Неоднородные диофантовы приближения и распределение дробных долей*

А. В. ШУТОВ
Владимирский государственный гуманитарный университет
e-mail: a1981@mail.ru

УДК 511.4

Ключевые слова: дробные доли линейной функции, равномерное распределение, разбиения.

Аннотация

В работе получена новая оценка остаточного члена в задаче распределения дробных долей $n\alpha$ на произвольном интервале.

Abstract

A. V. Shutov, Inhomogeneous Diophantine approximations and distribution of fractional parts, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 6, pp. 189—202.

A new estimate of the remainder term is obtained in the problem of the distribution of fractional parts of $n\alpha$ over an arbitrary interval.

1. Введение

Пусть α иррационально, $I \subset (0;1)$ — некоторый интервал. Пусть

$$N(\alpha, a, n, I) = \sharp\{k\colon 1 \leqslant k \leqslant n,\ \langle k\alpha + a\rangle \in I\} —$$

число точек вида $\langle k\alpha + a\rangle$, $1 \leqslant k \leqslant n$, попавших в интервал I. Через $\langle\cdot\rangle$ обозначена дробная доля числа. Из теоремы Вейля о равномерном распределении [1] следует асимптотическая формула

$$N(\alpha, a, n, I) = n|I| + o(n). \tag{1}$$

Рассмотрим величину

$$r(\alpha, a, n, I) = \bigl|N(\alpha, a, n, I) - n|I|\bigr| —$$

остаточный член в задаче равномерного распределения. Равенство (1) перепишется в виде

$$r(\alpha, a, n, I) = o(n). \tag{2}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 05-01-00435.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 6, с. 189—202.

Хорошо известно, что оценка (2) не может быть улучшена без дополнительных предположений об иррациональности α или о длине интервала I. С другой стороны, также известно, что при соответствующих дополнительных предположениях улучшение оценки (2) возможно.

Чаще всего рассматривается величина

$$\Delta_n(\alpha) = \sup_{I,a} r(\alpha, a, n, I)$$

или эквивалентная величина

$$D_n(\alpha) = \frac{\Delta_n(\alpha)}{n},$$

известная как функция рассогласования. Подробную библиографию работ, посвящённых оценке $\Delta_n(\alpha)$, можно найти в [2,10]. В настоящее время для $\Delta_n(\alpha)$ получены оценки, оптимальные по порядку (см., например, [14]).

Гораздо менее изученным является вопрос о поведении остатка $r(\alpha, a, n, I)$ для *конкретного* интервала I. Э. Гекке доказал [11], что при $|I| \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ справедливо неравенство

$$\sup_n r(\alpha, a, n, I) < \infty.$$

Оценки остатка в этой ситуации можно найти в [5,7]. Если же $|I| \notin \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, то согласно теореме Кестена [12]

$$\limsup_{n\to\infty} r(\alpha, a, n, I) = \infty.$$

Более того, В. Т. Шош доказала [16], что для почти всех интервалов I справедлива более сильная оценка

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{r(\alpha, a, n, I)}{\ln n} > 0. \tag{3}$$

Первые примеры таких интервалов привёл Б. Адамчевский [9] для случая, когда α — квадратичная иррациональность.

В настоящей работе получена оценка для $r(\alpha, a, n, I)$ для произвольного интервала I, зависящая от арифметической природы длины этого интервала.

Пусть $|I| = \beta$. Определим последовательность наилучших α-приближений к β:

$$A_{\alpha\beta}(0) = \begin{cases} 0, & \beta \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1, & \beta > \frac{1}{2}, \end{cases}$$
$$A_{\alpha\beta}(m+1) = \min\{k \in \mathbb{N} \colon \|k\alpha - \beta\| < \|A_{\alpha\beta}(m)\alpha - \beta\|\}.$$

Скорость приближения описывается величиной

$$a_{\alpha\beta}(n) = \min\{m \colon A_{\alpha\beta}(m) > n\}.$$

Пусть разложение α в цепную дробь имеет вид $\alpha = [0; q_1, q_2, \ldots]$. Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Пусть*

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \psi(n) = \left[\log_\tau\left(\sqrt{5}n + \sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\right] + 1.$$

Тогда

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant \frac{1}{2}\Big(\max_{1\leqslant j\leqslant \psi(\tilde{a}(n))+2} q_j + 15\Big)(a_{\alpha\beta}(n) + 1),$$

где

$$\tilde{a}(n) = A_{\alpha\beta}\big(a_{\alpha\beta}(n)\big).$$

2. Предварительные сведения и вспомогательные результаты

Разбиения Фибоначчи

Рассмотрим последовательность Штерна—Броко для числа α, т. е. последовательность

$$\omega(\alpha) = 0^{q_1-1}1^{q_2}0^{q_3}1^{q_4}\ldots, \tag{4}$$

где запись x^n означает символ x, повторенный n раз. Пусть $\omega_m(\alpha)$ — m-й член последовательности (4). Определим последовательности $\{E_m(\alpha)\}$, $\{G_m(\alpha)\}$ при помощи рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} E_{m+1}(\alpha) &= E_m(\alpha),\\ G_{m+1}(\alpha) &= G_m(\alpha) + E_m(\alpha), \end{aligned} \quad \text{если} \quad \omega_m(\alpha) = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned} E_{m+1}(\alpha) &= G_m(\alpha) + E_m(\alpha),\\ G_{m+1}(\alpha) &= G_m(\alpha), \end{aligned} \quad \text{если} \quad \omega_m(\alpha) = 1, \tag{6}$$

а также начальных условий $E_0(\alpha) = G_0(\alpha) = 1$. Разбиение Фибоначчи $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ порядка m — это разбиение единичного полуинтервала $[0;1)$ точками $\langle k\alpha\rangle$, где $-E_m(\alpha) < k \leqslant G_m(\alpha)$. Модифицированное разбиение Фибоначчи $\widetilde{\mathrm{CTil}_m}(\alpha)$ порядка m — это разбиение единичного полуинтервала $[0;1)$ точками $\langle k\alpha\rangle$, где $0 \leqslant k < E_m(\alpha) + G_m(\alpha)$.

Предложение 2.1. *Разбиения* $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ *и* $\widetilde{\mathrm{CTil}_m}(\alpha)$ *обладают следующими свойствами*:

1) *разбиение* $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ $(\widetilde{\mathrm{CTil}_m}(\alpha))$ *является подразбиением разбиения* $\mathrm{CTil}_{m-1}(\alpha)$ $(\widetilde{\mathrm{CTil}_{m-1}}(\alpha))$ *для всех* m;
2) *разбиение* $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ $(\widetilde{\mathrm{CTil}_m}(\alpha))$ *содержит интервалы ровно двух различных длин*;
3) *длины интервалов разбиений* $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ *и* $\widetilde{\mathrm{CTil}_m}(\alpha)$ *одного порядка совпадают. Также совпадают количества интервалов одинаковой длины в соответствующих разбиениях*;

4) *каждый интервал разбиения* $\mathrm{CTil}_{m-1}(\alpha)$ $(\widetilde{\mathrm{CTil}_{m-1}(\alpha)})$ *разбивается не более чем на два интервала в разбиении* $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ $(\widetilde{\mathrm{CTil}_m(\alpha)})$.

Доказательство. Утверждения, относящиеся к разбиению $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$, доказаны в [3], а остальные — в [7]. $\square$

Через L^m и S^m мы будем обозначать длинные и короткие интервалы рассматриваемых разбиений. Длины интервалов будут обозначаться $l_m(\alpha)$ и $s_m(\alpha)$, а количества — $L_m(\alpha)$ и $S_m(\alpha)$. Мы также будем использовать обозначения $i_m(\alpha) = l_m(\alpha) + s_m(\alpha)$ и $I_m(\alpha) = L_m(\alpha) + S_m(\alpha)$.

Модифицированные разбиения Фибоначчи $\widetilde{\mathrm{CTil}_m(\alpha)}$ тесно связаны с известной теоремой о трёх длинах (также часто называемой гипотезой Штейнгауза) [13, 15]. Приведём формулировку этой теоремы в терминах разбиений Фибоначчи.

Теорема 2.2. *Пусть* T_N *— разбиение полуинтервала* $[0; 1)$ *точками* $\langle k\alpha\rangle$, $0 \leqslant k < N$. *Тогда*

1) *если* $N = I_m(\alpha)$ *для некоторого* m, *то разбиение* T_N *состоит из интервалов двух различных длин. Соответствующие значения длин равны* $l_m(\alpha)$ *и* $s_m(\alpha)$. *Разбиение* T_N *в этом случае совпадает с модифицированным разбиением Фибоначчи* $\widetilde{\mathrm{CTil}_m(\alpha)}$;
2) *если же* $I_m(\alpha) < N < I_{m+1}(\alpha)$, *то разбиение* T_N *состоит из интервалов трёх различных длин*: $l_m(\alpha)$, $s_m(\alpha)$ *и* $l_m(\alpha) - s_m(\alpha)$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [6].

Количества и длины интервалов разбиений Фибоначчи

Введём некоторые обозначения. Пусть $\alpha_0 = \min\{\alpha, 1-\alpha\}$ и разложение α_0 в цепную дробь имеет вид $\alpha_0 = [0; q'_1, q'_2, \ldots]$, а $\frac{P_i}{Q_i}$ — последовательность подходящих дробей к α_0. Пусть

$$n_i = \begin{cases} q'_1 - 1, & i = 1, \\ q'_i, & i > 1, \end{cases} \qquad m_i = \sum_{j=1}^{i} n_j.$$

Каждое целое неотрицательное число m единственным образом представимо в виде $m = m_i + t$, $0 \leqslant t < n_{i+1}$. Будем кратко записывать такое представление в виде $m = \langle i, t\rangle$.

Предложение 2.3. *Пусть* $m = \langle i, t\rangle$. *Тогда интервалы разбиений Фибоначчи* $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$, $\mathrm{CTil}_{m_i}(\alpha)$ *и* $\mathrm{CTil}_{m_{i-1}}(\alpha)$ *связаны соотношениями*

$$\begin{aligned} S^{m_{i-1}} &= L^{m_i}, \\ L^{m_{i-1}} &= n_i L^{m_i} \cup S^{m_i}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} S^{m_i} &= S^m, \\ L^{m_i} &= tS^m \cup L^m. \end{aligned} \tag{8}$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [4].

Следствие 2.4. *Пусть $m = \langle i, t \rangle$. Тогда справедливы равенства*

$$\begin{aligned} s_{m_i}(\alpha) &= l_{m_{i-1}}(\alpha) - n_i s_{m_{i-1}}(\alpha), \\ l_{m_i}(\alpha) &= s_{m_{i-1}}(\alpha), \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} s_m(\alpha) &= s_{m_i}(\alpha), \\ l_m(\alpha) &= l_{m_i}(\alpha) - t s_{m_i}(\alpha), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} L_{m_i}(\alpha) &= S_{m_{i-1}}(\alpha) + n_i L_{m_{i-1}}(\alpha), \\ S_{m_i}(\alpha) &= L_{m_{i-1}}(\alpha), \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} L_m(\alpha) &= L_{m_i}(\alpha), \\ S_m(\alpha) &= S_{m_i}(\alpha) + t L_{m_i}(\alpha). \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство немедленно вытекает из формул (7), (8).

Следствие 2.5. *Пусть $m = \langle i, t \rangle$. Тогда справедливы равенства*

$$\begin{aligned} L_m(\alpha) &= Q_i, \\ S_m(\alpha) &= Q_{i-1} + t Q_i. \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство. Вначале рассмотрим случай $t = 0$, т. е. $m = m_i$. Из (11) и определения n_i получаем, что $L_{m_0}(\alpha) = 1$, $L_{m_1}(\alpha) = q'_1$ и

$$L_{m_i}(\alpha) = q'_i L_{m_{i-1}}(\alpha) + L_{m_{i-2}}(\alpha) \quad \text{для} \quad i \geqslant 2.$$

Таким образом, рекуррентные формулы для $L_{m_i}(\alpha)$ совпадают с классическими формулами для знаменателей подходящих дробей. Начальные условия также совпадают. Итак, доказано, что $L_{m_i}(\alpha) = Q_i$. Из (11) следует, что $S_{m_i}(\alpha) = Q_{i-1}$, и остаётся воспользоваться формулой (12). □

Предложение 2.6. *Справедливо равенство*

$$i_m(\alpha) = \|S_{m-1}(\alpha)\alpha\|, \tag{14}$$

где $\|\cdot\|$ — расстояние до ближайшего целого числа.

Доказательство можно найти в [5].

Предложение 2.7. *Пусть $m = \langle i, t \rangle$. Тогда справедливо неравенство*

$$I_m(\alpha) l_m(\alpha) < n_{i+1} + 1. \tag{15}$$

Доказательство. Используя (11), выводим, что

$$I_m(\alpha) = L_m(\alpha) + S_m(\alpha) = S_{m_i}(\alpha) + (t+1) L_{m_i}(\alpha) = L_{m_{i-1}}(\alpha) + (t+1) L_{m_i}(\alpha).$$

Используя очевидные неравенства $l_m(\alpha) \leqslant l_{m-1}(\alpha)$ и $L_m(\alpha) l_m(\alpha) < 1$, получаем, что $I_m(\alpha) l_m(\alpha) < t+2$. Так как по определению $t \leqslant n_{i+1} - 1$, отсюда следует требуемое неравенство. □

Остатки на интервалах разбиений Фибоначчи

Рассмотрим величину

$$\mathrm{rm}_m(\alpha) = \sup_{I\colon |I|=i_m(\alpha)} \sup_a \sup_n |r(\alpha, a, n, I)|.$$

Конечность величины $\mathrm{rm}_m(\alpha)$ была доказана в [5]. Там же было доказано следующее предложение.

Предложение 2.8. *Справедливо неравенство*

$$|\mathrm{rm}_{m+k}(\alpha) - \mathrm{rm}_m(\alpha)| \leqslant k. \tag{16}$$

Предложение 2.9. *Пусть $m = \langle i, t\rangle$. Тогда справедливо неравенство*

$$\mathrm{rm}_m(\alpha) \leqslant \begin{cases} 5, & t = 0,\\ 4, & t = 1,\\ 3 + t, & 1 < t \leqslant \frac{n_{i+1}}{2},\\ 4 + t, & \frac{n_{i+1}}{2} < t < n_{i+1}. \end{cases} \tag{17}$$

Доказательство. Из равенств

$$i_m(\alpha) = i_m(1 - \alpha), \quad r(\alpha, a, n, I) = r(1 - \alpha, a, n, I)$$

вытекает, что

$$\mathrm{rm}_m(\alpha) = \mathrm{rm}_m(1 - \alpha).$$

Поэтому достаточно рассмотреть случай $\alpha < \frac{1}{2}$. В этом случае $\alpha_0 = \alpha$ и из равенств (13), (14) следует, что $i_m(\alpha) = \|Q_{i-1}(\alpha)\alpha\|$. Пусть $i_m(\alpha) = \langle Q_{i-1}(\alpha)\alpha\rangle$ (случай $i_m(\alpha) = 1 - \langle Q_{i-1}(\alpha)\alpha\rangle$ рассматривается аналогично). Выберем произвольный интервал $I = (i', i'')$ длины $|I| = i_m(\alpha)$. Тогда $i'' = i' + \langle Q_{i-1}(\alpha)\alpha\rangle$. Рассмотрим функцию

$$\chi_I(x) = \langle x - Q_{i-1}(\alpha)\alpha - i'\rangle - \langle x - i'\rangle + \langle Q_{i-1}(\alpha)\alpha\rangle.$$

Легко проверить, что

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in [i'; i''),\\ 0, & x \notin [i', i''). \end{cases}$$

Тогда

$$N(\alpha, a, n, I) = \sum_{j=1}^{n} \chi_I(\langle j\alpha + a\rangle) + \varepsilon_n = \\ = n|I| + \sum_{j=1}^{n}\langle j\alpha - Q_{i-1}(\alpha)\alpha + a - i'\rangle - \sum_{j=1}^{n}\langle j\alpha + a - i'\rangle + \varepsilon_n,$$

где $|\varepsilon_n| \leqslant 1$. Отсюда следует, что

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant \sum_{j=1-Q_{i-1}(\alpha)}^{0} \langle j\alpha + a - i'\rangle + \sum_{j=n-Q_{i-1}(\alpha)+1}^{n} \langle j\alpha + a - i'\rangle + 1.$$

Вводя обозначения

$$\alpha' = \langle -Q_{i-1}(\alpha)\alpha + a - i' \rangle, \quad \alpha'' = \big\langle a - i' + \big(n - Q_{i-1}(\alpha)\big)\alpha \big\rangle,$$

получаем, что

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant \sum_{j=1}^{Q_{i-1}(\alpha)} \langle j\alpha + \alpha' \rangle + \sum_{j=1}^{Q_{i-1}(\alpha)} \langle j\alpha + \alpha'' \rangle + 1.$$

Далее воспользуемся следующей оценкой из [8]:

$$\sum_{j=1}^{Q_{i-1}(\alpha)} \langle j\alpha + \gamma \rangle \leqslant \frac{3}{2}.$$

Итак, в случае $t = 1$ утверждение доказано. Для доказательства при $t \neq 1$ необходимо к полученной для $t = 1$ оценке применить неравенство (16). $\square$

Следствие 2.10. *Пусть $m = \langle i, t \rangle$. Тогда справедливо неравенство*

$$\mathrm{rm}_m(\alpha) \leqslant 5 + \frac{n_{i+1}}{2}. \tag{18}$$

Доказательство немедленно вытекает из (17).

Предложение 2.11. *Пусть $m = \langle i, t \rangle$ и I — интервал разбиения Фибоначчи $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ ($\widetilde{\mathrm{CTil}_m}(\alpha)$). Тогда справедливо неравенство*

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant 6 + \frac{n_{i+1}}{2}. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть I — длинный интервал разбиения Фибоначчи. Воспользуемся легко проверяемым равенством $l_m(\alpha) = i_{m+1}(\alpha)$. Используя (17) и (18), получаем, что

$$\begin{aligned} &r(\alpha, a, n, I) \leqslant 6 + \frac{n_{i+1}}{2}, && \text{если} \quad t \neq n_{i+1} - 1, \\ &r(\alpha, a, n, I) \leqslant 5, && \text{если} \quad t = n_{i+1} - 1. \end{aligned}$$

В обоих случаях неравенство (19) выполнено. Пусть теперь I — короткий интервал разбиения Фибоначчи. Тогда ввиду (9)

$$s_m(\alpha) = s_{m_i}(\alpha) = l_{m_{i-1}}(\alpha) = i_{m_{i-1}}(\alpha) + 1,$$

и, используя (17), находим, что $r(\alpha, a, n, I) \leqslant 4$. $\square$

3. Основной результат

Теорема 3.1. *Пусть*

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \psi(n) = \left[\log_\tau \left(\sqrt{5}n + \sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)\right] + 1.$$

Тогда

$$r(\alpha,a,n,I)\leqslant\frac{1}{2}\Bigl(\max_{1\leqslant j\leqslant\psi(\tilde a(n))+2}q_j+15\Bigr)(a_{\alpha\beta}(n)+1),\tag{20}$$

где

$$\tilde a(n)=A_{\alpha\beta}\bigl(a_{\alpha\beta}(n)\bigr).\tag{21}$$

Доказательство. Рассмотрим интервалы вида $\tilde I_k^{\mathrm{app}}=(0;\langle A_{\alpha\beta}(k)\rangle)$. Отметим, что для $k=0$ и $\beta\leqslant\frac12$ вместо интервала $\tilde I_0^{\mathrm{app}}$ мы получаем пустое множество. Тем не менее и в этом случае мы будем считать, что формальная запись $\tilde I_0^{\mathrm{app}}=(0;0)$ означает интервал модифицированного разбиения Фибоначчи $\mathrm{CTil}_0(\alpha)$ и $r(\alpha,a,n,\tilde I_0^{\mathrm{app}})=0$ для всех α, a, n. Аналогично для $k=0$ и $\beta>\frac12$ интервал $\tilde I_0^{\mathrm{app}}=(0;1)$ есть интервал разбиения $\mathrm{CTil}_0(\alpha)$ и вновь $r(\alpha,a,n,\tilde I_0^{\mathrm{app}})=0$. Пусть

$$M_\alpha(n)=\max\{k\colon I_k(\alpha)\leqslant n\},\tag{22}$$

$$b_k=M_\alpha\bigl(A_{\alpha\beta}(k)\bigr)+1.\tag{23}$$

Для пары интервалов $X=(x;y)$ и $Y=(y;z)$, где $x<y<z$, через $X\oplus Y$ обозначим интервал $(x;z)$. Для пары интервалов $X=(x;y)$ и $Y=(z;y)$, где $x<z<y$, через $X\ominus Y$ обозначим интервал $(x;z)$.

Покажем, что для интервала $\tilde I_k^{\mathrm{app}}$ существуют $k+1$ интервалов $J_0,\ldots,J_k$, такие что J_i есть интервал разбиения $\mathrm{CTil}_{b_i}(\alpha)$, а интервал $\tilde I_k^{\mathrm{app}}$ получается из интервалов $J_0,\ldots,J_k$ при помощи k операций $\oplus$ и $\ominus$. Доказательство проведём индукцией по k. Для $k=0$ утверждение очевидно. Предположим, что оно доказано для $k=m$, и докажем его для $k=m+1$. Из (22), (23) и определения разбиений $\mathrm{CTil}_m(\alpha)$ следует, что точка $\langle A_{\alpha\beta}(m+1)\alpha\rangle$ впервые появляется в разбиении $\mathrm{CTil}_{b_{m+1}}(\alpha)$. Обозначим через X интервал разбиения $\mathrm{CTil}_{b_{m+1}-1}(\alpha)$, содержащий эту точку. Интервал X делится в разбиении $\mathrm{CTil}_{b_{m+1}}(\alpha)$ на два интервала $X=Y\oplus Z$, причём точка $\langle A_{\alpha\beta}(m+1)\alpha\rangle$ является граничной точкой интервалов Y и Z. Заметим, что $\langle A_{\alpha\beta}(m)\alpha\rangle$ — граничная точка интервала X. Возможны два случая. Если $\langle A_{\alpha\beta}(m)\alpha\rangle$ — левая граница интервала X, то получаем $\tilde I_{m+1}^{\mathrm{app}}=\tilde I_m^{\mathrm{app}}\oplus Y$. Если же $\langle A_{\alpha\beta}(m)\alpha\rangle$ — правая граница интервала X, то $\tilde I_{m+1}^{\mathrm{app}}=\tilde I_m^{\mathrm{app}}\ominus Z$. Далее, используя предположение индукции, получаем требуемое утверждение.

Отметим, что операции $\oplus$ и $\ominus$ обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned}r(\alpha,a,n,X\oplus Y)&\leqslant r(\alpha,a,n,X)+r(\alpha,a,n,Y)+1,\\ r(\alpha,a,n,X\ominus Y)&\leqslant r(\alpha,a,n,X)+r(\alpha,a,n,Y)+1.\end{aligned}\tag{24}$$

Введём функцию

$$p(n)=\max\{k\colon m_k\leqslant n\}.$$

Тогда формула (19) перепишется в виде

$$r(\alpha,a,n,I)\leqslant 6+\frac{n_{p(n)+1}}{2},\tag{25}$$

где I — интервал разбиения $\widetilde{\mathrm{CTil}_m(\alpha)}$. Из (24), (25) и описанного выше разложения интервала $\tilde{I}_k^{\mathrm{app}}$ на интервалы разбиений Фибоначчи выводим, что

$$r(\alpha, a, n, \tilde{I}_k^{\mathrm{app}}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} r(\alpha, a, n, J_j) + k - 1 \leqslant \sum_{j=1}^{k} \Big(6 + \frac{n_{p(b_j)+1}}{2}\Big) + k - 1.$$

Пусть теперь $I = (0; \beta)$. Заметим, что

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant n\big||I| - |\tilde{I}_k^{\mathrm{app}}|\big| + r(\alpha, a, n, \tilde{I}_k^{\mathrm{app}}) + 1.$$

Точка β принадлежит некоторому интервалу разбиения $\widetilde{\mathrm{CTil}_{b_k}(\alpha)}$. Следовательно,

$$\big||I| - |\tilde{I}_k^{\mathrm{app}}|\big| \leqslant \frac{l_{b_k}(\alpha)}{2}.$$

Записывая (15) в виде

$$I_m(\alpha) l_m(\alpha) < n_{p(m)+1} + 1$$

и учитывая вытекающее из определений неравенство $A_{\alpha\beta}(k) < I_{b_k}(\alpha)$, получаем, что для любого $n < A_{\alpha\beta}(k)$ справедливо неравенство

$$r(\alpha, a, n, I) < \frac{1}{2}(1 + n_{p(b_k)+1}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} n_{p(b_j)+1} + 7k.$$

Отсюда следует, что

$$r(\alpha, a, n, I) < \frac{1}{2} + \frac{k+1}{2} \max_{1 \leqslant j \leqslant p(b_k)+1} n_j + 7k$$

и

$$r(\alpha, a, n, I) < \frac{1}{2}(k+1)\Big(\max_{1 \leqslant j \leqslant p(b_k)+1} n_j + 14\Big). \tag{26}$$

Рассмотрим теперь произвольное n и выберем $k = a_{\alpha\beta}(n)$. Так как $n < A_{\alpha\beta}\big(a_{\alpha\beta}(n)\big)$, то можно применить неравенство (26). Получаем

$$r(\alpha, a, n, I) < \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}(n) + 1)\Big(\max_{1 \leqslant j \leqslant p(b_{a_{\alpha\beta}(n)})+1} n_j + 14\Big). \tag{27}$$

Оценим теперь $p(b_k)$. Согласно определению (22) $b_k = M_\alpha\big(A_{\alpha\beta}(k)\big) + 1$. В [7] была доказана оценка

$$M_\alpha(n) \leqslant \sum_{j=1}^{\psi(n)} n_j = m_{\psi(n)}. \tag{28}$$

Учитывая, что $p(m_k) = k$, получаем, что $p(m_k + 1) \leqslant k + 1$ и

$$p(b_k) \leqslant \psi\big(A_{\alpha\beta}(k)\big) + 1.$$

Подставляя (28) в (27), с учётом определения (21) находим, что

$$r(\alpha, a, n, I) < \frac{1}{2}(a_{\alpha\beta}(n) + 1)\Big(\max_{1 \leqslant j \leqslant \psi(\tilde{a}(n))+1} n_j + 14\Big). \tag{29}$$

Пусть теперь $I = (i', i'')$ — произвольный интервал длины β. Заметим, что $\langle a' + n\alpha \rangle \in I$ тогда и только тогда, когда $\langle a' + n\alpha - i' \rangle \in (0; \beta)$. Поэтому, применяя оценку (29) для интервала $(0; \beta)$ и $a = a' - i'$, получаем, что неравенство (29) справедливо для произвольного интервала I длины β.

Для завершения доказательства остаётся показать, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant k} n_j \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant k+1} q_j + 1. \tag{30}$$

Для $\alpha < \frac{1}{2}$ (30) сразу следует из определения чисел n_j. Если же $\alpha > \frac{1}{2}$, то неполные частные для α и $\alpha_0 = 1 - \alpha$ связаны соотношениями

$$q_1 = 1, \quad q_2 = q'_1 - 1, \quad q_k = q'_{k-1} \ \text{ для } \ k > 2,$$

из которых и следует требуемое соотношение. □

Следствие 3.2. *Пусть неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены, $K(\alpha) = \max_i q_i(\alpha)$ и $|I| = \beta$. Тогда справедливо неравенство*

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant \frac{1}{2}(K(\alpha) + 15)(a_{\alpha\beta}(n) + 1). \tag{31}$$

Доказательство немедленно вытекает из утверждения теоремы 3.1 и определения $K(\alpha)$.

Заметим теперь, что доказанная в теореме 3.1 оценка может быть применена и к решению задач о неоднородных диофантовых приближениях. Приведём один пример.

Предложение 3.3. *Пусть неполные частные разложения α в цепную дробь ограничены и $K(\alpha) = \max_i q_i(\alpha)$. Тогда для почти всех β*

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{a_{\alpha\beta}(n)}{\ln n} > 0.$$

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться оценкой (31) из следствия 3.2 и упоминавшейся во введении теоремой В. Т. Шош (3). □

4. Альтернативные варианты основной теоремы

Пусть $\{t'_m\}$ и $\{t''_m\}$ — две последовательности целых чисел, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\{t'_m\}$ не возрастает;
2) $\{t''_m\}$ не убывает;
3) $t'_m < t''_m$ для всех m;
4) $t_m = t''_m - t'_m \to \infty$ при $m \to \infty$.

Пусть T_m — разбиение полуинтервала $[0; 1)$, образованное при помощи точек $\langle k\alpha \rangle$, $t'_m \leqslant k \leqslant t''_m$. Последовательность разбиений $\{T_m\}$ назовём согласованной, если выполняются два условия:

1) разбиение T_{m+1} есть подразбиение разбиения T_m;
2) каждый интервал разбиения T_m делится в разбиении T_{m+1} не более чем на два интервала.

Введём ряд обозначений:

$$d_{\alpha\beta}^{T,0}(m) = \min\{\|k\alpha - \beta\| \colon t'_m \leqslant k \leqslant t''_m\},$$
$$d_{\alpha\beta}^{T,-}(m) = \min\{\|k\alpha - \beta\| \colon t'_m \leqslant k \leqslant t''_m,\ \langle k\alpha\rangle < \beta\},$$
$$d_{\alpha\beta}^{T,+}(m) = \min\{\|k\alpha - \beta\| \colon t'_m \leqslant k \leqslant t''_m,\ \langle k\alpha\rangle > \beta\},$$
$$B_{\alpha\beta}^{T,*}(m) = \bigl\{k \colon \|k\alpha - \beta\| = d_{\alpha\beta}^{T,*}(m)\bigr\},$$

$\bigl\{A_{\alpha\beta}^{T,*}(m)\bigr\}$ — последовательность различных чисел из $\bigl\{B_{\alpha\beta}^{T,*}(m)\bigr\}$, занумерованных в порядке возрастания,

$$b_{\alpha\beta}^{T,*}(m) = \min\bigl\{k \colon B_{\alpha\beta}^{T,*}(k) = A_{\alpha\beta}^{T,*}(m)\bigr\},$$
$$a_{\alpha\beta}^{T,*}(m) = \min\bigl\{k \colon A_{\alpha\beta}^{T,*}(k) > m\bigr\}.$$

Здесь и далее $*$ означает один из символов $+$, $-$, 0.

Отметим, что $\bigl\{A_{\alpha\beta}^{T,0}(n)\bigr\}$ — последовательность наилучших приближений к β при помощи точек из разбиений $\{T_m\}$. Аналогично $\bigl\{A_{\alpha\beta}^{T,-}(n)\bigr\}$ и $\bigl\{A_{\alpha\beta}^{T,+}(n)\bigr\}$ — последовательности наилучших односторонних приближений к β при помощи точек из разбиений $\{T_m\}$. Величины $a_{\alpha\beta}^{T,*}(n)$ отражают скорость аппроксимации β при помощи разбиений $\{T_m\}$.

Теорема 4.1. *Пусть $|I| = \beta$ и $\{T_m\}$ — согласованная последовательность разбиений. Тогда справедливо неравенство*

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant \bigl(a_{\alpha\beta}^{T,*}(m) + 1\bigr)\Bigl(\max_{1\leqslant j\leqslant 2+\psi(\tilde a'(n))} q_j + 9\Bigr),$$

где

$$\tilde a'(n) = A_{\alpha\beta}^{T,*}\bigl(a_{\alpha\beta}^{T,*}(n+1)\bigr).$$

Доказательство теоремы 4.1 в целом похоже на доказательство теоремы 3.1. Поэтому мы изложим только общую схему и укажем основные отличия от предыдущего случая.

Вначале рассмотрим интервал $\tilde I_k^{\mathrm{app}} = \bigl(0; \bigl\langle A_{\alpha\beta}^{T,*}(k)\alpha\bigr\rangle\bigr)$. Вновь доказывается, что существуют интервалы $J_0, \ldots, J_k$, такие что J_i есть интервал разбиения $T_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(i)}$ и интервал $\tilde I_k^{\mathrm{app}}$ может быть получен из $J_0, \ldots, J_k$ при помощи k операций $\oplus$ и $\ominus$. Более того, для аппроксимаций вида $A_{\alpha\beta}^{T,-}(k)$ можно обойтись только операциями $\oplus$, а для аппроксимаций вида $A_{\alpha\beta}^{T,+}(k)$ — только операциями $\ominus$.

Далее нужно заметить, что если I — интервал разбиения T_m, то

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant 7 + \frac{n_{M_\alpha(t_m)} + 1}{2}.$$

Действительно, из теоремы 2.2 вытекает, что длина интервала I равна одному из чисел $l_{M_\alpha(t_m)}(\alpha)$, $s_{M_\alpha(t_m)}(\alpha)$, $l_{M_\alpha(t_m)}(\alpha) - s_{M_\alpha(t_m)}(\alpha)$. В первых двух случаях требуемый результат сразу следует из предложения 2.11. В последнем случае нужно сначала заметить, что $l_m(\alpha) - s_m(\alpha)$ равно либо $l_{m+1}(\alpha)$, либо $s_{m+1}(\alpha)$ для всех m, и затем воспользоваться предложением 2.11. Таким образом,

$$r(\alpha, a, n, \tilde{I}_k^{\mathrm{app}}) \leqslant \sum_{j=1}^{k} \left(7 + \frac{n_{p(M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(j)}))+1}}{2}\right) + k - 1.$$

При $n < A_{\alpha\beta}^{T,*}(k)$ имеем

$$\begin{aligned} n\big||I| - |\tilde{I}_k^{\mathrm{app}}|\big| &< A_{\alpha\beta}^{T,*}(k)\frac{l_{M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)})}(\alpha)}{2} \leqslant t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)}\frac{l_{M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)})}(\alpha)}{2} \leqslant \\ &\leqslant I_{1+M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)})}(\alpha)\frac{l_{M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)})}(\alpha)}{2} \leqslant I_{M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)})}(\alpha) l_{M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)})}(\alpha) \leqslant \\ &\leqslant 1 + n_{p(M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)}))+1}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при $n < A_{\alpha\beta}^{T,*}(k)$

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant n_{p(M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)}))+1} + \sum_{j=1}^{k} n_{p(M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(j)}))+1} + 8k + 1$$

и

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant (k+1)\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant p(M_\alpha(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)}))+1} n_j + 8\right).$$

Используя оценку (28) для $M_\alpha(n)$, получаем, что

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant (k+1)\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant 1+\psi(t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)})} n_j + 8\right).$$

После этого остаётся заметить, что $t_{b_{\alpha\beta}^{T,*}(k)} \leqslant A_{\alpha\beta}^{T,*}(k+1)$, и повторить без изменений оставшиеся рассуждения из доказательства теоремы 3.1.

В некоторых случаях теорема 4.1 допускает существенные улучшения. Приведём один пример.

Теорема 4.2. *Пусть в условиях теоремы* 4.1 $T_m = \mathrm{CTil}_m(\alpha)$ *для всех* m. *Тогда справедливо неравенство*

$$r(\alpha, a, n, I) \leqslant 5a_{\alpha\beta}^{T,-}(n) + \frac{1}{2}. \tag{32}$$

Доказательство следует той же схеме, что и ранее. Отметим основные отличия.

1. Все интервалы $J_1, \ldots, J_k$ из разложения интервала $\tilde{I}_k^{\mathrm{app}}$ являются *короткими* в соответствующих разбиениях $\mathrm{CTil}_{b_{\alpha\beta}^{T,-}(k)}(\alpha)$. Поэтому $r(\alpha, a, n, J_k) \leqslant 4$ для всех k (см. доказательство предложения 2.11) и $r(\alpha, a, n, \tilde{I}_k^{\mathrm{app}} \leqslant 5k - 1$.

2. Справедлива оценка

$$\big||I| - |\tilde{I}_k^{\mathrm{app}}|\big| < \frac{s_{b_{\alpha\beta}^{T,-}(k)}(\alpha)}{2}.$$

Отсюда следует, что при $n < A_{\alpha\beta}^{T,-}(k)$ выполняется неравенство

$$n\big||I| - |\tilde{I}_k^{\mathrm{app}}|\big| < \frac{1}{2}.$$

В итоге получаем, что $r(\alpha, a, n, I) \leqslant 5k + \frac{1}{2}$, и применяем это неравенство для $k = a_{\alpha\beta}^{T,-}(n)$.

Литература

[1] Вейль Г. О равномерном распределении чисел по модулю 1 // Вейль Г. Избранные труды. — М.: Наука, 1984. — С. 58—93.

[2] Кейперс Л., Нидеррейтер Г. Равномерное распределение последовательностей. — М.: Мир, 1985.

[3] Мануйлов Н. Н., Шутов А. В. Глобальный порядок разбиения окружности // Сборник научных статей участников 5-й Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных, аспирантов и студентов «Молодёжь. Образование. Экономика», 4 мая 2004 г. — Ярославль: Ремдер, 2004. — С. 314—320.

[4] Шутов А. В. Производные поворотов окружности и подобие орбит // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2004. — Т. 314. — С. 272—284.

[5] Шутов А. В. О распределении дробных долей. II // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 3. — Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2005. — С. 146—158.

[6] Шутов А. В. Теорема о трёх длинах // Сборник трудов молодых ученых Владимирского государственного педагогического университета. Вып. 5. — Владимир: Нерль, 2005. — С. 156.

[7] Шутов А. В. Системы счисления и множества ограниченного остатка // Чебышёвский сб. — 2006. — Т. 7, вып. 3. — С. 110—128.

[8] Шутов А. В. О минимальных системах счисления // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 4. — Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2007. — С. 125—138.

[9] Adamczewski B. Repartition des suites $(n\alpha)_{n\in\mathbb{N}}$ et substitutions // Acta Arith. — 2004. — Vol. 112. — P. 1—22.

[10] Drmota M., Tichy R. F. Sequences, Discrepancies and Applications. — Berlin: Springer, 1997.

[11] Hecke E. Eber analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod. eins // Math. Sem. Hamburg Univ. — 1921. — Bd. 5. — S. 54—76.

[12] Kesten H. On a conjecture of Erdős and Szüsz related to uniform distribution mod 1 // Acta Arith. — 1966. — Vol. 12. — P. 193—212.

[13] Mukherjee M. On «three-gap theorem» in $[0;1]$: Preprint of Virginia Tech. Center for Mathematical Physics. — 1994.

[14] Pinner C. G. On sums of fractional parts $\{n\alpha + \gamma\}$ // J. Number Theory. — 1997. — Vol. 65. — P. 48—73.

[15] Slater N. B. Gaps and steps for the sequence $n\theta \bmod 1$ // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1967. — Vol. 63. — P. 1115—1123.

[16] Sós V. T. On strong irregularities of the distribution of $\{n\alpha\}$ sequences // Studies in Pure Mathematics. To the Memory of Paul Turán / L. Alpar, G. Halasz, A. Sarközy, eds. — Basel: Birkhäuser, 1983. — P. 685—700.