Об одном свойстве абелевых групп, связанном с прямыми суммами и произведениями*

О. М. БАБАНСКАЯ (КАТЕРИНЧУК), П. А. КРЫЛОВ
Томский государственный университет
e-mail: krylov@math.tsu.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: группа гомоморфизмов, прямая сумма, прямое произведение.

Аннотация

Пусть T — некоторое бесконечное множество простых чисел, $\mathcal{M}$ — множество групп $\{\mathbb{Z}(p) \mid p \in T\}$. Абелева группа A называется $\mathcal{M}$-большой, если

$$\operatorname{Hom}\Big(A, \bigoplus_{p\in T} \mathbb{Z}(p)\Big) = \operatorname{Hom}\Big(A, \prod_{p\in T} \mathbb{Z}(p)\Big).$$

Даётся характеризация $\mathcal{M}$-больших групп без кручения и смешанных $\mathcal{M}$-больших групп.

Abstract

O. M. Babanskaya (*Katerinchuk*), *P. A. Krylov, On a property of Abelian groups related to direct sums and products*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 7, pp. 39—47.

Let T be an infinite set of prime numbers, $\mathcal{M}$ be a set of groups $\{\mathbb{Z}(p) \mid p \in T\}$. An Abelian group A is said to be $\mathcal{M}$-large if

$$\operatorname{Hom}\Big(A, \bigoplus_{p\in T} \mathbb{Z}(p)\Big) = \operatorname{Hom}\Big(A, \prod_{p\in T} \mathbb{Z}(p)\Big).$$

This paper presents a characterization of $\mathcal{M}$-large torsion-free and mixed groups.

Введение

Между группами гомоморфизмов и прямыми суммами и произведениями абелевых групп имеются разнообразные соотношения. Например, часто используются естественные изоморфизмы

$$\operatorname{Hom}\Big(A, \prod_{i\in I} B_i\Big) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}(A, B_i)$$

*Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009—2013 годы», государственный контракт П937 от 20 августа 2009 г.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 7, с. 39—47.

и

$$\mathrm{Hom}\Big(\bigoplus_{i\in I} B_i, A\Big) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(B_i, A).$$

Если же существует естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i),$$

то говорят, что группа A обладает некоторым свойством малости. Наличие изоморфизма

$$\mathrm{Hom}\Big(\prod_{i\in I} B_i, A\Big) \cong \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(B_i, A)$$

связано с понятием узкой группы. В данной статье, как и в [1], рассматривается ситуация, когда

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\Big) = \mathrm{Hom}\Big(A, \prod_{i\in I} B_i\Big),$$

т. е. для всякого гомоморфизма

$$\varphi\colon A \to \prod_{i\in I} B_i$$

выполняется включение

$$\varphi A \subseteq \bigoplus_{i\in I} B_i.$$

Это эквивалентно также существованию естественного изоморфизма

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\Big) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(A, B_i).$$

Пусть T — некоторое бесконечное множество простых чисел, $\mathcal{M} = \{\mathbb{Z}(p) \mid p \in T\}$. Если для группы A имеет место равенство

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{p\in T} \mathbb{Z}(p)\Big) = \mathrm{Hom}\Big(A, \prod_{p\in T} \mathbb{Z}(p)\Big),$$

то A называется большой относительно множества групп $\mathcal{M}$ или, кратко, $\mathcal{M}$-большой. Свойство, близкое к свойству быть $\mathcal{M}$-большой группой, играет заметную роль в работах [2, 4]. Отметим, что эти свойства служат аналогом того факта, что $\bigoplus_{p\in T} \mathbb{Z}(p)$ — вполне инвариантная подгруппа в $\prod_{p\in T} \mathbb{Z}(p)$. Здесь мы характеризуем произвольные $\mathcal{M}$-большие абелевы группы.

Сделаем одно уточнение по поводу статьи [1]. В ней изучаются группы, большие относительно множества

$$\mathcal{K} = \{J_p \mid J_p \text{ — группа целых } p\text{-адических чисел, } p \in T\},$$

т. е. под группами C_p, фигурирующими в статье, следует понимать группы J_p.

Через P будем обозначать множество всех простых чисел, через T — произвольное (но фиксированное) бесконечное множество простых чисел. Положим

$$V = \bigoplus_{p \in T} \mathbb{Z}(p), \quad \bar{V} = \prod_{p \in T} \mathbb{Z}(p).$$

Существенным для дальнейшего является то, что $\bar{V}$ — сервантно инъективная группа [3].

1. $\mathcal{M}$-большие группы без кручения

Для некоторой группы X положим $\pi(X) = \{p \in \mathrm{P} \mid pX \neq X\}$.

Несложно проверить, что всякая периодическая группа является $\mathcal{M}$-большой.

Перейдём к значительно более содержательному случаю групп без кручения.

Для ненулевого элемента x группы без кручения X определим множество $\theta(x) = \{p \in \mathrm{P} \mid h_p(x) = 0\}$, где $h_p(x)$ — p-высота элемента x в группе X.

Замечание. Если X — группа без кручения и ненулевые элементы $x, y \in X$ линейно зависимы (т. е. существуют такие ненулевые числа $s, t \in \mathbb{Z}$, что $sx = ty$), то $\theta(x) \cap T$ — конечное множество тогда и только тогда, когда $\theta(y) \cap T$ — конечное множество.

Действительно, почти для всех $p \in \mathrm{P}$ имеем $h_p(x) = h_p(y)$.

Лемма 1.1. *Группа X без кручения ранга 1 является $\mathcal{M}$-большой тогда и только тогда, когда $\theta(x) \cap T$ — конечное множество для некоторого ненулевого элемента $x \in X$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть X — $\mathcal{M}$-большая группа. Предположим противное, что существует такой ненулевой элемент $a \in X$, что $\theta(a) \cap T$ — бесконечное множество. Тогда для любого $p \in \theta(a) \cap T$ подгруппа $\langle a \rangle$ p-сервантна в X. Из теории сервантно инъективных групп получается следующее. Возьмём группу

$$G = \prod_{p \in \theta(x) \cap T} \mathbb{Z}(p),$$

и пусть $\psi\colon \langle a \rangle \to G$ — такой гомоморфизм, что $\psi(a) = (c_p)$, где $0 \neq c_p \in \mathbb{Z}(p)$. Тогда ψ продолжается до гомоморфизма $\varphi\colon X \to G \subseteq \bar{V}$. Так как по предположению $\theta(a) \cap T$ — бесконечное множество, то $\varphi X \not\subset V$, что противоречит условию. Значит, $\theta(a) \cap T$ — конечное множество для любого элемента $a \in X$.

Достаточность. Допустим, что X не является $\mathcal{M}$-большой группой. Значит, существует гомоморфизм $\varphi\colon X \to \bar{V}$ со свойством $\varphi X \not\subset V$. Следовательно, найдётся $a \in X$ с образом $\varphi(a) = (y_p) \in \bar{V}$ и $(y_p) \notin V$. Тогда $y_p \neq 0$ для бесконечного множества чисел из T. Пусть $\sigma_p\colon \prod_{p \in T} \mathbb{Z}(p) \to \mathbb{Z}(p)$ — проекция. Тогда $(\sigma_p \varphi)a = y_p$. Если $y_p \neq 0$, то $h_p(y_p) = 0$, значит, и $h_p(a) = 0$. Следовательно, $\theta(a) \cap T$ — бесконечное множество, что противоречит условию. Итак, если

$\theta(x) \cap T$ — конечное множество для некоторого ненулевого элемента $x \in X$, то X — $\mathcal{M}$-большая группа, что и требовалось доказать. □

На основании замечания выше получается, что при рассмотрении вопросов о $\mathcal{M}$-больших группах можно заменять элементы на линейно зависимые от них элементы.

Теорема 1.2. *Группа A без кручения является $\mathcal{M}$-большой тогда и только тогда, когда для каждого ненулевого элемента $x \in A$ множество $\theta(x) \cap T$ является конечным.*

Доказательство. Необходимость. Пусть группа A является $\mathcal{M}$-большой. Допустим, что существует ненулевой элемент $x \in A$, для которого $\theta(x) \cap T$ — бесконечное множество.

Пусть $X = \langle x \rangle_*$ — сервантная подгруппа ранга 1 группы A. По лемме 1.1 существует гомоморфизм $\psi\colon X \to \bar{V}$ со свойством $\psi X \not\subset V$. Так как $\bar{V}$ — сервантно инъективная группа, то ψ продолжается до гомоморфизма $\varphi\colon A \to \bar{V}$ со свойством $\varphi A \not\subset V$. Но это противоречит условию. Таким образом, множество $\theta(x) \cap T$ является конечным.

Достаточность. Пусть $\theta(x) \cap T$ — конечное множество для каждого ненулевого элемента $x \in A$. Предположим, что группа A не является $\mathcal{M}$-большой. Существует гомоморфизм $\varphi\colon A \to \bar{V}$ со свойством $\varphi A \not\subset V$. Следовательно, имеется такой элемент $a \in A$, что $\varphi(a) = (c_p) \in \bar{V}$, где $c_p \in \mathbb{Z}(p)$, но $\varphi(a) = (c_p) \notin V$. В частности, $c_p \neq 0$ для бесконечного множества чисел p из T. Если $c_p \neq 0$, то p-высота элемента c_p равна нулю. Но тогда и $h_p(a) = 0$. Получили, что $\theta(x) \cap T$ — бесконечное множество, что противоречит условию. Следовательно, группа A является $\mathcal{M}$-большой. □

Теорема 1.3. *Пусть A — $\mathcal{M}$-большая группа. Тогда любая сервантная подгруппа B группы A также $\mathcal{M}$-большая.*

Доказательство. Пусть A — $\mathcal{M}$-большая группа. Допустим, что сервантная подгруппа B группы A не является $\mathcal{M}$-большой группой. Тогда существует гомоморфизм $\varphi\colon B \to \bar{V}$, причём $\varphi B \not\subset V$. Гомоморфизм φ продолжается до гомоморфизма $\psi\colon A \to \bar{V}$, что невозможно, поскольку $\psi A \not\subset V$. Значит, B — $\mathcal{M}$-большая группа. □

Теперь применим теорему 1.2 к некоторым группам без кручения.

Следствие 1.4.

1. *Сепарабельная группа A без кручения является $\mathcal{M}$-большой большой тогда и только тогда, когда любое её прямое слагаемое ранга 1 является $\mathcal{M}$-большой группой.*
2. *Вполне разложимая группа $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$ ($r(A_i) = 1$ для всех $i \in I$) является $\mathcal{M}$-большой тогда и только тогда, когда каждая A_i $\mathcal{M}$-большая.*

3. *Группа* $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$ *(A_i — группы без кручения произвольного ранга для любого $i \in I$) является $\mathcal{M}$-большой тогда и только тогда, когда для любого набора элементов $a_i \in A_i$ ($i \in I$) множество $\bigcup\limits_{i \in I} (\theta(a_i) \cap T)$ является конечным.*

Следствие 1.5. *Группа A без кручения конечного ранга n является $\mathcal{M}$-большой тогда и только тогда, когда существует максимальная линейно независимая система элементов $a_1, \ldots, a_n$ группы A, для которой множество $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (\theta(a_i) \cap T)$ является конечным.*

Доказательство. Необходимость. Пусть A — $\mathcal{M}$-большая группа. По теореме 1.2 множества $\theta(a_1) \cap T, \ldots, \theta(a_n) \cap T$ являются конечными. Следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (\theta(a_i) \cap T)$ — конечное множество, где $a_1, \ldots, a_n$ — какая-то максимальная линейно независимая система элементов группы A.

Достаточность. Пусть $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (\theta(a_i) \cap T)$ — конечное множество. Возьмём произвольный ненулевой элемент $x \in A$. Существуют $m \in \mathbb{N}$ и $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{Z}$ со свойством $mx = t_1 a_1 + \ldots + t_n a_n$. Заметим, что $\theta(t_i a_i) \cap T$ — конечное множество для любого $i \in 1, \ldots, n$. Пусть $p \in \theta(mx) \cap T$, и следовательно, $h_p(mx) = 0$. Существует некоторый индекс i, для которого $h_p(t_i a_i) = 0$. Тогда $p \in \theta(t_i a_i) \cap T$ или $p \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} (\theta(t_i a_i) \cap T)$, где $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (\theta(t_i a_i) \cap T)$ — конечное множество. Следовательно, $\theta(mx) \cap T$ — конечное множество. Так как элементы x и mx линейно зависимы, то, используя замечание выше, заключаем, что $\theta(x) \cap T$ — конечное множество. Применяя теорему 1.2, получаем, что A — $\mathcal{M}$-большая группа, что завершает доказательство. □

Пусть T — множество всех простых чисел и A — почти делимая группа, т. е. $pA = A$ для почти всех $p \in T$ или, что равносильно, $\pi(A)$ — конечное множество. Тогда для каждого ненулевого элемента $a \in A$ множество $\theta(a)$ является конечным. Следовательно, A — $\mathcal{M}$-большая группа.

Рассмотрим множество $\mathcal{K}$ групп без кручения

$$\mathcal{K} = \{J_p \mid J_p \text{ — группа целых } p\text{-адических чисел, } p \in T\}$$

(см. [1]). Какова связь между $\mathcal{K}$-большими и $\mathcal{M}$-большими группами?

Если группа A без кручения является $\mathcal{K}$-большой, то она является $\mathcal{M}$-большой. В самом деле, из $\theta(x) \subseteq \pi(X)$ выводим $\theta(x) \cap T \subseteq \pi(X) \cap T$. По теореме 3.2 из [1] $\pi(X) \cap T$ — конечное множество, значит, и $\theta(x) \cap T$ — конечное множество.

Обратное не всегда выполнимо. Рассмотрим группу A без кручения ранга 1 типа $t(A) = [(1, 1, \ldots, 1, \ldots)]$ и будем считать, что $T = \mathrm{P}$. Тогда для каждого ненулевого элемента $a \in A$ множество $\theta(a) = \{p \in \mathrm{P} \mid h_p(a) = 0\}$ является конечным, а $\pi(A) = \{p \in \mathrm{P} \mid pA \neq A\} = P$ — бесконечное множество. Следовательно, согласно теореме 3.3 из [1] группа A не является $\mathcal{K}$-большой.

2. Случай смешанной группы A

Сохраняются все обозначения и соглашения, принятые в разделе 1.

Найдём необходимые и достаточные условия того, чтобы произвольная смешанная группа A была $\mathcal{M}$-большой. Что интересно, эти условия имеют вид условий расщепления некоторых смешанных групп, связанных с A.

Если A — смешанная $\mathcal{M}$-большая группа, то $A/t(A)$ также $\mathcal{M}$-большая группа. Из дальнейшего будет видно, что обратное, вообще говоря, не верно. Правда, в одном важном случае это так.

Для смешанной группы A введём ещё одно множество простых чисел (кроме P и T). Для этого запишем $t(A) = \bigoplus\limits_{p\in S} A_p$, где A_p — (ненулевая) p-компонента группы A. Буква S сохраняет этот смысл до конца раздела.

Теорема 2.1. *Если для смешанной группы A множество $T\cap S$ конечно, то A является $\mathcal{M}$-большой в точности тогда, когда $A/t(A)$ — $\mathcal{M}$-большая группа.*

Доказательство. Требует проверки лишь достаточность. Предположим, что $A/t(A)$ — $\mathcal{M}$-большая группа. Принимая во внимание равенство

$$\bar{V} = \prod_{p\in T\cap S}\mathbb{Z}(p) \oplus \prod_{p\in T\setminus S}\mathbb{Z}(p),$$

достаточно убедиться, что

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{p\in T\setminus S}\mathbb{Z}(p)\Big) = \mathrm{Hom}\Big(A, \prod_{p\in T\setminus S}\mathbb{Z}(p)\Big).$$

Поскольку

$$\mathrm{Hom}\Big(t(A), \prod_{p\in T\setminus S}\mathbb{Z}(p)\Big) = 0,$$

то любой гомоморфизм $A \to \prod\limits_{p\in T\setminus S}\mathbb{Z}(p)$ аннулирует $t(A)$. Поэтому группу

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \prod_{p\in T\setminus S}\mathbb{Z}(p)\Big)$$

можно стандартным образом отождествить с

$$\mathrm{Hom}\Big(A/t(A), \prod_{p\in T\setminus S}\mathbb{Z}(p)\Big),$$

а

$$\mathrm{Hom}\Big(A, \bigoplus_{p\in T\setminus S}\mathbb{Z}(p)\Big) —$$

с

$$\mathrm{Hom}\Big(A/t(A), \bigoplus_{p\in T\setminus S}\mathbb{Z}(p)\Big).$$

Ввиду предположения получаем

$$\operatorname{Hom}\Bigl(A, \prod_{p\in T\setminus S} \mathbb{Z}(p)\Bigr) = \operatorname{Hom}\Bigl(A, \bigoplus_{p\in T\setminus S} \mathbb{Z}(p)\Bigr),$$

и доказательство закончено. □

Простейшей ситуацией для смешанных групп является ситуация расщепляющейся группы. Пусть A расщепляется, т. е. $A = t(A) \oplus C$, где группа без кручения C изоморфна $A/t(A)$. Из равенства

$$\operatorname{Hom}(A, \bar{V}) = \operatorname{Hom}(t(A), \bar{V}) \oplus \operatorname{Hom}(C, \bar{V})$$

и аналогичного равенства для V выводим, что A есть $\mathcal{M}$-большая группа, если и только если C (т. е. $A/t(A)$) $\mathcal{M}$-большая. Чуть ниже мы увидим, что для любой $\mathcal{M}$-большой группы имеет место некоторая расщепляемость.

Периодическая группа G называется элементарной, если порядок каждого её ненулевого элемента свободен от квадратов. Запишем элементарную группу G в виде $G = \bigoplus_{p\in S} G_p$, где G_p — p-компонента. Тогда G_p — элементарная p-группа. Это означает, что порядки её ненулевых элементов равны p. Как хорошо известно, $G_p = \bigoplus \mathbb{Z}(p)$.

Пусть A — некоторая смешанная группа. Сначала рассмотрим наиболее содержательный случай, когда $S \subseteq T$, где по-прежнему S — множество простых чисел p с $A_p \neq 0$.

Теорема 2.2. *Предположим, что A — такая смешанная группа, что $t(A)$ — элементарная группа и $S \subseteq T$. Тогда если A $\mathcal{M}$-большая, то она расщепляется.*

Доказательство. Приведём сначала один простой факт о $\mathcal{M}$-больших группах. Пусть C_p ($p \in T$) — некоторая элементарная p-группа. Положим $C = \bigoplus_{p\in T} C_p$ и $\bar{C} = \prod_{p\in T} C_p$. Проверим, что если A — $\mathcal{M}$-большая группа, то A является большой относительно множества групп $\{C_p \mid p \in T\}$. Под этим мы понимаем, что $\operatorname{Hom}(A, \bar{C}) = \operatorname{Hom}(A, C)$. Допустим, напротив, существование гомоморфизма $\psi\colon A \to \bar{C}$ со свойством $\psi A \not\subseteq C$. Найдётся такой элемент $a \in A$, что $\psi(a) \notin C$. Если $\psi(a) = (x_p) \in \prod_{p\in T} C_p$, $x_p \in C_p$, то $x_p \neq 0$ для бесконечного множества T' чисел из T. Запишем $C_p = \langle x_p\rangle \oplus C'_p$, $p \in T'$. Образуем сумму $X = \bigoplus_{p\in T'} \langle x_p\rangle$ и произведение $\bar{X} = \prod_{p\in T'} \langle x_p\rangle$. Можно записать разложения

$$C = \bigoplus_{p\in T'} \langle x_p\rangle \oplus \bigoplus_{p\in T'} C'_p \oplus \bigoplus_{p\in T\setminus T'} C_p = X \oplus C'$$

и

$$\bar{C} = \prod_{p\in T'} \langle x_p\rangle \oplus \prod_{p\in T'} C'_p \oplus \prod_{p\in T\setminus T'} C_p = \bar{X} \oplus \bar{C}'.$$

Наконец, возьмём гомоморфизм $\varphi = \pi\psi\colon A \to \bar{X}$, где π — проекция $\bar{C} \to \bar{X}$. Для него справедливо $\varphi(a) \notin \bigoplus_{p\in T'} \langle x_p\rangle$. Последнее невозможно ввиду того, что A $\mathcal{M}$-большая. Итак, A — большая относительно $\{C_p \mid p \in T\}$.

Установим расщепляемость A. Тождественное отображение $1_{t(A)}$ группы $t(A)$ можно рассматривать как гомоморфизм $t(A) \to \prod_{p\in T} A_p$. На основании сервантной инъективности группы $\prod_{p\in T} A_p$ это отображение продолжается до гомоморфизма $\tau\colon A \to \prod_{p\in T} A_p$. Как замечено выше, A большая относительно множества групп $\{A_p \mid p \in T\}$, что влечёт $\tau A \subseteq \bigoplus_{p\in T} A_p = t(A)$. Таким образом, τ — эндоморфизм группы A со свойствами $\tau|_{t(A)} = 1$ и $\tau A \subseteq t(A)$. Значит, τ — проекция, т. е. $\tau^2 = \tau$. Тогда

$$A = \operatorname{Im}\tau \oplus \operatorname{Ker}\tau = t(A) \oplus \operatorname{Ker}\tau,$$

что означает расщепляемость A. Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь произвольную смешанную группу A. Напомним, что буква P означает множество всех простых чисел. Введём ещё обозначение $\operatorname{Pt}(A)$ для суммы $\bigoplus_{p\in S} pA_p$. Ясно, что любой гомоморфизм $A \to \bar{V}$ переводит $\operatorname{Pt}(A)$ в ноль. Это даёт равенство $\operatorname{Hom}(A, \bar{V}) = \operatorname{Hom}(A/\operatorname{Pt}(A), \bar{V})$. Положим $\bar{A} = A/\operatorname{Pt}(A)$. Из соотношения $t(\bar{A}) = t(A)/\operatorname{Pt}(A)$ заключаем, что $t(\bar{A})$ — элементарная группа. Справедливы также соотношения

$$\bar{A}/t(\bar{A}) = \big(A/\operatorname{Pt}(A)\big)/\big(t(A)/\operatorname{Pt}(A)\big) \cong A/t(A).$$

Можно сформулировать следующий результат.

Теорема 2.3. *Пусть A — такая смешанная группа, что $S \subseteq T$. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *A $\mathcal{M}$-большая*;
2) *$\bar{A}$ $\mathcal{M}$-большая*;
3) *$A/t(A)$ $\mathcal{M}$-большая и $\bar{A}$ расщепляется.*

Доказательство. Равносильность утверждений 1) и 2) вытекает из равенства $\operatorname{Hom}(A, \bar{V}) = \operatorname{Hom}(\bar{A}, \bar{V})$, так как для любого гомоморфизма $\varphi\colon A \to \bar{V}$ образ $\varphi\operatorname{Pt}(A) = 0$. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) содержится в теореме2.2.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Имеем $\bar{A} = t(\bar{A}) \oplus C$, где $C \cong \bar{A}/t(\bar{A}) \cong$ $\cong A/t(A)$. Очевидно, что $\bar{A}$ $\mathcal{M}$-большая, что и требовалось доказать.

Наконец, пусть A — смешанная группа без всяких добавочных предположений. Случай, когда множество $S \cap T$ конечно, разобран в теореме 2.1. Поэтому считаем это множество бесконечным. Запишем $t(A) = U \oplus W$, где $U = \bigoplus_{p\in S\setminus T} A_p$, W — дополнительное слагаемое. Тогда $\varphi U = 0$ для всех $\varphi\colon A \to \bar{V}$. Значит, $\operatorname{Hom}(A, \bar{V}) = \operatorname{Hom}(A/U, \bar{V})$. Положим $A' = A/U$. Можно утверждать, что группа A $\mathcal{M}$-большая тогда и только тогда, когда A' $\mathcal{M}$-большая. Кроме того, A'

удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и

$$A'/t(A') = (A/U)/(t(A)/U) \cong A/t(A).$$

Таким образом, мы располагаем необходимыми и достаточными условиями того, чтобы произвольная смешанная группа была $\mathcal{M}$-большой. □

Литература

[1] Катеринчук О. М. О K-больших и обобщённо K-больших абелевых группах // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 51—60.

[2] Крылов П. А., Пахомова Е. Г. Абелевы группы как инъективные модули над кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1365—1384.

[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1974.

[4] Grinshpon S. Ya., Krylov P. A. Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of Abelian groups // J. Math. Sci. — 2005. — Vol. 128, no. 3. — P. 2894—2997.

[5] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.