Модули над обобщениями кольца псевдорациональных чисел*

Е. Г. ЗИНОВЬЕВ
Томский государственный университет
e-mail: egor_zinoviev@mail.ru

УДК 512.553

Ключевые слова: инъективный модуль, проективный модуль, csp-кольцо.

Аннотация

Даётся описание инъективных и конечно порождённых проективных модулей над так называемым csp-кольцом.

Abstract

E. G. Zinov'ev, Modules over generalized rings of pseudo-rational numbers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 7, pp. 61—67.

A description of injective and finitely generated projective modules over the so-called csp-ring is presented.

Пусть P — некоторое бесконечное множество простых чисел. Для каждого $p \in P$ пусть $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$, где $k \in \mathbb{N}$, или $R_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$ (здесь $\mathbb{Z}_{p^k}$ — кольцо вычетов по модулю p^k, $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел). Положим

$$K = \prod_{p \in P} R_p, \quad T = \bigoplus_{p \in P} R_p.$$

Подкольцо R кольца K назовём csp-кольцом, если $T \subset R$ и R/T — некоторое поле. Отметим, что R — коммутативное кольцо.

R будет кольцом псевдорациональных чисел, когда $R/T \cong \mathbb{Q}$ (см. [4, 5, 7, 8]. Приведём кратко некоторые результаты работ [1] и [2].

Свойства кольца R.

1. Для произвольного идемпотента ε кольца R справедливо следующее: либо он является суммой единичных элементов некоторых колец R_p, либо $1 - \varepsilon$ имеет подобное строение.

*Работа частично профинансирована Федеральным агентством по науке и инновациям России по контракту 02.740.11.0238.

2. Обозначим через ε_p идемпотент кольца R, у которого p-я компонента равна 1, а все остальные компоненты равны 0. Положим
$$\varepsilon = \varepsilon_{p_1} + \ldots + \varepsilon_{p_k},$$
где $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа, $k \in \mathbb{N}$. Тогда каждый отличный от 0 элемент $r \in R$ можно представить в виде
$$r = \varepsilon r + (1 - \varepsilon) r$$
для некоторого ε, где $\varepsilon r \in T$, а $(1-\varepsilon) r$ — элемент, каждая ненулевая координата которого является обратимым элементом в соответствующем кольце R_p.

Далее под ε понимаем введённый выше элемент.

3. Пусть I — идеал кольца R. Тогда справедливы следующие утверждения:
   а) если $I \subset T$, то
   $$I = \bigoplus_{p \in P} (I \cap R_p);$$
   б) если $I \not\subset T$, то
   $$I = (1-\varepsilon) R \oplus \bigoplus_{p \in S} (I \cap R_p),$$
   где $1 - \varepsilon$ — идемпотент кольца R, S — некоторое конечное множество простых чисел;
   в) любой конечно порождённый идеал кольца R является главным, т. е. R — кольцо Безу.
4. Идеал I кольца R является максимальным тогда и только тогда, когда $I = T$ или $I = (1 - \varepsilon_p) R \oplus pR_p$ для некоторого $p \in P$.
5. Радикал Джекобсона кольца R равен $\bigoplus\limits_{p \in P} pR_p$.
6. Изучение фактор-колец достаточно провести для ситуации, когда $I \subset T$. При этом возможны три случая:
   а) если $I \subset R_{p_1} \oplus \ldots \oplus R_{p_n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то
   $$R/I \cong R_1 \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} R_{p_i} / I \cap R_{p_i},$$
   где R_1 — некоторый идеал в R, являющийся прямым слагаемым;
   б) если $I \cap R_p \neq 0$ и $I \cap R_p \neq R_p$ для бесконечного множества чисел p из P, то R/I является некоторым csp-кольцом;
   в) если $I \cap R_p = R_p$ для почти всех чисел p из P, то
   $$R/I \cong R/T \oplus \bigoplus_{i=1}^{n} R_{p_i} / I \cap R_{p_i}.$$
7. R-модуль M прост тогда и только тогда, когда $M \cong \mathbb{Z}_p$ для некоторого $p \in P$ или $M \cong R/T$.

Справедлива также следующая теорема (см. [1, 2]).

Теорема 1. *Всякий R-модуль M равен $A \oplus D$, где D — наибольший подмодуль в M, являющийся F-пространством, а A — подмодуль, не содержащий ненулевых F-пространств.*

Для кольца псевдорациональных чисел теорема 1 доказана в [8]. Далее рассмотрим ряд других вопросов о модулях над csp-кольцами.

Пусть R — csp-кольцо. Для каждого $p \in P$ имеет место разложение $R = R_p \oplus K_p$, где K_p — дополнительное прямое слагаемое. Если A — R-модуль, то $A = R_pA \oplus K_pA$. Нетрудно убедиться, что либо $R_pA = 0$, либо R_pA — наибольший R_p-подмодуль в A. Далее R_pA будем обозначать через A_p.

Определение 1. Подмодуль A R-модуля B называется чистым подмодулем в B, если для любого неделителя нуля $r \in R$ и любого элемента $a \in A$ из разрешимости уравнения $rx = a$ в B следует его разрешимость в A.

Предложение 1. *Пусть A — R-модуль, не содержащий F-пространств. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *существуют естественные вложения R-модулей*
$$\bigoplus_{p\in P} A_p \subseteq A \subseteq \prod_{p\in P} A_p;$$

2) $\Big(\prod\limits_{p\in P} A_p\Big)/A$ — *F-пространство;*

3) A — *чистый подмодуль в* $\prod\limits_{p\in P} A_p$.

Доказательство. Пусть A — R-модуль, не содержащий F-пространств. Докажем первое утверждение. Поскольку $A_p = \varepsilon_pA$, то $A_q \cap \sum\limits_{p\neq q} A_p = 0$ для всех $p \in P$. Поэтому $\sum\limits_{p\in P} A_p$ — прямая сумма и $\bigoplus\limits_{p\in P} A_p \subseteq A$. Рассмотрим отображение $f\colon A \to \prod\limits_{p\in P} A_p$, действующее по правилу $f(a) = (a_p)$, $a \in A$. Здесь (a_p) — вектор, у которого $a_p = \varepsilon_pa$ при всех $p \in P$. Тогда $\operatorname{Ker} f = \{a \in A \mid \varepsilon_pa = 0$ для всех $p \in P\} = 0$, поскольку A не содержит F-пространств.

Второе утверждение следует из того, что $T\Big(\Big(\prod\limits_{p\in P} A_p\Big)/A\Big) = 0$.

Покажем, что A — чистый R-модуль в $\prod\limits_{p\in P} A_p$. Пусть r — неделитель нуля кольца R, $a \in A$ и существует такой элемент $a_1 \in \prod\limits_{p\in P} A_p$, что $ra_1 = a$. Поскольку R/T — поле, то существует такой элемент $s \in R$, что $rs = 1_R + t$, где $t \in T$. Тогда $sa = sra_1 = a_1 + ta_1$. Из $ta_1 \in \bigoplus\limits_{p\in P} A_p$, $sa \in A$ выводим $a_1 \in A$, что показывает нужную чистоту. $\square$

R-модуль C будем называть делимым, если $rC = C$ для всех неделителей нуля r из R.

Всякое F-пространство является, очевидно, делимым R-модулем. Поэтому описание делимых R-модулей достаточно провести для R-модулей, не содержащих F-пространств (см. теорему 1). Для этого потребуются следующие хорошо известные результаты.

Предложение 2. *p-адический модуль делим тогда и только тогда, когда он инъективен.*

Предложение 3. *Каждый модуль над $\mathbb{Z}_{p^k}$, где $k \in \mathbb{N}$, делим.*

Отметим, что модуль над $\mathbb{Z}_{p^k}$ ($k \in \mathbb{N}$) инъективен тогда и только тогда, когда он является прямой суммой групп, изоморфных группе $\mathbb{Z}(p^k)$.

Следующая лемма является простым обобщением соответствующей леммы в [7].

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $R_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$, то делимый p-адический модуль является инъективным R-модулем.*
2. *Если $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$, то инъективный модуль над $\mathbb{Z}_{p^k}$, где $k \in \mathbb{N}$, является инъективным R-модулем.*

Лемма 2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$. Тогда делимый $\mathbb{Z}_{p^k}$-модуль является делимым R-модулем.*

Доказательство. Пусть C — делимый $\mathbb{Z}_{p^k}$-модуль. Поскольку существует проекция $\varphi\colon R \to \mathbb{Z}_{p^k}$, то C — R-модуль. Пусть $c \in C$, $r \in R$. Тогда существуют такие $\alpha \in \mathbb{Z}_{p^k}$ и $c_1 \in C$, что $\alpha c_1 = c$ и $\varphi(r) = \alpha$. Тогда $rc_1 = c$. Таким образом, C_R — делимый R-модуль. □

Теорема 2. *R-модуль C, не содержащий F-пространств, делим тогда и только тогда, когда $\varepsilon_p C$ — делимый R_p-модуль для всех таких $p \in P$, что $R_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Если $\varepsilon_p C$ — делимый R_p-модуль, то $\varepsilon_p C$ — делимый R-модуль для любого $p \in P$ (лемма 2). Тогда $\prod\limits_{p \in P} C_p$ — делимый R-модуль. Используя предложение 1, получаем, что C — делимый R-модуль. □

Следствие. *Пусть для всех $p \in P$ $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$, где $k \in \mathbb{N}$. Тогда каждый R-модуль делим.*

Определение 2. Модуль M называется инъективным, если он удовлетворяет следующим эквивалентным условиям:

1) каждый мономорфизм $\xi\colon M \to B$ является расщепляющимся (т. е. $\mathrm{im}(\xi)$ — прямое слагаемое в B);
2) для каждого мономорфизма $\alpha\colon A \to B$ и каждого гомоморфизма $\varphi\colon A \to M$ существует такой гомоморфизм $\lambda\colon B \to M$, что $\varphi = \lambda\alpha$.

Учитывая, что каждый R-модуль, являющийся F-пространством, инъективен, достаточно рассмотреть R-модули, не содержащие F-пространств. Следующий факт известен.

Предложение 4. *Для всякого делимого p-адического модуля D имеет место разложение $D = D_p \oplus A_p$, где D_p — векторное пространство над полем p-адических чисел $\hat{\mathbb{Q}}_p$, A_p — делимый периодический $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модуль.*

Описание инъективных модулей над кольцом псевдорациональных чисел дано в [7], оно допускает обобщение на случай csp-колец.

Теорема 3. *R-модуль, не содержащий F-пространств, инъективен тогда и только тогда, когда он имеет вид $\prod\limits_{p\in P} C_p$, где C_p — инъективный модуль над $\mathbb{Z}_{p^k}$, если $R_p = \mathbb{Z}_{p^k}$, или $C_p = D_p \oplus A_p$, если $R_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$, где D_p — векторное пространство над полем p-адических чисел $\hat{\mathbb{Q}}_p$, A_p — делимый периодический $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модуль.*

Доказательство. Заметим, что $\prod\limits_{p\in P} C_p$ — инъективный R-модуль (лемма 1). Обратно, пусть M — инъективный редуцированный R-модуль. Тогда $\varepsilon_p M$ — инъективный $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модуль или инъективный $\mathbb{Z}_{p^k}$-модуль. В первом случае $\varepsilon_p M$ — делимый p-адический модуль, и тогда $\varepsilon_p M = D_p \oplus A_p$ (предложение 4). Каждый редуцированный R-модуль A содержится в R-модуле $\prod\limits_{p\in P} \varepsilon_p A$ (предложение 1). Поэтому $M \subseteq \prod\limits_{p\in P} C_p$, где модули C_p такие, как в условии теоремы. Поскольку M инъективен, то $\prod\limits_{p\in P} C_p = M \oplus N$ для некоторого R-модуля N. Но тогда $\varepsilon_p \prod\limits_{p\in P} C_p = C_p = \varepsilon_p M \oplus \varepsilon_p N$. Отсюда следует, что $\varepsilon_p N = 0$ для каждого $p \in P$. Учитывая, что $N \subseteq \prod\limits_{p\in P} \varepsilon_p N$, получаем, что $N = 0$, т. е. $M = \prod\limits_{p\in P} C_p$. Теорема доказана. □

Рассмотрим строение конечно порождённых проективных R-модулей. Пусть R_i — копия кольца R для $i = 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$.

Предложение 5. *Пусть A — подмодуль R-модуля $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} R_i$. Тогда $A = P \oplus N$, $R^n = P \oplus K$ для некоторых модулей N и K, причём $N \subseteq T^n \cap K$.*

Доказательство. При $n = 1$ $A = (1-\varepsilon)R \oplus L$ (свойство 3). Полагаем $P = (1-\varepsilon)R$, $N = L$, $K = \varepsilon R$. При $n > 1$ воспользуемся индукцией по n. Рассмотрим канонический гомоморфизм $\pi\colon A \to R_1 \oplus \ldots \oplus R_{n-1}$. По предположению индукции $\pi A = P_1 \oplus X$, $R^{n-1} = P_1 \oplus K_1$, где $X \subseteq T^{n-1}$, $X \subseteq K_1$. Пусть $\varphi\colon P_1 \oplus X \to P_1$ — проекция. Тогда $\varphi\pi\colon A \to P_1$ — расщепляющийся гомоморфизм и $A = \operatorname{Ker}(\varphi\pi) \oplus Y$, где $Y \cong P_1$. Поскольку $\operatorname{Ker}\varphi\pi \subseteq X \oplus R_n$, а $X \subseteq \operatorname{Ker}\varphi\pi$, то

$$\operatorname{Ker}\varphi\pi = X \oplus (R_n \cap \operatorname{Ker}\varphi\pi) = X \oplus (1-\varepsilon)R_n \oplus L_n.$$

Таким образом, $A = X \oplus (1-\varepsilon)R_n \oplus L_n \oplus Y$. Теперь полагаем $P = (1-\varepsilon)R_n \oplus Y$, $N = X \oplus L_n$ и окончательно получаем $A = P \oplus N$, $R^n = P \oplus K$, где $K = K_1 \oplus L_n$, $N \subseteq T^n$, $N \subseteq K$. □

Предложение 6. *Пусть A — подмодуль R-модуля $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} R_i$ и $A \nsubseteq \bigoplus\limits_{i=1,\, i\neq j}^{n} R_i \oplus T$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Тогда A — конечно порождённый R-модуль.*

Доказательство. Рассмотрим случай $n = 1$. Имеем $A \subseteq R$ и $A \nsubseteq T$. Тогда $A = (1-\varepsilon)R \oplus \bigoplus\limits_{i=1}^{k} r_i R_{p_i}$ (свойство 3). При $n > 1$ воспользуемся индукцией по n. Обозначим $K = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} R_i$ и $K' = \bigoplus\limits_{i=1}^{n-1} R_i$. Тогда $\bar{K} = K/K'$ — свободный циклический модуль. Он содержит подмодуль $\bar{A} = (A + K')/K'$. Если $\bar{A} = 0$, то $A \subseteq K'$, и утверждение верно по предположению индукции. Пусть $\bar{A} \neq 0$. Поскольку $\bar{K} \cong R$, то R-подмодуль $\bar{A}$ изоморфен идеалу в R, не содержащемуся в T, т. е. $\bar{A}$ обладает образующим $\bar{a}_1 = a_1 + K'$, где $a \in A$ (свойство 3 в)). Далее, если $A \cap K' = 0$, то для $a \in A$ имеем $\bar{a} = a + K'$. Тогда $\bar{a} = r\bar{a}_1$ для некоторого $r \in R$. Отсюда следует, что $a - ra_1 \in K'$ и $a = ra_1$ ($K' \cap A = 0$). Если же $A \cap K' \neq 0$, то по предположению индукции $A \cap K' = \langle a_2, \ldots, a_l \rangle$, где $l \in \mathbb{N}$. Аналогично для $a \in A$ имеем $\bar{a} = a + K'$, $\bar{a} = r\bar{a}_1$, $r \in R$. Следовательно, $a - ra_1 \in K'$ и $a - ra_1 \in K' \cap A$, т. е. $a - ra_1 = r_2a_2 + \ldots + r_la_l$, где $r_i \in R$, $i = 1, \ldots, l$. Окончательно получаем

$$a = ra_1 = r_2a_2 + \ldots + r_la_l.$$

Таким образом, A — конечно порождённый R-модуль. □

Теорема 4. *Пусть A — конечно порождённый проективный R-модуль. Тогда либо A — конечная прямая сумма циклических R_p-модулей, либо существуют прямые разложения $A = P \oplus N$, $R^s \cong P \oplus K$, где N, K — конечные прямые суммы циклических R_p-модулей, $s \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Можно считать, что $R^s = A \oplus M$, где $s \in \mathbb{N}$, а M — некоторый модуль. Если $A \subseteq T^s$, то A — конечная прямая сумма циклических R_p-модулей. Нужно учесть, что конечно порождённые R_p-модули являются прямыми суммами циклических R_p-модулей. Далее предполагаем, что $A \nsubseteq T^s$.

Доказательство теоремы проведём индукцией по s. При $s = 1$ по свойству 3 можно написать $A = (1-\varepsilon)R \oplus L$, где L — прямая сумма конечного числа циклических R_p-модулей. Полагаем $P = (1-\varepsilon)R$, $N = L$, $K = \varepsilon R$. Пусть $s > 1$. Рассмотрим проекцию $\pi\colon A \to R_1 \oplus \ldots \oplus R_{s-1}$.

Возможны два случая.

1. Если $\pi(A) \subseteq T^{s-1}$, то πA — конечная прямая сумма циклических R_p-модулей. Рассмотрим проекцию $\pi_s\colon A \to R_s$. Учитывая, что $A \nsubseteq T^s$, получаем $\pi_s(A) = (1-\varepsilon)R_s \oplus L$, где $1 \neq \varepsilon^2 = \varepsilon \in R_s$. Пусть $\varphi\colon (1-\varepsilon)R_s \oplus L \to (1-\varepsilon)R_s$ — проекция. Тогда $\varphi\pi_s\colon A \to (1-\varepsilon)R_s$ — расщепляющийся эпиморфизм и $A = \operatorname{Ker}\varphi\pi_s \oplus Y$, где $Y \cong (1-\varepsilon)R_s$. Поскольку $\operatorname{Ker}\varphi\pi_s \subseteq L \oplus T^{s-1}$, $L \subseteq \operatorname{Ker}\varphi\pi_s$, то $\operatorname{Ker}\varphi\pi_s = L \oplus (\operatorname{Ker}\varphi\pi_s \cap T^{s-1})$. Отсюда следует, что $A = L \oplus (\operatorname{Ker}\varphi\pi_s \cap T^{s-1}) \oplus Y$. Осталось положить $P = Y$, $N = L \oplus (\operatorname{Ker}\varphi\pi_s \cap T^{s-1})$, $K = \varepsilon R_s$.

2. Пусть теперь $\pi(A) \nsubseteq T^{s-1}$. По предположению индукции $\pi(A) = P_1 \oplus N_1$, $R^{s-1} \cong P_1 \oplus K_1$, где N_1, K_1 — конечные прямые суммы циклических R_p-модулей. Обозначим через φ проекцию $P_1 \oplus N_1 \to P_1$. Тогда $\varphi\pi\colon A \to P_1$ — расщепляющийся эпиморфизм. Следовательно, $A = \operatorname{Ker}\varphi\pi \oplus Y$, где $Y \cong P_1$. Поскольку $\operatorname{Ker}\varphi\pi \subseteq N_1 \oplus R_s$, а $N_1 \subseteq \operatorname{Ker}\varphi\pi$, то $\operatorname{Ker}\varphi\pi = N_1 \oplus (\operatorname{Ker}\varphi\pi \cap R_s)$. Здесь второе слагаемое — идеал в R_s. Учитывая, что A — конечно порождённый R-модуль, получаем

$$\operatorname{Ker}\varphi\pi \cap R_s = (1-\varepsilon)R_s \oplus L,$$

где L — конечная прямая сумма циклических R_p-модулей. Полученное представление для $\operatorname{Ker}\varphi\pi$ подставим в A:

$$A = N_1 \oplus (1-\varepsilon)R_s \oplus L \oplus Y, \quad R^s \cong P_1 \oplus K_1 \oplus R_s.$$

Полагаем $P = Y \oplus (1-\varepsilon)R_s$, $N = N_1 \oplus L$, $K = K_1 \oplus \varepsilon R_s$. Здесь N, K — конечные прямые суммы циклических R_p-модулей. □

Следствие. *Пусть P — конечно порождённый проективный R-модуль. Тогда либо P — конечная прямая сумма циклических R_p-модулей, либо $R^n \oplus A \cong$ $\cong P \oplus B$, где A и B — конечные прямые суммы циклических R_p-модулей, $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Считаем, что P — прямое слагаемое в R^n. Если $P \subseteq T^n$, то P — конечная прямая сумма циклических R_p-модулей. Если $P \nsubseteq T^n$, то $P = R_1 \oplus t(P)$, $R^n = R_1 \oplus t(R_1)$, где $t(P)$, $t(R_1)$ — конечные прямые суммы циклических R_p-модулей, $n \in \mathbb{N}$. Тогда полагаем $A = t(P)$, $B = t(R_1)$. □

Литература

[1] Зиновьев Е. Г. Об одном обобщении кольца псевдорациональных чисел // Вестник ТГУ. — 2006. — Т. 290. — С. 46—47.

[2] Зиновьев Е. Г. csp-кольца как обобщение колец псевдорациональных чисел // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 35—38.

[3] Каш Ф. Модули и кольца — М.: Мир. 1981.

[4] Крылов П. А. Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 1. — С. 108—119.

[5] Крылов П. А., Пахомова Е. Г., Подберезина Е. И. Об одном классе смешанных абелевых групп // Вестник ТГУ. — 2000. — Т. 269. — С. 29—34.

[6] Царёв А. В. Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Мат. заметки. — 2006. — Т. 80, № 3. — С. 437—448.

[7] Чеглякова С. В. Инъективные модули над кольцом псевдорациональных чисел // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 2. — С. 627—629.

[8] Fomin A. A. Some mixed Abelian groups as modules over the ring of pseudo-rational numbers // Abelian Groups and Modules. Proc. of the Int. Conf. in Dublin, Ireland, August 10–14, 1998 / P. C. Eklof (ed.) et al. — Basel: Birkhäuser, 1999. — (Trends in Mathematics.) — P. 87—100.