Гомоморфизмы, близкие к регулярным, и их приложения

А. Н. АБЫЗОВ
Казанский государственный университет
e-mail: Adel.Abyzov@ksu.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: частично обратимый гомоморфизм, I_0-модуль, вполне идемпотентный модуль, регулярный модуль, V-модуль.

Аннотация

Данная работа содержит как известные, так и новые результаты о гомоморфизмах, близких к регулярным. Основные результаты приведены с доказательствами.

Abstract

A. N. Abyzov, A. A. Tuganbaev, Homomorphisms close to regular and their applications, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 7, pp. 3—38.

This paper contains new and known results on homomorphisms, which are close to regular. The main results are presented with proofs.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Подмодуль X модуля M называется *косущественным* (*малым*) *в* M, если $X + Y \neq M$ для любого собственного подмодуля Y модуля M. Пересечение всех максимальных подмодулей модуля M обозначается через $J(M)$ и называется *радикалом Джекобсона* модуля M. Через $E(M)$ обозначается инъективная оболочка модуля M. Кольцо A называется *регулярным* (по фон Нейману), если $a \in aAa$ для любого элемента $a \in A$. Подмодуль N модуля M называется *существенным*, если для любого подмодуля X модуля M равенство $X \cap N = 0$ влечёт равенство $X = 0$. В этом случае также говорят, что M — *существенное расширение* модуля N. Модуль, изоморфный подмодулю гомоморфного образа прямых сумм копий модуля M, называется M-*подпорождённым* модулем. Полная подкатегория всех правых R-модулей, состоящая из всех M-подпорождённых модулей, обозначается через $\sigma(M)$ и называется *категорией Висбауэра* модуля M.

В разделе 1 рассмотрены основные свойства радикала Джекобсона категории модулей. В разделах 2 и 3 изучаются частично обратимые гомоморфизмы и их

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 7, с. 3—38.

приложения к I_0-модулям. Ряд свойств полупримитивных I_0-колец изложены в разделе 4. В разделах 5 и 6 изучаются вполне идемпотентные гомоморфизмы и их приложения к вполне идемпотентным модулям и кольцам. В разделе 7 рассматриваются V-модули и их связи с вполне идемпотентными модулями и кольцами. В разделе 8 изучаются регулярные гомоморфизмы и их приложения.

Будем придерживаться следующих обозначений. Пусть M — произвольный правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(M)$. Через M^* будем обозначать левый R-модуль $\mathrm{Hom}_R(M, R_R)$. Если $f \in M^*$, $m \in M$, то положим $(f, m) = f(m)$, через $[m, f]$ обозначим эндоморфизм модуля M, при котором $[m, f](n) = mf(n)$ для каждого $n \in M$. Через Δ будем обозначать образ S-S-гомоморфизма из $M \otimes_R M^*$ в S, который действует по правилу $m \otimes f \mapsto [m, f]$.

1. Радикал Джекобсона

Лемма 1.1. *Если $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ и $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, то $1_M - gf$ обратим в $\mathrm{End}(M)$ тогда и только тогда, когда $1_N - fg$ обратим в $\mathrm{End}(N)$.*

Доказательство. Если $1_M - gf$ обратим в $\mathrm{End}(M)$, то непосредственная проверка показывает, что $(1_N - fg)^{-1} = 1_N + f(1_M - gf)^{-1}g$. Аналогично если $1_N - fg$ обратим в $\mathrm{End}(N)$, то $(1_M - gf)^{-1} = 1_M + g(1_N - fg)^{-1}f$. □

Радикалом Джекобсона $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ называется множество вида

$$J\bigl(\mathrm{Hom}_R(M, N)\bigr) := \bigl\{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid \text{для всех } g \in \mathrm{Hom}_R(N, M) \text{ справедливо } 1_M - gf \in U\bigl(\mathrm{End}(M)\bigr)\bigr\}.$$

Из предыдущей леммы непосредственно следует, что имеют место равенства

$$\begin{aligned} J\bigl(\mathrm{Hom}_R(M, N)\bigr) &= \\ &= \bigl\{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid \\ &\text{для всех } g \in \mathrm{Hom}_R(N, M) \text{ справедливо } 1_N - fg \in U\bigl(\mathrm{End}(N)\bigr)\bigr\} = \\ &= \bigl\{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid \\ &\text{для всех } g \in \mathrm{Hom}_R(N, M) \text{ справедливо } gf \in J\bigl(\mathrm{End}(M)\bigr)\bigr\} = \\ &= \bigl\{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid \\ &\text{для всех } g \in \mathrm{Hom}_R(N, M) \text{ справедливо } fg \in J\bigl(\mathrm{End}(N)\bigr)\bigr\}. \end{aligned}$$

Лемма 1.2. *Если A, B, C, D — правые R-модули, то*

$$\mathrm{Hom}(B, D) J\bigl(\mathrm{Hom}(A, B)\bigr) \mathrm{Hom}(C, A) \subset J\bigl(\mathrm{Hom}(C, D)\bigr).$$

Доказательство. Пусть $f \in J\bigl(\mathrm{Hom}(A, B)\bigr)$, $g \in \mathrm{Hom}(C, A)$, $h \in \mathrm{Hom}(B, D)$. Для произвольного элемента $s \in \mathrm{Hom}(D, C)$ выполнено условие $1_A - (gsh)f \in U_A$. Тогда согласно лемме 1.1 $1_D - (hfg)s \in U_D$, и следовательно, $hfg \in J\bigl(\mathrm{Hom}(C, D)\bigr)$. □

Теорема 1.3 [8, с. 421]. *Пусть* $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ *и* $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$, $\pi_i \colon A \to A_i$, $\pi'_j \colon B \to B_j$ — *канонические проекции,* $\varepsilon_i \colon A_i \to A$, $\varepsilon'_j \colon B_j \to B$ — *канонические вложения. Тогда имеют место следующие утверждения*:

1) $J\big(\mathrm{Hom}(A,B)\big) = \Big(J\big(\mathrm{Hom}(A_i,B_j)\big)\Big)$;

2) $J\big(\mathrm{Hom}(A_i,B_j)\big) = \pi'_j J\big(\mathrm{Hom}(A,B)\big)\varepsilon_i$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Рассмотрим произвольный элемент $f = (f_{ij})$ из $J\big(\mathrm{Hom}(A,B)\big)$. Тогда из равенства $f_{ij} = \pi'_i f \varepsilon_j$ и предыдущей леммы следует, что

$$f \in \Big(J\big(\mathrm{Hom}(A_i,B_j)\big)\Big).$$

Следовательно,

$$J\big(\mathrm{Hom}(A,B)\big) \subset \Big(J\big(\mathrm{Hom}(A_i,B_j)\big)\Big).$$

Пусть

$$f = (f_{ij}) \in \Big(J\big(\mathrm{Hom}(A_i,B_j)\big)\Big).$$

Тогда из предыдущей леммы следует, что

$$f = \left(\sum_{i=1}^{m} \varepsilon'_i \pi'_i\right) f \left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \pi_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \varepsilon'_j f_{ji} \pi_i \in J\big(\mathrm{Hom}(A,B)\big).$$

Таким образом, $\Big(J\big(\mathrm{Hom}(A_i,B_j)\big)\Big) \subset J\big(\mathrm{Hom}(A,B)\big)$.

Второе утверждение непосредственно следует из леммы 1.2. □

Пусть e, f — идемпотенты кольца R. Ввиду канонического изоморфизма

$$\mathrm{Hom}(fR, eR) \cong eRf$$

будем считать, что

$$\begin{aligned} J(eRf) &= \{r \in eRf \mid \text{для всех } s \in fRe \text{ справедливо } e - rs \in U(eRe)\} = \\ &= \{r \in eRf \mid \text{для всех } s \in fRe \text{ справедливо } f - sr \in U(fRf)\}. \end{aligned}$$

В [42] равенство $J(eRf) = eJ(R)f$ было доказано в случае I_0-колец и в случае, когда $ef = 0$. Ниже мы докажем это равенство в общем случае.

Теорема 1.4. *Пусть* e, f — *идемпотенты кольца* R. *Тогда* $J(eRf) = eJ(R)f$.

Доказательство. Поскольку $eJ(R)ffRe \subset J(eRe) = J(eRe)$, то $eJ(R)f \subset J(eRf)$. Покажем, что $J(eRf) \subset eJ(R)f$. Пусть $erf \in J(eRf)$ и s — произвольный элемент из кольца R. Существует такой элемент $ete \in eRe$, что

$$e = (e - erfse)ete = ete(e - erfse).$$

Имеем равенства

$$\begin{aligned} (1 + seterf)(1 - serf) &= 1 + seterf - serf - seterfserf = \\ &= 1 + se(ete - e - eterfse)erf = 1 + se(ete(e - erfse) - e)erf = 1. \end{aligned}$$

Аналогично $(1 - serf)(1 + seterf) = 1$. Таким образом, $erf \in J(R)$. Поэтому $erf \in eJ(R)f$. □

Пусть

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Положим

$$\begin{aligned} J_K({}_R M_S) &= \{m \in M \mid \text{ для всех } n \in N \text{ справедливо } 1_R - mn \in U(R)\} = \\ &= \{m \in M \mid \text{ для всех } n \in N \text{ справедливо } 1_S - nm \in U(S)\}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} J_K({}_S N_R) &= \{n \in N \mid \text{ для всех } m \in M \text{ справедливо } 1_R - mn \in U(R)\} = \\ &= \{n \in N \mid \text{ для всех } m \in M \text{ справедливо } 1_S - nm \in U(S)\}. \end{aligned}$$

Из предыдущих результатов непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 1.5. *Пусть*

$$K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} -$$

кольцо формальных матриц. Тогда имеют место следующие утверждения:

1)
$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J_K({}_R M_S) \\ J_K({}_S N_R) & J(S) \end{pmatrix};$$

2) *если* $MN = 0$, *то*
$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & M \\ N & J(S) \end{pmatrix}.$$

Понятие радикала Джекобсона для произвольных аддитивных категорий было введено в работе [33]. Это понятие также находит применение в теории представлений (см., например, [8, 9, 45]).

2. Частично обратимые гомоморфизмы

Теорема 2.1 [31]. *Пусть* M, N — *правые* R-*модули. Тогда для гомоморфизма* $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ *следующие условия равносильны*:

1) *существует такой гомоморфизм* $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, *что* $e = gf = e^2 \neq 0$;
2) *существует такой гомоморфизм* $h \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, *что* $d = fh = d^2 \neq 0$;
3) *существует такой гомоморфизм* $k \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, *что* $k = kfk \neq 0$;
4) *существуют такие ненулевые прямые слагаемые* A *и* B *модуля* M *и модуля* N *соответственно, что* f *индуцирует изоморфизм между* A *и* B.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Определим $d = feg$. Тогда $d^2 = fegfeg = feg = d$. Поскольку $gdf = gfegf = e \neq 0$, то $d \neq 0$, и в качестве h можно взять элемент eg.

Проверим справедливость импликации 2) $\Longrightarrow$ 3). Поскольку $hfhfhfh = hfh$ и $f(hfh) = fh \neq 0$, то в качестве k можно взять элемент hfh.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Поскольку $kf = kfkf$ и $kf \neq 0$, то в качестве g можно взять элемент k.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 4). Пусть $d = feg$. Поскольку $d^2 = d$, то $N = dN \oplus (1-d)N$. Тогда $feM = fgfgfM = dfM \subset dN$, $gdN = gfegN = egN \subset eM$ и для каждых элементов $m \in M$ и $n \in N$ имеем $gf(em) = em$, $fg(dn) = fgfegn = dn$. Следовательно, f индуцирует изоморфизм между eM и dN.

Убедимся в справедливости импликации 4) $\Longrightarrow$ 3). Пусть φ — изоморфизм между A и B, индуцированный гомоморфизмом f. Согласно условию $M = A \oplus A'$ и $N = B \oplus B'$, где A' — подмодуль модуля M и B' — подмодуль модуля N. В матричной форме гомоморфизм f относительно этих разложений имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varphi & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Тогда в качестве k можно взять гомоморфизм

$$\begin{pmatrix} \varphi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$, удовлетворяющий одному из условий предыдущей теоремы, называется *частично обратимым*.

Следствие 2.2. *Для элемента r кольца R следующие условия равносильны*:

1) *существует такой элемент $s \in R$, что $e = sr = e^2 \neq 0$;*
2) *существует такой элемент $s \in R$, что $e = rs = e^2 \neq 0$;*
3) *существует такой элемент $h \in R$, что $h = hrh \neq 0$;*
4) *существуют такие ненулевые правые идеалы A и B кольца R, являющиеся прямыми слагаемыми в R_R, что отображение $A \ni a \mapsto ra \in B$ является изоморфизмом.*

Кольцо R называется I_0-*кольцом*, если для каждого элемента $r \in R$, который не лежит в $J(R)$, найдётся такой ненулевой элемент s, что $s = srs$.

Следствие 2.3. *Для элемента m правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

1) *существует такой ненулевой элемент $f \in M^*$, что $f = f(m)f$;*
2) *циклический подмодуль mR содержит ненулевое проективное прямое слагаемое модуля M.*

Лемма 2.4. *Пусть $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$, $g \in \mathrm{Hom}_R(C, A)$ и $h \in \mathrm{Hom}_R(B, D)$. Если элемент hfg частично обратим, то элемент f также частично обратим.*

Доказательство. Согласно теореме 2.1 для некоторого $t \in \mathrm{Hom}(D, C)$ имеем $thfgt = t \neq 0$. Тогда $(gth)f(gth) = gth$. При этом несложно заметить, что $gth \neq 0$. □

Лемма 2.5. *Пусть A, B — правые R-модули. Имеют место следующие утверждения*:

1) *если* $\mathrm{End}(B)$ *является* I_0*-кольцом, то каждый элемент из*
$$\mathrm{Hom}(A, B) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(A, B)\big)$$
частично обратим;
2) *если* $\mathrm{End}(A)$ *является* I_0*-кольцом, то каждый элемент из*
$$\mathrm{Hom}(A, B) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(A, B)\big)$$
частично обратим.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть
$$f \in \mathrm{Hom}(A, B) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(A, B)\big).$$
Тогда для некоторого элемента $g \in \mathrm{Hom}(B, A)$ имеем $fg \in \mathrm{End}(B) \setminus J\big(\mathrm{End}(B)\big)$. Следовательно, согласно условию элемент fg частично обратим, и из леммы 2.4 следует, что элемент f также частично обратим.

Второе утверждение доказывается аналогично. □

Теорема 2.6 [55]. *Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *каждый элемент из* $\mathrm{Hom}(A, B) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(A, B)\big)$ *частично обратим*;
2) *каждый элемент из* $\mathrm{Hom}(A_i, B_j) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(A_i, B_j)\big)$ *частично обратим для всех* i *и* j.

Доказательство. Пусть $\pi_i \colon A \to A_i$, $\pi'_j \colon B \to B_j$ — канонические проекции, $\varepsilon_i \colon A_i \to A$, $\varepsilon'_j \colon B_j \to B$ — канонические вложения.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Рассмотрим произвольный элемент f из $\mathrm{Hom}(A_i, B_j) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(A_i, B_j)\big)$. Так как $f = \pi'_j(\varepsilon'_j f \pi_j)\varepsilon_j$, то согласно лемме 1.2 $\varepsilon'_j f \pi_j \notin J\big(\mathrm{Hom}(A, B)\big)$. Тогда из условия следует, что элемент $\varepsilon'_j f \pi_j$ частично обратим, и следовательно, согласно лемме 2.4 элемент f также частично обратим.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A, B) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(A, B)\big)$. Так как
$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i,$$
то $\pi'_{j_0} f \varepsilon_{j_0} \notin J\big(\mathrm{Hom}(A_{i_0}, B_{j_0})\big)$ для некоторых индексов i_0, j_0. Следовательно, элемент $\pi'_{j_0} f \varepsilon_{j_0}$ частично обратим, и из леммы 2.4 следует частичная обратимость элемента f. □

Теорема 2.7 [55]. *Пусть* $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$. *Тогда следующие условия равносильны*:

1) $\mathrm{End}(A)$ — I_0*-кольцо*;
2) *каждый элемент из* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(A_i, A_j)\big)$ *частично обратим для всех* i *и* j;
3) *каждый элемент из* $\mathrm{Hom}(A_i, A_i) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(A_i, A_i)\big)$ *частично обратим для всех* i.

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) следует из теоремы 2.6. Эквивалентность 2) $\Longleftrightarrow$ 3) следует из леммы 2.5. □

Теорема 2.8 [55]. *Пусть* $(A)_{i \in I}$ — *семейство правых* R*-модулей и* B — *конечно порождённый правый* R*-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *всякий элемент из* $\mathrm{Hom}(B, A_i) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(B, A_i)\big)$ *частично обратим для каждого* $i \in I$;
2) *всякий элемент из* $\mathrm{Hom}\Big(B, \bigoplus\limits_{i \in I} A_i\Big) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(B, \oplus_{i \in I} A_i)\big)$ *частично обратим.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть

$$f \in \mathrm{Hom}\Big(B, \bigoplus_{i \in I} A_i\Big) \setminus J\Big(\mathrm{Hom}\Big(B, \bigoplus_{i \in I} A_i\Big)\Big).$$

Так как модуль B конечно порождённый, то для некоторого конечного набора попарно различных индексов $i_1, \ldots, i_k$ из I имеем $f(B) \subset A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$. Пусть π — проекция модуля $\bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ на модуль $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$, ε — вложение модуля $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$ в модуль $\bigoplus\limits_{i \in I} A_i$. Из теоремы 2.6 следует, что в

$$\mathrm{Hom}(B, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(B, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k})\big)$$

каждый элемент частично обратим. Так как $\varepsilon\pi f = f$ и

$$f \in \mathrm{Hom}\Big(B, \bigoplus_{i \in I} A_i\Big) \setminus J\Big(\mathrm{Hom}\Big(B, \bigoplus_{i \in I} A_i\Big)\Big),$$

то

$$\pi f \in \mathrm{Hom}(B, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(B, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k})\big).$$

Следовательно, элемент πf частично обратим, и из леммы 2.4 следует частичная обратимость элемента f.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из теоремы 2.6. □

3. I_0-модули

Модуль M называется I_0*-модулем*, если каждый его подмодуль, который не содержится в радикале Джекобсона модуля M, содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M.

Теорема 3.1. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

1) *M — I_0-модуль*;
2) *каждый некосущественный циклический подмодуль модуля M содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M*;
3) *каждый циклический подмодуль модуля M, который не содержится в $J(M)$, содержит в себе ненулевое циклическое прямое слагаемое модуля M*;
4) *каждый подмодуль модуля M, не содержащийся в $J(M)$, содержит прямое слагаемое модуля M, которое не содержится в $J(M)$*;
5) *каждый подмодуль модуля M, не содержащийся в радикале Джекобсона, содержит нерадикальное прямое слагаемое модуля M.*

Доказательство. Импликации 4) $\Longrightarrow$ 5) и 5) $\Longrightarrow$ 1) проверяются непосредственно.

Поскольку каждый некосущественный циклический подмодуль модуля M не лежит в $J(M)$, то импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) непосредственно следует из определения I_0-модуля.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Если циклический подмодуль nR I_0-модуля M не содержится в $J(M)$, то он некосуществен и, следовательно, согласно предположению будет содержать в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M. Тогда исходная импликация будет следовать из того факта, что каждое прямое слагаемое циклического модуля является циклическим.

Убедимся в справедливости импликации 3) $\Longrightarrow$ 4). Если подмодуль N модуля M не содержится в $J(M)$, то $n \notin J(M)$ для некоторого $n \in N$. Тогда согласно предположению nR содержит ненулевое циклическое прямое слагаемое модуля M, которое, очевидно, не содержится в $J(M)$. □

Далее нам потребуются некоторые сведения, касающиеся локально проективных модулей.

Пусть M и N — правые R-модули. Гомоморфизм $f\colon M \to N$ называется *локально расщепляющим*, если для каждого $x \in f(M)$ существует такой гомоморфизм $g\colon N \to M$, что $fg(x) = x$. Подмодуль N модуля M называется *локально расщепляющим в M*, если вложение $N \hookrightarrow M$ является локально расщепляющим, т. е. для каждого $n \in N$ существует такое отображение $f\colon M \to N$, что $f(n) = n$.

Теорема 3.2. *Для гомоморфизма $f\colon M \to N$ правых R-модулей следующие утверждения равносильны*:

1) *f — локально расщепляющий гомоморфизм*;
2) *$f(M)$ — локально расщепляющий подмодуль модуля M и эпиморфизм $f'\colon M \to f(M)$, где $f'(n) = f(n)$ для каждого $n \in N$, является локально расщепляющим.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть m — произвольный элемент модуля $f(M)$. Тогда существует такой гомоморфизм $g\colon N \to M$, что

$f\big(g(m)\big) = m$. Таким образом, для гомоморфизма $h = f'g\colon N \to f(M)$ имеем $h(m) = m$. Из равенства $f'g|_{f(M)}(m) = fg(m) = m$ следует, что f' — локально расщепляющий эпиморфизм.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть m — произвольный элемент $f(M)$ и $g\colon f(M) \to M$, $h\colon N \to f(M)$ — такие гомоморфизмы, что $f'g(m) = m$ и $h(m) = m$. Тогда $f(gh)(m) = m$, и следовательно, f — локально расщепляющий гомоморфизм. $\square$

Теорема 3.3 [10]. *Пусть $f\colon M \to N$ — локально расщепляющий гомоморфизм. Тогда для каждого конечного семейства $x_1, \ldots, x_n \in f(M)$ существует гомоморфизм $g\colon N \to M$, для которого $fg(x_i) = x_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Доказательство будем проводить индукцией по n. Допустим, что $n > 1$ и для $n - 1$ утверждение доказано. Тогда существует гомоморфизм $g_1\colon N \to M$, для которого $fg_1(x_i) = x_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Пусть $g_2\colon N \to M$ — гомоморфизм, для которого имеет место равенство $fg_2\big(x_n - fg_1(x_n)\big) = x_n - fg_1(x_n)$. Рассмотрим гомоморфизм $g = g_1 + g_2 - g_2fg_1$. Тогда

$$fg(x_i) = f(g_1 + g_2 - g_2fg_1)(x_i) = \\ = fg_1(x_i) + fg_2(x_i) - fg_2fg_1(x_i) = x_i + fg_2(x_i) - fg_2(x_i) = x_i$$

для $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ и

$$fg(x_n) = f(g_1 + g_2 - g_2fg_1)(x_n) = \\ = fg_1(x_n) + fg_2\big(x_n - fg_1(x_n)\big) = fg_1(x_n) + x_n - fg_1(x_n) = x_n. \quad \square$$

Теорема 3.4 [10]. *Для модуля M следующие условия равносильны*:

1) *каждый эпиморфизм на M является локально расщепляющим*;
2) *для каждого конечно порождённого подмодуля M_0 модуля M существуют такой конечно порождённый свободный модуль F и гомоморфизмы $f\colon M \to F$ и $g\colon F \to M$, что $gf(m) = m$ для каждого $m \in M_0$*;
3) *$m \in \Delta m$ для каждого $m \in M$, т. е. существуют такое конечное количество гомоморфизмов $f_i \in M^*$ $(i = 1, \ldots, n)$ и элементов $m_i \in M$ $(i = 1, \ldots, n)$, что $m = m_1f(m) + \ldots + m_nf_n(m)$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\varphi\colon G \to M$ — эпиморфизм, где G — свободный правый R-модуль. Тогда по предположению φ является локально расщепляющим эпиморфизмом и, следовательно, по теореме 3.3 существует такой гомоморфизм $h\colon M \to G$, что $\varphi h(m) = m$ для каждого $m \in M_0$. Поскольку M_0 конечно порождённый, то $h(M_0) \subset F$, где F — конечно порождённое свободное прямое слагаемое модуля G. Так как F — прямое слагаемое модуля G, то для некоторого гомоморфизма $\pi\colon G \to F$ равенство $\pi(m) = m$ имеет место для каждого $m \in F$. Пусть $f = \pi h$ и $g = \varphi|_F$. Тогда очевидно, что $gf(m) = m$ для каждого $m \in M$.

Убедимся в справедливости импликации 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $m_0 \in M$. По предположению существуют гомоморфизмы $f\colon M \to F$ и $g\colon F \to M$, где F — конечно порождённый свободный модуль, такие что $gf(m_0) = m_0$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис модуля F. Однозначно определены такие гомоморфизмы $f_i\colon M \to R_R$ ($i = 1, \ldots, n$), что $f(m) = e_1 f_1(m) + \ldots + e_n f_n(m)$ для каждого $m \in M$. Тогда

$$m_0 = gf(m_0) = g\big(e_1 f_1(m_0) + \ldots + e_n f_n(m_0)\big) = g(e_1) f_1(m_0) + \ldots + g(e_n) f_n(m_0).$$

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть N — правый R-модуль, $f\colon N \to M$ — эпиморфизм и $m_0 \in M$. По предположению $m_0 = m_1 f_1(m_0) + \ldots + m_n f_n(m_0)$, где $m_1, \ldots, m_n \in M$ и $f_1, \ldots, f_n \in M^*$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, n\}$ выберем такой элемент $x_i \in N$, что $f(x_i) = m_i$. Пусть $g\colon M \to N$ — гомоморфизм, при котором $g(m) = x_1 f_1(m) + \ldots + x_n f_n(m)$ для каждого $m \in M$. Тогда

$$fg(m_0) = f\big(x_1 f_1(m_0) + \ldots + x_n f_n(m_0)\big) = m_1 f_1(m_0) + \ldots + m_n f_n(m_0) = m_0. \quad \square$$

Правый R-модуль M называется *локально проективным*, если он удовлетворяет одному из пунктов предыдущей теоремы. Следующее утверждение непосредственно следует из определения локально проективного модуля.

Лемма 3.5. *Пусть R — кольцо и P — R-модуль.*

1. *Если $P = \bigoplus\limits_{i\in I} P_i$, то локальная проективность модуля P эквивалентна локальной проективности каждого модуля из семейства $(P_i)_{i\in I}$.*
2. *Если модуль P локально проективен и $\varphi\colon P \to \mathrm{Hom}(R, P)$ — канонический изоморфизм, то $\varphi\big(J(P)\big) = J\big(\mathrm{Hom}(R, P)\big)$.*
3. *Если модуль P локально проективен, то следующие условия равносильны:*
   а) *P — I_0-модуль;*
   б) *каждый гомоморфизм из $\mathrm{Hom}(R, P) \setminus J\big(\mathrm{Hom}(R, P)\big)$ частично обратим.*
4. *Если модуль P локально проективен, то $J(P) = PJ(R)$.*

Теорема 3.6. *Для локально проективного модуля $P = \bigoplus\limits_{i\in I} P_i$ следующие условия эквивалентны:*

1) *P — I_0-модуль;*
2) *каждый модуль из семейства $(P_i)_{i\in I}$ является I_0-модулем.*

Доказательство. Теорема непосредственно следует из предыдущей леммы и теоремы 2.8. $\square$

Теорема 3.7. *Пусть P — локально проективный правый R-модуль. Тогда имеют место следующие утверждения:*

1) *если R — I_0-кольцо, то P является I_0-модулем;*
2) *если $\mathrm{End}(P)$ — I_0-кольцо, то P является I_0-модулем.*

Доказательство. Теорема непосредственно следует из лемм 2.5 и 3.5. $\square$

Следствие 3.8 [24]. *Над I_0-кольцом каждый проективный модуль является I_0-модулем.*

Теорема 3.9. *Пусть P — проективный модуль, $J(P) \ll P$ и прямые слагаемые модуля P поднимаются относительно естественного гомоморфизма модуля P на модуль $P/J(P)$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) P — I_0*-модуль*;
2) $P/J(P)$ — I_0*-модуль.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $xR \nsubseteq J(P)$, где $x \in P$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $\varphi\colon P \to P/J(P)$. Поскольку $\varphi(x) \neq 0$, то существует такой ненулевой элемент m модуля $P/J(P)$, что mR — прямое слагаемое модуля $P/J(P)$ и $mR \subset \varphi(x)R$. Тогда из условия теоремы следует, что для некоторых подмодулей N_1 и N_2 модуля P выполнены равенства $\varphi(N_1) = mR$ и $N_1 \oplus N_2 = P$. Допустим, что $y \in xR$ — элемент, для которого имеет место равенство $\varphi(y) = m$. Тогда
$$P = N_1 \oplus N_2 = J(P) + yR + N_2 = yR + N_2.$$
Рассмотрим естественный гомоморфизм $f\colon P \to P/N_2$. Поскольку $f(yR) = f(P) \cong N_1$, то существует такой подмодуль N_0 модуля yR, что
$$N_0 \oplus \operatorname{Ker} f|_{yR} = N_0 \oplus (yR \cap N_2) = yR.$$
Легко убедиться, что $N_0 \cap N_2 = 0$ и $N_0 + N_2 = M$. Таким образом, подмодуль xR содержит ненулевое прямое слагаемое N_0 модуля P. □

Следствие 3.10. *Пусть R — кольцо и идемпотенты поднимаются по модулю идеала $J(R)$. Если $R/J(R)$ — I_0-кольцо, то R также является I_0-кольцом.*

Лемма 3.11. *Для проективного правого R-модуля P следующие утверждения равносильны*:

1) *каждый некосущественный подмодуль модуля P содержит ненулевое прямое слагаемое модуля P*;
2) P — I_0*-модуль и* $J(P) \ll P$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Очевидно, что P является I_0-модулем. Если $J(P)$ некосуществен в P, то модуль P будет содержать ненулевое радикальное прямое слагаемое, которое является проективным. Получили противоречие с [2, 9.6.3].

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. □

Теорема 3.12 [24]. *Для проективного правого R-модуля P следующие условия равносильны*:

1) P — I_0*-модуль и* $J(P) \ll P$;
2) $S = \operatorname{End}_R(P)$ — I_0*-кольцо.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $f \notin J(S)$. Тогда согласно [2, 9.6.1] $f(P)$ не является косущественным в P и, следовательно, не содержится в $J(P)$. Поскольку P — I_0-модуль, то для некоторого ненулевого идемпотента $\pi \in S$ имеем $\pi(P) \subset f(P)$. Так как P — проективный модуль, то у гомоморфизма πf образ и ядро выделяются в виде прямого слагаемого в P. Тогда из теоремы 2.1 и леммы 2.4 следует частичная обратимость гомоморфизма f.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть M — некосущественный подмодуль в P. Тогда для некоторого собственного подмодуля N модуля P имеем $P = M + N$. Поскольку P является проективным модулем, то для некоторого $f \in S$ имеем $f(P) \subset M$ и $(1-f)(P) \subset N$. Так как $N \neq P$, то $f \notin J(S)$, и следовательно, для некоторого $h \in S$ гомоморфизм fh является ненулевым проектором и $fh(P) \subset f(P) \subset M$. Таким образом, каждый некосущественный подмодуль модуля P содержит ненулевое прямое слагаемое модуля P, и импликация следует из леммы 3.11. □

Идеал I кольца R называется *t-нильпотентным справа*, если для каждого семейства $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов идеала I существует такое натуральное число N, что $r_N \cdots r_2 r_1 = 0$.

Теорема 3.13 [24]. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — I_0-кольцо и $J(R)$ — t-нильпотентный справа идеал*;
2) *кольцо эндоморфизмов каждого правого проективного R-модуля является I_0-кольцом.*

Доказательство. Теорема непосредственно следует из [2, 11.5.6] и теорем 3.7 и 3.12. □

Открытый вопрос [55]. Пусть P — модуль, у которого каждый некосущественный подмодуль содержит ненулевое проективное прямое слагаемое модуля P. Является ли $\mathrm{End}(P)$ I_0-кольцом?

4. Полупримитивные I_0-кольца

Полупримитивные I_0-кольца были глубоко изучены Я. Левицким в [35]. В этом разделе мы рассмотрим некоторые свойства полупримитивных I_0-колец, основанные на его результатах.

Теорема 4.1 [13]. *Для кольца R, у которого $\mathrm{In}(R) = n$, следующие условия равносильны*:

1) *R — полупримитивное I_0-кольцо*;
2) *кольцо R содержит существенный идеал $I = \bigoplus\limits_{\alpha \in A} M_{n_\alpha}(D_\alpha)$, где*
   а) *$n_\alpha \leqslant n$ для каждого $\alpha \in A$*;
   б) *D_α — редуцированное кольцо для каждого $\alpha \in A$ и каждый односторонний идеал L кольца D_α содержит идеал K, который порождается центральными идемпотентами кольца D_α и является существенным в L.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Допустим, что R — редуцированное кольцо. Пусть L — правый идеал кольца R и K — идеал кольца кольца R, который порождается всеми идемпотентами из L. Очевидно, что K существен в L и, поскольку R — редуцированное кольцо, K порождается центральными идемпотентами.

Из [4, 13.49] и леммы Цорна следует существование такого максимального семейства попарно ортогональных ненулевых центральных идемпотентов $(f_i)_{i\in I}$, что $f_iR = M_{n_i}(D_i)$, где D_i — редуцированное кольцо и $n_i \leqslant n$ для каждого $i \in I$. Рассмотрим идеал

$$I = \bigoplus_{i\in I} M_{n_i}(D_i).$$

Если для некоторого ненулевого правого идеала A кольца R имеет место равенство $A \cap I = 0$, то $AI = 0$, и следовательно, $\mathrm{Ann}({}_R I) \neq 0$. Тогда согласно [4, 13.49] идеал $\mathrm{Ann}({}_R I)$ содержит такой центральный идемпотент f, что $fR = M_{n_0}(D)$, где D — редуцированное кольцо и $n_0 \leqslant n$. Получили противоречие с максимальностью семейства попарно ортогональных ненулевых центральных идемпотентов $(f_i)_{i\in I}$. Таким образом, идеал I является существенным в R.

Убедимся в справедливости импликации 2) $\Longrightarrow$ 1). Ясно, что I — полупримитивное I_0-предкольцо. Если A — ненулевой правый идеал кольца R, то $A \cap I$ — ненулевой правый идеал предкольца I, и следовательно, $A \cap I \subset A$ содержит ненулевой идемпотент. □

Следствие 4.2 [13]. *Для кольца R, у которого $\mathrm{In}(R) = n$, следующие условия равносильны*:

1) *R — первичное полупримитивное I_0-кольцо*;
2) *$R \cong M_n(D)$, где D — тело.*

Теорема 4.3 [47]. *Пусть R — кольцо, у которого каждый односторонний идеал порождается идемпотентами. Если каждый примитивный гомоморфный образ кольца R имеет ограниченный индекс нильпотентности, то кольцо R регулярно.*

Доказательство. Предположим, что кольцо R не является регулярным. Тогда найдётся такой элемент $r \in R$, что $r \notin rRr$. Множество идеалов A, для которых $r \notin rRr + A$, является вполне упорядоченным по включению. Тогда по лемме Цорна найдётся максимальный элемент в этом множестве, который мы обозначим через A_0.

Покажем, что кольцо R/A_0 неразложимо. Если это кольцо является прямым произведением двух ненулевых колец R_1 и R_2, то в силу выбора идеала A_0 проекции элемента r будут регулярными в этих кольцах. Тогда, очевидно, сам элемент r будет регулярным, что противоречит нашему допущению. Таким образом, кольцо R/A_0 является неразложимым полупримитивным I_0-кольцом, у которого каждый примитивный образ имеет ограниченный индекс нильпотентности.

Из [4, 13.49] следует, что R/A_0 — артиново простое кольцо, следовательно, оно регулярно. Полученное противоречие показывает регулярность кольца R. $\square$

Пример [47]. Существует нерегулярное кольцо, в котором каждый односторонний идеал порождается идемпотентами.

Доказательство. Пусть P — произвольное поле. В кольце $\mathrm{CFM}_{\mathbb{N}}(R)$ выделим подмножество R всех матриц r, у которых ненулевые элементы отстоят от главной диагонали не более чем на $n(r)$ мест по вертикали. Таким образом, $n(r)$ — такое натуральное число, зависящее от r, что $r_{ij}=0$, если $|j-i|>n(r)$. Непосредственные вычисления показывают, что для каждых $r,s\in R$ имеет место неравенство

$$n(rs)\leqslant n(r)+n(s).$$

Легко убедиться, что R — подкольцо кольца $\mathrm{CFM}_{\mathbb{N}}(R)$. Пусть s, m — натуральные числа и $s\leqslant m$. Выделим в R подкольцо R_{sm}, состоящее из всех матриц, у которых ненулевые элементы стоят только в квадратных клетках, расположенных друг за другом на главной диагонали, причём первая клетка имеет размер $s\times s$, а все остальные — $m\times m$. Очевидно, R_{sm} — регулярное кольцо.

Покажем, что каждый правый идеал кольца R порождается идемпотентами. Для этого достаточно показать, что каждый главный правый идеал кольца R порождается идемпотентами. Пусть $r\in R$ и $m=2n(r)+1$. Для каждого $1\leqslant i\leqslant m$ через $e^{(i)}$ обозначим такой элемент кольца R, что $e^{(i)}_{xy}=1$, если $x=y=km+i$ для некоторого целого числа k, и $e^{(i)}_{xy}=0$ в остальных случаях. Ясно, что $e^{(1)},\ldots,e^{(m)}$ — попарно ортогональные ненулевые идемпотенты и

$$1=e^{(1)}+\ldots+e^{(m)}.$$

Рассмотрим элемент $re^{(i)}$ для некоторого $1\leqslant i\leqslant m$. Несложные вычисления показывают, что найдётся такое натуральное число s_i, при котором $re^{(i)}\in R_{s_im}$. Поскольку кольцо R_{s_im} регулярно, то для некоторого $t_i\in R_{s_im}$ имеет место равенство $re^{(i)}=re^{(i)}t_ire^{(i)}$. Положим $f_i=re^{(i)}t_i$. Тогда $f_i^2=f_i$ для каждого i и

$$r=re^{(1)}+\ldots+re^{(m)}=f_1re^{(1)}+\ldots+f_mre^{(m)}\subseteqq f_1R+\ldots+f_mR.$$

Таким образом, $rR\subseteqq f_1R+\ldots+f_mR$. Обратное включение следует из соотношений $f_i=re^{(i)}t_i\in rR$ для каждого $1\leqslant i\leqslant m$.

Итак, каждый главный правый идеал кольца R порождается идемпотентами. Для левого главного идеала доказательство аналогично. Таким образом, каждый односторонний идеал кольца R порождается идемпотентами.

Покажем, что кольцо R не является регулярным. Пусть $a\in R$ — такой элемент, что $a_{ii}=1$, $a_{i,i+1}=-1$ для каждого натурального числа i и $a_{r,s}=0$ в остальных случаях. Через $b\in\mathrm{CFM}_{\mathbb{N}}(R)$ обозначим верхнюю треугольную матрицу, у которой все элементы, стоящие не ниже главной диагонали, равны 1. Непосредственная проверка показывает, что $ab=ba=1$. Если $a=aca$ для некоторого $c\in R$, то $c=b$ и $b\in R$, что невозможно. $\square$

Нерегулярные кольца, у которых каждый односторонний идеал порождается идемпотентами, рассматривались в [7, 47].

5. Вполне идемпотентные гомоморфизмы

Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Введём следующие обозначения

$$H_{\mathrm{r}}(f) := \Big\{ \sum_i g_i f s_i \mid g_i \in \mathrm{Hom}(B, A),\ s_i \in \mathrm{Hom}(A, A) \text{ для каждого } i \Big\},$$

$$H_{\mathrm{l}}(f) := \Big\{ \sum_i s_i f g_i \mid g_i \in \mathrm{Hom}(B, A),\ s_i \in \mathrm{Hom}(B, B) \text{ для каждого } i \Big\}.$$

Легко убедиться, что если $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$ и $g \in \mathrm{Hom}(A, B)$, то $H_{\mathrm{r}}(fg) \subset H_{\mathrm{r}}(g)$.

Назовём $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентным справа* (*слева*), если для каждого гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ выполнено условие $f \in fH_{\mathrm{r}}(f)$ ($f \in H_{\mathrm{l}}(f)f$). $\mathrm{Hom}(A, B)$ называется *вполне идемпотентным*, если $f \in \mathrm{Hom}(B, B)fH_{\mathrm{r}}(f)$ для каждого $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$.

Лемма 5.1. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно справа* (*слева*), *то* $J\big(\mathrm{Hom}(A, B)\big) = 0$.

Доказательство. Пусть $f \in J\big(\mathrm{Hom}(A, B)\big)$. Тогда для некоторого элемента $g \in H_{\mathrm{r}}(f)$ имеет место равенство $f = fg$. Так как согласно лемме 1.2 $g \in J\big(\mathrm{Hom}(A, A)\big)$, то для некоторого элемента $h \in \mathrm{Hom}(A, A)$ имеем $(1_A - g)h = 1_A$. Следовательно, $0 = f(1_A - g)h = f$. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть* $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $g \in H_{\mathrm{r}}(f)$. *Если* $f - fg \in (f - fg)H_{\mathrm{r}}(f - fg)$, *то* $f \in fH_{\mathrm{r}}(f)$.

Доказательство. Утверждение следует из включений $H_{\mathrm{r}}(f - fg) \subset H_{\mathrm{r}}(f)$ и $gH_{\mathrm{r}}(f - fg) \subset H_{\mathrm{r}}(f)$. $\square$

Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$ назовём *вполне идемпотентным справа*, если $f \in fH_{\mathrm{r}}(f)$. Подмножество $\mathrm{Hom}(A, B)$ назовём *вполне идемпотентным справа*, если каждый его элемент является вполне идемпотентным справа.

При доказательстве следующей теоремы мы используем схему рассуждений из [17].

Теорема 5.3. *Пусть A, B — правые R-модули. Тогда* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *содержит наибольший вполне идемпотентный справа* $\mathrm{End}(B)$-$\mathrm{End}(A)$*-подмодуль.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$I = \{ f \in \mathrm{Hom}(A, B) \mid \mathrm{End}(B) f \,\mathrm{End}(A) \text{ вполне идемпотентно справа} \}.$$

Легко убедиться, что I замкнуто относительно умножения слева на элементы из $\mathrm{End}(B)$ и умножения справа на элементы из $\mathrm{End}(A)$. Покажем, что I замкнуто относительно сложения. Пусть $f, g \in I$ и $h \in \mathrm{End}(B)(f + g)\,\mathrm{End}(A)$. Тогда для некоторых элементов $h_1 \in \operatorname{End}(B) f \operatorname{End}(A)$, $h_2 \in \operatorname{End}(B) g \operatorname{End}(A)$ имеет место равенство $h = h_1 + h_2$. Так как элемент h_1 вполне идемпотентен справа, то

$$h_1 = h_1 \sum_{i=1}^{n} s_i h_1 a_i,$$

где $s_i \in \operatorname{Hom}(B, A)$, $a_i \in \operatorname{End}(A)$ для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$. Тогда элемент

$$h_1 + h_2 - (h_1 + h_2) \sum_{i=1}^{n} s_i (h_1 + h_2) a_i = \\ = h_2 - h_1 \sum_{i=1}^{n} s_i h_2 a_i - h_2 \sum_{i=1}^{n} s_i (h_1 + h_2) a_i \in \operatorname{End}(B) h_2 \operatorname{End}(A)$$

является вполне идемпотентным справа и из леммы 5.2 следует, что элемент $h_1 + h_2$ также является вполне идемпотентным справа. □

Лемма 5.4.

1. *Пусть* $\operatorname{Hom}(A, C_1), \ldots, \operatorname{Hom}(A, C_m)$ *вполне идемпотентны справа. Тогда для каждого семейства гомоморфизмов*

$$f_1 \in \operatorname{Hom}(B, C_1), \ldots, f_m \in \operatorname{Hom}(B, C_m)$$

и каждого гомоморфизма $s \in \operatorname{Hom}(A, B)$ *существует такой гомоморфизм* $h \in H_{\mathrm{r}}(s)$, *что для каждого* $1 \leqslant i \leqslant m$ *имеет место равенство* $f_i s = f_i s h$.

2. *Пусть* $\operatorname{Hom}(C_1, A), \ldots, \operatorname{Hom}(C_m, A)$ *вполне идемпотентны слева. Тогда для каждого семейства гомоморфизмов*

$$f_1 \in \operatorname{Hom}(C_1, B), \ldots, f_m \in \operatorname{Hom}(C_m, B)$$

и каждого гомоморфизма $s \in \operatorname{Hom}(B, A)$ *существует такой гомоморфизм* $h \in H_{\mathrm{l}}(s)$, *что для каждого* $1 \leqslant i \leqslant m$ *имеет место равенство* $s f_i = h s f_i$.

Доказательство. Доказательство будем проводить с помощью индукции по m. Докажем наше утверждение при $m = 1$. Так как $\operatorname{Hom}(A, C_1)$ вполне идемпотентно справа, то $f_1 s \in f_1 s H_{\mathrm{r}}(f_1 s) \subset f_1 s H_{\mathrm{r}}(s)$. Предположим, что наше утверждение верно для $m = k$. Пусть $\operatorname{Hom}(A, C_1), \ldots, \operatorname{Hom}(A, C_{k+1})$ вполне идемпотентны справа и $f_1 \in \operatorname{Hom}(B, C_1), \ldots, f_{k+1} \in \operatorname{Hom}(B, C_{k+1})$, $s \in \operatorname{Hom}(A, B)$. По предположению индукции найдётся такой гомоморфизм $h \in H_{\mathrm{r}}(s)$, что для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$ имеет место равенство $f_i s = f_i s h$. Так как $\operatorname{Hom}(A, C_{k+1})$ вполне идемпотентно справа, то для некоторого гомоморфизма $h' \in H_{\mathrm{r}}(f_{k+1} s - f_{k+1} s h) \subset H_{\mathrm{r}}(s)$ имеет место равенство $(f_{k+1} s - f_{k+1} s h) = (f_{k+1} s - f_{k+1} s h) h'$. Тогда для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$ имеем $f_i s (h + h' - h h') = f_i s h + f_i s (1_A - h) h' = f_i s$ и $f_{k+1} s (h + h' - h h') = f_{k+1} s$. Очевидно, что $h + h' - h h' \in H_{\mathrm{r}}(s)$.

Доказательство второго утверждения двойственно приведённому. □

Лемма 5.5. *Пусть* $B = B_1 \oplus B_2$.

1. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно справа, то* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *вполне идемпотентно справа.*
2. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева, то* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *вполне идемпотентно слева.*
3. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно, то* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *вполне идемпотентно слева.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A, B_1)$, i — вложение модуля B_1 в модуль B и π — проекция модуля B на модуль B_1 относительно разложения $B = B_1 \oplus B_2$.

1. Ввиду вполне идемпотентности справа $\mathrm{Hom}(A, B)$ имеем равенство $if = ifg$, где $g \in H_{\mathrm{r}}(if) \subset H_{\mathrm{r}}(f)$. Из последнего равенства следует, что $f = fg$.

2. Ввиду вполне идемпотентности слева $\mathrm{Hom}(A, B)$ имеем равенство $gif = if$, где $g \in H_{\mathrm{l}}(if)$. Из последнего равенства следует, что $\pi gif = f$ и $\pi gi \in H_{\mathrm{l}}(f)$.

3. Поскольку $\mathrm{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентно, имеем равенство

$$if = \sum_{k=1}^{m} h_k if g_k,$$

где $g_k \in H_{\mathrm{r}}(if)$, а $h_k \in \mathrm{Hom}(B, B)$ для каждого k. Тогда

$$f = \sum_{k=1}^{m} \pi h_k if g_k \in \mathrm{Hom}(B_1, B_1) f H_{\mathrm{r}}(f). \qquad \square$$

Доказательство следующего утверждения аналогично доказательству предыдущей леммы.

Лемма 5.6. *Пусть* $A = A_1 \oplus A_2$.

1. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно справа, то* $\mathrm{Hom}(A_1, B)$ *вполне идемпотентно справа.*
2. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева, то* $\mathrm{Hom}(A_1, B)$ *вполне идемпотентно слева.*
3. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно, то* $\mathrm{Hom}(A_1, B)$ *вполне идемпотентно слева.*

Лемма 5.7. *Пусть* $B = B_1 \oplus B_2$.

1. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *и* $\mathrm{Hom}(A, B_2)$ *вполне идемпотентны справа, то* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно справа.*
2. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *и* $\mathrm{Hom}(A, B_2)$ *вполне идемпотентны слева, то* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева.*
3. *Если* $\mathrm{Hom}(A, B_1)$ *и* $\mathrm{Hom}(A, B_2)$ *вполне идемпотентны, то* $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева.*

Доказательство. Пусть $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$, π_1 и π_2 — проекции модуля B на первое и соответственно на второе прямое слагаемое относительно разложения $B = B_1 \oplus B_2$, i_1 и i_2 — вложения модуля B_1 и соответственно модуля B_2 в модуль B.

1. Из утверждения 1 леммы 5.4 следует, что существует гомоморфизм $h \in H_{\mathrm{r}}(f)$, для которого имеют место равенства $\pi_1 f = \pi_1 f h$, $\pi_2 f = \pi_2 f h$. Тогда

$$f = i_1\pi_1 f + i_2\pi_2 f = i_1\pi_1 f h + i_2\pi_2 f h = f h.$$

2. В силу вполне идемпотентности слева $\operatorname{Hom}(A, B_1)$ и $\operatorname{Hom}(A, B_2)$ имеем, что $\pi_1 f = h_1\pi_1 f$ и $\pi_2 f = h_2\pi_2 f$, где $h_1 \in H_{\mathrm{l}}(\pi_1 f)$ и $h_2 \in H_{\mathrm{l}}(\pi_2 f)$. Тогда

$$f = i_1\pi_1 f + i_2\pi_2 f = i_1 h_1\pi_1 f + i_2 h_2\pi_2 f$$

и, поскольку $i_1 h_1\pi_1, i_2 h_2\pi_2 \in H_{\mathrm{l}}(f)$, то $f \in H_{\mathrm{l}}(f) f$.

3. Из вполне идемпотентности $\operatorname{Hom}(A, B_1)$ и $\operatorname{Hom}(A, B_2)$ следует, что

$$\pi_1 f = \sum_{k=1}^{m} g_k\pi_1 f h_k, \quad \pi_2 f = \sum_{k=1}^{n} s_k\pi_2 f t_k,$$

где $g_k \in \operatorname{Hom}(B_1, B_1)$, $h_k \in H_{\mathrm{r}}(\pi_1 f)$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant m$ и $s_k \in \operatorname{Hom}(B_2, B_2)$, $t_k \in H_{\mathrm{r}}(\pi_2 f)$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда

$$f = i_1\pi_1 f + i_2\pi_2 f = \sum_{k=1}^{m} i_1 g_k\pi_1 f h_k + \sum_{k=1}^{n} i_2 s_k\pi_2 f t_k.$$

Так как

$$i_1 g_k\pi_1 f h_k,\ i_2 s_k\pi_2 f t_k \in \operatorname{Hom}(B, B) f H_{\mathrm{r}}(f)$$

для каждого k, то $f \in \operatorname{Hom}(B, B) f H_{\mathrm{r}}(f)$. □

Доказательство следующей леммы двойственно доказательству предыдущей леммы.

Лемма 5.8. *Пусть* $A = A_1 \oplus A_2$.

1. *Если* $\operatorname{Hom}(A_1, B)$ *и* $\operatorname{Hom}(A_2, B)$ *вполне идемпотентны справа, то* $\operatorname{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно справа.*
2. *Если* $\operatorname{Hom}(A_1, B)$ *и* $\operatorname{Hom}(A_2, B)$ *вполне идемпотентны слева, то* $\operatorname{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева.*
3. *Если* $\operatorname{Hom}(A_1, B)$ *и* $\operatorname{Hom}(A_2, B)$ *вполне идемпотентны, то* $\operatorname{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно слева.*

Лемма 5.9. *Пусть* $\{A\}_{i\in I}$ — *семейство правых* R*-модулей и* N — *конечно порождённый правый* R*-модуль. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $\operatorname{Hom}(N, A_i)$ *вполне идемпотентно (вполне идемпотентно справа, вполне идемпотентно слева) для каждого* $i \in I$;
2) $\operatorname{Hom}\Bigl(N, \bigoplus\limits_{i\in I} A_i\Bigr)$ *вполне идемпотентно (соответственно вполне идемпотентно справа, вполне идемпотентно слева).*

Доказательство. Докажем импликацию $1) \Longrightarrow 2)$. Предположим, что $\mathrm{Hom}(N, A_i)$ вполне идемпотентно для каждого $i \in I$. Пусть $f \in \mathrm{Hom}\Big(N, \bigoplus\limits_{i\in I} A_i\Big)$. Так как модуль N конечно порождённый, то для некоторого конечного набора попарно различных индексов $i_1, \ldots, i_k$ из I имеем $f(N) \subset A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$. Пусть π — проекция модуля $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ на модуль $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$, i — вложение модуля $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k}$ в модуль $\bigoplus\limits_{i\in I} A_i$. Из леммы 5.7 следует, что $\mathrm{Hom}(N, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k})$ вполне идемпотентно. Следовательно,

$$\pi f \in \mathrm{Hom}(A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k},\, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k})\pi f H_{\mathrm{r}}(\pi f) \subset \\ \subset \mathrm{Hom}(A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k},\, A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_k})\pi f H_{\mathrm{r}}(f).$$

Так как $i\pi f = f$, то

$$f \in \mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i, \bigoplus_{i\in I} A_i\Big) f H_{\mathrm{r}}(f).$$

Случаи вполне идемпотентных справа и вполне идемпотентных слева множеств гомоморфизмов рассматриваются аналогично.

Импликация $2) \Longrightarrow 1)$ следует из леммы 5.5. □

Теорема 5.10 [1]. *Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $\mathrm{Hom}(A, B)$ *вполне идемпотентно* (*вполне идемпотентно справа, вполне идемпотентно слева*);
2) *для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и для каждого $1 \leqslant j \leqslant m$ $\mathrm{Hom}(A_i, B_j)$ вполне идемпотентно* (*соответственно вполне идемпотентно справа, вполне идемпотентно слева*).

Доказательство. Импликация $1) \Longrightarrow 2)$ следует из лемм 5.5 и 5.6.

Импликация $2) \Longrightarrow 1)$ следует из лемм 5.7 и 5.8. □

Для произвольных правых R-модулей через $\Psi_{A,B}$ будем обозначать естественный $\mathrm{Hom}(A, A)$-$\mathrm{Hom}(A, A)$-бимодульный гомоморфизм из

$$\mathrm{Hom}(B, A) \otimes_{\mathrm{Hom}(B,B)} \mathrm{Hom}(A, B)$$

в $\mathrm{Hom}(A, A)$, действующий по правилу $\Psi_{A,B}(f \otimes g) = fg$. Модуль B назовём конечно порождённым (копорождённым) модулем A, если существует эпиморфизм $\varphi\colon \bigoplus\limits_{k=1}^{m} A_k \to B$ (соответственно мономорфизм $\varphi\colon B \to \bigoplus\limits_{k=1}^{m} A_k$), где $A = A_k$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant m$.

Теорема 5.11 [1]. *Пусть $\mathrm{Hom}(A, B)$ вполне идемпотентно слева.*

1. *Если гомоморфизм $\Psi_{A,B}$ является эпиморфизмом, то $\mathrm{Hom}(A, A)$ вполне идемпотентно слева.*

2. *Если модуль A квазипроективен и модуль B конечно порождается модулем A, то* $\mathrm{Hom}(B,B)$ *вполне идемпотентно слева.*

Доказательство. 1. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(A,A)$. Так как $\Psi_{A,B}$ — эпиморфизм, то $1_A = \sum\limits_{k=1}^{m} g_k h_k$, где $g_1,\ldots,g_m \in \mathrm{Hom}(B,A)$ и $h_1,\ldots,h_m \in \mathrm{Hom}(A,B)$. Тогда

$$f = 1_A f = \sum_{k=1}^{m} g_k h_k f.$$

Поскольку $\mathrm{Hom}(A,B)$ вполне идемпотентно слева, то для каждого $1 \leqslant k \leqslant m$ имеет место равенство $h_k f = s_k h_k f$, где $s_k \in H_1(h_k f)$. Так как $g_k s_k h_k \in H_1(f)$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant m$, то $f \in H_1(f)f$.

2. Согласно предположению существует эпиморфизм

$$\varphi\colon \bigoplus_{k=1}^{m} A_k \to B,$$

где $A = A_k$ для каждого $1 \leqslant k \leqslant m$. Рассмотрим произвольный гомоморфизм f из $\mathrm{Hom}(A,B)$. Так как A квазипроективен, то из [53, 18.2] следует, что для некоторого гомоморфизма

$$g\colon A \to \bigoplus_{k=1}^{m} A_k$$

имеет место равенство $f = \varphi g$. Из последнего равенства следует, что

$$f \in \sum_{k=1}^{m} \varphi i_k \,\mathrm{Hom}(A,A),$$

где $i_1,\ldots,i_m$ — естественные вложения модуля A в модуль $\bigoplus\limits_{k=1}^{m} A_k$. Таким образом, $\mathrm{Hom}(A,B)$ как правый $\mathrm{Hom}(A,A)$-модуль порождается гомоморфизмами $\varphi i_1,\ldots,\varphi i_m$. Пусть $s \in \mathrm{Hom}(B,B)$. Из леммы 5.4 следует, что для некоторого гомоморфизма $h \in H_1(s)$ имеют место равенства $s\varphi i_1 = hs\varphi i_1,\ldots, s\varphi i_m = hs\varphi i_m$. Тогда $(s - sh)\,\mathrm{Hom}(A,B) = 0$. Поскольку A порождает B, то из [53, 13.2] следует, что $s = sh$. □

Доказательство следующего утверждения двойственно доказательству предыдущей теоремы.

Теорема 5.12 [1]. *Пусть* $\mathrm{Hom}(A,B)$ *вполне идемпотентно справа.*

1. *Если гомоморфизм $\Psi_{B,A}$ является эпиморфизмом, то* $\mathrm{Hom}(B,B)$ *вполне идемпотентно справа.*
2. *Если модуль B квазиинъективен и модуль A конечно копорождается модулем B, то* $\mathrm{Hom}(A,A)$ *вполне идемпотентно справа.*

Теорема 5.13 [1]. *Пусть* $\mathrm{Hom}(A,B)$ *вполне идемпотентно.*

1. *Если гомоморфизм $\Psi_{A,B}$ является эпиморфизмом, то* $\mathrm{Hom}(A,A)$ *вполне идемпотентно.*

2. *Если гомоморфизм $\Psi_{B,A}$ является эпиморфизмом, то $\mathrm{Hom}(B,B)$ вполне идемпотентно.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству первого пункта теоремы 5.11. □

6. Вполне идемпотентные кольца и модули

Правый R-модуль M называется *вполне идемпотентным справа* (*слева*), если $m \in [m, M^*]mR$ ($m \in \mathrm{End}_R(M)[m, M^*]m$) для каждого $m \in M$. Если $m \in \mathrm{End}_R(M)[m, M^*]mR$ для каждого $m \in M$, то модуль M называется *вполне идемпотентным*. Легко убедиться, что правый R-модуль M вполне идемпотентен (вполне идемпотентен справа, вполне идемпотентен слева) тогда и только тогда, когда вполне идемпотентен (соответственно вполне идемпотентен справа, вполне идемпотентен слева) канонически изоморфный ему модуль $\mathrm{Hom}(R, M)$.

Следующее утверждение проверяется непосредственно.

Лемма 6.1. *Пусть R — кольцо и M — правый R-модуль.*

1. *Модуль M является вполне идемпотентным справа тогда и только тогда, когда для каждого его подмодуля N имеет место равенство $N = [N, M^*]N$.*
2. *Модуль M является вполне идемпотентным слева тогда и только тогда, когда для каждого его $\mathrm{End}_R(M)$-подмодуля N имеет место равенство $N = NM^*(N)$.*
3. *Модуль M является вполне идемпотентным тогда и только тогда, когда для каждого его $\mathrm{End}_R(M)$-R-подмодуля N имеет место равенство $N = NM^*(N)$.*

Подмодуль N модуля M назовём вполне идемпотентным справа (слева), если для каждого элемента $n \in N$ выполнено условие $n \in [n, M^*]nR$ ($n \in \mathrm{End}_R(M)[n, M^*]n$). Следующее утверждение непосредственно следует из теоремы 5.3.

Теорема 6.2. *Каждый модуль содержит наибольший инвариантный вполне идемпотентный справа (слева) подмодуль.*

Следствие 6.3. *Каждое кольцо обладает наибольшим вполне идемпотентным справа (слева) идеалом.*

Теорема 6.4 [28, 36]. *Для модуля $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ следующие условия равносильны*:

1) *модуль A вполне идемпотентен (вполне идемпотентен справа, вполне идемпотентен слева)*;
2) *модуль A_i вполне идемпотентен (соответственно вполне идемпотентен справа, вполне идемпотентен слева) для каждого $i \in I$.*

Доказательство. Так как имеет место канонический изоморфизм $A \cong \cong \operatorname{Hom}(R, A)$ для каждого правого R-модуля A, то исходное утверждение непосредственно следует из леммы 5.9. □

Следствие 6.5. *Каждый проективный модуль над вполне идемпотентным (вполне идемпотентным справа, вполне идемпотентным слева) кольцом является вполне идемпотентным (соответственно вполне идемпотентным справа, вполне идемпотентным слева).*

Теорема 6.6 [28]. *Пусть P — конечно порождённый проективный правый R-модуль. Если P вполне идемпотентен (справа), то кольцо $S = \operatorname{End}_R(P)$ вполне идемпотентно (справа).*

Доказательство. Согласно лемме о дуальном базисе правый R-модуль является конечно порождённым и проективным тогда и только тогда, когда $\Psi_{P,R}$ является эпиморфизмом. Тогда наше утверждение следует из теорем 5.12 и 5.13. □

Теорема 6.7 [36]. *Пусть A — конечно порождённый правый R-модуль. Если A — вполне идемпотентный слева модуль, то кольцо $\operatorname{End}(A)$ является вполне идемпотентным слева.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из утверждения 2 теоремы 5.11. □

Кольцо R называется *вполне идемпотентным справа* (*слева*), если правый R-модуль R_R вполне идемпотентен справа (слева). Таким образом, кольцо R вполне идемпотентно справа (слева), если $I^2 = I$ для каждого правого (левого) идеала I кольца R. Если равенство $I^2 = I$ выполняется для каждого идеала I кольца R, то кольцо R называется *вполне идемпотентным*.

Теорема 6.8. *Пусть R — кольцо и J — идеал кольца R. Тогда для кольца R следующие условия равносильны:*

1) *R — вполне идемпотентное справа кольцо;*
2) *J — вполне идемпотентный справа идеал и R/J — вполне идемпотентное справа кольцо.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) проверяется непосредственно.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $s \in R$. Тогда из вполне идемпотентности справа кольца R/J следует существование такого элемента $g \in H_{\mathrm{r}}(s)$, что $s - sg \in J$. Так как J является вполне идемпотентным справа идеалом, то $s - sg \in (s - sg)H_{\mathrm{r}}(s - sg)$. Тогда из леммы 5.2 следует, что s — вполне идемпотентный элемент кольца R. □

Следующие два утверждения следуют из теоремы 5.10.

Теорема 6.9. *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — попарно ортогональные идемпотенты кольца R и $1 = e_1 + \ldots + e_n$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *R вполне идемпотентно справа;*

2) *для каждых* $1 \leqslant i, j \leqslant n$ *и каждого* $r \in e_i R e_j$ *найдутся такие элементы* $s_1, \ldots, s_m \in e_j R e_i$ *и* $t_1, \ldots, t_m \in e_j R e_j$, *что* $r = r \sum\limits_{k=1}^{m} s_k r t_k$.

Теорема 6.10. *Если кольцо R вполне идемпотентно (вполне идемпотентно справа, вполне идемпотентно слева), то для каждого натурального числа n кольцо $\mathrm{M}_n(R)$ вполне идемпотентно (вполне идемпотентно справа, вполне идемпотентно слева).*

Пример [6]. Существует вполне идемпотентное слева кольцо, которое не является вполне идемпотентным справа кольцом.

Доказательство. Пусть A — простая регулярная неартинова алгебра над некоторым полем P. В качестве алгебры A можно взять, например, алгебру вида $\mathrm{End}_P(V)/I$, где V — векторное пространство счётной размерности над полем P, а I — идеал, состоящий из всех линейных операторов конечного ранга. Пусть M — максимальный правый идеал алгебры A. Легко убедиться, что

$$M' = \begin{pmatrix} M & M \\ A & A \end{pmatrix}$$

является максимальным правым идеалом простой регулярной неартиновой алгебры

$$A' = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}.$$

Пусть $a \in M'$ — ненулевой элемент. Так как A' — регулярная простая неартинова алгебра, то $a \in M'a$ и $\mathrm{Soc}(A') = 0$. Следовательно, $\{x \in A' \mid xM' = 0\} = 0$ и $M'aM' \neq 0$. Поскольку $A'M'aM'$ — ненулевой идеал в A', то в силу простоты алгебры A' имеем $A'M'aM' = A'$. Тогда $M' = M'A' = M'A'M'aM' \subseteq M'aM'$. Таким образом, $M' = M'aM'$ и $a \in M'aM'a$. Пусть R — P-алгебра, которая получается из M' путём присоединения внешней единицы. Так как M' — вполне идемпотентный слева идеал алгебры R и $R/M' \cong P$, то из теоремы 6.8 следует, что R — вполне идемпотентная слева алгебра. Поскольку

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ M & M \end{pmatrix},$$

то алгебра R не является вполне идемпотентной справа. □

7. V-модули и их обобщения

В этом разделе мы рассмотрим связи между V-модулями и вполне идемпотентными модулями.

Модуль M называется *V-модулем*, если каждый простой модуль в категории $\sigma(M)$ является M-инъективным. Кольцо R называется *правым V-кольцом*, если оно как правый модуль над собой является V-модулем. Легко убедиться, что модуль M является V-модулем тогда и только тогда, когда каждый простой правый R-модуль является M-инъективным.

Теорема 7.1 [53, 23.1]. *Для модуля M следующие условия равносильны:*

1) *M — V-модуль;*
2) *для каждого модуля $N \in \sigma(M)$ имеет место равенство $J(N) = 0$;*
3) *для каждого фактор-модуля N модуля M имеет место равенство $J(N) = 0$;*
4) *каждый собственный подмодуль модуля M является пересечением максимальных подмодулей;*
5) *каждый модуль в $\sigma(M)$ является V-модулем.*

Следующее утверждение непосредственно вытекает из предыдущей теоремы.

Теорема 7.2. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

1) *R — правое V-кольцо;*
2) *для каждого правого R-модуля M имеет место равенство $J(M) = 0$;*
3) *для каждого циклического правого R-модуля M имеет место равенство $J(M) = 0$;*
4) *каждый правый собственный идеал кольца R является пересечением максимальных правых идеалов.*

Теорема 7.3 [51]. *Пусть P — π-проективный правый R-модуль и N — его инвариантный подмодуль. Тогда для модуля P следующие условия равносильны:*

1) *P — V-модуль;*
2) *P/N — V-модуль, N — V-модуль и каждый максимальный подмодуль правого R-модуля N является пересечением максимальных подмодулей модуля P.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) непосредственно следует из теоремы 7.1.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть L — подмодуль модуля P и элемент $p \in P$ такой, что $p + L \in J(P/L)$. Если $p + L + N \neq L + N$, то в силу утверждения 2) существует такой максимальный подмодуль M модуля P, что $L + N \subset M$ и $p \notin M$. Тогда $L \subset M$ и $p + L \notin M/L$. Следовательно, $p + L \notin J(P/L)$. Полученное противоречие показывает, что $p + L + N = L + N$. Таким образом, $p \in L + N$, и без ограничения общности мы можем считать, что $p \in N$.

Предположим, что $p \notin L$. Тогда $p \notin L \cap N$ и по утверждению 2) существует максимальный подмодуль S модуля N, для которого $p \notin S$ и $L \cap N \subset S$. Следовательно, согласно утверждению 2) существует такой максимальный подмодуль T модуля P, что $p \notin T$ и $S \subset T$. Таким образом, $p \in N$ и $p \notin T$, и следовательно, $N \not\subseteq T$. Тогда $S = N \cap T$. Если $L \not\subseteq T$, то $P = L + T$, и в силу π-проективности модуля P для некоторого $f \in \operatorname{End}(P)$ имеем $\operatorname{Jm}(f) \subset L$, $\operatorname{Jm}(1 - f)(P) \subset T$. Тогда для каждого $n \in N$ имеет место равенство $n = f(n) + (1 - f)(n)$, где $f(n) \in N \cap L$ и $(1 - f)(n) \in N \cap T$. Отсюда следует, что $N \subset N \cap L + N \cap T = N \cap L + S = S$, что противоречит максимальности S

в N. Таким образом, $L \subset T$ и, поскольку $p + L \in J(P/L)$, то $p \in T$. Полученное противоречие показывает, что $J(P/L) = 0$. □

Следствие 7.4 [51]. *Пусть I — идеал кольца R. Тогда для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — правое V-кольцо;*
2) *R/I — правое V-кольцо, I_R — V-модуль и каждый максимальный подмодуль правого R-модуля I_R является пересечением максимальных правых идеалов кольца R.*

Кольцо R называется *правым π-V-кольцом*, если инъективная оболочка каждого простого правого R-модуля имеет конечную длину. Если длина инъективной оболочки каждого простого правого R-модуля не превосходит n, то кольцо R называется *правым n-V-кольцом*,

Теорема 7.5 [27]. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — правое π-V-кольцо;*
2) *у каждого правого R-модуля конечной длины инъективная оболочка имеет конечную длину;*
3) *у каждого правого R-модуля M каждый подмодуль является пересечением подмодулей N, у которых $\lg(M/N) < \infty$;*
4) *у каждого правого R-модуля M пересечение всех подмодулей N, у которых $\lg(M/N) < \infty$, является нулевым.*

Доказательство. Эквивалентности 1) $\Longleftrightarrow$ 2) и 3) $\Longleftrightarrow$ 4) проверяются непосредственно.

Убедимся в справедливости импликации 1) $\Longrightarrow$ 4). Пусть Ω — система представителей классов изоморфных простых правых R-модулей. Тогда по [2, теорема 5.8.5] $E = \bigoplus_{S \in \Omega} E(S)$ — копорождающий правый R-модуль. Следовательно, существует вложение $f\colon M \to \prod_{\alpha \in A} E_\alpha$, где $E = E_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Для каждого $S \in \Omega$ через $\pi_{\alpha,S}$ обозначим проекцию модуля $\prod_{\alpha \in A} E_\alpha$ на прямое слагаемое $E(S)$ модуля E_α. Поскольку $E(S)$ имеет конечную длину, то $\lg\bigl(M/\operatorname{Ker}(\pi_{\alpha,S} f)\bigr) < \infty$, и следовательно,

$$\bigcap_{\alpha \in A,\ S \in \Omega} \operatorname{Ker}(\pi_{\alpha,S} f) = \operatorname{Ker}(f) = 0.$$

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Пусть S — простой правый R-модуль. Согласно нашему предположению пересечение всех подмодулей N модуля $E(S)$, у которых $\lg(E(S)/N) < \infty$, равно 0. Следовательно, существует такой подмодуль N_0 модуля $E(S)$, что $N_0 \cap S = 0$ и $\lg(E(S)/N_0) < \infty$. Поскольку S существен в $E(S)$, то $N_0 = 0$, и следовательно, $\lg\bigl(E(S)\bigr) < \infty$. □

Следующая теорема доказывается аналогично.

Теорема 7.6 [27]. *Для кольца R следующие условия равносильны*:

1) *R — правое n-V-кольцо;*
2) *у каждого правого R-модуля M каждый подмодуль является пересечением подмодулей N, у которых $\lg(M/N) \leqslant n$;*
3) *у каждого правого R-модуля M пересечение всех подмодулей N, у которых $\lg(M/N) \leqslant n$, является нулевым.*

Теорема 7.7 [27]. *Пусть R — правое n-V-кольцо. Тогда для каждого правого идеала I кольца R имеет место равенство $I^n = I^{n+1}$.*

Доказательство. Пусть I — собственный правый идеал кольца R. Предположим, что $I^n \neq I^{n+1}$. Тогда из теоремы 7.6 следует существование такого правого идеала L, что $I^{n+1} \subset L$, $I^n \nsubseteq L$ и $\lg(R_R/L) < n+1$. Если для некоторого неотрицательного целого числа $i < n+1$ имеет место равенство $I^i + L = I^{i+1} + L$, то

$$I^n \subset (I^i + L)I^{n-i} = (I^{i+1} + L)I^{n-i} \subset I^{n+1} + L = L,$$

что противоречит нашему допущению. Таким образом, $I^i + L \neq I^{i+1} + L$ для $i = 0, \ldots, n$. Следовательно, $\lg(R_R/L) \geqslant n+1$. Полученное противоречие показывает, что $I^n = I^{n+1}$. □

Следствие 7.8. *Если R — правое V-кольцо, то R — вполне идемпотентное справа кольцо.*

Теорема 7.9 [27]. *Пусть R — кольцо и S — такое его подкольцо, что $R = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i S$, где $a_i \in R$ и $Sa_i = a_i S$ для каждого i. Если S — правое π-V-кольцо, то R также является правым π-V-кольцом.*

Доказательство. Пусть M — правый R-модуль и N — его S-подмодуль, у которого $\lg\big((M/N)_S\big) = k$. Рассмотрим S-подмодуль $Na_i^{-1} = \{m \in M \mid ma_i \in N\}$ модуля M. Непосредственная проверка показывает, что отображение $f\colon M/Na_i^{-1} \to M/N$, при котором $f(m+Na_i^{-1}) = ma_i + N$ для каждого $m \in M$, является групповым вложением, индуцирующим вложение $\mathrm{Lat}\big((M/Na_i^{-1})_S\big)$ в $\mathrm{Lat}\big((M/N)_S\big)$. Тогда $\lg\big((M/Na_i^{-1})_S\big) \leqslant \lg\big((M/N)_S\big) = k$. Легко убедиться, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} Na_i^{-1}$ — R-подмодуль модуля M и

$$\lg\left(\left(M/\bigcap_{i=1}^{n} Na_i^{-1}\right)_R\right) \leqslant \lg\left(\left(M/\bigcap_{i=1}^{n} Na_i^{-1}\right)_S\right) \leqslant nk.$$

Таким образом, каждый S-подмодуль N модуля M, у которого $\lg\big((M/N)_S\big) = k$, содержит R-подмодуль N_0, у которого $\lg\big((M/N_0)_R\big) \leqslant nk$. Тогда пересечение N всех R-подмодулей модуля M, у которых $\lg\big((M/N)_R\big) < \infty$, равно 0. □

Следствие 7.10. *Пусть A — алгебра над коммутативным π-V-кольцом R. Если A — конечно порождённый R-модуль, то A — правое и левое π-V-кольцо.*

Следствие 7.11. *Если R — правое π-V-кольцо, то для каждого натурального n кольцо $\mathrm{M}_n(R)$ является правым π-V-кольцом.*

Для произвольного правого R-модуля M введём следующее условие:

для каждого подмодуля N модуля M имеет место равенство $N = \mathrm{Hom}(M, N)N$. $(*)$

Несложно заметить, что каждый вполне идемпотентный справа модуль удовлетворяет условию $(*)$.

Теорема 7.12 [34]. *Пусть M — правый R-модуль, удовлетворяющий условию $(*)$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *M — V-модуль;*
2) *для каждого примитивного справа идеала I кольца R модуль M/MI является V-модулем.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) непосредственно следует из теоремы 7.1.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть N — некоторый подмодуль модуля M, S — простой правый R-модуль и $I = \mathrm{Ann}(S)$. Рассмотрим произвольный гомоморфизм $f\colon N \to S$. Так как $f(NI) = 0$, то для естественного гомоморфизма $f_1\colon N \to N/NI$ и некоторого гомоморфизма $f_2\colon N/NI \to S$ имеем $f = f_2 f_1$. Непосредственные вычисления показывают, что из условия $(*)$ следует равенство $NI = N \cap MI$. Тогда отображение $g\colon N/NI \to M/MI$, действующее по правилу $f(n + NI) = n + MI$, является мономорфизмом. Тогда из условия 2) следует, что для некоторого гомоморфизма $h\colon M/MI \to S$ имеет место равенство $f_2 = hg$. Если $i\colon N \to M$ — естественное вложение и $p\colon \ \to N/NI$ — естественный гомоморфизм, то $gf_1 = pi$. Тогда $f = f_2 f_1 = hgf_1 = (hp)i$. $\square$

Следствие 7.13 [26, теорема 4.1]. *Пусть M — вполне идемпотентный справа правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *M — V-модуль;*
2) *для каждого примитивного справа идеала I кольца R модуль M/MI является V-модулем.*

Следствие 7.14. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

1) *R — правое V-кольцо;*
2) *R — вполне идемпотентное справа кольцо и каждое примитивное справа фактор-кольцо кольца R является V-кольцом.*

Следствие 7.15. *Пусть R — PI-кольцо. Тогда каждый правый R модуль, удовлетворяющий условию $(*)$, является V-модулем.*

Модуль P называется *π-проективным*, если для каждых двух его подмодулей M и N из равенства $P = M + N$ следует существования такого $f \in \mathrm{End}(M)$, что $\mathrm{Jm}(f) \subset M$, $\mathrm{Jm}(1-f) \subset N$. Легко убедиться, что каждый квазипроективный модуль является π-проективным.

Лемма 7.16. *Если модуль M является π-проективным и N — подмодуль модуля M, то $N/\operatorname{Hom}(M,N)N \ll M/\operatorname{Hom}(M,N)N$.*

Доказательство. Предположим, что

$$N/\operatorname{Hom}(M,N)N + L/\operatorname{Hom}(M,N)N = M/\operatorname{Hom}(M,N)N.$$

Так как модуль M π-проективен, то $\operatorname{Hom}(M,N) + \operatorname{Hom}(M,L) = \operatorname{End}(M)$. Тогда $N = \operatorname{End}(M)N \subset \operatorname{Hom}(M,N)N + L = L$. Следовательно, $L/\operatorname{Hom}(M,N)N = M/\operatorname{Hom}(M,N)N$. □

Модуль M называется *кополиформным*, если $\operatorname{Hom}(M, N/L) = 0$, где $N \ll M$ и $L \subset N$. Если каждый фактор-модуль модуля M является кополиформным, то модуль M называется *строго кополиформным*. Кольцо R называется строго кополиформным справа, если модуль R_R строго кополиформен. Ясно, что всякий V-модуль является строго кополиформным. Кополиформные модули были введены и изучены в [46]. Строго кополиформные модули рассматривались в [20].

Открытый вопрос (К. Ломп). Каждое ли строго кополиформное справа кольцо является правым V-кольцом?

Теорема 7.17 [20]. *Пусть P — квазипроективный конечно порождённый строго кополиформный правый R-модуль. Тогда $S = \operatorname{End}(P)$ — вполне идемпотентное справа кольцо.*

Доказательство. Пусть $f \in \operatorname{End}(P)$. Из предыдущей леммы и строго кополиформности модуля P следует, что

$$\operatorname{Hom}(P/\operatorname{Hom}(P,fP)fP,\ fP/\operatorname{Hom}(P,fP)fP) = 0.$$

Тогда $fP = \operatorname{Hom}(P,fP)fP$. Так как модуль P квазипроективен, то $\operatorname{Hom}(P,fP) = fS$, и следовательно, $fS = \operatorname{Hom}(P,fP) = \operatorname{Hom}(P,fSfP)$. Поскольку модуль P является конечно порождённым и квазипроективным, то

$$\operatorname{Hom}(P,fSfP) = \operatorname{Hom}(P,(fS)^2P) = (fS)^2.$$

Следовательно, $fS = (fS)^2$. □

Теорема 7.18 (К. Ломп). *Пусть P — π-проективный строго кополиформный модуль. Если P порождает каждый свой подмодуль, то модуль P удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. Пусть N — подмодуль модуля P. Так как

$$\operatorname{Hom}(P,N)\operatorname{Hom}(P,N)N \subset \operatorname{Hom}(P,N)N,$$

то каждый гомоморфизм из $\operatorname{Hom}(P,N)$ индуцирует гомоморфизм из

$$\operatorname{Hom}(P/\operatorname{Hom}(P,N)N,\ N/\operatorname{Hom}(P,N)N).$$

Поскольку модуль P является строго кополиформным, то из леммы 7.16 следует, что $\operatorname{Hom}(P,N)P \subset \operatorname{Hom}(P,N)N$. Так как модуль P порождает каждый свой подмодуль, то $\operatorname{Hom}(P,N)P = N$. Следовательно, $\operatorname{Hom}(P,N)N = N$. □

Следствие 7.19. *Пусть P — квазипроективный V-модуль.*

1. *Если P конечно порождённый, то $S = \mathrm{End}(P)$ является вполне идемпотентным справа кольцом.*
2. *Модуль P удовлетворяет условию $(*)$.*

Доказательство. Утверждение 1 следует из теоремы 7.17.

Утверждение 2 следует из предыдущей теоремы и того факта, что каждый квазипроективный V-модуль является порождающим объектом в категории $\sigma(P)$. □

8. Регулярные модули

Теорема 8.1 [31]. *Пусть M, N — правые R-модули. Тогда для гомоморфизма $f \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ следующие условия равносильны*:

1) *существует такой гомоморфизм $g \in \mathrm{Hom}_R(N, M)$, что $f = fgf$;*
2) *образ и ядро отображения f выделяются в виде прямого слагаемого в модуле N и в модуле M соответственно.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Рассмотрим отображения $e = gf$ и $d = fg$. Если $m \in \mathrm{Ker}\, f$, то $em = gfm = 0$. Следовательно, $m = (1-e)m$ и $\mathrm{Ker}(f) \subset (1 - e)M$. Поскольку $f(1 - e)N = 0$, то $\mathrm{Ker}\, f = (1 - e)M$. Так как $fM = dN$, $e = e^2$ и $d = d^2$, то имеют место разложения $M = \mathrm{Ker}\, f \oplus eM$ и $N = fM \oplus (1 - d)M$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $M = A \oplus \mathrm{Ker}\, f$, $N = fM \oplus B$, где A — подмодуль в M и B — подмодуль в N. Тогда отображение f относительно этих разложений имеет матричное представление
$$\begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
где φ — изоморфизм между A и fM, индуцированный гомоморфизмом f. Тогда в качестве k можно взять гомоморфизм
$$\begin{pmatrix} \varphi^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
□

Пусть M и N — правые R-модули. Гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}(M, N)$ называется *регулярным*, если он удовлетворяет одному из пунктов предыдущей теоремы. $\mathrm{Hom}(M, N)$ называется *регулярным*, если каждый элемент из $\mathrm{Hom}(M, N)$ регулярен. Регулярные морфизмы изучались в [30, 32, 42].

Применяя предыдущую теорему к ситуации, когда $N = R_R$, получаем следующее утверждение.

Следствие 8.2. *Пусть M — правый R-модуль и $m \in M$. Следующие утверждения равносильны*:

1) *существует такой гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, R_R)$, что $m = m\varphi(m)$;*
2) *mR — проективное прямое слагаемое модуля M.*

Элемент m модуля M, удовлетворяющий условиям следствия, называется *регулярным по Зельмановичу*.

Доказательства следующих двух утверждений аналогичны доказательствам леммы 5.2 и теоремы 5.3.

Лемма 8.3. *Пусть $f \in \operatorname{Hom}(M,N)$, $g \in \operatorname{Hom}(N,M)$. Если $f - fgf$ — регулярный элемент, то элемент f регулярен.*

Теорема 8.4. *Пусть M, N — правые R-модули. Тогда $\operatorname{Hom}(M,N)$ содержит наибольший регулярный $\operatorname{End}(N)$-$\operatorname{End}(M)$-подмодуль.*

Для произвольных правых R-модулей M и N через $\operatorname{Reg}(M,N)$ мы будем обозначать наибольший регулярный подмодуль бимодуля ${}_{\operatorname{End}(N)}\operatorname{Hom}(M,N)_{\operatorname{End}(M)}$. Ясно, что

$$\operatorname{Reg}(M,N) = \{f \in \operatorname{Hom}(M,N) \mid \operatorname{End}(N) f \operatorname{End}(M) \text{ регулярно}\}.$$

Теорема 8.5 [55]. *Пусть $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$ и $N = N_1 \oplus \ldots \oplus N_m$. Тогда*

$$\operatorname{Reg}(M,N) = \{f \in \operatorname{Hom}(M,N) \mid \operatorname{Hom}(N_i,N_t) f_{ij} \operatorname{Hom}(M_s,M_j) \subset \operatorname{Reg}(M_s,N_t)\}.$$

Доказательство. Пусть $\pi_i \colon M \to M_i$, $\pi'_j \colon N \to N_j$ — канонические проекции, $\varepsilon_i \colon M_i \to M$, $\varepsilon'_j \colon N_j \to N$ — канонические вложения. Обозначим

$$A = \{f \in \operatorname{Hom}(M,N) \mid \operatorname{Hom}(N_i,N_t) f_{ij} \operatorname{Hom}(M_s,M_j) \subset \operatorname{Reg}(M_s,N_t)\}.$$

Несложно заметить, что A является $\operatorname{End}(N)$-$\operatorname{End}(M)$-подмодулем бимодуля ${}_{\operatorname{End}(N)}\operatorname{Hom}(M,N)_{\operatorname{End}(M)}$.

Покажем, что $\operatorname{Reg}(M,N) \subset A$. Так как

$$\operatorname{Hom}(N_j,N_t)\pi'_j \operatorname{Reg}(M,N)\varepsilon_i \operatorname{Hom}(M_s,M_i) \subset \pi'_t \operatorname{Reg}(M,N)\varepsilon_s,$$

то достаточно показать, что каждый элемент из $\pi'_j \operatorname{Reg}(M,N)\varepsilon_i$ является регулярным. Предположим, что $f \in \operatorname{Reg}(M,N)$. Так как

$$\varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i \in \operatorname{Reg}(M,N),$$

то для некоторого элемента $g \in \operatorname{Hom}(N,M)$ имеем

$$\varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i = \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i g \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i.$$

Тогда

$$\pi'_j f \varepsilon_i = \pi'_j \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i \varepsilon_i = \pi'_j \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i g \varepsilon'_j \pi'_j f \varepsilon_i \pi_i \varepsilon_i = (\pi'_j f \varepsilon_i)\pi_i g \varepsilon'_j (\pi'_j f \varepsilon_i).$$

Покажем, что $A \subset \operatorname{Reg}(M,N)$. Так как A является $\operatorname{End}(N)$-$\operatorname{End}(M)$-подмодулем бимодуля ${}_{\operatorname{End}(N)}\operatorname{Hom}(M,N)_{\operatorname{End}(M)}$, то достаточно показать регулярность каждого элемента из A. Предположим противное. Допустим, что в A существует нерегулярный элемент. Тогда в A существует нерегулярный элемент f, у которого в последовательности $f_{11}, \ldots, f_{1n}, \ldots, f_{m1}, \ldots, f_{mn}$, составленной из строк матрицы (f_{ij}), наибольшее количество первых нулей. Пусть $f_{i_0 j_0}$ — первый ненулевой элемент из этой последовательности. Так как $f_{i_0 j_0}$ — регулярный элемент, то для некоторого элемента $g_{j_0i_0} \in \mathrm{Hom}(N_{i_0}, M_{j_0})$ имеем $f_{i_0j_0} = f_{i_0j_0}g_{j_0i_0}f_{i_0j_0}$. Тогда

$$f - f\varepsilon_{j_0}g_{j_0i_0}\pi'_{i_0}f = \\ = \sum_{i,j}\varepsilon'_i f_{ij}\pi_j - \Bigl(\sum_{i,j}\varepsilon'_i f_{ij}\pi_j\Bigr)\varepsilon_{j_0}g_{j_0i_0}\pi'_{i_0}\Bigl(\sum_{i,j}\varepsilon'_i f_{ij}\pi_j\Bigr) = \sum_{i,j}\varepsilon'_i h_{ij}\pi_j,$$

где $h_{ij} = f_{ij} - f_{ij_0}g_{j_0i_0}f_{i_0j}$. Ясно, что $h_{ij} = 0$, когда либо $i < i_0$, либо $i = i_0$, $j < j_0$, либо $i = i_0$, $j = j_0$. Тогда в силу выбора элемента f элемент $f - f\varepsilon_{j_0}g_{j_0i_0}\pi'_{i_0}f$ является регулярным. Из леммы 8.3 следует регулярность элемента f, что противоречит нашим начальным предположениям. □

Из предыдущей теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение.

Теорема 8.6 [42]. *Пусть $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ и $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) $\mathrm{Hom}(A, B)$ *регулярно*;
2) *для каждого $1 \leqslant i \leqslant n$ и для каждого $1 \leqslant j \leqslant m$ $\mathrm{Hom}(A_i, B_j)$ регулярно.*

Правый R-модуль M называется *регулярным по Зельмановичу*, если для каждого $m \in M$ существует такой гомоморфизм $f\colon M \to R$, что $m = mf(m)$. Заметим, что правый R-модуль M регулярен по Зельмановичу тогда и только тогда, когда регулярен канонически изоморфный ему модуль $\mathrm{Hom}(R, M)$. Понятие модуля, регулярного по Зельмановичу, было введено в [54]. Модули, регулярные по Зельмановичу, изучались в [10, 25, 26, 54].

Следующее утверждение следует из теоремы 8.4.

Теорема 8.7. *Каждый модуль содержит наибольший вполне инвариантный подмодуль, состоящий из регулярных по Зельмановичу элементов.*

Теорема 8.8 [54]. *Для модуля $A = \bigoplus_{i\in I} A_i$ следующие условия равносильны*:

1) *A — регулярный по Зельмановичу модуль*;
2) *A_i — регулярный по Зельмановичу модуль для каждого $i \in I$.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем считать, что $|I| < \infty$. Так как имеет место канонический изоморфизм $A \cong \mathrm{Hom}(R, A)$ для каждого правого R-модуля A, то исходная теорема непосредственно следует из теоремы 8.6. □

Следствие 8.9. *Каждый проективный модуль над регулярным кольцом является регулярным модулем.*

Доказательство. Утверждение следует из предыдущей теоремы и того факта, что прямое слагаемое регулярного модуля является регулярным. □

Следствие 8.10. *Если P — конечно порождённый правый R-модуль и R — регулярное кольцо, то $\mathrm{End}_R(P)$ — регулярное кольцо.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{End}_R(P)$. Тогда из [4, 11.1] следует, что $\mathrm{Jm}(f)$ — прямое слагаемое P. Так как модуль P проективен, то $\mathrm{Ker}(f)$ — прямое слагаемое P. Тогда из теоремы 8.1 следует, что f регулярен. □

Следствие 8.11. *Если R — регулярное кольцо, то $\mathrm{M}_n(R)$ — регулярное кольцо.*

Теорема 8.12 [10]. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

1) *M — регулярный по Зельмановичу модуль*;
2) *каждый гомоморфизм $f\colon N \to M$ является локально расщепляющим*;
3) *каждый гомоморфизм $f\colon R_R \to M$ является локально расщепляющим.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Рассмотрим элемент $m_0 \in M$ и такой элемент $n \in N$, что $f(n) = m_0$. По предположению существует такой гомоморфизм $\varphi\colon M \to R_R$, что $m_0 = m_0\varphi(m_0)$. Пусть $g\colon M \to N$ — гомоморфизм правых R-модулей, при котором $g(m) = n\varphi(m)$ для каждого $m \in M$. Тогда $fg(m_0) = f\big(n\varphi(m_0)\big) = m_0\varphi(m_0) = m_0$.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) очевидна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Пусть $m \in M$ и $f\colon R_R \to M$ — такой гомоморфизм правых R-модулей, что $f(r) = mr$ для каждого $r \in R$. Поскольку по условию f локально расщепляющий, то для некоторого R-гомоморфизма $g\colon M \to R_R$ имеем $m = fg(m) = f\big(g(m)\big) = f(1)g(m) = mg(m)$. □

Подмодуль N правого R-модуля M называется *чистым*, если каждая система линейных уравнений

$$x_1r_{i1} + \ldots + x_nr_{in} = b_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

где $r_{ij} \in R$, $b_i \in N$, которая имеет решение в M, разрешима и в N.

Лемма 8.13. *Каждый локально расщепляющий подмодуль модуля M является чистым в M.*

Доказательство. Допустим, что N — локально расщепляющий подмодуль модуля M. Пусть элементы $a_1, \ldots, a_n \in M$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$a_1r_{i1} + \ldots + a_nr_{in} = b_i \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $r_{ij} \in R$, $b_i \in N$. По теореме 3.3 существует такое отображение $f\colon M \to N$, что $f(b_i) = b_i$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда

$$f(a_1)r_{i1} + \ldots + f(a_n)r_{in} = f(b_i) = b_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и $f(a_i) \in N$ для каждого i. □

Лемма 8.14. *Пусть M — локально проективный правый R-модуль и N — чистый подмодуль модуля M. Тогда N локально проективен и является локально расщепляющим подмодулем в M.*

Доказательство. Пусть n — произвольный элемент модуля N. По теореме 3.4 существуют такие гомоморфизмы $f_i\colon M \to R_R$ $(i = 1, \ldots, k)$ и элементы $m_i \in M$ $(i = 1, \ldots, k)$, что

$$n = m_1 f_1(n) + \ldots + m_1 f_1(k).$$

Поскольку N чист в M, то для некоторых элементов $n_i \in N$ $(i = 1, \ldots, k)$ имеем

$$n = n_1 f_1(n) + \ldots + n_1 f_1(k).$$

Рассмотрим отображение $f\colon M \to N$, при котором

$$f(m) = n_1 f_1(m) + \ldots + n_1 f_1(k)$$

для каждого $m \in M$. Тогда $f(n) = n$. Таким образом, N является локально расщепляющим подмодулем в M. Положив $g_i = (f_i)|_N$ для каждого i, мы получим равенство

$$n = n_1 g_1(n) + \ldots + n_1 g_1(k),$$

которое доказывает локальную проективность модуля N. □

Теорема 8.15 [10]. *Для правого R-модуля M следующие условия равносильны*:

1) *M — регулярный по Зельмановичу модуль*;
2) *M — локально проективный регулярный модуль*;
3) *M локально проективен и каждый подмодуль в M является чистым в M.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Если M — модуль, регулярный по Зельмановичу, то из теоремы 8.12 следует, что каждый мономорфизм в модуль M является локально расщепляющим. Следовательно, M — регулярный модуль. Так как согласно теореме 8.12 каждый эпиморфизм на модуль M является локально расщепляющим, то из теоремы 3.4 следует, что модуль M является локально проективным.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) непосредственно следует из леммы 8.13 и того факта, что каждый подмодуль регулярного модуля является локально расщепляющим.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $f\colon N \to M$ — гомоморфизм. Поскольку $f(N)$ чист в M, то из леммы 8.14 следует, что $f(N)$ локально проективен и является локально расщепляющим подмодулем в M. Из локальной проективности модуля $f(N)$ следует, что эпиморфизм $f'\colon N \to f(N)$, где $f'(n) = f(n)$ для каждого $n \in N$, является локально расщепляющим. Тогда из теоремы 3.2 следует, что f — локально расщепляющий гомоморфизм. Таким образом, каждый гомоморфизм в M является локально расщепляющим, и по теореме 8.12 M — модуль, регулярный по Зельмановичу. □

Литература

[1] Абызов А. Н. Вполне идемпотентность Hom // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2011. — Т. 8. — С. 3—8.

[2] Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.

[3] Скорняков Л. А. Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца. — М., 1961.

[4] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.

[5] Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — New York: Springer, 1991.

[6] Andruszkiewicz R. R., Puczylowski E. R. Right fully idempotent rings need not be left fully idempotent // Glasgow Math. J. — 1995. — Vol. 37. — P. 155—157.

[7] Ara P., Perera F. Multipliers of von Neumann regular rings // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 7. — P. 3359—3385.

[8] Assem I., Skowronski A., Simson D. Elements of the Representation Theory of Associative Algebras. Vol. 1. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2006. — (London Math. Soc. Student Texts; Vol. 65).

[9] Auslander M., Reiten I., Smalo S. Representation Theory of Artin Algebras. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. — (Cambridge Stud. Adv. Math.; Vol. 36).

[10] Azumaya G. Some characterizations of regular modules // Publ. Mat. — 1990. — Vol. 34. — P. 241—248.

[11] Baccella G. Von Neumann regularity of V-rings with Artinian primitive factor rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1988. — Vol. 103, no. 3. — P. 747—749.

[12] Baccella G. Semi-Artinian V-rings and semi-Artinian von Neumann regular rings // J. Algebra. — 1995. — Vol. 173. — P. 587—612.

[13] Beidar K. I. On rings with zero total // Contrib. Algebra Geom. — 1997. — Vol. 38. — P. 233—239.

[14] Beidar K. I., Kasch F. Good conditions for the total // Int. Symp. on Ring Theory (Kyongju, 1999) / G. F. Birkenmeier, J. K. Park, Y. S. Park, eds., Boston: Birkhäuser, 2001. — (Trends Math.). — P. 43—65.

[15] Birkenmeier G. F., Kim J. Y., Park J. K. A connection between weak regularity and the simplicity of prime factor rings // Proc. Amer. Math. Soc. — 1994. — Vol. 122. — P. 53—58.

[16] Birkenmeier G. F., Kim J. Y., Park J. K. Regularity conditions and the simplicity of prime factor rings // J. Pure Appl. Algebra. — 1997. — Vol. 115. — P. 213—230.

[17] Brown B., McCoy N. H. The maximal regular ideal of a ring // Proc. Amer. Math. Soc. — 1950. — Vol. 1, no. 2. — P. 165—171.

[18] Burgess W. D., Stephenson W. An analogue of the Pierce sheaf for noncommutative rings // Commun. Algebra. — 1978. — Vol. 6, no. 9. — P. 863—886.

[19] Camillo V., Xiao Y. F. Weakly regular rings // Commun. Algebra. — 1994. — Vol. 22 — P. 4095—4112.

[20] Clark J., Lomp C., Vanaja N., Wisbauer R. Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory. — Boston: Birkhäuser, 2006. — (Frontiers Math.).

[21] Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R. Extending Modules. — London: Pitman, 1994.

[22] Dung N. V., Smith P. F. On semi-Artinian V-modules // J. Pure Appl. Algebra. — 1992. — Vol. 82, no. 1. — P. 27—37.

[23] Goodearl K. R. Von Neumann Regular Rings. — Malabar: Robert E. Krieger, 1991.

[24] Hamza H. I_0-rings and I_0-modules // Math. J. Okayama Univ. — 1998. — Vol. 40. — P. 91—97.

[25] Hirano Y. Regular modules and V-modules // Hiroshima Math. J. — 1981. — Vol. 11, no. 1. — P. 125—142.

[26] Hirano Y. Regular modules and V-modules. II // Math. J. Okayama Univ. — 1981. — Vol. 23, no. 2. — P. 131—135.

[27] Hirano Y. On injective hulls of simple modules // J. Algebra. — 2000. — Vol. 225. — P. 299—308.

[28] Jayaraman M., Vanaja N. Generalization of regular modules // Commun. Algebra. — 2007. — Vol. 35 — P. 3331—3345.

[29] Kaplansky I. Rings with a polynomial identity // Bull. Amer. Math. Soc. — 1948. — Vol. 54. — P. 575—580.

[30] Kasch F. Regular substructures of Hom // Appl. Categ. Structures. — 2008. — Vol. 16. — P. 159—166.

[31] Kasch F., Mader A. Rings, Modules and the Total. — Basel: Birkhäuser, 2004. — (Frontiers Math.).

[32] Kasch F., Mader A. Regularity and substructures of Hom // Commun. Algebra. — 2006. — Vol. 34, no. 4. — P. 1459—1478.

[33] Kelly G. M. On the radical of a category // J. Austral. Math. Soc. — 1964. — Vol. 4. — P. 299—307.

[34] Keskin D. When is a fully idempotent module a V-module? // Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie. — 2010. — Vol. 53, no. 4. — P. 387—391.

[35] Levitzki J. On the structure of algebraic algebras and related rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1953. — Vol. 74, no. 3. — P. 384—409.

[36] Mabuchi T. Weakly regular modules // Osaka J. Math. — 1980. — Vol. 17. — P. 35—40.

[37] Mohamed S., Muller B. J. Continuous and Discrete Modules. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

[38] Von Neumann J. On regular rings // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1936. — Vol. 22. — P. 707—713.

[39] Von Neumann J. Continuous Geometry. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1960.

[40] Nicholson W. K. I-rings // Trans. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 207. — P. 361—373.

[41] Nicholson W. K. Semiregular modules and rings // Can. J. Math. — 1976. — Vol. 28, no. 5. — P. 1105—1120.

[42] Nicholson W. K., Zhou Y. Semiregular morphisms // Commun. Algebra. — 2006. — Vol. 34. — P. 219—233.

[43] Ramamurthi V. S. Weakly regular rings // Can. Math. Bull. — 1973. — Vol. 16. — P. 317—321.

[44] Ramamurthi V. S. A note on regular modules // Bull. Austral. Math. Soc. — Vol. 11. — 1974. — P. 359—364.

[45] Schroer J. On the infinite radical of a module category // Proc. London Math. Soc. — 2000. — Vol. 81. — P. 651—674.

[46] Talebi Y., Vanaja N. Copolyform modules // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — P. 1461—1473.

[47] Tjukavkin D. V. Rings all of whose one-sided ideals are generated by idempotents // Commun. Algebra. — 1989. — Vol. 17, no. 5. — P. 1193—1198.

[48] Tuganbaev A. A. Rings Close to Regular. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.

[49] Tuganbaev A. A. Semiregular, weakly regular, and π-regular rings // J. Math. Sci. — 2002. — Vol. 109, no. 3. — P. 1509—1588.

[50] Ware R. Endomorphism rings of projective modules // Trans. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 155. — P. 233—256.

[51] Watters J. F. Loewy series, V-modules and trace ideals // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27, no. 12. — P. 5951—5965.

[52] Wisbauer R. Co-semisimple modules and nonassociative V-rings // Commun. Algebra. — 1977. — Vol. 5. — P. 1193—1209.

[53] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.

[54] Zelmanowitz J. Regular modules // Trans. Amer. Math. Soc. — 1972. — Vol. 163. — P. 341—355.

[55] Zhou Y. On (semi)regularity and the total of rings and modules // J. Algebra. — 2009. — Vol. 322. — P. 562—578.