Пятецкого-Шапиро для цепных дробей, а также для f-расширений с конечным начальным разбиением. Полученные результаты уточняют некоторые теоремы из работы Н. Г. Мощевитина и И. Д. Шкредова «О критерии нормальности Пятецкого-Шапиро».

Abstract

I. D. Shkredov, On the Pyatetskii-Shapiro normality criterion for continued fractions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 177—188.

Analogues of the Pyatetskii-Shapiro normality criterion for continued fractions and for f-expandings with finite initial tiling are established, improving some results by Moshchevitin and Shkredov obtained in the 2002 paper "On Pyatetskii-Shapiro criterion of normality."

1. Введение

Пусть X — пространство с сигма-алгеброй измеримых множеств Φ и мерой μ, а T — измеримое эргодическое отображение пространства X в себя, сохраняющее эту меру. Всюду ниже будем считать, что $\mu(X) = 1$.

Для произвольной измеримой функции $f(x)$ рассмотрим биркгофовское среднее

$$S_l(T, x, f) = S_l(x, f) = \sum_{m=0}^{l-1} f(T^m x).$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 06-01-00383, и грантов Президента РФ № 1726.2006.1 и INTAS № 03-51-5-70.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 177—188.

Возьмём произвольное $\delta > 0$ и произвольное натуральное l. Рассмотрим множества

$$A_l(T, f, \delta) = A_l(f, \delta) = \left\{ x \in X : \left| \frac{S_l(T, x, f)}{l} - \int f\, d\mu \right| > \delta \right\}.$$

Как утверждает статистическая эргодическая теорема, для любого $\delta > 0$ мера множеств $A_l(f, \delta)$ стремится к нулю при $l \to \infty$ (относительно скорости сходимости см. [2, 13]).

Пусть $\{C_n\}$ — не более чем счётное семейство измеримых подмножеств X, а $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая положительнозначная функция аргумента $t \in \mathbb{R}_+$. Определим меру $H_\varphi(\cdot)$ для множества E относительно этого семейства как

$$\inf \Big\{ \sum \varphi\big(\mu(C_i)\big) \Big\},$$

где инфимум берётся по не более чем счётным покрытиям E.

Обозначим через Γ семейство μ-измеримых множеств $\{V\}$, которые с любой точностью аппроксимируются множествами семейства $\{C_n\}$. Иными словами, для произвольного V из Γ и любого $\varepsilon > 0$ существуют наборы непересекающихся множеств $\{M_i\}$ и $\{N_i\}$ из семейства $\{C_n\}$, такие что

$$\bigsqcup M_i \subseteq V \subseteq \bigsqcup N_i$$

и

$$\sum \mu(N_i) - \varepsilon < \mu(V) < \sum \mu(M_i) + \varepsilon.$$

Пусть χ_I — характеристическая функция измеримого множества I. Знаменитая эргодическая теорема Биркгофа (см., например, [1]) утверждает что для почти всех точек x_0 выполнено

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi_I)}{\nu} = \mu(I). \tag{1}$$

Если для точки x_0 выполнено (1), то x_0 называется *нормальной*.

Для динамической системы, порождённой отображением $x \to \{qx\}$, $q \in \mathbb{N}$, $q > 1$, интервала $[0, 1)$ в себя, И. И. Пятецкий-Шапиро в [6] дал критерий справедливости (1) для данной точки x_0. Ряд последующих работ И. И. Пятецкого-Шапиро и А. Г. Постникова [4—7] содержал обобщения и усиления первоначального критерия из работы [6].

Наиболее общая формулировка была доказана в [3].

Теорема 1. *Пусть $x_0 \in X$. Если для произвольного множества I из семейства $\{C_n\}$ выполнено неравенство*

$$\limsup_{\nu \to \infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi_I)}{\nu} \leqslant \varphi\big(\mu(I)\big)$$

и для любого $\delta > 0$

$$H_\varphi\big(A_l(\chi_I, \delta)\big) \to 0 \quad при \quad l \to \infty,$$

то для произвольного множества I из Γ имеет место асимптотическое равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu} = \mu(I). \tag{2}$$

В [3] также были получены неулучшаемые аналоги теоремы 1 для некоторых конкретных динамических систем (в том числе и для рассматривавшиеся в [4]): например, для конечных цепей Маркова и обобщённого сдвига Бернулли. В настоящей заметке мы докажем окончательный вариант теоремы 1 для динамической системы, связанной с цепными дробями, а также для некоторого класса динамических систем с конечным начальным разбиением. В нашем доказательстве мы будем опираться на работу [11].

2. Динамические системы с ψ-перемешиванием

Часто оказывается, что семейство $\{C_n\}$ имеет специальный вид.

Пусть ξ — не более чем счётное измеримое разбиение пространства X. Если ξ и η — два разбиения, то их совместное разбиение определяется следующим образом:

$$\xi \vee \eta := \{A\cap B \mid A\in\xi,\ B\in\eta\}.$$

Для измеримого разбиения ξ, сохраняющего меру преобразования T, и произвольного натурального n определим итерированное разбиение

$$\xi^T_{-n} := \xi\vee T^{-1}\xi\vee\ldots\vee T^{-n+1}\xi, \quad \xi^T_0=\xi.$$

Разбиение ξ мы будем называть *начальным* разбиением.

Мы будем считать, что семейство $\{C_n\}$ есть совокупность элементов разбиений

$$\xi^T_{-\infty} = \{\xi^T_{-n}\}_{n=0}^\infty$$

(именно эта ситуация рассматривалась в [4]). Как и прежде, Γ обозначает семейство μ-измеримых множеств $\{V\}$, которые с любой точностью аппроксимируются множествами семейства $\{C_n\}$.

Теорема 1 для систем с $\{C_n\}=\xi^T_{-\infty}$ выглядит следующим образом (см. [3]).

Теорема 2. *Пусть $x_0\in X$. Если для любого n и характеристической функции χ_I произвольного элемента $I\in\xi^T_{-n}$ выполняется*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi_I)}{\nu} \leqslant \varphi\big(\mu(I)\big) \tag{3}$$

и, кроме того, для любого $\delta>0$ имеем

$$H_\varphi\big(A_l(T^n,\chi_I,\delta)\big)\to 0 \quad \text{при} \quad l\to\infty,$$

то для характеристической функции χ произвольного множества $V\in\Gamma$ справедливо асимптотическое равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} = \mu(E). \tag{4}$$

Пусть теперь ξ — конечное измеримое разбиение пространства X, $|\xi| = q$.

Пусть $\varphi(t)$ — монотонно возрастающая положительнозначная функция, такая что для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\varphi(t)}{t^{1-\varepsilon}} = 0. \tag{5}$$

Пусть функция φ представляется в виде $\varphi(t) = t\omega(t)$, где $\omega(t)$ — невозрастающая функция, удовлетворяющая следующему условию: для произвольных $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ и для всех характеристических функций χ элементов разбиения ξ^T_{-n} выполнено

$$\lim_{l\to\infty} \mu\bigl(A_l(T^n, \chi, \delta)\bigr)\omega\left(\frac{1}{q^{ln}}\right) = 0. \tag{6}$$

Для систем с конечным начальным разбиением в [3] был доказан следующий результат.

Теорема 3. *Пусть $x_0 \in X$. Если для любого n и характеристической функции χ произвольного элемента $I \in \xi^T_{-n}$ выполнено*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} \leqslant \mu(I)\omega\bigl(\mu(I)\bigr), \tag{7}$$

то для характеристической функции χ произвольного множества $E \in \Gamma$ имеет место асимптотическое равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} = \mu(E). \tag{8}$$

Пусть $k, l \in \{0, 1, \dots\}$ и $k \leqslant l$. Обозначим через ξ^l_k итерированное разбиение $T^{-k}\xi \vee \dots \vee T^{-l}\xi$.

Определение 4. Динамическая система обладает свойством ψ-перемешивания, если существует функция $\psi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, такая что $\psi(m) \to 0$, когда $m \to \infty$, и для произвольных $k, l, m \in \mathbb{N}$ и $A \in \xi^k_0$, $B \in \xi^{k+m+l}_{k+m}$ имеем

$$|\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| \leqslant \psi(m)\mu(A)\mu(B). \tag{9}$$

Для систем с ψ-перемешиванием в работе [11] была получена оценка для мер множеств $A_l(T, f, \delta)$.

Предложение 5. *Пусть n — натуральное число и χ — характеристическая функция произвольного элемента I разбиения ξ^T_{-n}. Тогда существует такое $l_0 = l_0(\delta, n, I)$, что для всех $l \geqslant l_0$ выполнено*

$$\mu\bigl(A_l(T, \chi, \delta)\bigr) \leqslant 2M(\delta, n)e^{-\frac{\delta^2 l}{2M(\delta, n)}}, \tag{10}$$

где

$$M(\delta, n) = \min\left\{m \in \mathbb{N}\colon \psi(m - n) \leqslant \frac{\delta^2}{2}\right\}.$$

Следствие 6. *Пусть динамическая система* (X, T, μ) *с конечным начальным разбиением* ξ *обладает свойством* ψ*-перемешивания. Пусть* $x_0 \in X$. *Пусть также для всякого положительного* η *выполнено* $\omega(t) = O(t^{-\eta})$, $t \to 0$. *Если для любого* n *и характеристической функции* χ *произвольного элемента* $I \in \xi_{-n}^T$ *выполнено*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} \leqslant \mu(I)\omega\bigl(\mu(I)\bigr),$$

то для характеристической функции χ *произвольного множества* $E \in \Gamma$ *имеет место асимптотическое равенство*

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, \chi)}{\nu} = \mu(E).$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться оценкой (10) и применить теорему 3. □

Вероятно, наиболее общим примером динамических систем с ψ-перемешиванием, обладающих конечным начальным разбиением, являются f*-растяжения*.

Пусть $M \in \{2, 3, \ldots\}$. Пусть непрерывная функция f либо строго убывает на $[1, M+1]$, так что $f(1) = 1$ и $f(M) = 0$, либо строго возрастает на $[0, M]$, так что $f(0) = 0$ и $f(M) = 1$. Существует обширная литература (см., например, [9,12,15]), в которой изучается вопрос о представлении числа $x \in (0,1)$ в форме

$$x = f(\alpha_1(x) + f(\alpha_2(x) + f(\alpha_3(x) + \ldots)\ldots), \tag{11}$$

где *цифры* $\alpha_i(x) \in \mathbb{N}$ и *остатки* $r_i(x)$ определяются рекуррентно по формулам $\alpha_0(x) = 0$, $r_0(x) = x$ и $\alpha_{i+1}(x) = \bigl[f^{-1}\bigl(r_i(x)\bigr)\bigr]$, $r_{i+1}(x) = \bigl\{f^{-1}\bigl(r_i(x)\bigr)\bigr\}$, где $i \geqslant 0$. Здесь мы обозначаем через $[\cdot]$ и $\{\cdot\}$ целую и дробную части соответственно. Если $r_j(x) = 0$, то для всех $i > j$ имеем $\alpha_i(x) = 0$. В этом случае мы будем говорить, что число $x \in (0,1)$ имеет конечное f-представление. Ясно, что для фиксированного f количество таких x не более чем счётно. А. Реньи [15] показал, что если функция f удовлетворяет некоторым условиям регулярности, то для всех $x \in (0,1)$ правая часть (11) сходится к x. Если f строго убывает, то условия регулярности состоят в том, что найдётся такое $\kappa \in (0,1)$, для которого выполнено $|f(t) - f(s)| \leqslant \kappa|t-s|$ для всех s, t, таких что $1 + f(2) < s < t$, и $|f(t) - f(s)| \leqslant |t-s|$ для всех s, t, таких что $0 \leqslant s < t$. Если же f строго возрастает, то условие регулярности состоит в том, что $|f(t) - f(s)| < |t-s|$ для всех $0 \leqslant s < t$.

Пусть $I_k = f(k, k+1)$ для $1 \leqslant k \leqslant M$, если f убывает, и $I_k = f(k, k+1)$ для $0 \leqslant k \leqslant M-1$, если f возрастает. Тогда преобразование $Tx = f^{-1}x - [f^{-1}x]$ гомеоморфно отображает каждый интервал I_k на $(0,1)$. Кроме того, для каждого $x \in \bigcup\limits_k I_k$ мы имеем $\alpha_i(Tx) = \alpha_{i+1}(x)$. Если $T^i x \in I_{k_i}$ для всех $i \geqslant 0$, то x единственным образом представляется в виде последовательности цифр $\alpha_{i+1}(x) = k_i$, $i \geqslant 0$. Следуя [17], предположим дополнительно, что

1) ограничение T на каждый интервал I_k принадлежит классу C^2;

2) существует такое l, что

$$\inf_{x \in I_k,\ k \in \mathbb{N}} |(T^l)'(x)| = \beta > 1;$$

3) справедливо

$$\sup_{x,y,z \in I_k,\ k \in \mathbb{N}} \left| \frac{T''(x)}{T'(y)T'(z)} \right| = Q < \infty.$$

Тогда согласно теореме 22 из [17] существует T-инвариантная мера μ_T, такая что

$$0 < \frac{d\mu_T}{dx} \in C[0,1].$$

Кроме того, преобразование T обладает свойством ψ-перемешивания, причём для некоторых констант $C > 0$ и $\lambda \in (0,1)$ выполнено

$$\psi(m) \leqslant C\lambda^m.$$

Таким образом, для f-расширений с указанными выше условиями на функцию f выполнено следствие 6.

3. Критерий нормальности Пятецкого-Шапиро для цепных дробей

Цепной дробью, соответствующей числу α, называется выражение

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots}} = [a_0; a_1, a_2, \ldots].$$

Число a_n называется n-м неполным частным числа α, а рациональное число $p_k/q_k = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_k]$ — подходящей дробью порядка k. Если $\alpha \in [0,1)$, то будем писать $\alpha = [a_1, a_2, \ldots]$. Интервалом k-го ранга $I_k = I_k(a_1, \ldots, a_k)$ называется множество всех чисел α, у которых цепные дроби начинаются с $a_1, \ldots, a_k$. Обозначим через $S_\nu(\alpha, I_k)$ число повторений комбинации $(a_1, \ldots, a_k)$ в разложении α до ν-го места. Обозначим через χ_{I_k} характеристическую функцию множества I_k.

Как известно, преобразование Гаусса $Tx = \{1/x\}$, $x \neq 0$, $T0 = 0$, является левым сдвигом при разложении в цепную дробь и сохраняет меру

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln 2} \int\limits_A \frac{1}{1+x}\, dx,$$

которая эквивалентна мере Лебега dx. Соответствующая динамическая система обладает свойством ψ-перемешивания (см. [8,10,14,16]) с $\psi(m) = K\lambda^m$, $K > 0$, $0 < \lambda < 1$. Поэтому для мер множеств $A_l(\chi_{I_k}, \delta)$ выполнена оценка (10). Все необходимые сведения о цепных дробях можно найти в [8].

Сформулируем основной результат настоящей статьи.

Теорема 7. *Пусть $x_0 \in [0,1)$. Пусть функция $\omega\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ не возрастает и для всякого положительного η выполнено $\omega(t) = O(t^{-\eta})$, $t \to 0$. Если для произвольного интервала k-го ранга I_k имеем*

$$\limsup_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0, I_k)}{\nu} \leqslant \mu(I_k)\omega\bigl(\mu(I_k)\bigr),$$

то для характеристической функции χ произвольного интервала $I = (a,b)$ справедливо асимптотическое равенство

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu} = \mu(I). \tag{12}$$

Замечание 8. В работе [3] на функцию $\omega(t)$ накладывалось более сильное условие, а именно для всякого положительного η требовалось, чтобы $\omega(t) = O\bigl(e^{\eta\sqrt{\log 1/t}}\bigr)$, $t \to 0$.

Замечание 9. В ходе доказательства теоремы 7 будет оценена сверху размерность Хаусдорфа множества цепных дробей, не являющихся нормальными. Впервые такая оценка была получена в [11] с использованием метода термодинамического формализма. Наше доказательство вполне элементарно.

Доказательство. Возьмём любое $\delta > 0$, и пусть I_k — произвольный интервал k-го ранга. Обозначим через $E_l(g)$ $(g \geqslant 1)$ множество чисел отрезка $[0,1]$, для которых $a_1a_2\dots a_l \geqslant g$. Рассматриваемое множество $E_l(g)$ представляет собой систему интервалов ранга l. Длина $|I_l|$ произвольного интервала ранга l равна $1/\bigl(q_l(q_l+q_{l-1})\bigr)$, и $1/(2q_l^2) \leqslant |I_l| \leqslant 1/q_l^2$. Для чисел q_l (см. [8]) выполнено

$$a_1a_2\dots a_l \leqslant q_l \leqslant 2^l a_1a_2\dots a_l. \tag{13}$$

Оценим хаусдорфову меру множества $E_l(g)$ относительно функции φ, т. е. сумму

$$H_\varphi\bigl(E_l(g)\bigr) = \sum_{a_1a_2\dots a_l \geqslant g} |I_l|\omega(|I_l|).$$

По условию теоремы для любого $\eta > 0$ выполнено $\omega(t) = O(t^{-\eta})$, $t \to 0$. Возьмём произвольное η, $\eta \in (0, 1/8)$. Пусть $\rho(t) = t^\eta$. Пользуясь оценками (13) для q_l и монотонностью функции $\rho(t)$, получаем, что

$$H_\varphi\bigl(E_l(g)\bigr) \ll \sum_{a_1a_2\dots a_l \geqslant g} \frac{\rho((2^{l+1}a_1a_2\dots a_l)^2)}{(a_1a_2\dots a_l)^2} = \rho(4^{l+1}) \sum_{a_1a_2\dots a_l \geqslant g} \prod_{i=1}^{l} \frac{\rho(a_i^2)}{a_i^2}. \tag{14}$$

Оценим (14), следуя методу из [8].

Вычисляя интеграл $\int\limits_a^{a+1} \frac{dx}{x^2}$, легко убедиться, что для любого $a > 0$ выполнена оценка

$$\frac{\rho(a^2)}{a(a+1)} \leqslant \int\limits_a^{a+1} \frac{\rho(x^2)}{x^2}\,dx. \tag{15}$$

Пользуясь неравенством (15), находим, что

$$\prod_{i=1}^{l} \frac{\rho(a_i^2)}{a_i^2} = \prod_{i=1}^{l} \left(1 + \frac{1}{a_i}\right) \frac{\rho(a_i^2)}{a_i(a_i+1)} \leqslant 2^l \prod_{i=1}^{l} \int\limits_{a_i}^{a_i+1} \frac{\rho(x_i^2)}{x_i^2}\, dx_i.$$

Тогда

$$H_\varphi\bigl(E_l(g)\bigr) \ll 2^l \rho(4^{l+1}) \int \dots \int \frac{\rho(x_1^2 \dots x_l^2)\, dx_1 \dots dx_l}{x_1^2 \dots x_l^2} = 2^l \rho(4^{l+1}) J_l(g),$$

где интегрирование в $J_l(g)$ распространяется на область $x_i \geqslant 1$, $i = 1, \dots, l$, и $x_1 x_2 \dots x_l \geqslant g$. Пусть $C = C_\eta = 1/(1-2\eta)$. Если $g \leqslant 1$, то для любого $l \geqslant 1$ выполнено

$$J_l(g) = \biggl(\int\limits_1^\infty \frac{\rho(x^2)}{x^2}\biggr)^l = C^l.$$

Если $g > 1$, то $J_1(g) = C\rho(g^2)/g$. Кроме того, интегралы $J_l(g)$ связаны соотношением

$$J_{l+1}(g) = \frac{\rho(g^2)}{g} \int\limits_0^g J_l(u) \rho\left(\frac{1}{u^2}\right) du. \tag{16}$$

Действительно,

$$J_{l+1}(g) = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\rho(x_{l+1}^2)}{x_{l+1}^2} J_l\left(\frac{g}{x_{l+1}}\right) dx_{l+1} = \frac{\rho(g^2)}{g} \int\limits_0^g J_l(u) \rho\left(\frac{1}{u^2}\right) du.$$

Докажем, что для всех $g > 1$ и для всех $l \geqslant 1$ справедлива формула

$$J_l(g) = C \frac{\rho(g^2)}{g} \biggl(\sum_{k=0}^{l-1} C^{l-k-1} \frac{\log^k g}{k!}\biggr). \tag{17}$$

Для $l = 1$ и $g > 1$ выражение (17) превращается в верное равенство. Предположим, что формула (17) справедлива для $l = m$. Пользуясь (16), находим, что

$$J_{m+1}(g) = \frac{\rho(g^2)}{g} \int\limits_0^1 J_m(u) \rho\left(\frac{1}{u^2}\right) du + \frac{\rho(g^2)}{g} \int\limits_1^g J_m(u) \rho\left(\frac{1}{u^2}\right) du.$$

Если $u \leqslant 1$, то, как было отмечено выше, $J_m(u) = C^m$. Тогда

$$J_{m+1}(g) = \frac{\rho(g^2)}{g} C^m \int\limits_0^1 \rho\left(\frac{1}{u^2}\right) du + \frac{\rho(g^2)}{g} \int\limits_1^g J_m(u) \rho\left(\frac{1}{u^2}\right) du = \\ = \frac{\rho(g^2)}{g} \biggl(C^{m+1} + \int\limits_1^g J_m(u) \rho\left(\frac{1}{u^2}\right) du\biggr).$$

Применяя формулу (17) для вычисления J_m, получаем

$$J_{m+1}(g)=\frac{\rho(g^2)}{g}\biggl(C^{m+1}+C\int\limits_1^g\sum_{k=0}^{m-1}C^{m-k-1}\frac{\log^k u}{k!}\cdot\frac{du}{u}\biggr)=$$
$$=C\frac{\rho(g^2)}{g}\biggl(\sum_{k=0}^{m}C^{m-k}\frac{\log^k g}{k!}\biggr),$$

что и доказывает формулу (17) для произвольного l.

Таким образом,

$$H_\varphi\bigl(E_l(g)\bigr)\ll\frac{\rho(g^2)2^l\rho(4^{l+1})}{g}\biggl(\sum_{k=0}^{l-1}C^{l-k-1}\frac{\log^k g}{k!}\biggr).$$

Полагая $g=e^{Al}$, где $A>1$ — абсолютная константа, которую мы выберем позже, находим, что

$$H_\varphi\bigl(E_l(g)\bigr)\ll e^{l(\ln 2+2\eta\ln 4+2\eta A-A)}\biggl(\sum_{k=0}^{l-1}C^{l-k-1}\frac{(Al)^k}{k!}\biggr). \tag{18}$$

В сумме (18), как легко заметить, каждый член меньше, чем $C^l(Al)^l/l!$. Пользуясь формулой Стирлинга, получаем, что

$$H_\varphi\bigl(E_l(g)\bigr)\ll le^{l(\ln 2+2\eta\ln 4+2\eta A-A)}C^l\frac{(Al)^l}{l^le^{-l}\sqrt{l}}\ll e^{-l(A-\ln 2-2\eta\ln 4-2\eta A-\ln A-\ln C-2)}.$$

Так как $\eta\in(0,1/8)$, то $\ln C=\ln C_\eta<1$. Выберем A настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$A-\ln 2-\ln 4-\frac{1}{4}A-\ln A-3>0.$$

Тогда

$$H_\varphi\bigl(E_l(e^{Al})\bigr)\ll e^{-Bl}, \tag{19}$$

где B — некоторая новая абсолютная константа.

Обозначим через χ характеристическую функцию интервала I_k. Для любых натуральных ν и l справедлива формула

$$S_\nu(x_0,\chi)=\frac{1}{l}\sum_{t=0}^{\nu-1}S_l(T^tx_0)+O(l). \tag{20}$$

Используя формулу (20), получаем, что

$$\begin{aligned}\left|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu}-\mu(I_k)\right| &= \frac{1}{\nu}\left|\sum_{t=0}^{\nu-1}\left(\frac{S_l(T^t x_0,\chi)}{l}-\mu(I_k)\right)\right|+O\left(\frac{l}{\nu}\right)\leqslant\\ &\leqslant \frac{1}{\nu}\sum_t\left|\frac{S_l(T^t x_0,\chi)}{l}-\mu(I_k)\right|+\frac{1}{\nu}\hat{\sum_t}\left|\frac{S_l(T^t x_0,\chi)}{l}-\mu(I_k)\right|+O\left(\frac{l}{\nu}\right)\leqslant\\ &\leqslant \delta+\frac{R_\nu}{\nu}+O\left(\frac{l}{\nu}\right),\end{aligned}\tag{21}$$

где суммирование в первой сумме из (21) распространено на те слагаемые, для которых $\bigl|\frac{S_\nu(T^t x_0)}{l}\bigr|\leqslant\delta$, а R_ν обозначает количество слагаемых во второй сумме. Число R_ν/ν представляет собой частоту попадания орбиты $T^t x_0$ в множество $A_l(\chi,\delta)$. Заметим, что множество $A_l(\chi,\delta)$ *разбивается* на объединение некоторых элементов $\tau_1,\dots,\tau_m$ разбиения ξ_{-l}^T. Пусть τ — произвольный элемент разбиения ξ_{-l}^T. Обозначим через $R_\nu(\tau)$ число тех $t\in\{1,\dots,\nu\}$ для которых выполнено $T^t x_0\in\tau$. Тогда $R_\nu=\sum\limits_{i=1}^m R_\nu(\tau_i)$. По условию теоремы для любого элемента τ разбиения ξ_{-l}^T выполнено

$$\limsup_{\nu\to\infty}\frac{R_\nu(\tau)}{\nu}\leqslant\mu(\tau)\omega\bigl(\mu(\tau)\bigr).\tag{22}$$

Отсюда

$$\limsup_{\nu\to\infty}\frac{R_\nu}{\nu}\leqslant\sum_{i=1}^m\limsup_{\nu\to\infty}\frac{R_\nu(\tau_i)}{\nu}\leqslant\sum_{i=1}^m\mu(\tau_i)\omega\bigl(\mu(\tau_i)\bigr)=\sigma.$$

Разобьём σ на сумму по всем $\tau_i\in A_l(\chi,\delta)\cap E_l(g)$ и на сумму по всем $\tau_i\in A_l(\chi,\delta)\setminus E_l(g)$. Если $\tau_i\notin E_l(g)$, то $|\tau_i|\geqslant 1/2(2^l g)^2=1/e^{Kl}$, где $K>0$ — некоторая новая константа. Используя последнее неравенство и оценку (19), получаем, что

$$\limsup_{\nu\to\infty}\frac{R_\nu}{\nu}\ll e^{-Bl}+\omega\left(\frac{1}{e^{Kl}}\right)\mu\bigl(A_l(\chi,\delta)\bigr).\tag{23}$$

По условию для любого $\eta>0$ выполнено $\omega(t)=O(t^{-\eta})$, $t\to 0$. Применяя оценку (10) и выбирая η достаточно маленьким, находим, что для всех достаточно больших l справедливо неравенство

$$e^{-Bl}+\omega\left(\frac{1}{e^{Kl}}\right)\mu\bigl(A_l(\chi,\delta)\bigr)\leqslant\delta.\tag{24}$$

Подставляя эту оценку в (21), получаем

$$\left|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu}-\mu(I_k)\right|\leqslant 2\delta+O\left(\frac{l}{\nu}\right).$$

Так как δ — произвольное число, то

$$\limsup_{\nu\to\infty}\left|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu}-\mu(I_k)\right|=0,$$

поэтому

$$\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{S_\nu(x_0,\chi)}{\nu}-\mu(I_k)\right|=0.$$

Мы доказали асимптотическое равенство (12) для всех интервалов ранга k.

Возьмём теперь произвольный интервал $I=(a,b)$. Длины интервалов I_n (экспоненциально) убывают, следовательно, интервал I может быть аппроксимирован такими интервалами с любой точностью. Пусть χ_I — характеристическая функция интервала I. Для всякого положительного $\varepsilon>0$ найдётся набор непересекающихся интервалов I_{k_j} рангов k_j, таких что $I\subseteq\bigsqcup\limits_j I_{k_j}$ и $b-a>$ $>\sum\mu(I_{k_j})-\varepsilon$. Пусть $\chi_j=\chi_{I_{k_j}}$. Пользуясь асимптотическим равенством (12) для интервалов I_{k_j}, получаем, что

$$\limsup_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(T,x_0,\chi_I)}{\nu}\leqslant\sum_j\limsup_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(T,x_0,\chi_j)}{\nu}=\sum_j\mu(I_{k_j})<b-a+\varepsilon.$$

Иными словами,

$$\limsup_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(x_0,I)}{\nu}\leqslant b-a.$$

Аналогично получаем, что

$$\liminf_{\nu\to\infty}\frac{S_\nu(x_0,I)}{\nu}\geqslant b-a.$$

Значит, для I выполнено (12). Теорема 7 доказана. □

Литература

[1] Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. — М.: Факториал, 1999.

[2] Качуровский А. Г. Скорости сходимости в эргодических теоремах // Успехи мат. наук. — 1996. — Т. 51, № 4. — С. 73—124.

[3] Мощевитин Н. Г, Шкредов И. Д. О критерии нормальности Пятецкого-Шапиро // Мат. заметки. — 2003. — Т. 73, № 4. — С. 577—589.

[4] Постников А. Г. Арифметическое моделирование случайных процессов // Тр. МИАН СССР. — 1960. — Т. 57. — С. 3—84

[5] Постников А. Г. Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений // Тр. МИАН СССР. — 1966. — Т. 82. — С. 3—112

[6] Пятецкий-Шапиро И. И. О законах распределения дробных долей показательной функции // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1951. — Т. 15, № 1. — С. 47—52.

[7] Пятецкий-Шапиро И. И. О распределении дробных долей показательной функции // Учёные записки Московского государственного педагогического института им. В. И. Ленина. — 1957. — Т. 58, № 2. — С. 312—322.

[8] Хинчин А. Я. Цепные дроби. — М.: Наука, 1978.

[9] Heinrich L. Mixing properties and central limit theorem for a class of non-identical piecewise monotonic C^2-transformations // Math. Nachr. — 1996. — Vol. 181. — P. 185—214.

[10] Khintchine A. Zur metrischen Kettenbruchtheorie // Compositio Math. — 1936. — Vol. 3. — P. 276—286.

[11] Kifer Y., Peres Y., Weiss B. A dimension gap for continued fractions with independent digits // Israel J. Math. — 2001. — Vol. 124. — P. 61—76.

[12] Kinney J. R., Pitcher T. S. The dimension of some sets defined in terms of f-expansions // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. — 1966. — Vol. 4. — P. 293—315.

[13] Von Neumann J. Physical applications of the ergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1932. — Vol. 18. — P. 263—266.

[14] Philipp W. Some metrical theorems in number theory. II // Duke Math. J. — 1970. — Vol. 37. — P. 447—458.

[15] Renyi A. Representations for real numbers and their ergodic properties // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1957. — Vol. 8. — P. 477—493.

[16] Szüsz P. Über einen Kusminschen satz // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1961. — Vol. 12. — P. 447—453.

[17] Walters P. Invariant measures and equilibrium states for some mapping which expand distances // Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — Vol. 236. — P. 121—153.