

Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над кольцами

Е. И. БУНИНА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: helenbunina@gmail.com

Л. В. ТУПИКИНА

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: nicol78@inbox.ru

УДК 512.643+512.552.2

Ключевые слова: частично упорядоченные кольца, полугруппа неотрицательных матриц, автоморфизмы.

Аннотация

В данной работе описываются автоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ неотрицательных обратимых матриц в случае, когда R является (не обязательно коммутативным) частично упорядоченным кольцом без делителей нуля, содержащим $1/n$ для некоторого натурального числа $n > 1$.

Abstract

E. I. Bunina, L. V. Tupikina, Automorphisms of the semigroup of nonnegative invertible matrices of order 2 over rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 7, pp. 49–60.

In this paper, we describe automorphisms of the semigroup $G_2(R)$ of nonnegative invertible matrices if R is a (not necessarily commutative) partially ordered ring without zero divisors with $1/n$ for some natural number $n > 1$.

Пусть R — упорядоченное кольцо, $G_k(R)$ — подполугруппа группы $GL_k(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными элементами. В [4] А. В. Михалёв и М. А. Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы $G_k(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $k \geq 2$. В [2] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв описали все автоморфизмы полугруппы $G_k(R)$, если R — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $k \geq 3$. В [3] Е. И. Бунина и П. П. Семёнов описали автоморфизмы полугруппы $G_k(R)$ в случае, когда R является коммутативным частично упорядоченным кольцом, содержащим $\mathbb{Q}$, $k \geq 3$. В [1] Е. И. Бунина описала все автоморфизмы полугруппы

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 7, с. 49–60.

© 2010 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

матриц порядка 2, когда R является коммутативным частично упорядоченным кольцом с $1/2$ и $1/3$.

В этой работе мы описываем автоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ для частично упорядоченных (не обязательно коммутативных) колец с $1/n$ ($n > 1$) и без делителей нуля. Полное описание (совпадающее с описанием при $k \geq 3$) получается для кольца, в котором каждый элемент является суммой конечного числа обратимых.

1. Необходимые определения и понятия, формулировка основной теоремы

Пусть R — ассоциативное кольцо с 1 без делителей нуля.

Определение 1. Кольцо R называется *частично упорядоченным*, если на нём задано отношение частичного порядка $\leq$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\forall x, y, z \in R (x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$;
- 2) $\forall x, y \in R (0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy)$.

Мы будем рассматривать частично упорядоченные кольца с $1/n \geq 0$ для некоторого натурального $n > 1$.

Такие элементы r кольца R , для которых $0 \leq r$, называются *неотрицательными*. Множество всех неотрицательных элементов кольца R обозначается через R_+ .

Определение 2. Пусть R — частично упорядоченное кольцо. Через $G_k(R)$ обозначается подполугруппа группы $GL_k(R)$, состоящая из всех матриц с неотрицательными элементами.

Множество всех обратимых элементов кольца R обозначается через R^* . Если $1/n \in R$, то множество R^* бесконечно, так как оно содержит все $1/n^m$ для $m \in \mathbb{N}$. Множество $R_+ \cap R^*$ обозначается через R_+^* . Если $1/n \in R$, то оно также бесконечно.

Определение 3. Пусть $I = I_2$, $\Gamma_2(R)$ — группа, состоящая из всех обратимых в $G_2(R)$ матриц, $\Sigma_2 = \{e, (12)\}$ — симметрическая группа порядка 2, S_σ — матрица перестановки $\sigma \in \Sigma_2$, в нашем случае таких матриц всего две: I и $S = S_{(12)}$; $S_2 = \{S_\sigma \mid \sigma \in \Sigma_2\} = \{I, S\}$, $\text{diag}[d_1, d_2]$ (или же просто $[d_1, d_2]$) — диагональная матрица с элементами d_1, d_2 на диагонали, $d_1, d_2 \in R_+^*$. Через $D_2(R)$ обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $G_2(R)$.

Определение 4. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ — подмножества в $G_2(R)$, то положим

$$C_{\mathcal{A}}(\mathcal{B}) = \{a \in \mathcal{A} \mid \forall b \in \mathcal{B} (ab = ba)\}.$$

Пусть E_{ij} — матричная единица.

Определение 5. Через $B_{ij}(x)$, $i \neq j$, обозначим матрицу $I + xE_{ij}$. Пусть $\mathbf{P}$ обозначает подполугруппу в $G_2(R)$, порождённую матрицами $S, B_{ij}(x)$ ($x \in R_+$, $i \neq j$) и $\text{diag}[\alpha_1, \alpha_2] \in D_2(R)$.

Определение 6. Две матрицы $A, B \in G_2(R)$ называются $\mathcal{P}$ -эквивалентными (см. [4]), если существуют матрицы $A_j \in G_2(R)$, $j = 0, \dots, k$, $A = A_0$, $B = A_k$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \dots, k-1$, такие что $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$.

Определение 7. Через $GE_2^+(R)$ обозначим подполугруппу в $G_2(R)$, порождённую всеми матрицами, $\mathcal{P}$ -эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$.

Определение 8. Если G — некоторая полугруппа (например, R_+^* , $G_k(R)$ или $GE_k^+(R)$), то гомоморфизм $\lambda(\cdot): G \rightarrow G$ называется *центральной гомоморфизмом*, если $\lambda(G) \subset Z(G)$. Отображение $\Omega(\cdot): G \rightarrow G$, такое что для всех $X \in G$

$$\Omega(X) = \lambda(X) \cdot X,$$

где $\lambda(\cdot)$ — центральный гомоморфизм, называется *центральной гомотетией*.

Для каждой матрицы $M \in \Gamma_2(R)$ пусть Φ_M обозначает такой автоморфизм полугруппы $G_2(R)$, что $\Phi_M(X) = MXM^{-1}$ для всех $X \in G_2(R)$.

Для каждого $y(\cdot) \in \text{Aut}(R_+)$ через Φ^y обозначим такой автоморфизм полугруппы $G_2(R)$, что $\Phi^y(X) = \Phi^y((x_{ij})) = (y(x_{ij}))$ для всех $X = (x_{ij}) \in G_2(R)$.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема. Пусть Φ — автоморфизм полугруппы $G_2(R)$, R — не обязательно коммутативное частично упорядоченное кольцо без делителей нуля, для которого R_+ порождается неотрицательными обратимыми элементами кольца R , $1/n \in R_+$ для некоторого натурального $n > 1$. Тогда на полугруппе $GE_2^+(R)$

$$\Phi = \Phi_M \circ \Phi^c \circ \Omega,$$

где $M \in \Gamma_2(R)$, $c(\cdot) \in \text{Aut}(R_+)$, $\Omega(\cdot)$ — центральная гомотетия полугруппы $GE_2^+(R)$.

2. Построение автоморфизма Φ'

Мы предполагаем, что фиксирован некоторый автоморфизм $\Phi \in \text{Aut}(G_2(R))$, и с помощью его строим новый автоморфизм $\Phi' \in \text{Aut}(G_2(R))$, такой что $\Phi' = \Phi_{M'} \circ \Phi$ для некоторой матрицы $M' \in \Gamma_2(R)$ и $\Phi'(S) = S$.

Лемма 1 [3]. $\forall x, y \in R_+ (x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0)$.

Лемма 2. Пусть R_+ — полукольцо неотрицательных элементов кольца без делителей нуля. Тогда для $r \in R_+$ выполнено $r^l = 1$ для некоторого $l \geq 1$ тогда и только тогда, когда $r = 1$.

Доказательство. Поскольку $r^l - 1 = 0$, то, разложив это выражение на множители, получим

$$(r - 1)(r^{l-1} + r^{l-2} + \dots + r + 1) = 0.$$

Очевидно, что

$$r^{l-1} + r^{l-2} + \dots + r + 1 \geq 1 > 0.$$

Поскольку в кольце нет делителей нуля, получим $r - 1 = 0$, что и требовалось. $\square$

Лемма 3. $\Gamma_2(R) = D_2(R) \cdot \Sigma_2$.

Доказательство. Так как любая мономиальная матрица (матрица, в которой в каждой строке и каждом столбце есть ровно по одному ненулевому числу) обратима, то одно включение очевидно.

Докажем обратное включение. Рассмотрим некоторую матрицу $A = (a_{ij}) \in \Gamma_2(R)$. Нужно показать, что в каждой её строке содержится ровно один ненулевой элемент. Предположим, что это не так, например, оба элемента первой строки ненулевые (для второй строки рассуждения аналогичны). Рассмотрим обратную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

У матрицы B во втором столбце есть хотя бы один ненулевой элемент (так как она обратима). Тогда

$$0 = \delta_{12} = a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2},$$

т. е. по лемме 1 $a_{1,1}b_{1,2} = a_{1,2}b_{2,2} = 0$. Так как в кольце R нет делителей нуля, $a_{1,1}, a_{1,2} \neq 0$, имеем $b_{1,2} = b_{2,2} = 0$. Получили противоречие. Значит, любая обратимая матрица мономиальна.

Заметим также, что представление матрицы из $\Gamma_2(R)$ в виде A_1A_2 , $A_1 \in D_2(R)$, $A_2 \in \Sigma_2$, единственно. $\square$

Лемма 4 (ср. [1, лемма 2]). Если Φ — автоморфизм полугруппы $G_2(R)$, $1/n \in R_+$ для $n > 1$, то

- 1) $\Phi(\Gamma_2(R)) = \Gamma_2(R)$;
- 2) $\Phi(D_2(R)) = D_2(R)$;
- 3) $\Phi(D_2^Z(R)) = D_2^Z(R)$.

Доказательство.

1. Так как $\Gamma_2(R)$ является подгруппой всех обратимых матриц полугруппы $G_2(R)$, то $\Phi(\Gamma_2(R)) = \Gamma_2(R)$ (это верно независимо от обратимости какого-либо натурального числа).

2. Рассмотрим множество F всех матриц $A \in \Gamma_2(R)$, коммутирующих со всеми матрицами, сопряжёнными к A .

Рассмотрим

$$A = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2] \in D_2^Z(R).$$

Тогда любая матрица A' , сопряжённая к A , имеет вид

$$S^\varepsilon \text{diag}[d_1^{-1}, d_2^{-1}] \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2] \text{diag}[d_1, d_2] S^\varepsilon = \text{diag}[\alpha_{\sigma(2)}, \alpha_{\sigma(1)}], \quad \varepsilon = 0, 1, \quad \sigma \in \Sigma_2,$$

т. е. коммутирует с $A = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2]$.

Если мы рассмотрим

$$A = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2] \in D_2(R) \setminus D_2^Z(R),$$

то матрица, сопряжённая к A , также диагональна, но невозможно сказать, коммутирует ли она с $A = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2]$.

Теперь рассмотрим

$$A = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2]S, \quad \alpha_1, \alpha_2 \in R_+^*$$

и некоторую матрицу

$$M = \text{diag}[d_1, d_2] \in D_2^Z(R),$$

чтобы получить матрицу, сопряжённую с A . Имеем

$$M^{-1}AM = \text{diag}[d_1^{-1}, d_2^{-1}] \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2]S \text{diag}[d_1, d_2] = \text{diag}[\gamma_1\alpha_1, \gamma_2\alpha_2]S,$$

где $\gamma_1 = d_1^{-1}d_2$, $\gamma_2 = d_2^{-1}d_1 \in Z(R_+^*)$.

Имеем соотношения

$$A(M^{-1}AM) = \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2]S \text{diag}[\gamma_1\alpha_1, \gamma_2\alpha_2]S,$$

$$(M^{-1}AM)A = \text{diag}[\gamma_1\alpha_1, \gamma_2\alpha_2]S \text{diag}[\alpha_1, \alpha_2]S.$$

Равенство между ними достигается тогда и только тогда, когда $\gamma_1\alpha_1\alpha_2 = \gamma_2\alpha_1\alpha_2$ и $\gamma_1\alpha_2\alpha_1 = \gamma_2\alpha_2\alpha_1$ (так как γ_1, γ_2 лежат в центре). Это равносильно тому, что $\gamma_1 = \gamma_2$, так как α_1 и α_2 обратимы. Значит, $d_2^{-1}d_1 = d_1^{-1}d_2$.

Возьмём $d_1 = 1$, $d_2 = n$, тогда равенство не будет выполнено:

$$A(M^{-1}AM) \neq (M^{-1}AM)A.$$

Поэтому соотношение

$$(A \in \Gamma_2(R)) \wedge (\forall M \in \Gamma_2(R) (M^{-1}AM)A = A(M^{-1}AM))$$

выполняется для всех элементов из $D_2^Z(R)$, может выполняться для некоторых элементов из $D_2(R) \setminus D_2^Z(R)$ и никогда не выполняется для элементов из $\Gamma_2(R) \setminus D_2(R)$.

Ясно, что $\Phi(F) = F$.

Введём на множестве F дополнительное условие

$$(A \in F) \wedge (\forall M \in \Gamma_2(R) (M \neq I \wedge M^2 = I \Rightarrow AM \neq MA)), \quad (1)$$

т. е. « A не коммутирует ни с одной неединичной матрицей второго порядка».

Ясно, что если матрица $A \in D_2(R)$ содержит два одинаковых элемента на диагонали, то она коммутирует с S . Если $A \in D_2^Z(R)$ имеет различные собственные значения, то она удовлетворяет условию (1). Кроме того, это условие может выполняться для некоторых матриц из $D_2(R) \setminus D_2^Z(R)$, но они также должны содержать различные собственные значения. Обозначим множество всех матриц, удовлетворяющих условию (1), через L . Ясно, что $\Phi(L) = L$.

Рассмотрим множество

$$X = \bigcup_{M \in L} C_{\Gamma_2(R)}(M),$$

т. е. множество всех обратимых матриц, коммутирующих с некоторой матрицей из L .

Покажем, что $X = D_2(R)$.

Для того чтобы доказать, что $X \subset D_2(R)$, предположим, что существует недиагональная матрица из X . Тогда она имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть B коммутирует с какой-то диагональной матрицей $\text{diag}[\alpha, \beta] \in L$. Это означает, что

$$\begin{cases} \beta b = b\alpha, \\ \alpha a = a\beta, \end{cases}$$

откуда следует, что матрица $\text{diag}[\alpha, \beta]$ коммутирует с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ a^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

имеющей порядок 2. Это означает, что $\text{diag}[\alpha, \beta]$ не лежит в L . Полученное противоречие показывает, что $X \subset D_2(R)$.

Чтобы доказать, что $D_2(R) \subset X$, рассмотрим матрицу

$$M = \text{diag}[1, n] \in D_2^Z(R).$$

Очевидно, что $M \in L$ и $C_{\Gamma_2(R)}(M) = D_2(R)$. Так как $C_{\Gamma_2(R)}(M) \subset X$, имеем $D_2(X) \subset X$.

Таким образом, $X = D_2(R)$.

Ясно, что $\Phi(X) = X$. Значит, $\Phi(D_2(R)) = D_2(R)$.

3. Так как $C_{\Gamma_2(R)}(D_2(R)) = D_2^Z(R)$ и $\Phi(D_2(R)) = D_2(R)$, то $\Phi(D_2^Z(R)) = D_2^Z(R)$. $\square$

Лемма 5. Если Φ является автоморфизмом полугруппы $G_2(R)$, то существует такая матрица $M \in \Gamma_2(R)$, что $\Phi_M \Phi(S) = S$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \Phi(S),$$

для неё $A^2 = I$. Следовательно, $ab + bd = 0$. Тогда по лемме 1 $ab = bd = 0$, $ca + dc = 0$, откуда следует, что $ca = dc = 0$. Значит, либо $a = d = 0$, $bc = cb = 1$, либо $b = c = 0$, $a^2 = d^2 = 1$. Во втором случае $a = d = 1$, что невозможно. Значит,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

После сопряжения матрицы A с помощью диагональной матрицы $M^{-1} = \text{diag}[b, 1]$ мы получим матрицу S . Таким образом, мы нашли такую матрицу $M \in \Gamma_2(R)$, что $\Phi_M \Phi(S) = S$. $\square$

По нашему автоморфизму Φ мы построили новый автоморфизм $\Phi' = \Phi_M \Phi$, такой что $\Phi'(S) = S$. Мы предположим, что такой автоморфизм Φ' фиксирован.

Лемма 6. В наших предположениях для любых $x_1, x_2 \in R_+^*$, таких что $x_1 \neq x_2$, справедливо

$$\begin{aligned}\Phi'(A_1) &= \Phi'(\text{diag}[x_1, 1]) = \text{diag}[\xi_1, \eta_1], \\ \Phi'(A_2) &= \Phi'(\text{diag}[x_2, 1]) = \text{diag}[\xi_2, \eta_2],\end{aligned}$$

где $\xi_1 \eta_1^{-1} \neq \xi_2 \eta_2^{-1}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторых различных $x_1, x_2 \in R_+^*$ имеет место $\xi_1 \eta_1^{-1} = \xi_2 \eta_2^{-1}$, т. е.

$$\begin{aligned}\Phi'(A_1) &= \Phi'(\text{diag}[x_1, 1]) = \text{diag}[\xi, \eta] = A'_1, \\ \Phi'(A_2) &= \Phi'(\text{diag}[x_2, 1]) = \alpha \cdot \text{diag}[\xi, \eta] = A'_2.\end{aligned}$$

Значит,

$$\Phi'^{-1}(\alpha I) = \Phi'^{-1}(A'_1 A'_2{}^{-1}) = \text{diag}[x_1 x_2^{-1}, 1] = \text{diag}[\beta, 1],$$

где $1 \neq \beta \in R_+^*$, что невозможно. Таким образом, $\xi_1 \eta_1^{-1} \neq \xi_2 \eta_2^{-1}$. $\square$

3. Доказательство теоремы

Лемма 7. Пусть элементы матрицы $A \in G_2(R)$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ коммутируют друг с другом. Тогда элементы матрицы A^n (многочлены от $\alpha, \beta, \gamma, \delta$)

$$A^n = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} P_{1,n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & P_{2,n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ P_{3,n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & P_{4,n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{pmatrix}$$

удовлетворяют соотношениям

$$P_{1,n} + \delta P_n = P_{4,n} + \alpha P_n, \quad (2)$$

$$P_{2,n} = \beta P_n, \quad (3)$$

$$P_{3,n} = \gamma P_n \quad (4)$$

для некоторого многочлена $P_n(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

Доказательство. Докажем все соотношения сразу по индукции. Для $n = 1$ имеем $P_1 = 1$, $\alpha + \delta = \alpha + \delta$. Для $n = 2$ имеем

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \beta(\alpha + \delta) \\ \gamma(\alpha + \delta) & \delta^2 + \gamma\beta \end{pmatrix}.$$

Предположим, что соотношение $P_{1,n} + \delta P_n = P_{4,n} + \alpha P_n$ выполнено для некоторого $n > 2$. Тогда для $n + 1$ имеем

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} P_{1,(n+1)} & P_{2,(n+1)} \\ P_{3,(n+1)} & P_{4,(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha P_{1,n} + \beta\gamma P_n & \beta(P_{1,n} + \delta P_n) \\ \gamma(\alpha P_n + P_{4,n}) & \delta P_{4,n} + \beta\gamma P_n \end{pmatrix}.$$

Выполнено соотношение

$$P_{1,(n+1)} + \delta P_{n+1} = P_{4,(n+1)} + \alpha P_n + 1$$

для $P_{n+1} = P_{1,n} + \delta P_n$, так как

$$\alpha P_{1,n} + \beta \gamma P_n + \delta P_{1,n} + \delta^2 P_n = \delta P_{4,n} + \beta \gamma P_n + \alpha P_{1,n} + \alpha \delta P_n,$$

и

$$\delta P_{1,n} + \delta^2 P_n = \delta P_{4,n} + \alpha \delta P_n$$

(по соотношению (2)). $\square$

Лемма 8. В наших предположениях для $\Phi' \in \text{Aut}(G_2(R))$, такого что $\Phi'(S) = S$, существует матрица M из $G_2(R)$ (при этом M либо единичная, либо S), для которой $\Phi_M \Phi'(B_{12}(1)) = B_{12}(1)$.

Доказательство. Пусть

$$\Phi'(B_{12}(1)) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G_2(R).$$

Пусть для каждого $x \in R_+^*$

$$\Phi'(\text{diag}[1, x]) = \text{diag}[\xi(x), \eta(x)], \quad \xi(x), \eta(x) \in R_+^*,$$

где ξ, η — эндоморфизмы полугруппы R_+^* (по умножению). По лемме 4 если $x \in Z(R_+^*)$, то $\xi(x), \eta(x) \in Z(R_+^*)$. Так как для любого $x \in Z(R_+^*)$

$$(B_{12}(x)) = (\text{diag}[1, x] B_{12}(1) \text{diag}[1, x^{-1}]),$$

то

$$\Phi'[B_{12}(x)] = \text{diag}[\xi(x), \eta(x)] \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{diag}[\xi(x)^{-1}, \eta(x)^{-1}] = \begin{pmatrix} \alpha & \nu(x^{-1})\beta \\ \nu(x)\gamma & \delta \end{pmatrix}$$

для $\nu(x) = \xi(x)\eta(x)^{-1}$. По лемме 6 для $x_1 \neq x_2$ имеем $\nu(x_1) \neq \nu(x_2)$.

Так как матрица $B_{12}(1)$ коммутирует с любой скалярной матрицей (даже такой, что скаляр не лежит в центре кольца), то её образ должен коммутировать с образом любой скалярной матрицы, т. е. с любой скалярной матрицей (скалярные матрицы — это диагональные матрицы, коммутирующие с S). Значит, элементы $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ коммутируют со всеми обратимыми неотрицательными элементами кольца R , а значит, и со всеми неотрицательными элементами.

Так как $B_{12}(1)^n = B_{12}(n)$, то

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} P_{1,n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & P_{2,n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ P_{3,n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & P_{4,n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \nu(n)^{-1}\beta \\ \nu(n)\gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где $P_{i,n}$, $i = 1, \dots, 4$, — многочлены от $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ из предыдущей леммы. Для них выполнено $P_{2,n} = \beta P_n$, $P_{3,n} = \gamma P_n$ (по предыдущей лемме). Тогда из равенства

$$\begin{pmatrix} P_{1,n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & P_n(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\beta \\ P_n(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\gamma & P_{4,n}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \nu(n)^{-1}\beta \\ \nu(n)\gamma & \delta \end{pmatrix}$$

следует $(P_n - \nu(n))\beta = 0 = (P_n - \nu(n)^{-1})\gamma$. Если $\beta\gamma \neq 0$, то $\nu(n) = \nu(n)^{-1}$, что невозможно, так как $\nu(n) \neq 1$ (по лемме 2). Значит, либо $\beta = 0$, либо $\gamma = 0$.

Предположим, что $\gamma = 0$ (для $\beta = 0$ все рассуждения аналогичны).

Для случая $1/n = 1/2 \in R$ рассмотрим соотношение

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим к нему наш автоморфизм и после перемножения матриц получим соотношение

$$\begin{pmatrix} 1 + 3/2\beta^2 & 3/2\beta + 3/2\beta^3 \\ 3\beta & 1 + 3\beta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3/2\beta^2 & 3\beta \\ 3/2\beta + 3/2\beta^3 & 1 + 3\beta^2 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $3\beta = 3\beta^3$, т. е. $\beta^2 = 1$, так как $3\beta \neq 0$. Таким образом, $\beta = 1$, и мы получаем, что $\Phi(B_{12}(1)) = B_{12}(1)$. Если же $\Phi(B_{12}(1)) = B_{21}(1)$, то в качестве M для автоморфизма Φ_M возьмём матрицу S .

Для случая, когда в кольце есть $1/n$ и $n \geq 3$ нечётно, соотношение будет иметь вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & (1/n) \cdot ((n^2 - 1)/2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1/n) \cdot ((n^2 - 1)/2) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/n & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Применим к нему автоморфизм Φ' . После перемножения матриц получим соотношение

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 & \beta(n^2 - 1)(1 + \beta^2)/2\beta + \beta/n \\ n\beta & n\beta^2(n - 1/n)/2 + 1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 & n\beta \\ \beta(n^2 - 1)(1 + \beta^2)/2\beta + \beta/n & n\beta^2(n - 1/n)/2 + 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

откуда следует, что $\beta(n^2 - 1) = \beta^3(n^2 - 1)$. Тогда $\beta^2 = 1$, так как $(n^2 - 1)\beta \neq 0$. Таким образом, $\beta = 1$, и мы получаем $\Phi(B_{12}(1)) = B_{12}(1)$. Лемма доказана. $\square$

Обозначим через $\tilde{R}$ подкольцо кольца R , порождённое положительными и отрицательными обратимыми элементами из R . Оно состоит из сумм вида

$$\sum_{i=1}^n \pm r_i, \quad r_i \in R_+^*.$$

Лемма 9. Для рассматриваемого автоморфизма Φ'' существуют автоморфизм $\tilde{\gamma}$ кольца $\tilde{R}$ и гомоморфизм $\beta: R_+^* \rightarrow R_+^*$ полугруппы R_+^* всех неотрицательных обратимых элементов кольца R , такие что

- 1) $\Phi''(S) = S$;
- 2) $\Phi''(B_{12}(x)) = B_{12}(\gamma(x))$;
- 3) $\Phi''(\text{diag}[a, b]) = \text{diag}[\gamma(a)\beta(ab), \gamma(b)\beta(ab)]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $x \in R_+^*$. Так как $\Phi''(B_{12}(1)) = B_{12}(1)$ и $\Phi''(\text{diag}[1, x]) = \text{diag}[\alpha, \beta]$, то $\Phi''(B_{12}(x)) = B_{12}(y)$. Обозначим отображение $x \mapsto y$ через $\gamma: R_+^* \rightarrow R_+^*$. Ясно, что это отображение биективно. Продолжим отображение γ на всё полукольцо R_+ благодаря его аддитивности: $B_{21}(x + y) = B_{21}(x)B_{21}(y)$. В частности, $\gamma(n) = n$, $\gamma(1/n) = 1/n$. Это следует из соотношения

$$(B_{21}(1))^n = B_{21}(n) = B_{21}(\gamma(n)).$$

Рассмотрим образ произвольной матрицы $\text{diag}[a, 1]$, $a \in R_+^*$. Это некоторая матрица $\text{diag}[\alpha, \beta]$. Обозначим соответствующие отображения $a \mapsto \alpha$ и $a \mapsto \beta$ через $\alpha, \beta: R_+^* \rightarrow R_+^*$. Оба отображения являются эндоморфизмами полугруппы R_+ .

По построению

$$\begin{aligned} \Phi''(\text{diag}[a, b]) &= \Phi''(\text{diag}[a, 1] \text{diag}[1, b]) = \Phi''(\text{diag}[a, 1]S \text{diag}[b, 1]S) = \\ &= \text{diag}[\alpha(a), \beta(a)] \text{diag}[\beta(b), \alpha(b)] = \text{diag}[\alpha(a)\beta(b), \beta(a)\alpha(b)]. \end{aligned}$$

Покажем, что элементы $\alpha(a), \beta(b)$ коммутируют. Имеем

$$\Phi''([1, a]) = S[\alpha(a), \beta(a)]S = [\beta(a), \alpha(a)].$$

Так как коммутируют диагональные матрицы вида $[a, 1]$, $[1, b]$, то коммутируют и их образы, а значит, $\alpha(a)\beta(b) = \beta(b)\alpha(a)$.

Пусть $x \in R_+^*$. Тогда имеем

$$\text{diag}[x, x]B_{12}(x) = \text{diag}[x, 1]B_{12}(1) \text{diag}[1, x],$$

откуда следует, что

$$\text{diag}[\alpha(x)\beta(x), \alpha(x)\beta(x)]B_{12}(\gamma(x)) = \text{diag}[\alpha(x), \beta(x)]B_{12}(1) \text{diag}[\beta(x), \alpha(x)],$$

т. е.

$$\alpha(x)\beta(x)\gamma(x) = \alpha(x)^2.$$

Следовательно,

$$\gamma(x) = \alpha(x)\beta(x)^{-1},$$

и для каждого элемента $x \in R_+^*$ мы можем теперь писать

$$\Phi''(\text{diag}[x, 1]) = \text{diag}[\gamma(x)\beta(x), \beta(x)].$$

Так как отображения α и β мультипликативны, то отображение γ мультипликативно на обратимых (в кольце R) элементах. Так как неотрицательные обратимые элементы кольца R по нашему условию порождают полукольцо R_+ , а отображение γ по доказанному аддитивно, то γ мультипликативно на всех элементах полукольца R_+ , а значит, является его автоморфизмом.

Теперь продолжим этот автоморфизм γ полукольца R_+ не до автоморфизма на всём кольце, а только до автоморфизма на его подкольце $\tilde{R}$. Получим отображение $\tilde{\gamma}: \tilde{R} \rightarrow \tilde{R}$. Докажем, что оно является автоморфизмом полукольца $\tilde{R}_+$.

Для отображения $\tilde{\gamma}$, очевидно, выполнено

$$\tilde{\gamma}\left(\sum_{i=1}^n \pm r_i\right) = \sum \tilde{\gamma}(\pm r_i).$$

Очевидно, что

$$\sum (\pm r_i) = \sum (\pm s_j)$$

тогда и только тогда, когда

$$\sum \pm (\tilde{\gamma}(r_i)) = \sum \pm (\tilde{\gamma}(s_j)).$$

Аналогично

$$\tilde{\gamma}(x_1 \cdot x_2) = \tilde{\gamma}(x_1) \cdot \tilde{\gamma}(x_2).$$

Значит, автоморфизм $\tilde{\gamma}$ определён корректно, сюръективен, аддитивен и мультипликативен, т. е. является автоморфизмом замыкания полукольца с сохранением порядка в кольце. Таким образом, все пункты леммы доказаны. $\square$

Лемма 10. На полугруппе $\text{GE}_2^+(R)$ автоморфизм Φ'' является композицией автоморфизма, индуцированного автоморфизмом полукольца R_+ , и центральной гомотетии:

$$\Phi'' = \Phi^\gamma \circ \Omega.$$

Доказательство. Рассмотрим автоморфизм $\Phi''' = \Phi^{\gamma^{-1}} \circ \Phi''$. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi'''(S) &= S, \\ \Phi'''(B_{12}(x)) &= \Phi^{\gamma^{-1}}(B_{12}(\gamma(x))) = B_{12}(x), \\ \Phi'''(\text{diag}[a, b]) &= \Phi^{\gamma^{-1}}(\text{diag}[\gamma(a)\beta(ab), \gamma(b)\beta(ab)]) = \\ &= \text{diag}[a\gamma^{-1}\beta(ab), b\gamma^{-1}\beta(ab)] = \mu(ab) \text{diag}[a, b], \end{aligned}$$

где $\gamma^{-1}\beta$ обозначен через μ . Докажем, что $\mu(ab) \in Z(R_+^*)$, т. е. что Φ''' — центральная гомотетия.

Сначала докажем, что $\mu(x)x = x\mu(x)$ для всех $x \in R_+^*$.

Рассмотрим соотношение

$$\text{diag}[x, x]B_{12}(x) = \text{diag}[x, 1]B_{12}(1)\text{diag}[1, x].$$

Имеем

$$\text{diag}[\mu(x)^2x, \mu(x)^2x]B_{12}(x) = \text{diag}[\mu(x)x, \mu(x)]B_{12}(1)\text{diag}[\mu(x), \mu(x)x].$$

Перемножив матрицы в последнем соотношении, получим

$$\begin{pmatrix} \mu(x)^2x & \mu(x)^2x^2 \\ 0 & \mu(x)^2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu(x)x\mu(x) & (\mu(x)x)^2 \\ 0 & \mu(x)^2x \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\mu(x)^2x = \mu(x)x\mu(x)$, следовательно, $\mu(x)x = x\mu(x)$.

Теперь рассмотрим соотношение

$$\text{diag}[x, 1]B_{12}(y)\text{diag}[x^{-1}, 1] = B_{12}(xy).$$

Имеем

$$\operatorname{diag}[\mu(x)x, \mu(x)]B_{12}(y)\operatorname{diag}[\mu(x^{-1})x^{-1}, \mu(x^{-1})] = B_{12}(xy).$$

Перемножив матрицы в последнем соотношении и используя равенство $\mu(x)x = x\mu(x)$, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & \mu(x)xy\mu(x^{-1}) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & xy \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $\mu(x)xy\mu(x^{-1}) = xy$ для всех $x \in R_+$, $y \in R_+^*$.

Значит, $\mu(x)$ коммутирует с любыми элементами кольца R . Поэтому Φ''' является центральной гомотетией полугруппы $\operatorname{GE}_n^+(R)$. $\square$

Основная теорема теперь следует из леммы 9.

Пример. Приведём пример частично упорядоченного некоммутативного кольца без делителей нуля, которое порождается своими положительными и отрицательными обратимыми элементами.

Таким примером может служить кольцо многочленов Лорана от двух переменных x, y с условием $yx = \alpha xy$, $\alpha \geq 0$. Если считать неотрицательными многочлены, у которых все коэффициенты неотрицательны, то такое кольцо окажется частично упорядоченным.

Литература

- [1] Бунина Е. И. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц порядка 2 с неотрицательными элементами над частично упорядоченными коммутативными кольцами // Мат. заметки. — В печати.
- [2] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 3—23.
- [3] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными коммутативными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 65—100.
- [4] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Мат. сб. — 1970. — Т. 81, № 4. — С. 600—609.