Идемпотентные функторы и локализации в категориях модулей и абелевых групп*

П. А. КРЫЛОВ
Томский государственный университет
e-mail: krylov@math.tsu.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.553+512.541

Ключевые слова: кольцо, модуль, идемпотентный функтор, локализация.

Аннотация

Данная статья содержит различные результаты об идемпотентных функторах и локализациях в категориях модулей и абелевых групп.

Abstract

P. A. Krylov, A. A. Tuganbaev, Idempotent functors and localizations in categories of modules and Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 7, pp. 75—159.

The present paper contains various results on idempotent functors and localizations in categories of modules and Abelian groups.

Содержание

*Первый автор поддержан федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы, государственные контракты П937 от 20 августа 2009 г. и 02.740.11.0238 от 7 июля 2009 г. Второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 08-01-00693-а «Структурная теория колец».

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 7, с. 75—159.

В теории модулей и теории абелевых групп часто встречаются (ковариантные) функторы L, снабжённые естественным преобразованием f из тождественного функтора в функтор L. Такие функторы L называются *функторами коаугментации*. Под идемпотентным функтором мы понимаем более узкое понятие (см. определение в разделе 6). Важнейшее свойство идемпотентного функтора L заключается в том, что L естественно эквивалентен LL. Модули вида LA называются *L-локальными*. Естественный гомоморфизм $f_A \colon A \to LA$ можно считать «наилучшей аппроксимацией» модуля A L-локальными модулями.

В литературе идемпотентные функторы иногда называют *функторами локализации*. Единой терминологии нет. У нас функторы локализации составляют более узкий подкласс класса идемпотентных функторов. Именно, для данного модульного гомоморфизма $f \colon A \to B$ можно определить идемпотентный функтор L_f так, что соответствующими локальными модулями будут те модули C, для которых отображение $\mathrm{Hom}(B, C) \to \mathrm{Hom}(A, C)$, индуцированное f, является изоморфизмом. Такие функторы L_f мы и называем *функторами локализации*. В связи с этими функторами появляются локализации модулей.

В математике идемпотентные функторы изучались в различных контекстах. В теории категорий они известны также как *идемпотентные тройки* или *идемпотентные монады*. Функторы локализации и более общие идемпотентные функторы естественным образом появляются в разных областях математики (теории категорий, алгебре, алгебраической топологии, алгебраической геометрии). Как и в случае классических локализаций относительно множеств простых чисел, функторы локализации позволяют аппроксимировать данные объекты более простыми в каком-то отношении объектами.

В теории колец локализации появились как классические локализации коммутативных, а затем и некоммутативных колец. В теории модулей изучались локализации относительно кручений. В последнее время новые приложения функторов локализации были даны в теории гомотопий (см. [25]). Основное внимание в недавних исследованиях в теории гомотопий и теории групп уделялось свойствам, которые сохраняются идемпотентными функторами. В категории групп идемпотентные функторы сохраняют абелевы группы и нильпотентные группы класса не больше 3; в категории абелевых групп идемпотентные функторы сохраняют кольца, коммутативные кольца, модули [25].

Идемпотентные функторы в категориях модулей исследовались прежде всего в виде функторов локализаций относительно кручений. О локализациях абелевых групп, за исключением классических локализаций или пополнений относительно множеств простых чисел, известно мало. В теории модулей хорошо известны идемпотентные радикалы. Их можно рассматривать как довольно специфические идемпотентные функторы.

В теории абелевых групп давно появились так называемые E-*кольца*, реже называемые *жёсткими* кольцами, и E-*модули*. Они успешно используются, например, при изучении групп без кручения и их колец эндоморфизмов (см. [46]). Позже была отмечена роль E-колец в теории гомотопий. Здесь мы вводим «обобщённые» E-кольца и «обобщённые» E-модули, а также T-кольца и T-модули. Они возникают в категории S-модулей в связи с данным гомоморфизмом колец $S \to R$. В работе раскрываются связи E-колец, E-модулей и T-колец с идемпотентными функторами и локализациями.

Мы будем постоянно иметь дело с фиксированным гомоморфизмом колец $S \to R$. Любой такой гомоморфизм даёт идемпотентный функтор и локализации в категории S-модулей. Мы называем их *стандартными* и используем при исследовании произвольных идемпотентных функторов и локализаций.

В работе встречаются разные способы задания на абелевой группе модуля над данным кольцом. Важен и вопрос о единственности модульных структур. Эта проблематика обсуждается в разделе 3. В связи с этим обратим внимание на терминологию. Пусть A — правый модуль над кольцом S. Имеется отображение

$$A \times S \to A, \quad (a, s) \to as,$$

называемое *модульным умножением*. Чтобы подчеркнуть тот факт, что A есть S-модуль, мы говорим, что на группе A имеется S-модульная структура (или структура S-модуля) или что на A существует S-модульное умножение.

В разделах 1—4 данной статьи рассматриваются E-модули, E-кольца, T-модули и T-кольца. В разделах 6—8 изучаются идемпотентные функторы в категориях модулей. В разделах 9 и 10 находятся локализации некоторых модулей и колец. Разделы 11 и 12 посвящены идемпотентным функторам и локализациям в категории абелевых групп.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, модули предполагаются унитарными и правыми, если не оговорено противное. Категория всех правых модулей над кольцом S обозначается через mod-S. Другие используемые обозначения также общеприняты. Мы часто используем известные способы превращения групп гомоморфизмов и тензорного произведения в модули, а также естественные изоморфизмы, связанные с этими объектами.

1. T-модули и E-модули

Пусть даны кольца S и R и кольцевой гомоморфизм $e\colon S \to R$. На всяком R-модуле A можно задать структуру S-модуля по правилу $as = ae(s)$ для всех $a \in A$, $s \in S$. Этот S-модуль называется *притягивающим* (относительно e). Аналогичным образом левые R-модули являются притягивающими левыми S-модулями. В частности, R есть S-S-бимодуль; при этом e — бимодульный гомоморфизм. Фактор-модуль $R/e(S)$ обозначаем R_0. Все R-модули считаются притягивающими S-модулями. Назовём гомоморфизм $e\colon S \to R$ *центральным*, если подкольцо $e(S)$ лежит в центре кольца R. Если S — коммутативное кольцо, то наличие центрального гомоморфизма $e\colon S \to R$ равносильно тому, что R — S-алгебра. Если $e\colon S \to R$ — центральный гомоморфизм, то с R-модулями можно обращаться практически так же, как в ситуации, когда R — алгебра над коммутативным кольцом S. Могут быть использованы все стандартные факты об R-модулях и методы работы с ними. Например, полагая $sa = as$, $s \in S$, $a \in A$, получаем левый S-модуль A. Всегда существует единственный гомоморфизм колец $\mathbb{Z} \to R$, $n \to n \cdot 1$, $n \in \mathbb{Z}$, который, очевидно, централен.

Пусть e — произвольный гомоморфизм (когда e централен, это будет оговариваться.) Если A — правый R-модуль и B — левый R-модуль, то существует эпиморфизм абелевых групп $t\colon A \otimes_S B \to A \otimes_R B$, $a \otimes_S b \to a \otimes_R b$. Рассмотрим подробнее эпиморфизм правых R-модулей $t\colon A \otimes_S R \to A \otimes_R R$. (Последний модуль изоморфен A при соответствии $a \otimes r \to ar$; обратный изоморфизм есть $a \to a \otimes 1$.) Можно определить гомоморфизм S-модулей $q\colon A \otimes_R R \to A \otimes_S R$, действующий по правилу $a \otimes r \to ar \otimes 1$. Композиция tq есть тождественное отображение, что даёт прямое разложение $A \otimes_S R = \operatorname{Im} q \oplus \operatorname{Ker} t$ (говорят, что t *расщепляется*).

Замечание. S-модуль $\operatorname{Ker} t$ аддитивно порождается всеми элементами вида $a \otimes r - ar \otimes 1$, $a \in A$, $r \in R$. Соответствие образующих элементов $a \otimes r - ar \otimes 1 \to a \otimes \bigl(r + e(S)\bigr)$ задаёт изоморфизм S-модулей $\operatorname{Ker} t$ и $A \otimes_S R_0$. Таким образом, справедлив следующий факт.

Лемма 1.1. *Гомоморфизм S-модулей $t\colon A \otimes_S R \to A \otimes_R R$ расщепляется. При этом $\operatorname{Ker} t \cong A \otimes_S R_0$ и имеет место изоморфизм S-модулей*

$$A \otimes_S R \cong A \oplus (A \otimes_S R_0),$$
$$a \otimes r \to ar + a \otimes \bigl(r + e(S)\bigr), \quad a \in A, \quad r \in R.$$

Пусть A и B — R-модули. Всякий R-гомоморфизм $B \to A$ будет S-гомоморфизмом. Это даёт вложение абелевых групп

$$h\colon \operatorname{Hom}_R(B, A) \to \operatorname{Hom}_S(B, A).$$

Всякий R-гомоморфизм $\varphi\colon R \to A$ действует по формуле $\varphi(x) = \varphi(1)x$, $x \in R$, и соответствие $\varphi \to \varphi(1)$ есть изоморфизм R-модулей $\operatorname{Hom}_R(R, A) \to A$. Определим отображение $p\colon \operatorname{Hom}_S(R, A) \to \operatorname{Hom}_R(R, A)$, полагая $p(\varphi) = \bar{\varphi}$,

$\varphi \in \operatorname{Hom}_S(R, A)$, где $\bar{\varphi}(x) = \varphi(1)x$, $x \in R$. Здесь p — S-модульный гомоморфизм, а ph — тождественный автоморфизм. Следовательно, h расщепляется. Итак,

$$\operatorname{Hom}_S(R, A) = \operatorname{Im} h \oplus \operatorname{Ker} p = \operatorname{Hom}_R(R, A) \oplus \{\varphi \in \operatorname{Hom}_S(R, A) \mid \varphi(1) = 0\}.$$

Понятно, что

$$\operatorname{Ker} p = \bigl\{\varphi \in \operatorname{Hom}_S(R, A) \mid \varphi\bigl(e(S)\bigr) = 0\bigr\}.$$

Последний S-модуль естественно отождествляется с $\operatorname{Hom}_S(R_0, A)$. Можно записать следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Имеет место прямое разложение S-модулей*

$$\operatorname{Hom}_S(R, A) = \operatorname{Hom}_R(R, A) \oplus \operatorname{Hom}_S(R_0, A).$$

R-модули $A \otimes_S R$ и $\operatorname{Hom}_S(R, A)$ иногда называют *ковариантным* и *контравариантным* расширениями S-модуля A соответственно.

Назовём R-модуль A $\mathrm{T}(e)$-*модулем* или T-*модулем относительно гомоморфизма* e, если отображение $t\colon A \otimes_S R \to A \otimes_R R$ есть изоморфизм. При фиксированном гомоморфизме e вместо «$\mathrm{T}(e)$-модуль» пишем также «Т-модуль».

Определим ещё гомоморфизмы S-модулей

$$m\colon A \otimes_S R \to A, \quad a \otimes r \to ar$$

(*отображение умножения*) и

$$v\colon A \to A \otimes_S R, \quad a \to a \otimes 1$$

(*отображение значения*).

Предложение 1.3. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) A — *Т-модуль*;
2) $A \otimes_S R_0 = 0$;
3) m — *изоморфизм*;
4) v — *изоморфизм.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon\colon A \otimes_R R \to A$, $a \otimes r \to ar$, — естественный изоморфизм R-модулей. Тогда $m = \varepsilon t$, $v = q\varepsilon^{-1}$. Заметим ещё, что t — изоморфизм в точности тогда, когда q — изоморфизм. Теперь достаточно применить лемму 1.1. При этом нужно учесть, что изоморфизмы в ней канонические. □

Следствие 1.4.

1. *Предел прямого спектра* Т-*модулей является* Т-*модулем. В частности, прямая сумма* Т-*модулей есть* Т-*модуль.*
2. *Фактор-модуль* Т-*модуля является* Т-*модулем.*

Доказательство. Нужно применить пункт 2) предложения 1.3. □

Назовём R-модуль A $\mathrm{E}(e)$-*модулем*, или Е-*модулем относительно гомоморфизма* e, или просто Е-*модулем* (при фиксированном e), если $\operatorname{Hom}_S(R, A) = \operatorname{Hom}_R(R, A)$.

Замечание. Определим гомоморфизмы S-модулей $m'\colon A \to \operatorname{Hom}_S(R,A)$ по правилу $m'(a) = \varphi_a$, $a \in A$, где $\varphi_a(x) = ax$, $x \in R$ (*отображение умножения*), и $v'\colon \operatorname{Hom}_S(R,A) \to A$, $v'(\varphi) = \varphi(1)$ (*отображение значения*).

Предложение 1.5. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *A — E-модуль*;
2) $\operatorname{Hom}_S(R_0, A) = 0$;
3) *m' — изоморфизм, т. е. любой S-гомоморфизм $\varphi\colon R \to A$ действует по формуле $\varphi(x) = \varphi(1)x$, $x \in R$*;
4) *v' — изоморфизм*;
5) *для любого S-гомоморфизма $\varphi\colon R \to A$ из $\varphi(1) = 0$ следует, что $\varphi = 0$.*

Доказательство. Пусть $\omega\colon \operatorname{Hom}_R(R,A) \to A$ — естественный изоморфизм R-модулей, определённый перед леммой 1.2. Тогда $m' = h\omega^{-1}$ и $v' = \omega p$. Эквивалентность утверждений 1)—4) вытекает из леммы 1.2 и предшествующих ей рассмотрений. Ясно, что утверждение 2) равносильно 5). □

Следствие 1.6.

1. *Предел обратного спектра* E-*модулей является* E-*модулем. В частности, прямое произведение* E-*модулей есть* E-*модуль.*
2. *Подмодуль* E-*модуля и прямая сумма* E-*модулей являются* E-*модулями.*

Доказательство. Результат вытекает из утверждения 2) предложения 1.5. □

Аналогично определяются и имеют те же свойства левые T-модули и левые E-модули относительно гомоморфизма $e\colon S \to R$.

T-модуль (E-модуль) относительно гомоморфизма $\mathbb{Z} \to R$ является T-модулем (соответственно E-модулем) относительно каждого гомоморфизма $S \to R$.

Предложение 1.7.

1. *Если A —* T-*модуль, то для любого левого R-модуля B справедлив канонический изоморфизм $A \otimes_R B \to A \otimes_S B$.*
2. *Если A —* E-*модуль, то* $\operatorname{Hom}_R(B,A) = \operatorname{Hom}_S(B,A)$ *для любого R-модуля B.*
3. *R-модуль A является* T-*модулем в точности тогда, когда* $\operatorname{Hom}_R(A,B) = \operatorname{Hom}_S(A,B)$ *для любого R-модуля B.*

Доказательство. 1. Имеем канонические изоморфизмы

$$A \otimes_R B \cong (A \otimes_R R) \otimes_R B \cong (A \otimes_S R) \otimes_R B \cong A \otimes_S (R \otimes_R B) \cong A \otimes_S B.$$

2. Композиция канонических изоморфизмов

$$\operatorname{Hom}_R(B,A) \cong \operatorname{Hom}_R\bigl(B, \operatorname{Hom}_R(R,A)\bigr) = \operatorname{Hom}_R\bigl(B, \operatorname{Hom}_S(R,A)\bigr) \cong \cong \operatorname{Hom}_S(B \otimes_R R, A) \cong \operatorname{Hom}_S(B,A)$$

является равенством.

3. Предположим, что A есть T-модуль. Композиция канонических изоморфизмов

$$\mathrm{Hom}_R(A,B) \cong \mathrm{Hom}_R(A\otimes_R R, B) \cong \mathrm{Hom}_R(A\otimes_S R, B) \cong$$
$$\cong \mathrm{Hom}_S\big(A, \mathrm{Hom}_R(R,B)\big) \cong \mathrm{Hom}_S(A,B)$$

есть равенство.

Обратно, поскольку гомоморфизм v из предложения 1.3 является S-модульным, он также является R-модульным. Поэтому $ar\otimes 1 = a\otimes r$ для всех $a\in A$ и $r\in R$. Следовательно, $\mathrm{Ker}\, t = 0$ и A — T-модуль. □

Выделим основные случаи, когда тензорное произведение или группа гомоморфизмов будут T-модулем или E-модулем. Конечно, нужно предположить, что $e\colon S\to R$ — центральный гомоморфизм. Пусть даны правый R-модуль A и левый R-модуль B. Полагая $sa = as$, $s\in S$, $a\in A$, получаем S-S-бимодуль A. Аналогично поступаем с B. Поскольку $A\otimes_S B$ и $B\otimes_S A$ изоморфны при соответствии образующих элементов $a\otimes b\to b\otimes a$, то $A\otimes_S B$ есть R-R-бимодуль:

$$r(a\otimes b) = a\otimes rb \;\text{ и }\; (a\otimes b)r = ar\otimes b, \quad r\in R.$$

Замечание. Допустим, что A и B — правые R-модули. Тогда гомоморфизмы $A\to B$ правых и левых S-модулей совпадают. Поэтому $\mathrm{Hom}_S(A,B)$ — R-R-бимодуль:

$$(r\varphi)(a) = \varphi(ar), \quad (\varphi r)(a) = \varphi(a)r, \quad r\in R, \quad a\in A, \quad \varphi\in\mathrm{Hom}_S(A,B).$$

Предложение 1.8. *Пусть $e\colon S\to R$ — центральный гомоморфизм.*

1. *Если даны модули A_R и ${}_RB$, причём A — T-модуль, то $A\otimes_S B$ — T-модуль.*
2. *Если даны модули A_R и B_R, причём A — T-модуль (E-модуль), то $\mathrm{Hom}_S(A,B)$ (соответственно $\mathrm{Hom}_S(B,A)$) — E-модуль.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из пункта 2) предложения 1.3.

Докажем утверждение 2. Запишем естественные изоморфизмы

$$\mathrm{Hom}_S\big(R_0, \mathrm{Hom}_S(A,B)\big) \cong \mathrm{Hom}_S(R_0\otimes_S A, B) = 0,$$
$$\mathrm{Hom}_S\big(R_0, \mathrm{Hom}_S(B,A)\big) \cong \mathrm{Hom}_S(R_0\otimes_S B, A) \cong \mathrm{Hom}_S\big(B, \mathrm{Hom}_S(R_0,A)\big) = 0.$$

Осталось сослаться на предложение 1.5. □

2. T-кольца и E-кольца

По-прежнему e обозначает некоторый гомоморфизм колец $S\to R$ и $R_0 = R/e(S)$. Если R является T(e)-модулем как правый R-модуль, то кольцо R назовём T(e)-*кольцом*, или T-*кольцом относительно* e, или кратко T-*кольцом* (если гомоморфизм e фиксирован).

Если R — E(e)-модуль как правый R-модуль, то кольцо R будем называть E(e)-*кольцом*, или E-*кольцом относительно* e, или просто E-*кольцом*.

Фактически мы ввели правые Т-кольца и правые Е-кольца. Аналогично определяются левые Т-кольца и левые Е-кольца. Свойство быть Т-кольцом лево-право симметрично. Под Е-кольцом далее понимаем правое Е-кольцо.

Т-кольцо (Е-кольцо) относительно гомоморфизма $\mathbb{Z} \to R$ является Т-кольцом (соответственно Е-кольцом) относительно любого кольцевого гомоморфизма $S \to R$.

Предложение 2.1. *Пусть* $e\colon S \to R$ — *гомоморфизм колец. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) R — Т-*кольцо*;
2) $R \otimes_S R_0 = 0$;
3) $R_0 \otimes_S R = 0$;
4) *отображение умножения* $R \otimes_R R \to R$, $x \otimes y \to xy$, $x, y \in R$, *является изоморфизмом*;
5) *отображение значения* $R \to R \otimes_S R$, $x \to x \otimes 1$, $x \in R$, *является изоморфизмом*;
6) *для любого* $x \in R$ *имеет место равенство элементов* $x \otimes 1$ *и* $1 \otimes x$ *в* $R \otimes_S R$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1)—5) вытекает из предложения 1.3, если учесть, что правые Т-кольца совпадают с левыми Т-кольцами. Ядро гомоморфизма $t\colon R \otimes_S R \to R \otimes_R R$ из раздела 1 аддитивно порождается всеми элементами вида $y \otimes x - yx \otimes 1$. Поскольку такой элемент равен $y\big((1 \otimes x) - (x \otimes 1)\big)$, то эквивалентность 6) $\Longleftrightarrow$ 2) вытекает из предложения 1.3. □

Аналогичный результат для Е-колец непосредственно вытекает из предложения 1.5.

Следствие 2.2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) R — Е-*кольцо*;
2) $\mathrm{Hom}_S(R_0, R) = 0$;
3) *отображение умножения* $R \to \mathrm{End}_S R$ *является изоморфизмом, т. е. любой эндоморфизм* $\alpha \in \mathrm{End}_S R$ *действует как* $\alpha(x) = \alpha(1)x$;
4) *отображение значения* $\mathrm{End}_S R \to R$ *является изоморфизмом* (см. *замечание перед предложением* 1.5);
5) *если* $\alpha \in \mathrm{End}_S R$ *и* $\alpha(1) = 0$, *то* $\alpha = 0$.

Следствие 2.3.

1. *Всякое* Т-*кольцо есть правое и левое* Е-*кольцо.*
2. *Фактор-кольцо* Т-*кольца является* Т-*кольцом.*

Доказательство. 1. Используя изоморфизм $R \cong \mathrm{Hom}_R(R, R)$, так же, как в доказательстве предложения 1.8, можно вывести, что $\mathrm{Hom}_S(R_0, R) = 0$.

2. Пусть I — некоторый идеал кольца R и $\pi\colon R \to R/I$ — естественный эпиморфизм. Во втором утверждении имеется в виду, что R/I — Т-кольцо относительно гомоморфизма $\pi e\colon S \to R/I$. Это нетрудно получить с помощью предложения 2.1. □

Пусть $\operatorname{Ann} A$ обозначает аннулятор $\{r \in R \mid Ar = 0\}$ R-модуля A.

Предложение 2.4.

1. *Если A — E-модуль, то $R/\operatorname{Ann} A$ — E-кольцо.*
2. *Если A — T-модуль, то $R/\operatorname{Ann} A$ — левое E-кольцо.*

Доказательство. Подразумевается, что $R/\operatorname{Ann} A$ — $\mathrm{E}(\pi e)$-кольцо, где π — естественный эпиморфизм $R \to R/\operatorname{Ann} A$. Обозначим $\bar{R} = R/\operatorname{Ann} A$ и $\bar{x} = x + \operatorname{Ann} A$, $x \in R$.

1. Пусть $\alpha \in \operatorname{End}_S \bar{R}$. Зафиксируем некоторый элемент $a \in A$. Формула $\varphi_a(x) = a\alpha(\bar{x})$, $x \in R$, задаёт S-гомоморфизм $\varphi_a\colon R \to A$. Он действует по правилу $\varphi_a(x) = \varphi_a(1)x$, $x \in R$ (см. предложение 1.5). Таким образом,

$$a\alpha(\bar{x}) = \varphi_a(1)x = a\alpha(\bar{1})x,$$

и затем получаем $a(\alpha(\bar{x}) - \alpha(\bar{1})x) = 0$. Так как элемент a произволен, то $\alpha(\bar{x}) = \alpha(\bar{1})x = \alpha(\bar{1})\bar{x}$ для всех x. По следствию 2.2 $\bar{R}$ — $\mathrm{E}(\pi e)$-кольцо.

2. Обозначим через V левый R-модуль $\operatorname{Hom}(A, A)$. R-модульное умножение задаётся формулой

$$(r\alpha)(a) = \alpha(ar), \quad r \in R, \quad a \in A, \quad \alpha \in \operatorname{Hom}(A, A).$$

Подобно тому, как было сделано в доказательстве пункта 2 предложения 1.8, можно убедиться, что $R/\operatorname{Ann} V$ — левое E-кольцо (здесь $\operatorname{Ann} V$ — аннулятор левого R-модуля V). Осталось заметить, что $\operatorname{Ann} A = \operatorname{Ann} V$. □

Предложение 2.5. *Пусть $e\colon S \to R$ — центральный гомоморфизм. Кольцо R является E-кольцом в точности тогда, когда кольцо $\operatorname{End}_S R$ коммутативно. E-кольцо всегда коммутативно.*

Доказательство. Допустим, что R — E-кольцо. Для элемента $a \in R$ обозначим через ρ_a эндоморфизм правого умножения кольца R на a, $\rho_a(x) = xa$, $x \in R$. Тогда ρ_a — S-модульный эндоморфизм. По следствию 2.2 $\rho_a(x) = \rho_a(1)x$. Поэтому $xa = \rho_a(1)x = ax$ и кольцо R коммутативно.

Обратно, пусть кольцо $\operatorname{End}_S R$ коммутативно. Для $\alpha \in \operatorname{End}_S R$ и $x \in R$ имеем

$$\alpha(x) = \alpha\bigl(\rho_x(1)\bigr) = \rho_x\bigl(\alpha(1)\bigr) = \alpha(1)x.$$

В силу следствия 2.2 R — E-кольцо. □

Обозначим через K кольцо формальных треугольных матриц

$$\begin{pmatrix} R & R \otimes_S R \\ 0 & R \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.6. *Пусть дан гомоморфизм $e\colon S \to R$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *R — T-кольцо;*
2) *любой R-модуль является T-модулем;*
3) *любой R-модуль является E-модулем;*

4) *R-модуль $R \otimes_S R$ является* Е-*модулем*;
5) *R-модуль $R_0 \otimes_S R$ является* Е-*модулем*;
6) *верны левосторонние аналоги утверждений* 2)—5);
7) *e — эпиморфизм в категории колец*;
8) *для любых кольцевых гомоморфизмов $f, g\colon R \to K$ из $fe = ge$ следует $f = g$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из предложений 2.1 и 1.3, если использовать изоморфизм $A \cong A \otimes_R R$. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Учитывая, что по предложению 2.1 $R_0 \otimes_S R = 0$, для R-модуля A имеем

$$\mathrm{Hom}_S(R_0, A) \cong \mathrm{Hom}_S\big(R_0, \mathrm{Hom}_R(R, A)\big) \cong \mathrm{Hom}_R(R_0 \otimes_S R, A) = 0.$$

Тогда A — Е-модуль по предложению 1.5.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 4) справедлива всегда.

Для доказательства импликации 4) $\Longrightarrow$ 5) достаточно заметить, что R-модуль $R_0 \otimes_S R$ изоморфен прямому слагаемому модуля $R \otimes_S R$, что следует из левостороннего аналога леммы 1.1.

Докажем импликацию 5) $\Longrightarrow$ 1). Допустим, что R не является Т-кольцом. Тогда $R_0 \otimes_S R \neq 0$ по предложению 2.1. Отображение $R_0 \to R_0 \otimes_S R$, $\bar{x} \to \bar{x} \otimes 1$, является ненулевым гомоморфизмом S-модулей. Но это противоречит утверждению 5) ввиду предложения 1.5.

Левосторонние аналоги всех рассмотренных импликаций доказываются похожим образом. Поэтому утверждения 1)—6) эквивалентны.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 7). Пусть даны гомоморфизмы f и g из R в кольцо L, причём $fe = ge$. Нужно проверить, что $f = g$. Подобно тому, как мы поступали в ситуации с гомоморфизмом e, описанной в начале раздела 1, мы рассматриваем кольцо L как R-модуль двумя способами с помощью гомоморфизмов f и g. Затем получаем два S-модульных умножения на L:

$$ls = l(fe)(s) \quad \text{и} \quad l \circ s = l(ge)(s), \quad l \in L, \quad s \in S.$$

Так как $fe = ge$, то эти умножения совпадают. Следовательно, L является притягивающим S-модулем, а f и g — S-модульные гомоморфизмы. По утверждению 3) L — Е-модуль для каждой из двух R-модульных структур на L. Из пункта 5) предложения 1.5 вытекает, что $f - g = 0$ и $f = g$.

Докажем импликацию 8) $\Longrightarrow$ 1). Допустим, что R не является Т-кольцом. Тогда по пункту 6) предложения 2.1 имеем, что $z \otimes 1 - 1 \otimes z \neq 0$ для некоторого $z \in R$. Определим отображения $f, g\colon R \to K$, полагая

$$f(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} x & x \otimes 1 - 1 \otimes x \\ 0 & x \end{pmatrix}$$

для каждого $x \in R$. Непосредственно проверяется, что f и g — кольцевые гомоморфизмы. Но $f \neq g$, что противоречит равенству $fe = ge$. Следовательно, R — Т-кольцо. □

В заключение раздела приведём одно интересное свойство E-колец.

Следствие 2.7. *Пусть f — эндоморфизм* E*-кольца R, тождественный на $e(S)$. Тогда f — тождественный автоморфизм.*

Доказательство. Справедливы равенства

$$f(xs) = f\big(xe(s)\big) = f(x)f\big(e(s)\big) = f(x)e(s) = f(x)s$$

для всех $x \in R$ и $s \in S$. Это означает, что f — S-модульный эндоморфизм. Тогда f — R-модульный эндоморфизм по предложению 1.7. Итак,

$$f(x)r = f(xr) = f(x)f(r), \quad x, r \in R.$$

При $x = 1$ получаем $f(r) = r$. □

3. Единственность модульных структур

Систематизируем некоторые факты, касающиеся модульных структур и их связей с дифференцированиями колец. В частности, обсудим некоторые ситуации, когда можно говорить о единственности определённых модульных структур. Они связаны с T-модулями и E-модулями. С единственностью модульных структур мы будем также встречаться в дальнейшем.

Зафиксируем гомоморфизм колец $e\colon S \to R$. Целесообразно считать, что e — центральный гомоморфизм, а все рассматриваемые S-модули A являются S-S-бимодулями, такими что $as = sa$, $a \in A$, $s \in S$. Будем также говорить, что A — S-бимодуль. Все R-модули A считаем притягивающими S-бимодулями, т. е. $as = sa$, $a \in A$, $s \in S$. Если A — S-бимодуль, то $\operatorname{End}_S A$ также S-бимодуль:

$$(\alpha s)(a) = s\alpha(a) = (s\alpha)(a), \quad \alpha \in \operatorname{End}_S A, \quad a \in A, \quad s \in S.$$

Пусть A — R-модуль. Определим отображение $f\colon R \to \operatorname{End}_S A$, положив $f(r)(a) = ar$, $r \in R$, $a \in A$. Тогда f — антигомоморфизм колец и гомоморфизм S-бимодулей. И наоборот, пусть дан S-бимодуль A, на котором нет структуры R-модуля, и есть антигомоморфизм колец и гомоморфизм S-модулей $f\colon R \to \operatorname{End}_S A$. Полагая $ar = f(r)(a)$, $a \in A$, $r \in R$, получаем структуру R-модуля на A, причём A будет притягивающим S-модулем.

Теперь предположим, что дан R-модуль A с модульным умножением $(a, r) \to ar$, $a \in A$, $r \in R$. Каким образом, исходя из этого умножения, получить все другие умножения на A? Ответ даёт следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть B — некоторый R-модуль. Каждый S-модульный, но не R-модульный изоморфизм $A \to B$ даёт R-модульную структуру на A, отличную от исходной. Наоборот, если на A имеется ещё одна R-модульная структура, то существует S-модульный изоморфизм из A на какой-то R-модуль, не являющийся R-модульным изоморфизмом.*

Доказательство. Если $\varphi\colon A \to B$ — S-модульный, но не R-модульный изоморфизм, то формула $a \circ r = \varphi^{-1}(\varphi(a)r)$, $a \in A$, $r \in R$, задаёт на A требуемую структуру R-модуля. Если же на A имеется ещё одна структура R-модуля, то тождественный автоморфизм модуля A будет требуемым изоморфизмом. □

R-модуль A называется модулем *с однозначным модульным умножением относительно* e или *UM-модулем*, если на A нельзя задать другого такого R-модульного умножения $\circ$, что A — притягивающий S-модуль, т. е. $as = a \circ e(s)$, $a \in A$, $s \in S$. UM-модуль относительно гомоморфизма $\mathbb{Z} \to R$ имеет единственную R-модульную структуру.

R-модуль A назовём *AM-модулем* (относительно e), если каждый S-модульный эндоморфизм $A \to A$ является R-модульным (обозначение «AM» происходит от слов «аддитивный» и «модульный»).

Первую часть раздела можно суммировать следующим образом.

Следствие 3.2. *Пусть* $e\colon S \to R$ — *центральный гомоморфизм. Для* R-*модуля* A *следующие свойства эквивалентны*:

1) A — *UM-модуль*;
2) *существует единственный* S-*модульный гомоморфизм и кольцевой антигомоморфизм* $R \to \operatorname{End}_S A$;
3) *для любого* R-*модуля* B *всякий* S-*модульный изоморфизм* $A \to B$ *является* R-*модульным.*

Принимая во внимание предложение 1.7, можно записать следующие факты.

Следствие 3.3. T-*модули и* E-*модули являются UM-модулями и AM-модулями.*

Изучение модульных структур связано с обобщёнными дифференцированиями колец. По-прежнему $e\colon S \to R$ — центральный гомоморфизм. Пусть M — R-бимодуль. *Дифференцирование* $\delta\colon R \to M$ — это такой S-модульный гомоморфизм, что $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$ для любых $x, y \in R$. Требование S-модульности отображения δ равносильно равенству $\delta\big(e(S)\big) = 0$. Для фиксированного элемента $m \in M$ можно определить отображение $\delta_m\colon R \to M$, переводящее r в $mr - rm$. Отображение δ_m есть дифференцирование, называемое *внутренним*.

Пусть A и B — R-модули. Тогда $\operatorname{Hom}_S(A, B)$ — R-бимодуль (см. замечание перед предложением 1.8). Все R-модульные структуры на $B \oplus A$ могут быть получены с помощью S-модульных гомоморфизмов и кольцевых антигомоморфизмов $f\colon R \to \operatorname{End}_S(B \oplus A)$. (Записанное кольцо эндоморфизмов известным способом отождествляется с кольцом формальных матриц.) Если образ такого отображения лежит в подкольце

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End}_S B & \operatorname{Hom}_S(A, B) \\ 0 & \operatorname{End}_S A \end{pmatrix}$$

и не лежит в «диагонали»

$$\begin{pmatrix} \operatorname{End}_S B & 0 \\ 0 & \operatorname{End}_S A \end{pmatrix},$$

то сам f и соответствующую R-модульную структуру на $B \oplus A$ удобно называть *треугольными*. Непосредственно проверяется, что треугольный гомоморфизм есть тройка (g,h,δ), где g и h — S-модульные гомоморфизмы и кольцевые антигомоморфизмы из R в $\operatorname{End}_S B$ и $\operatorname{End}_S A$ соответственно, $\delta\colon R \to \operatorname{Hom}_S(A,B)$ — (g,h)-дифференцирование кольца R. Это означает, что δ — S-гомоморфизм и $\delta(xy) = \delta(x)h(y) + g(x)\delta(y)$, $x, y \in R$. И обратно, каждая такая тройка определяет некоторый треугольный гомоморфизм. Если g и h совпадают с отображениями, соответствующими заданным на B и A R-модульным умножениям, то $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y)$, и δ — это дифференцирование, определённое ранее.

Каждый S-модульный гомоморфизм $\varphi\colon A \to B$ даёт внутреннее дифференцирование

$$\delta_\varphi\colon R \to \operatorname{Hom}_S(A,B), \quad \delta_\varphi(r) = \varphi r - r\varphi, \quad r \in R.$$

Понятно, что $\delta_\varphi \neq 0$ в точности тогда, когда φ не является R-модульным гомоморфизмом. Сформулируем сказанное выше в виде следующего результата.

Следствие 3.4.

1. *Любой S-модульный и не R-модульный гомоморфизм $A \to B$ индуцирует треугольную R-модульную структуру на $B \oplus A$.*
2. *Если A и B — UM-модули, то S-модуль $B \oplus A$ не имеет треугольных R-модульных структур в точности тогда, когда не существует ненулевых дифференцирований $R \to \operatorname{Hom}_S(A,B)$.*

Рассмотрим теперь свойства T-модулей и E-модулей, связанные с наличием определённых R-модульных структур. Подразумевается, что зафиксирован центральный гомоморфизм $e\colon S \to R$.

Предложение 3.5. *Для R-модуля A эквивалентны следующие утверждения*:

1) *A — T-модуль*;
2) *для любого R-модуля C S-модуль $C \oplus A$ не имеет треугольных R-модульных структур*;
3) *$A \otimes_S R$ является UM-модулем.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Допустим, что для некоторого R-модуля C на $C \oplus A$ существует треугольная R-модульная структура. Соответствующий треугольный гомоморфизм — это тройка (g,h,δ), где $g\colon R \to \operatorname{End}_S C$, $h\colon R \to \operatorname{End}_S A$ — S-модульные гомоморфизмы и кольцевые антигомоморфизмы, $\delta\colon R \to \operatorname{Hom}_S(A,C)$ — ненулевое (g,h)-дифференцирование. Отображение g определяет некоторую структуру R-модуля C, которая в общем случае не совпадает с исходной. Так как по следствию 3.3 модуль A — UM-модуль, то h соответствует данной структуре на A: $h(r)(a) = ar$, $a \in A$, $r \in R$. Для любых $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(A,C)$, $y \in R$, $a \in A$ получаем

$$\big(\varphi h(y)\big)a = \varphi\big(h(y)(a)\big) = \varphi(ay) = \varphi(a)y = (\varphi y)(a), \quad \varphi h(y) = \varphi y$$

(надо учесть, что φ — R-модульный гомоморфизм по предложению 1.7; см. также замечание перед предложением 1.8). Поэтому для любых $x, y \in R$ имеем

$$\delta(xy) = \delta(x)h(y) + g(x)\delta(y) = \delta(x)y + g(x)\delta(y).$$

Согласно предложению 1.8 δ — R-модульный гомоморфизм и $\delta(xy) = \delta(x)y$. Итак, $g(x)\delta(y) = 0$. При $x = 1$ имеем $\delta(y) = 0$ и $\delta = 0$. Получено противоречие. Поэтому выполняется утверждение 2).

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). По следствию 3.4 каждый S-модульный гомоморфизм $A \to C$ является R-модульным. Из предложения 1.7 следует, что A — T-модуль.

Убедимся в справедливости импликации 1) $\Longrightarrow$ 3). По предложению 1.3 имеется канонический R-модульный изоморфизм $A \otimes_S R \cong A$. Как отмечалось в доказательстве импликации 1) $\Longrightarrow$ 2), A — UM-модуль.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). На $A \otimes_S R$ имеется два правых R-модульных умножения (см. замечание перед предложением 1.8). По условию они совпадают. Поэтому $ar \otimes x = a \otimes xr$ для всех $a \in A$, $x, r \in R$. В частности, $ar \otimes 1 = a \otimes r$. Тогда ядро гомоморфизма t из раздела 1 равно нулю (см. замечание перед леммой 1.1). Таким образом, A — T-модуль. □

Теорема 3.6. *Для кольца R следующие утверждения эквивалентны*:

1) R — T-*кольцо*;
2) *для любого R-модуля C на $C \oplus R$ нет треугольных R-модульных структур*;
3) $R \otimes_S R$ *является UM-модулем*;
4) *любой R-модуль является UM-модулем*;
5) *любой R-модуль является AM-модулем*;
6) *не существует ненулевых дифференцирований $R \to R \otimes_S R$*;
7) *для любого R-бимодуля M не существует ненулевых дифференцирований $R \to M$.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2) и 3) вытекает из предложения 3.5.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 7). По теореме 2.6 R-модуль M является E-модулем. Повторяя простые рассуждения из доказательства импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) предложения 3.5, получаем, что любое дифференцирование $R \to M$ является нулевым.

Импликация 7) $\Longrightarrow$ 6) верна всегда.

Докажем импликацию 6) $\Longrightarrow$ 1). Допустим, что R не является T-кольцом. По предложению 2.1 $z \otimes 1 - 1 \otimes z \neq 0$ для некоторого $z \in R$. Отображение $x \to x \otimes 1 - 1 \otimes x$, $x \in R$, является ненулевым дифференцированием $R \to R \otimes_S R$, что противоречит 6).

Убедимся в справедливости импликации 1) $\Longrightarrow$ 4). По теореме 2.6 и следствию 3.3 любой модуль над T-кольцом является E-модулем и, в частности, UM-модулем.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 5). Допустим, что R-модуль A не является AM-модулем. Из следствия 3.4 вытекает, что на $A \oplus A$ имеется треугольная R-модульная структура, что противоречит 4).

Докажем импликацию 5) $\Longrightarrow$ 1). Допустим, что R не T-кольцо. По предложению 1.7 для некоторого модуля B найдётся S-модульный и не R-модульный гомоморфизм $\varphi\colon R \to B$. Считая, что φ действует тождественно на B, получаем S-модульный и не R-модульный эндоморфизм модуля $B \oplus R$. Это противоречит 5). □

Для E-модулей и E-колец верны предложение 3.7 и следствие 3.8, аналогичные теореме 3.6.

Предложение 3.7. *Для R-модуля A следующие утверждения эквивалентны*:

1) A — E-*модуль*;
2) *на $A \oplus R$ нет треугольных R-модульных структур*;
3) *для любого R-модуля C на $A \oplus C$ нет треугольных R-модульных структур*;
4) $\mathrm{Hom}_S(R, A)$ *является UM-модулем.*

Доказательство. Для доказательства импликации 1) $\Longrightarrow$ 3) можно повторить рассуждения из доказательства импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) предложения 3.5.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Допустим, что A не является E-модулем. Тогда существует S-модульный и не R-модульный гомоморфизм $R \to A$. По следствию 3.4 с помощью этого гомоморфизма можно определить треугольную структуру на $A \oplus R$, что противоречит утверждению 2).

Справедливость импликации 1) $\Longrightarrow$ 4) вытекает из предложения 1.5 (или из предложения 1.8 и следствия 3.3).

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Из замечания перед предложением 1.8 следует, что на $\mathrm{Hom}_S(R, A)$ существуют два правых R-модульных умножения; они должны совпасть. Поэтому для любых $\varphi \in \mathrm{Hom}_S(R, A)$ и $x, r \in R$ имеем $\varphi(rx) = \varphi(x)r$. В частности, $\varphi(r) = \varphi(1)r$. По предложению 1.5 A — E-модуль. □

Следствие 3.8. *Для кольца R следующие утверждения эквивалентны*:

1) R — E-*кольцо*;
2) *на $R \oplus R$ нет треугольных R-модульных структур*;
3) *для любого R-модуля C на $R \oplus C$ нет треугольных R-модульных структур*;
4) $\mathrm{Hom}_S(R, R)$ *является UM-модулем*;
5) R^n *является UM-модулем для любого $n \geqslant 2$*;
6) $R \oplus R$ *является UM-модулем.*

Доказательство. Эквивалентность утверждений 1)—4) вытекает из предложения 3.7.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 5). По следствию 1.6 R^n является E-модулем. По следствию 3.3 R^n является UM-модулем.

Импликации 5) $\Longrightarrow$ 6) и 6) $\Longrightarrow$ 2) верны всегда. □

Пусть $e\colon S \to R$ — некоторый кольцевой гомоморфизм, не обязательно являющийся центральным, и пусть A — некоторый S-модуль, не являющийся R-модулем. Допустим, что на A можно задать структуру R-модуля так, что A становится притягивающим S-модулем (относительно e) и T(e)-модулем. Такой S-модуль мы также назовём T(e)-*модулем* или T-*модулем относительно* e.

Это не противоречит понятию T-модуля из раздела 1, так как A — притягивающий S-модуль, откуда следует, что $ae(s) = as$ для любых $a \in A$ и $s \in S$; следовательно, действие элементов подкольца $e(S)$ на A известно заранее. Имеет место канонический изоморфизм $A \otimes_S S \to A \otimes_S e(S)$. Из индуцированной точной последовательности S-модулей

$$A \otimes_S e(S) \to A \otimes_S R \to A \otimes_S R_0 \to 0$$

вытекает, что отображение значения

$$v\colon A \to A \otimes_S R, \quad a \to a \otimes 1, \quad a \in A,$$

определённое перед предложением 1.3, является эпиморфизмом в точности тогда, когда $A \otimes_S R_0 = 0$. Отсюда вытекает эквивалентность условий 1) и 2) следующего предложения.

Предложение 3.9. *Для S-модуля A эквивалентны следующие условия*:

1) v — *изоморфизм*;
2) $A \otimes_S R_0 = 0$ *и* v — *мономорфизм*;
3) A — T-*модуль.*

Доказательство. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из предложения 1.3.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Примем во внимание, что $A \otimes_S R$ есть R-модуль, и положим $ar = v^{-1}(v(a)r)$ для $a \in A$ и $r \in R$. Получаем структуру R-модуля на A. Кроме того, A — притягивающий S-модуль. По предложению 1.3 R-модуль A является T-модулем, поэтому S-модуль A тоже T-модуль. □

Если условия предложения выполнены, то по следствию 3.3 R-модульная структура на A, указанная в доказательстве, является единственно возможной.

Для данного гомоморфизма колец $e\colon S \to R$ можно сформулировать задачу описания всех S-модулей, являющихся T-модулями. Обозначим этот класс $\mathcal{T}_e$. Этой задаче можно придать более общую форму:

> для каких классов $\mathcal{T}$ S-модулей существуют кольцо R и гомоморфизм $f\colon S \to R$ со свойством $\mathcal{T} = \mathcal{T}_f$?

В определённом смысле класс $\mathcal{T}_f$ определяет кольцо R с точностью до изоморфизма.

Теорема 3.10. *Пусть $e\colon S \to R$ и $h\colon S \to K$ — гомоморфизмы колец, причём R — T(e)-кольцо и K — T(h)-кольцо. Классы $\mathcal{T}_e$ и $\mathcal{T}_h$ совпадают в точности тогда, когда существует кольцевой изоморфизм $\gamma\colon R \to K$ со свойством $h = \gamma e$.*

Доказательство. Допустим, что $\mathcal{T}_e = \mathcal{T}_h$. Поскольку R — T(e)-кольцо, то $R \in \mathcal{T}_e$, следовательно, $R \in \mathcal{T}_h$. Аналогично $K \in \mathcal{T}_e$. Поэтому на R имеется структура $\circ$ K-модуля, причём R — T(h)-модуль, а как S-модуль R является притягивающим относительно h. Последнее означает, что $xs = x \circ h(s)$, $x \in R$, $s \in S$. Поскольку $xs = xe(s)$, то получаем $xe(s) = x \circ h(s)$. Соответственно, на K

существует структура $\circ$ R-модуля, при этом K — $\mathrm{T}(e)$-модуль и притягивающий S-модуль относительно e. Поэтому $yh(s) = y \circ e(s)$ для всех $s \in S$ и $y \in K$.

Для элемента $k \in K$ пусть α_k обозначает эндоморфизм левого умножения, при котором $\alpha_k(y) = ky$, $y \in K$. Тогда α_k — K-модульный и S-модульный эндоморфизм; по предложению 1.7 α_k — R-модульный эндоморфизм. Поэтому

$$\alpha_k(y \circ r) = \alpha_k(y) \circ r, \quad k(y \circ r) = (ky) \circ r$$

для любых $k, y \in K$ и $r \in R$.

Определим отображение $\gamma\colon R \to K$ правилом $\gamma(x) = 1 \circ x$, $x \in R$. Можно проверить, что γ — кольцевой и S-модульный гомоморфизм. Например, проверим, что γ сохраняет произведение. Для любых $x, y \in R$ верны равенства

$$\gamma(xy) = 1 \circ xy = (1 \circ x) \circ y = (\gamma(x) \cdot 1) \circ y = \gamma(x)(1 \circ y) = \gamma(x)\gamma(y).$$

Меняя местами кольца K и R в проведённом рассуждении, определим кольцевой и S-модульный гомоморфизм $\delta\colon K \to R$. Композиции $\delta\gamma$ и $\gamma\delta$ действуют тождественно на $e(S)$ и $h(S)$ соответственно. По следствию 2.7 $\delta\gamma$ и $\gamma\delta$ — тождественные автоморфизмы соответствующих колец. Поэтому γ и δ — изоморфизмы. Ясно также, что $h = \gamma e$.

Пусть теперь $h = \gamma e$ для некоторого изоморфизма $\gamma\colon R \to K$. Возьмём модуль $A \in \mathcal{T}_e$. Положим $ak = a\gamma^{-1}(k)$, $a \in A$, $k \in K$, и получим K-модуль A, являющийся притягивающим S-модулем относительно h. Так как $A \otimes_S R_0 = 0$ и существует S-модульный изоморфизм $R_0 = R/e(S) \cong K/h(S)$, то $A \otimes_S K/h(S) = 0$. По предложению 1.3 A есть $\mathrm{T}(h)$-модуль и $A \in \mathcal{T}_h$. Обратное включение $\mathcal{T}_h \subseteq \mathcal{T}_e$ доказывается по симметрии. Таким образом, $\mathcal{T}_e = \mathcal{T}_h$. □

Пусть A — некоторый S-модуль, на котором не задана заранее структура R-модуля. Если на A существует такая структура R-модуля, что A — притягивающий S-модуль (относительно e) и $\mathrm{E}(e)$-модуль, то мы будем также называть S-модуль A $\mathrm{E}(e)$-*модулем* или E-*модулем* (*относительно* e).

Обозначим через $\operatorname{tr}_R A$ *след* R в A, т. е. сумму образов всех гомоморфизмов $R \to A$. Будем использовать отображение значения $v'\colon \operatorname{Hom}_S(R, A) \to A$, $v'(\varphi) = \varphi(1)$ из предложения 1.5.

Предложение 3.11. *Для S-модуля A равносильны следующие утверждения*:

1) v' — *изоморфизм*;
2) $\operatorname{Hom}_S(R_0, A) = 0$ *и* $\operatorname{tr}_R A = A$;
3) A *является* E-*модулем*.

Доказательство. Используя точную последовательность S-модулей

$$0 \to \operatorname{Hom}_S(R_0, A) \to \operatorname{Hom}_S(R, A) \to \operatorname{Hom}_S(e(S), A)$$

и индуцированный мономорфизм $\operatorname{Hom}_S(e(S), A) \to \operatorname{Hom}_S(S, A)$, можно убедиться, что инъективность отображения v' равносильна равенству $\operatorname{Hom}_S(R_0, A) = 0$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как $v'(\varphi) = \varphi(1)$ при $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(R, A)$, то $\operatorname{tr}_R A = A$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Так как $\operatorname{tr}_R A = A$, то для каждого $a \in A$ существуют гомоморфизмы $\varphi_i \in \operatorname{Hom}_S(R, A)$ и элементы $x_1, \ldots, x_n \in R$ со свойством $a = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i)$. Для каждого $y \in R$ положим $\psi(y) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x_i y)$ и получим S-гомоморфизм $\psi\colon R \to A$ со свойством $\psi(1) = a$. Следовательно, v' — изоморфизм.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из предложения 1.5.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Группа $\operatorname{Hom}_S(R, A)$ является R-модулем, где $(\varphi r)x = \varphi(rx)$ при $\varphi \in \operatorname{Hom}_S(R, A)$ и $r, x \in R$. Формула $ar = v'\bigl(v'^{-1}(a)r\bigr)$, $a \in A$, $r \in R$, задаёт структуру R-модуля на A, причём A — притягивающий S-модуль. По предложению 1.5 A — E-модуль. $\square$

Замечание. Согласно следствию 3.3 S-модуль A не имеет других R-модульных структур, кроме структуры из доказательства импликации 1) $\Longrightarrow$ 3).

Обозначим через $\mathcal{E}_e$ класс всех S-модулей, являющихся E-модулями относительно гомоморфизма $e\colon S \to R$. Сформулируем следующую задачу:

> для каких классов $\mathcal{E}$ S-модулей существуют кольцо R и гомоморфизм $f\colon S \to R$ со свойством $\mathcal{E} = \mathcal{E}_f$?

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 3.10. Её также можно вывести из теоремы 7.3 и следствия 7.5.

Теорема 3.12. *Пусть $e\colon S \to R$ и $h\colon S \to K$ — гомоморфизмы колец, R — $\mathrm{E}(e)$-кольцо и K — $\mathrm{E}(h)$-кольцо. Равенство $\mathcal{E}_e = \mathcal{E}_h$ равносильно тому, что $h = \gamma e$ для некоторого изоморфизма колец $\gamma\colon R \to K$.*

4. Радикалы, связанные с T-модулями и E-модулями

По данному гомоморфизму колец $e\colon S \to R$ определим два радикала в категории mod-R. Один из них в дальнейшем будет использоваться при построении некоторых идемпотентных функторов и локализаций.

Зафиксируем некоторое кольцо R. Пусть каждому R-модулю A поставлен в соответствие его подмодуль $r(A)$. Говорят, что r — *радикал* категории mod-R, если выполнены следующие условия:

1) $f\bigl(r(A)\bigr) \subseteq r(B)$ для любого гомоморфизма R-модулей $f\colon A \to B$;
2) $r\bigl(A/r(A)\bigr) = 0$ для любого модуля A.

Подмодуль $r(A)$ называется *r-радикалом* модуля A.

Радикал r называется *идемпотентным*, если r удовлетворяет следующему условию:

3) $r\bigl(r(A)\bigr) = r(A)$ для любого модуля A.

Абстрактный класс модулей называется *радикальным*, если он замкнут относительно гомоморфных образов, прямых сумм и расширений, и *полупростым*, если он замкнут относительно подмодулей, прямых произведений и расширений.

Пусть r — некоторый радикал категории $\mathrm{mod}\text{-}R$. Модули A со свойством $r(A) = A$ называются *r-радикальными*, а модули A со свойством $r(A) = 0$ называются *r-полупростыми*.

Замечание. Класс всех r-радикальных модулей является радикальным, а класс всех r-полупростых модулей является полупростым. Справедливо и обратное. Именно, если $\mathcal{R}$ — некоторый радикальный класс модулей, то в категории $\mathrm{mod}\text{-}R$ существует радикал r, для которого класс всех r-радикальных модулей совпадает с $\mathcal{R}$. Если же $\mathcal{P}$ — некоторый полупростой класс, то он является классом всех r-полупростых модулей для некоторого радикала r.

Как и в предыдущих разделах, пусть теперь $e\colon S \to R$ — некоторый кольцевой гомоморфизм и R_0 обозначает S-S-бимодуль $R/e(S)$.

Для R-модуля A назовём *$\mathrm{T}(e)$-радикалом* или *T-радикалом относительно гомоморфизма e* сумму $W(A)$ всех таких подмодулей C в A, что C есть $\mathrm{T}(e)$-модуль (т. е. $C \otimes_S R_0 = 0$ согласно предложению 1.3).

Лемма 4.1. *$W(A)$ есть $\mathrm{T}(e)$-модуль. Таким образом, $W(A)$ — наибольший R-подмодуль в A, являющийся $\mathrm{T}(e)$-модулем.*

Доказательство. Используем несколько раз утверждение 2) предложения 1.3. Возьмём произвольный элемент $\sum a_i \otimes x_i$ в $W(A) \otimes_S R_0$. Модуль $W(A)$ — сумма всех подмодулей C в A, являющихся $\mathrm{T}(e)$-модулями. Можно считать, что каждый элемент a_i содержится в некотором C. Так как $C \otimes_S R_0 = 0$, то $a_i \otimes x_i = 0$ в $C \otimes_S R_0$. Поэтому $a_i \otimes x_i = 0$ в $A \otimes_S R_0$. Тогда $W(A) \otimes_S R_0 = 0$ и $W(A)$ — $\mathrm{T}(e)$-модуль. □

Замечание. Постановка в соответствие каждому R-модулю A его $\mathrm{T}(e)$-радикала $W(A)$ действительно является идемпотентным радикалом категории $\mathrm{mod}\text{-}R$ в смысле приведённого выше определения.

Нужно проверить только выполнение условий 1) и 3) определения идемпотентного радикала, поскольку выполнение условия 2) вытекает из определения $W(A)$. Пусть $f\colon A \to B$ — гомоморфизм R-модулей и C — произвольный подмодуль в A, являющийся $\mathrm{T}(e)$-модулем. Так как из следствия 1.4 вытекает, что $f(C) \subseteq W(B)$, то $f\bigl(W(A)\bigr) \subseteq W(B)$ и выполняется условие 1). Теперь пусть $C/W(A)$ — подмодуль модуля $A/W(A)$, являющийся $\mathrm{T}(e)$-модулем. По предложению 1.3 имеем $C/W(A) \otimes_S R_0 = 0$. По лемме 4.1 $W(A) \otimes_S R_0 = 0$. Поэтому $C \otimes_S R_0 = 0$. По предложению 1.3 $C \subseteq W(A)$. Тогда $C/W(A) = 0$, $W\bigl(A/W(A)\bigr) = 0$ и условие 3) выполняется.

Итак, мы имеем радикал W в категории $\mathrm{mod}\text{-}R$. Как видно из леммы 4.1, радикальный класс радикала W совпадает с классом всех $\mathrm{T}(e)$-модулей. Приведём внутреннее описание радикала $W(A)$ R-модуля A. Сначала определим некоторые новые подмодули.

Для S-модуля A, на котором структура R-модуля заранее не определена, обозначим

$$\mathrm{n}(A) = \{a \in A \mid a \otimes x = 0 \text{ для всех } x \in R_0\}.$$

Назовём подмодуль $\mathrm{n}(A)$ *нейтрализатором* модуля A. Теперь для каждого ординального числа $\tau \geqslant 0$ поставим в соответствие модулю A его подмодуль $\mathrm{n}^\tau(A)$ следующим образом:

$\mathrm{n}^0(A) = A$, $\mathrm{n}^1(A) = \mathrm{n}(A)$;
$\mathrm{n}^\tau(A) = \mathrm{n}^{\rho+1}(A) = n\big(\mathrm{n}^\rho(A)\big)$, если $\tau = \rho + 1$ — непредельное ординальное число;
$\mathrm{n}^\tau(A) = \bigcap\limits_{\rho<\tau} \mathrm{n}^\rho(A)$, если τ — предельное ординальное число.

Модуль A содержит убывающую цепь подмодулей

$$A = \mathrm{n}^0(A) \supseteq \mathrm{n}^1(A) \supseteq \ldots \supseteq \mathrm{n}^\tau(A) \supseteq \ldots .$$

Найдётся наименьшее ординальное число σ со свойством $\mathrm{n}^\sigma(A) = \mathrm{n}^{\sigma+1}(A)$. Обозначим подмодуль $\mathrm{n}^\sigma(A)$ через $\mathrm{n}^\infty(A)$.

Напомним, что предполагается заданным кольцевой гомоморфизм $e\colon S \to R$ и все R-модули автоматически считаются притягивающими S-модулями.

Лемма 4.2 (Е. А. Тимошенко [10]). *Пусть A — R-модуль. Тогда нейтрализатор $\mathrm{n}(A)$ S-модуля A является R-подмодулем в A.*

Доказательство. Зафиксируем элемент $x \in R$ и зададим отображение

$$f\colon A \times R_0 \to A \otimes_S R_0$$

правилом

$$f(a, \bar{r}) = ar \otimes \bar{x} - a \otimes \overline{rx},$$

где черта обозначает смежный класс относительно $e(S)$. Мы действительно имеем отображение, так как $f(a, \bar{s}) = 0$ для любого $s \in e(S)$. Так как $f(as, \bar{r}) = f(a, s\bar{r})$ для любого $s \in S$, то отображение f является сбалансированным над S. Поэтому существует такой аддитивный эндоморфизм α модуля $A \otimes_S R_0$, что

$$\alpha(a \otimes \bar{r}) = ar \otimes \bar{x} - a \otimes \overline{rx}.$$

Для произвольных элементов $a \in \mathrm{n}(A)$ и $r \in R$ верны равенства

$$ar \otimes \bar{x} = ar \otimes \bar{x} - a \otimes \overline{rx} = \alpha(a \otimes \bar{r}) = \alpha(0) = 0.$$

Поэтому $\mathrm{n}(A)$ является R-подмодулем в A. $\square$

Для S-модуля A обозначим через $W_S(A)$ сумму всех таких его подмодулей B, что $B \otimes_S R_0 = 0$. Известно, что W_S является идемпотентным радикалом категории mod-S и $W_S(A) = \mathrm{n}^\infty(A)$. Из следующего предложения можно сделать вывод, что T-радикал W есть сужение радикала W_S на категорию mod-R. (По поводу термина «сужение» см. текст перед теоремой 7.3.)

Предложение 4.3 (Е. А. Тимошенко [10]). *Для R-модуля A верны равенства $W(A) = W_S(A) = \mathrm{n}^\infty(A)$.*

Доказательство. Из определения подмодулей $W(A)$ и $W_S(A)$ вытекают включения $W(A) \subseteq W_S(A) \subseteq \mathrm{n}^\infty(A)$. Остаётся доказать включение $\mathrm{n}^\infty(A) \subseteq \subseteq W(A)$. Из леммы 4.2 вытекает, что $\mathrm{n}^\infty(A)$ является R-подмодулем в A. Пусть $a \in \mathrm{n}^\infty(A)$. Тогда $a \in \mathrm{n}\big(\mathrm{n}^\infty(A)\big)$. Поэтому $a \otimes x = 0$ в $\mathrm{n}^\infty(A) \otimes_S R_0$ для любого $x \in R_0$. Следовательно, $\mathrm{n}^\infty(A) \otimes_S R_0 = 0$ и $\mathrm{n}^\infty(A) \subseteq W(A)$. □

Двойственным образом класс всех $\mathrm{E}(e)$-модулей также определяет некоторый идемпотентный радикал в mod-R. Для R-модуля A назовём его $\mathrm{E}(e)$-*радикалом* или E-*радикалом относительно* e пересечение $H(A)$ всех таких подмодулей X в A, что A/X есть $\mathrm{E}(e)$-модуль (см. [53]).

Лемма 4.4. *Фактор-модуль $A/H(A)$ есть $\mathrm{E}(e)$-модуль. Следовательно, $H(A)$ является наименьшим среди R-подмодулей X в A, для которых A/X — $\mathrm{E}(e)$-модуль.*

Доказательство. Из определения следует, что

$$H(A) = \bigcap_{i \in I} X_i,$$

где $\{X_i\}_{i \in I}$ — множество всех таких подмодулей X_i в A, что A/X_i — $\mathrm{E}(e)$-модуль. Зададим гомоморфизм

$$\varphi\colon A \to \prod_{i \in I} A/X_i$$

правилом

$$\varphi(a) = \prod_{i \in I} (a + X_i)$$

для каждого $a \in A$. Понятно, что ядро гомоморфизма φ совпадает с $H(A)$. Следовательно, фактор-модуль $A/H(A)$ изоморфен подмодулю в $\prod_{i \in I} A/X_i$. Из следствия 1.6 вытекает, что $A/H(A)$ есть $\mathrm{E}(e)$-модуль. □

Проверим, что постановка в соответствие каждому R-модулю A его $\mathrm{E}(e)$-радикала $H(A)$ является идемпотентным радикалом в категории mod-R. Достаточно проверить выполнение условий 1) и 3) определения идемпотентного радикала, поскольку выполнение условия 2) вытекает из того, что $H\big(A/H(A)\big) = 0$ по лемме 4.4.

Проверим выполнение условия 1). Пусть $f\colon A \to B$ — гомоморфизм R-модулей. Надо доказать включение $f\big(H(A)\big) \subseteq H(B)$, равносильное включению $H(A) \subseteq f^{-1}\big(H(B)\big)$. Пусть $\{Y_i\}_{i \in I}$ — множество всех таких подмодулей Y_i в B, что B/Y_i — $\mathrm{E}(e)$-модуль. Так как $f^{-1}\big(H(B)\big) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(Y_i)$, то достаточно проверить включение $H(A) \subseteq f^{-1}(Y_i)$ для любого Y_i. Гомоморфизм f индуцирует мономорфизм

$$A/f^{-1}(Y_i) \to B/Y_i, \quad a + f^{-1}(Y_i) \to f(a) + Y_i, \quad a \in A.$$

Поэтому $A/f^{-1}(Y_i)$ — $\mathrm{E}(e)$-модуль (см. следствие 1.6). Отсюда следует нужное включение.

Проверим выполнение условия 3). Пусть X — такой подмодуль в $H(A)$, что $H(A)/X$ — $\mathrm{E}(e)$-модуль. Имеется изоморфизм $A/H(A) \cong (A/X)/(H(A)/X)$, где $A/H(A)$ тоже $\mathrm{E}(e)$-модуль по лемме 4.4. Остаётся заметить, что расширение $\mathrm{E}(e)$-модуля с помощью $\mathrm{E}(e)$-модуля является $\mathrm{E}(e)$-модулем (это нетрудно доказать с помощью предложения 1.5).

Итак, категория mod-R обладает ещё одним радикалом H (в дополнение к W). Из леммы 4.4 и следствия 1.6 следует, что класс всех $\mathrm{E}(e)$-модулей является полупростым классом радикала H.

Получим внутреннее описание подмодуля $H(A)$. Будет полезна одна известная конструкция. Зафиксируем некоторый S-модуль V. Пусть A — S-модуль, на котором структура R-модуля не предполагается заданной. Обозначим через $\mathrm{tr}_V A$ *след* V в A, т. е. $\mathrm{tr}_V A$ — сумма образов всех гомоморфизмов $V \to A$ (след уже встречался в разделе 3). Теперь определим трансфинитную последовательность следов:

$\mathrm{tr}_V^0(A) = 0$, $\mathrm{tr}_V^1(A) = \mathrm{tr}_V A$;

если $\tau = \rho + 1$ — непредельное ординальное число, то $\mathrm{tr}_V^\tau A = \mathrm{tr}_V^{\rho+1} A$ — такой подмодуль в A, что $\mathrm{tr}_V^\tau A$ содержит $\mathrm{tr}_V^\rho A$ и $\mathrm{tr}_V^\tau A/\mathrm{tr}_V^\rho A = \mathrm{tr}_V^\tau(A/\mathrm{tr}_V^\rho A)$;

$\mathrm{tr}_V^\tau(A) = \bigcup\limits_{\rho<\tau} \mathrm{tr}_V^\rho A$, если τ — предельное ординальное число.

Найдётся наименьшее ординальное число σ со свойством $\mathrm{tr}_V^\sigma(A) = \mathrm{tr}_V^{\sigma+1}(A)$. Обозначим подмодуль $\mathrm{tr}_V^\sigma(A)$ через $\mathrm{tr}_V^\infty(A)$.

Далее в качестве модуля V возьмём R_0. Мы будем опускать индекс R_0 в выражениях $\mathrm{tr}_{R_0} A$ и $\mathrm{tr}_{R_0}^\infty A$.

Лемма 4.5 (Р. С. Пирс [53], Е. А. Тимошенко [10]). *Пусть A — R-модуль. Тогда след $\mathrm{tr}\, A$ S-модуля A является его R-подмодулем.*

Доказательство. Возьмём некоторый гомоморфизм $\psi \in \mathrm{Hom}_S(R_0, A)$. Обозначим через φ соответствующий гомоморфизм $R \to A$, т. е. $\varphi(r) = \psi(\bar r)$, $r \in R$, где черта обозначает смежный класс относительно $e(S)$. Зафиксируем некоторый элемент $x \in R$ и зададим отображение $\gamma\colon R \to A$ формулой $\gamma(r) = \varphi(x)r - \varphi(xr)$, $r \in R$. Аддитивность γ очевидна. Для любого элемента $s \in S$ верны равенства

$$\gamma(rs) = \varphi(x)rs - \varphi(xrs) = \big(\varphi(x)r - \varphi(xr)\big)s = \gamma(x)s;$$

следовательно, $\gamma \in \mathrm{Hom}_S(R, A)$. Имеем $\gamma\big(e(S)\big) = 0$, что позволяет задать S-гомоморфизм $\delta\colon R_0 \to A$, полагая $\delta(\bar r) = \gamma(r)$, $r \in R$. Равенство $\gamma(x) = \varphi(x)r - \varphi(xr)$ перепишем в виде

$$\psi(\bar x)r = \varphi(x)r = \delta(x) + \varphi(xr) = \gamma(\bar x) + \psi(\overline{xr}) \in \mathrm{Im}\,\gamma + \mathrm{Im}\,\psi \subseteq \mathrm{tr}\, A.$$

Итак, для всякого S-гомоморфизма $\psi\colon R_0 \to A$ справедливо включение $(\mathrm{Im}\,\psi)R \subseteq \mathrm{tr}\, A$. Это и означает, что $\mathrm{tr}\, A$ — подмодуль R-модуля A. $\square$

Если A — некоторый S-модуль и $\{Y_i\}_{i\in I}$ — множество всех подмодулей в A со свойством $\operatorname{Hom}_S(R_0, A/Y_i) = 0$, то обозначим $H_S(A) = \bigcap_{i\in I} Y_i$. Получаем идемпотентный радикал H_S в категории mod-S, причём $H_S(A) = \operatorname{tr}^\infty A$ для любого S-модуля A.

В следующем предложении показано, что E-радикал H является сужением радикала H_S на категорию mod-R.

Предложение 4.6 (Р. С. Пирс [53], Е. А. Тимошенко [10]). *Если A — R-модуль, то $H(A) = H_S(A) = \operatorname{tr}^\infty A$.*

Доказательство. Принимая во внимание предложение 1.5 и сравнивая определения подмодулей $H_S(A)$ и $H(A)$, замечаем, что во втором случае пересечение берётся по меньшему семейству подмодулей. Поэтому $H_S(A) \subseteq H(A)$. Для доказательства включения $\operatorname{tr}^\infty A \subseteq H_S(A)$ достаточно доказать, что $\operatorname{tr}^\infty A \subseteq Y$ для каждого S-подмодуля Y в A со свойством $\operatorname{Hom}_S(R_0, A/Y) = 0$. Допустим, что существует такой S-гомоморфизм $\varphi\colon R_0 \to A$, что $\operatorname{Im}\varphi \not\subseteq Y$. Композиция φ с естественным эпиморфизмом $A \to A/Y$ является ненулевым гомоморфизмом; получено противоречие, поэтому $\operatorname{tr} A \subseteq Y$. Далее рассуждаем по трансфинитной индукции. Допустим, что для всех ординальных чисел ρ, меньших τ, уже доказано, что $\operatorname{tr}^\rho A \subseteq Y$. Если τ — предельный ординал, то ясно, что $\operatorname{tr}^\tau A \subseteq Y$. Допустим, что $\tau = \rho + 1$ и $\operatorname{tr}^\tau A \not\subseteq Y$. Так как $\operatorname{tr}^\rho A \subseteq Y$ и $\operatorname{tr}(A/\operatorname{tr}^\rho A) = \operatorname{tr}^\tau A/\operatorname{tr}^\rho A$, то $\operatorname{tr}(A/\operatorname{tr}^\rho A) \not\subseteq Y/\operatorname{tr}^\rho A$. Поэтому существует гомоморфизм $\psi\colon R_0 \to A/\operatorname{tr}^\rho A$ со свойством $\operatorname{Im}\psi \not\subseteq Y/\operatorname{tr}^\rho A$. Как и выше, гомоморфизм ψ индуцирует ненулевой гомоморфизм $R_0 \to A/Y$; получено противоречие. Поэтому $\operatorname{tr}^\tau A \subseteq Y$ и $\operatorname{tr}^\infty A \subseteq Y$.

Остаётся доказать только включение $H(A) \subseteq \operatorname{tr}^\infty A$. С помощью леммы 4.5 непосредственно проверяется, что $\operatorname{tr}^\infty A$ — подмодуль R-модуля A. Теперь ввиду леммы 4.4 достаточно доказать, что $A/\operatorname{tr}^\infty A$ — E(e)-модуль или что $\operatorname{Hom}_S(R_0, A/\operatorname{tr}^\infty A) = 0$ (см. предложение 1.5). Обозначим через B фактор-модуль $A/\operatorname{tr}^\infty A$. Существует такое ординальное число σ, что $\operatorname{tr}^\infty A = \operatorname{tr}^\sigma A$ и $\operatorname{tr}^{\sigma+1} A = \operatorname{tr}^\sigma A$. Верны равенства $\operatorname{tr} B = \operatorname{tr}(A/\operatorname{tr}^\sigma A) = \operatorname{tr}^{\sigma+1} A/\operatorname{tr}^\sigma A = 0$. Таким образом, $\operatorname{Hom}_S(R_0, B) = 0$, что и требовалось доказать. □

Аналогично можно определить T-радикал и E-радикал любого левого R-модуля. Таким образом, кольцо R обладает такими радикалами, как правый R-модуль и левый R-модуль. Если $e\colon S \to R$ — центральный гомоморфизм, то соответствующие правый и левый радикалы совпадают.

5. Сопряжённые функторы и рефлективные подкатегории

Для удобства приведём определения и ряд элементарных свойств сопряжённых функторов и рефлективных подкатегорий (см. [49]).

Пусть $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — некоторые категории. *Сопряжение* между $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ — это тройка $\langle F, G, \varphi \rangle$, где $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — ковариантные функторы, а отображение φ ставит в соответствие каждой паре объектов $X \in \mathcal{C}$ и $Y \in \mathcal{D}$ биекцию множеств

$$\varphi = \varphi_{X,Y}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY),$$

естественную по X и по Y. Также говорят, что F и G составляют *сопряжённую пару*; при этом функтор F называется *левым сопряжённым* для G, а G называется *правым сопряжённым* для F.

Предложение 5.1. *Функторы F и G составляют сопряжённую пару в точности тогда, когда существуют естественные преобразования $f\colon 1_{\mathcal{C}} \to GF$ и $g\colon FG \to 1_{\mathcal{D}}$ со следующими свойствами*:

а) $g_{FX} \circ F(f_X) = 1_{FX}$ *для любого объекта X категории $\mathcal{C}$*;

б) $G(g_Y) \circ f_{GY} = 1_{GY}$ *для любого объекта Y категории $\mathcal{D}$.*

Доказательство. Пусть F и G составляют сопряжённую пару и φ — соответствующая биекция. Определим естественное преобразование f, полагая $f_X = \varphi_{X,FX}(1_{FX})$ для любого объекта X категории $\mathcal{C}$. Учитывая естественность φ, можно проверить справедливость равенства

$$\varphi_{X,Y}(u) = G(u) \circ f_X \tag{1}$$

для каждого морфизма $u\colon FX \to Y$. Зададим естественное преобразование g с помощью формулы $g_Y = \varphi^{-1}_{GY,Y}(1_{GY})$ для любого объекта Y категории $\mathcal{D}$. При этом верно равенство

$$\varphi^{-1}_{X,Y}(v) = g_y \circ F(v) \tag{2}$$

для каждого морфизма $v\colon X \to GY$. Непосредственно проверяется, что f и g являются естественными преобразованиями и выполняются условия а) и б).

Наоборот, пусть даны естественные преобразования f и g, удовлетворяющие условиям а) и б). Положим

$$\varphi_{X,Y}(u) = G(u) \circ f_X, \quad \psi_{X,Y}(v) = g_y \circ F(v),$$

где $u\colon FX \to Y$ и $v\colon X \to GY$ — морфизмы. Тогда $\varphi_{X,Y}$ и $\psi_{X,Y}$ — взаимно обратные биекции, естественные по X и по Y. Следовательно, F и G образуют сопряжённую пару. $\square$

Сопряжение $\langle F, G, \varphi \rangle$ можно обозначать также $\langle F, G, f, g \rangle$. Назовём f *единицей*, а g *коединицей* данного сопряжения.

Предложение 5.2. *Функтор $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ имеет сопряжённый слева функтор в точности тогда, когда для каждого объекта X категории $\mathcal{C}$ существуют объект Y категории $\mathcal{D}$ и морфизм $\alpha\colon X \to GY$, такие что любой морфизм $\beta\colon X \to GZ$, где Z — некоторый объект категории $\mathcal{D}$, представим в виде композиции $\beta = G(\gamma)\alpha$ для однозначно определённого морфизма $\gamma\colon Y \to Z$.*

Доказательство. Пусть F — сопряжённый слева функтор для G и $\langle F, G, f, g \rangle$ — сопряжение. Для объекта X категории $\mathcal{C}$ возьмём FX в качестве Y

и f_X в качестве α. Пусть $\beta\colon X \to GZ$ — произвольный морфизм. Обозначим $\gamma = \varphi_{X,Z}^{-1}(\beta)$, где $\varphi_{X,Z}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GZ)$ — биекция. Учитывая равенство (1) из доказательства предложения 5.1, получаем $\beta = \varphi_{X,Z}(\gamma) = G(\gamma)f_X$.

Допустим, что условия предложения выполняются. Определим функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ следующим образом. Пусть X — некоторый объект категории $\mathcal{C}$, а Y — тот объект категории $\mathcal{D}$, существование которого утверждается в предложении. Полагаем $FX = Y$. Пусть $\tau\colon X \to Z$ — некоторый морфизм категории $\mathcal{C}$, а $\alpha\colon X \to GFX$ и $\beta\colon Z \to GFZ$ — морфизмы, о которых говорится в предложении. Существует единственный морфизм $\gamma\colon FX \to FZ$ со свойством $\beta\tau = G(\gamma)\alpha$. Полагаем $F(\tau) = \gamma$. Получили функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. При этом морфизмы $\alpha\colon X \to GFX$ (для всех X) дают естественное преобразование $f\colon 1_{\mathcal{C}} \to GF$. Наконец, определим отображение

$$\varphi = \varphi_{X,Y}\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, GY),$$

положив $\varphi_{X,Y}(\gamma) = G(\gamma)f_X$. Непосредственно проверяется, что φ — биекция, естественная по X и по Y. □

Пусть A — фиксированный объект категории $\mathcal{D}$. Обозначим через $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, -)$ функтор из $\mathcal{D}$ в категорию множеств. Этот функтор ставит в соответствие объекту Y множество $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, Y)$ и переводит морфизм $\alpha\colon Y \to Z$ в индуцированное отображение α_*.

Сформулируем известную лемму Йонеды.

Лемма 5.3. *Пусть A и B — некоторые объекты категории $\mathcal{D}$.*

1. *Любое естественное преобразование функторов*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, -)$$

индуцируется единственным морфизмом $h\colon A \to B$; более точно, оно индуцируется образом тождественного морфизма объекта B.

2. *В обозначениях из пункта 1 индуцированное отображение*

$$h^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(B, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(A, Y)$$

инъективно для любого объекта Y в точности тогда, когда h — эпиморфизм; h^* — сюръекция в точности тогда, когда h — расщепляющийся мономорфизм (т. е. h имеет левый обратный). □

Замечание. Пусть $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — некоторый функтор. Для данной пары объектов Z, Y категории $\mathcal{D}$ можно определить отображение

$$G(Z, Y)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GZ, GY), \quad \alpha \to G(\alpha).$$

Функтор G называется *унивалентным* (*полным*), если отображение $G(Z, Y)$ инъективно (соответственно сюръективно) для любой пары объектов Z, Y.

Предложение 5.4. *Пусть $\langle F, G, f, g\rangle$ — сопряжение.*

1. *Функтор G унивалентен в точности тогда, когда g_Z — эпиморфизм для любого объекта $Z \in \mathcal{D}$.*
2. *Функтор G полон в точности тогда, когда g_Z — расщепляющийся мономорфизм для любого объекта $Z \in \mathcal{D}$.*
3. *Функтор G полон и унивалентен в точности тогда, когда g_Z является изоморфизмом $FGZ \cong Z$ для любого объекта $Z \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. Зафиксируем объект Z категории $\mathcal{D}$. Для любого объекта $Y \in \mathcal{D}$ композиция отображений

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, Y) \xrightarrow{G(Z,Y)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(GZ, GY) \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGZ, Y)$$

определяет естественное преобразование функторов

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(Z, -) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FGZ, -),$$

здесь $\varphi^{-1} = \varphi^{-1}_{GZ,Y}$. По утверждению 1 леммы 5.3 оно индуцируется образом тождественного морфизма объекта Z. Так как φ^{-1} — биекция, то инъективность (сюръективность) отображения $G(Z, Y)$ равносильна инъективности (соответственно сюръективности) композиции $\varphi^{-1}G(Z, Y)$. Осталось применить второе утверждение леммы 5.3. □

Предложение 5.5. *Пусть $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$ — аддитивные категории, $G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ — аддитивный функтор, причём G имеет левый сопряжённый функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Тогда функтор F аддитивен и биекции $\varphi_{X,Y}$ являются изоморфизмами абелевых групп для любых объектов $X \in \mathcal{C}$ и $Y \in \mathcal{D}$.*

Доказательство. Пусть $f\colon 1_{\mathcal{C}} \to GF$ — единица сопряжения. Возьмём произвольные морфизмы $u, v\colon FX \to Y$. Используя равенство (1) из доказательства предложения 5.1, получаем равенства

$$\varphi(u + v) = G(u + v)f_X = \big(G(u) + G(v)\big)f_X = G(u)f_X + G(v)f_X = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Поэтому φ — изоморфизм абелевых групп.

Для любых морфизмов $u, v\colon X \to Z$ категории $\mathcal{C}$ имеем равенства

$$GF(u + v)f_X = f_Z(u + v) = f_Z u + f_Z v.$$

С другой стороны, получаем

$$G\big(F(u) + F(v)\big)f_X = \big(GF(u) + GF(v)\big)f_X = GF(u)f_X + GF(v)f_X = f_Z u + f_Z v.$$

С учётом предложения 5.2 находим, что $F(u + v) = F(u) + F(v)$. Поэтому функтор F аддитивен. □

Подкатегория $\mathcal{D}$ называется *рефлективной* в категории $\mathcal{C}$, если функтор вложения $K\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ имеет левый сопряжённый функтор $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$; функтор F называется *рефлектором*. Образуем композицию функторов $L = KF\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. Можно описать сопряжение в терминах функтора L и свойства сопряжённого функтора, записанного в предложении 5.2.

Предложение 5.6. *Для подкатегории $\mathcal{D}$ категории $\mathcal{C}$ равносильны следующие утверждения*:

1) *$\mathcal{D}$ рефлективна*;
2) *существуют функтор $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ со значениями в $\mathcal{D}$ и биекция множеств*
$$\varphi = \varphi_{X,Y}\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, Y) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y),$$
естественная по X и по Y;
3) *для каждого объекта $X \in \mathcal{C}$ существуют объект $Z \in \mathcal{D}$ и морфизм $\alpha\colon X \to Z$, такие что любой морфизм $\beta\colon X \to Y$, $Y \in \mathcal{D}$, имеет вид $\beta = \gamma\alpha$ для единственного морфизма $\gamma\colon Z \to Y$.*

Если справедливо утверждение 3), то говорят, что имеется *рефлекция* объекта X в подкатегорию $\mathcal{D}$. Поэтому утверждение 3) можно переформулировать следующим образом:

3′) каждый объект X категории $\mathcal{C}$ обладает рефлекцией в подкатегорию $\mathcal{D}$.

Если же имеет место 1) и F — левый сопряжённый к функтору вложения $K\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, то из доказательства предложения 5.2 следует, что объект FX есть рефлекция объекта X в $\mathcal{D}$ (т. е. F — рефлектор), а соответствующий морфизм α есть f_X, где f — единица сопряжения.

Замечание. Если полная подкатегория $\mathcal{D}$ рефлективна в $\mathcal{C}$, то по предложению 5.4 каждый объект $Y \in \mathcal{D}$ изоморфен FKY, и поэтому $LY \cong Y$ для всех Y. Более того, коединица $g_Y\colon FKY \to Y$ соответствующего сопряжения есть изоморфизм.

6. Идемпотентные функторы и их свойства

Введём идемпотентные функторы и рассмотрим их основные свойства. Важное обстоятельство состоит в том, что идемпотентные функторы являются рефлекторами и наоборот. В конце раздела устанавливаются соотношения между идемпотентными функторами и радикалами в категории модулей.

Для данной категории $\mathcal{C}$ *функтор коаугментации* есть пара (L, f), состоящая из функтора $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ и естественного преобразования $f\colon 1_{\mathcal{C}} \to L$, называемого *коаугментацией*. Таким образом, для всякого объекта X существует морфизм $f_X\colon X \to LX$ и для всякого морфизма $\alpha\colon X \to Y$ существует другой морфизм $L\alpha\colon LX \to LY$ со свойством $f_Y \circ \alpha = L\alpha \circ f_X$. Морфизм f_X называется *отображением коаугментации*.

Функтор коаугментации (L, f) называется *идемпотентным функтором коаугментации*, если для каждого объекта X два морфизма f_{LX} и Lf_X совпадают и являются изоморфизмами. Будем кратко говорить «идемпотентный функтор». Обычно ассоциированная коаугментация ясна из контекста (например, как в предложении 6.1). Более точно, если (L, f) и (L, g) — идемпотентные функторы с коаугментациями f и g, то $g = hf$, где h — естественная эквивалентность $L \to L$.

Проиллюстрируем понятие идемпотентного функтора на примере. В категории абелевых групп рассмотрим функтор тензорного произведения $(-)\otimes\mathbb{Q}$, который обозначим через L. Тогда $LA \cong LLA$ для любой группы A. Однако существуют два естественных изоморфизма из LA на LLA, а именно

$$a\otimes x \to a\otimes x\otimes 1 \quad \text{и} \quad a\otimes x \to a\otimes 1\otimes x,$$

но они совпадают (см. предложения 2.1 и 7.4).

Можно отождествлять идемпотентные функторы с рефлекторами на полные подкатегории.

Предложение 6.1. *Для функтора L в категории $\mathcal{C}$ эквивалентны следующие условия*:

1) *L — идемпотентный функтор*;
2) *для каждого объекта X существует такой морфизм $f_X\colon X \to LX$, что для любого морфизма $\alpha\colon X \to Z$, где $Z \cong LY$ для некоторого объекта Y, существует единственный морфизм $\beta\colon LX \to Z$ со свойством $\beta f_X = \alpha$*;
3) *L есть рефлектор на полную подкатегорию $\mathcal{D}$ объектов, изоморфных LY для некоторого Y.*

Доказательство. Эквивалентность условий 2) и 3) вытекает из предложений 5.2 и 5.6. Отметим, что возникающий в утверждении 2) функтор есть именно L, а f_X — отображение коаугментации.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Можно считать, что L — функтор на полную подкатегорию $\mathcal{D}$ объектов, изоморфных LY для какого-то Y.

Убедимся, что L — левый сопряжённый функтор к функтору вложения $K\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Воспользуемся предложением 5.1. У нас уже есть естественное преобразование $f\colon 1_{\mathcal{C}} \to KL$. Определим ещё преобразование $g\colon LK \to 1_{\mathcal{D}}$. Пусть $Y \in \mathcal{D}$. Тогда $Y \cong LZ$ для некоторого объекта Z. Так как $f_{LZ}\colon LZ \to LLZ$ — изоморфизм, то и $f_Y\colon Y \to LY$ — изоморфизм. Обозначим $g_Y = f_Y^{-1}\colon LY \to Y$. Проверим выполнение условий а) и б) предложения 5.1. Пусть $X \in \mathcal{C}$. Так как $g_{LX} = f_{LX}^{-1}$ и $Lf_X = f_{LX}$, то $g_{LX}\circ Lf_X = 1_{LX}$. Для любого объекта $Y \in \mathcal{D}$ также верно равенство $Kg_Y \circ f_{KY} = 1_{KY}$, поскольку его левая часть имеет вид $g_Y g_Y^{-1}$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Функтор L сопряжён слева к функтору вложения $K\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Пусть $\langle L, K, f, g\rangle$ — соответствующее сопряжение. Условия а) и б) предложения 5.1 имеют вид $g_{LX}\circ Lf_X = 1_{LX}$ для любого $X \in \mathcal{C}$ и $Kg_Y \circ f_{KY} = 1_{KY}$ или $g_Y f_Y = 1_Y$ для любого $Y \in \mathcal{D}$. Возьмём объект LX в качестве Y. Так как g_{LX} — изоморфизм по предложению 5.4, то Lf_X и f_{LX} совпадают и являются изоморфизмами. Следовательно, L — идемпотентный функтор с коаугментацией f. Из доказательства импликации 1) $\Longrightarrow$ 3) следует, что, наоборот, если L — идемпотентный функтор с коаугментацией f, то f является единицей соответствующего сопряжения. $\square$

Приведём ряд первичных свойств идемпотентных функторов.

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая категория и (L, f) — идемпотентный функтор. Объект Y, изоморфный LX для некоторого объекта $X \in \mathcal{C}$, называется *L-локальным* или просто *локальным*, если L фиксирован.

Свойство 1. Если Y — локальный объект, то $Y \cong LY$. Более точно, отображение коаугментации $f_Y : Y \to LY$ есть изоморфизм.

В самом деле, если $Y \cong LX$, то f_{LX} есть изоморфизм. □

Морфизм $g \colon X \to Y$ называется *L-эквивалентностью*, если $Lg \colon LX \to LY$ есть изоморфизм. Отображение коаугментации $f_X : X \to LX$ является L-эквивалентностью.

Свойство 2. Если $g \colon X \to Y$ есть L-эквивалентность и Y — локальный объект, то $Y \cong LX$. Более точно, существует такой изоморфизм $h \colon Y \to LX$, что $f_X = hg$; в этом случае говорят, что g *представляет* отображение коаугментации.

Действительно, $Lg \colon LX \to LY$ есть изоморфизм и $Y \cong LY$. Тогда $Y \cong LX$. □

Определим ещё одно полезное понятие. Будем говорить, что морфизм $g \colon X \to Y$ и объект Z *ортогональны* друг другу (обозначение: $g \perp Z$), если индуцированное отображение $g^* \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$ является биекцией. Из предложения 6.1 следует, что любое отображение коаугментации и любой локальный объект ортогональны. Укажем более точные связи в этом направлении.

Замечание. Будем постоянно использовать свойство морфизмов в локальные объекты, содержащееся в утверждении 2) предложения 6.1. Его можно назвать *свойством единственности* или *свойством универсальности* коаугментации f.

Предложение 6.2.

1. *Объект C локален в точности тогда, когда C ортогонален всем L-эквивалентностям.*
2. *Морфизм $g \colon A \to B$ является L-эквивалентностью в точности тогда, когда g ортогонален всем локальным объектам.*

Доказательство. 1. Пусть C ортогонален всем L-эквивалентностям. Тогда C ортогонален отображению коаугментации $f_C \colon C \to LC$. Поэтому существует морфизм $h \colon LC \to C$ со свойством $hf_C = 1_C$. С другой стороны, имеем равенства $1_{LC} f_C = f_C 1_C = (f_C h) f_C$. По свойству единственности, указанному выше в замечании, получаем $f_C h = 1_C$. Таким образом, f_C — изоморфизм и C — локальный объект. (Для этого было достаточно, чтобы C был ортогонален f_C.)

Допустим теперь, что C — локальный объект. Покажем, что любая L-эквивалентность $g \colon X \to Y$ ортогональна C. Пусть $\alpha \colon X \to C$ — некоторый морфизм. Существует единственный морфизм $\gamma \colon LX \to C$ со свойством $\gamma f_X = \alpha$. Из равенства $f_Y g = Lg f_X$ получаем $f_X = (Lg)^{-1} f_Y g$ и затем $\gamma (Lg)^{-1} f_Y g = \alpha$.

Осталось убедиться в единственности найденного морфизма $\gamma(Lg)^{-1}f_Y$. Допустим, что $\beta g = \alpha$, где $\beta\colon Y \to C$ — некоторый морфизм. Существует $\delta\colon LY \to C$ со свойством $\delta f_Y = \beta$. Можно записать серию равенств:

$$\delta Lg f_X = \delta f_Y g = \beta g = \alpha = \gamma f_X,$$
$$\delta Lg = \gamma, \quad \delta = \gamma(Lg)^{-1}$$

и, наконец,

$$\beta = \delta f_Y = \gamma(Lg)^{-1} f_Y.$$

2. По утверждению 1 L-эквивалентность ортогональна каждому локальному объекту. Пусть теперь морфизм $g\colon A \to B$ ортогонален всем локальным объектам. Найдётся $\beta\colon B \to LA$ со свойством $\beta g = f_A$. Из равенства $f_B g = Lg f_A$ получаем $f_B g = Lg\beta g$. Поэтому $f_B = Lg\beta$ в силу локальности LB. Существует также $\gamma\colon LB \to LA$ со свойством $\gamma f_B = \beta$. Теперь из равенств $1_{LB} f_B = Lg\beta = Lg\gamma f_B$ получаем равенство $Lg\gamma = 1$. Поскольку Lg — L-эквивалентность и LB — локальный объект, то из равенства $Lg\gamma Lg = Lg\cdot 1_{LA}$ получаем $\gamma Lg = 1_{LA}$. Таким образом, Lg — изоморфизм и g — L-эквивалентность. □

Продолжим список свойств идемпотентных функторов и связанных с ними объектов.

Свойство 3. Пусть Y — локальный объект и морфизм $g\colon X \to Y$ ортогонален всем локальным объектам. Тогда $Y \cong LX$.

Свойство 3 вытекает из свойства 2 и того, что по утверждению 2 предложения 6.2 g — L-эквивалентность. □

Объект Z называется *ретрактом* другого объекта X, если существуют морфизмы $j\colon Z \to X$ и $r\colon X \to Z$ со свойством $rj = 1_Z$.

Свойство 4. Класс L-локальных объектов замкнут относительно ретрактов и обратных пределов (в частности, прямых произведений).

Пусть J — малая категория и $F\colon J \to \mathcal{C}$ — некоторый функтор. Допустим, что объект $F(i)$ локален для всех $i \in J$ и существует обратный предел Y функтора F. Возьмём произвольные L-эквивалентность $f\colon A \to B$ и морфизм $\alpha\colon A \to Y$. Для каждого $i \in J$ обозначим через π_i канонический морфизм $Y \to F(i)$. Так как объект $F(i)$ локален, то найдётся однозначно определённый морфизм $\beta_i\colon B \to F(i)$ со свойством $\beta_i f = \pi_i\alpha$. В силу известного свойства обратных пределов существует такой единственный морфизм $\beta\colon B \to Y$, что $\pi_i\beta = \beta_i$ для всех $i \in J$. Теперь имеем $\pi_i\beta f = \beta_i f = \pi_i\alpha$ и $\beta f = \alpha$. Если $\gamma f = \alpha$ для некоторого $\gamma\colon B \to Y$, то из равенств

$$\pi_i\gamma f = \pi_i\alpha = \beta_i f, \quad \pi_i\gamma = \beta_i = \pi_i\beta, \quad i \in J,$$

выводим, что $\gamma = \beta$. Получили, что объект Y ортогонален всем L-эквивалентностям, поэтому он локален по предложению 6.2.

Пусть теперь Z — ретракт локального объекта X и $f\colon A \to B$ — L-эквивалентность. Возьмём морфизмы $j\colon Z \to X$ и $r\colon X \to Z$ со свойством $rj = 1_Z$.

Для произвольного морфизма $\alpha\colon A \to Z$ существует единственный морфизм $\beta\colon B \to X$ со свойством $\beta f = j\alpha$ (см. предложение 6.2). Положим $\gamma = r\beta$. Тогда $\gamma f = r\beta f = rj\alpha = \alpha$. Допустим, что существует морфизм $\delta\colon B \to Z$ со свойством $\delta f = \alpha$. Тогда из равенства $j\delta f = j\alpha$ получаем

$$j\delta = \beta, \quad rj\delta = r\beta = \gamma, \quad \delta = \gamma. \qquad \square$$

Из предложения 6.1 мы знаем, что идемпотентный функтор $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ сопряжён слева к функтору вложения $K\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$, где $\mathcal{D}$ — полная подкатегория, состоящая из объектов, изоморфных LY для некоторого объекта $Y \in \mathcal{C}$ (мы рассматриваем L как функтор из $\mathcal{C}$ в $\mathcal{D}$). Следовательно, если категория $\mathcal{C}$ полная и кополная (т. е. существуют обратные и прямые пределы всех функторов из малых категорий в $\mathcal{C}$), то L сохраняет прямые пределы и K сохраняет обратные пределы (см. [49, § 5.5]). Это свойство функтора K можно рассматривать как часть свойства 4. Тот факт, что L сохраняет прямые пределы, означает выполнение следующего свойства 5.

Свойство 5. Для любого функтора $F\colon J \to \mathcal{C}$, где J — малая категория, имеют место естественные изоморфизмы

$$L\Big(\varinjlim_{\mathcal{C}} F\Big) \cong \varinjlim_{\mathcal{D}} LF \cong L\Big(\varinjlim_{\mathcal{C}} LF\Big).$$

Обратим внимание на то, что из свойства 5 не вытекает, что прямой предел локальных объектов является локальным.

Замечание. Пусть (L, f) и (K, g) — идемпотентные функторы в категории $\mathcal{C}$. Когда идёт речь о естественных преобразованиях между функторами L и K, считаем, что они согласованы с коаугментациями f и g. Именно, если $h\colon L \to K$ — естественное преобразование, то для любого объекта A верно равенство $h_A f_A = g_A$.

Предложение 6.3. *Пусть (L, f) и (K, g) — идемпотентные функторы в категории $\mathcal{C}$.*

1. *Естественное преобразование функтора L в функтор K существует в точности тогда, когда каждый K-локальный объект является L-локальным.*
2. *Функторы L и K естественно эквивалентны в точности тогда, когда класс L-локальных объектов совпадает с классом K-локальных объектов.*

Доказательство. 1. Допустим, что любой K-локальный объект является L-локальным. Возьмём произвольный объект A. Так как KA — K-локальный объект, то KA — L-локальный объект. Поэтому существует единственный морфизм $h_A\colon LA \to KA$ со свойством $g_A = h_A f_A$. Все эти морфизмы h_A определяют естественное преобразование функторов $h\colon L \to K$. Действительно, для любого морфизма $\alpha\colon A \to C$ верны равенства

$$K(\alpha)h_A f_A = K(\alpha)g_A = g_C\alpha, \quad h_C L(\alpha) f_A = h_C f_C \alpha = g_C \alpha,$$
$$K(\alpha)h_A f_A = h_C L(\alpha) f_A, \quad K(\alpha) h_A = h_C L(\alpha).$$

Допустим теперь, что $h\colon L \to K$ — естественное преобразование функторов. Возьмём некоторый K-локальный объект C и установим, что C также является L-локальным объектом. Достаточно проверить, что C ортогонален произвольной L-эквивалентности $\alpha\colon A \to B$ (см. предложение 6.2). Пусть $\beta\colon A \to C$ — некоторый морфизм. Существует единственный морфизм $\gamma\colon KA \to C$ со свойством $\gamma g_A = \beta$. Найдётся единственный морфизм $\delta\colon B \to LA$ со свойством $\delta\alpha = f_A$. Для морфизма $\rho = \gamma h_A \delta\colon B \to C$ получаем $\rho\alpha = \beta$. Осталось проверить единственность этого морфизма ρ. Допустим, что существует морфизм $\eta\colon B \to C$ со свойством $\eta\alpha = \beta$. Тогда из равенства $\rho\alpha = \eta\alpha$ получаем, что $L(\rho)L(\alpha) = L(\eta)L(\alpha)$. Следовательно, $L(\rho) = L(\eta)$, поскольку $L(\alpha)$ — изоморфизм. Тогда из равенств

$$K(\rho) = h_C L(\rho) = h_C L(\eta) = K(\rho)h_B$$

получаем

$$K(\rho)g_B = K(\rho)h_B f_B = K(\eta)h_B f_B = K(\eta)g_B$$

и, наконец,

$$g_C\rho = K(\rho)g_B = K(\eta)g_B = g_C\eta.$$

Так как g_C — изоморфизм, то $\rho = \eta$.

2. Пусть класс L-локальных объектов совпадает с классом K-локальных объектов. По утверждению 1 существуют такие естественные преобразования $h\colon L \to K$ и $k\colon K \to L$, что $h_A f_A = g_A$ и $k_A g_A = f_A$ для каждого объекта A. Из свойства единственности вытекает, что $k_A h_A$ и $h_A k_A$ — тождественные морфизмы на LA и KA соответственно. Следовательно, h_A — изоморфизм и h, g — естественные эквивалентности. Обратное сразу следует из утверждения 1. $\square$

Пусть S — некоторое кольцо. Приведём ряд свойств идемпотентных функторов в категории S-модулей $\text{mod-}S$. Далее (L, f) обозначает некоторый идемпотентный функтор в $\text{mod-}S$. Модуль, являющийся L-локальным объектом, называется *L-локальным* или *локальным* модулем. Мы не будем использовать термин «локальный модуль» в другом известном значении (конечно порождённый модуль с единственным максимальным подмодулем).

Свойство 6. Если A — модуль и C — локальный подмодуль в LA со свойством $\operatorname{Im} f_A \subseteq C$, то $C = LA$. В частности, если $\operatorname{Im} f_A$ – локальный модуль, то f_A — эпиморфизм.

Пусть $j\colon C \to LA$ — вложение. Так как C — локальный модуль, то $\beta f_A = f_A$ для некоторого $\beta\colon LA \to C$. Из равенств $1_{LA} f_A = \beta f_A = j\beta f_A$ вытекает равенство $j\beta = 1_{LA}$. Поэтому j — эпиморфизм и $C = LA$. $\square$

Свойство 7. Прямое произведение локальных модулей является локальным модулем. Прямое слагаемое локального модуля локально. Если $\operatorname{Im} f_A \subseteq C$, где C — прямое слагаемое в LA, то $C = LA$.

Свойство 7 вытекает из свойств 4 и 6. $\square$

Свойство 8. Для любых модулей $A_1, \ldots, A_n$ существует естественный изоморфизм

$$L(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n) \cong LA_1 \oplus \ldots \oplus LA_n.$$

Относительно этого изоморфизма верно равенство

$$f_{A_1 \oplus \ldots \oplus A_n} = f_{A_1} + \ldots + f_{A_n}.$$

Хотя свойство 8 может быть выведено из свойства 5, докажем его непосредственно, а заодно раскроем смысл второго предложения. По свойству 7 $LA_1 \oplus \ldots \oplus LA_n$ — локальный модуль. Поэтому существует такой гомоморфизм $g\colon L(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n) \to LA_1 \oplus \ldots \oplus LA_n$, что $gf_{A_1 \oplus \ldots \oplus A_n} = f_{A_1} + \ldots + f_{A_n}$. Нетрудно также установить существование такого гомоморфизма h в обратном направлении, что $h(f_{A_1} + \ldots + f_{A_n}) = f_{A_1 \oplus \ldots \oplus A_n}$. Далее получим, что g и h — взаимно обратные изоморфизмы. □

Свойство 9. Если $\gamma\colon C \to D$ — гомоморфизм локальных модулей, то $\operatorname{Ker}\gamma$ — локальный модуль.

Достаточно доказать, что модуль $\operatorname{Ker}\gamma$ ортогонален каждой L-эквивалентности $f\colon A \to B$. Обозначим через j вложение $\operatorname{Ker}\gamma \to C$ и зафиксируем произвольный гомоморфизм $\alpha\colon A \to \operatorname{Ker}\gamma$. Так как модули C и D локальны, то найдутся такие гомоморфизмы $\beta\colon B \to C$ и $\delta\colon B \to D$, что $\beta f = j\alpha$ и $\delta f = \gamma j\alpha$, причём β и δ единственные с такими свойствами. Так как $\gamma j\alpha = 0$, то $\delta f = 0$ и $\delta = 0$. Тогда

$$\delta f = \gamma j\alpha = \gamma\beta f, \quad \gamma\beta = \delta = 0.$$

Следовательно, $\operatorname{Im}\beta \subseteq \operatorname{Ker}\gamma$, и можно считать, что β есть гомоморфизм $B \to \operatorname{Ker}\gamma$. Итак, $\beta f = \alpha$, причём β определяется этим равенством однозначно. □

Свойство 10. Пусть A — модуль и $\{g_i\}_{i\in I}$ — либо множество всех гомоморфизмов из A в LA, либо множество всех гомоморфизмов из A во все локальные модули. Тогда $\operatorname{Ker} f_A = \bigcap\limits_{i\in I} \operatorname{Ker} g_i$. В частности, $\operatorname{Ker} f_A$ — вполне инвариантный подмодуль в A.

Достаточно проверить, что $\operatorname{Ker} f_A \subseteq \operatorname{Ker} g_i$ для любого $i \in I$. Если C — некоторый локальный модуль и $g_i\colon A \to C$, то существует гомоморфизм $h\colon LA \to C$ со свойством $hf_A = g$. Отсюда следует нужное включение. □

Свойство 11. Если A — подмодуль локального модуля C, то $f_A\colon A \to LA$ — мономорфизм.

Пусть $j\colon A \to C$ — вложение. Модуль C локален, и f_A — L-эквивалентность. Поэтому по предложению 6.2 найдётся гомоморфизм $h\colon LA \to C$ со свойством $hf_A = j$, что и требовалось. □

Свойство 12. Пусть S — коммутативное кольцо. Если S-модуль Y локален, то $\operatorname{Hom}_S(X, Y)$ — локальный S-модуль для любого модуля X.

Согласно предложению 6.2 достаточно доказать, что модуль $\mathrm{Hom}_S(X,Y)$ ортогонален любой L-эквивалентности $f\colon A\to B$. Запишем естественные изоморфизмы абелевых групп

$$\mathrm{Hom}_S\bigl(B,\mathrm{Hom}_S(X,Y)\bigr)\cong\mathrm{Hom}_S\bigl(X,\mathrm{Hom}_S(B,Y)\bigr)\cong$$
$$\cong\mathrm{Hom}_S\bigl(X,\mathrm{Hom}_S(A,Y)\bigr)\cong\mathrm{Hom}_S\bigl(A,\mathrm{Hom}_S(X,Y)\bigr).$$

При этом «итоговый» изоморфизм индуцируется f. □

Модуль B называется *L-ациклическим*, если $LB=0$; буква L часто опускается.

Свойство 13. Модуль B является ациклическим в точности тогда, когда $\mathrm{Hom}_S(B,C)=0$ для любого локального модуля C. Фактор-модуль ациклического модуля является ациклическим. Расширение ациклического модуля с помощью ациклического является ациклическим модулем.

Пусть B — ациклический модуль. Любой гомоморфизм $B\to C$, где C — локальный модуль, можно по предложению 6.2 пропустить через гомоморфизм $B\to 0$. Следовательно, $\mathrm{Hom}_S(B,C)=0$.

Наоборот, допустим, что имеется только нулевой гомоморфизм $B\to C$, где C — некоторый локальный модуль. Очевидно, что гомоморфизм $B\to 0$ ортогонален модулю C. По предложению 6.2 гомоморфизм $B\to 0$ есть L-эквивалентность, т. е. $LB=0$, откуда следует, что B — ациклический модуль.

Точная последовательность S-модулей

$$0\to A\to B\to D\to 0$$

индуцирует точную последовательность абелевых групп

$$0\to\mathrm{Hom}_S(D,C)\to\mathrm{Hom}_S(B,C)\to\mathrm{Hom}_S(A,C).$$

Теперь оставшиеся утверждения можно получить без труда. □

Свойство 14. Прямой предел ациклических модулей является ациклическим модулем. В частности, прямая сумма ациклических модулей — ациклический модуль.

Если $\{B_i\}_{i\in I}$ — некоторое множество ациклических модулей, то

$$\mathrm{Hom}_S\Bigl(\varinjlim B_i,C\Bigr)\cong\varprojlim\mathrm{Hom}_S(B_i,C)=0,$$

и можно применить свойство 13. □

Свойство 15. Для любого модуля A фактор-модуль LA/fA является ациклическим.

Пусть $\pi\colon LA\to LA/fA$ — естественный эпиморфизм. Допустим, что существует ненулевой гомоморфизм $\alpha\colon LA/fA\to C$ в некоторый локальный модуль C. Тогда гомоморфизм $\alpha\pi\colon LA\to C$ отличен от нуля. По свойству 9 $\mathrm{Ker}\,\alpha\pi$ — локальный модуль. Так как $fA\subseteq\mathrm{Ker}\,\alpha\pi$, то по свойству 6

$\operatorname{Ker} \alpha\pi = LA$ и $\alpha\pi = 0$. Получено противоречие. Осталось учесть свойство 13. $\square$

Для отображения коаугментации $f\colon A \to LA$ можно записать две точные последовательности модулей:

$$0 \to \operatorname{Ker} f \to A \to \operatorname{Im} f \to 0,$$
$$0 \to \operatorname{Im} f \to LA \to LA/\operatorname{Im} f \to 0.$$

Свойство 16. Эпиморфизм $f\colon A \to \operatorname{Im} f$ и вложение $i\colon \operatorname{Im} f \to LA$ являются L-эквивалентностями.

В соответствии с предложением 6.2 проверим, что f и i ортогональны любому локальному модулю C. Пусть $\alpha\colon A \to C$ — некоторый гомоморфизм. Существует гомоморфизм $\beta\colon LA \to C$ со свойством $\alpha = \beta f$. Тогда $\alpha = \beta' f$, где β' — ограничение β на $\operatorname{Im} f$. Поскольку $f\colon A \to \operatorname{Im} f$ — эпиморфизм, то существует только один такой гомоморфизм β'.

Возьмём произвольный гомоморфизм $\alpha\colon \operatorname{Im} f \to C$. Существует единственный гомоморфизм $\beta\colon LA \to C$ со свойством $\alpha f = \beta f = \beta i f$. Тогда $\alpha = \beta i$. Допустим, что $\gamma\colon LA \to C$ — такой гомоморфизм, что $\alpha = \gamma i$. Тогда

$$\alpha f = \gamma i f = \gamma f, \quad \gamma f = \beta f, \quad \gamma = f. \qquad \square$$

Для *конечной топологии* на кольце эндоморфизмов $\operatorname{End}_S A$ база окрестностей нуля состоит из левых идеалов

$$U_X = \{\alpha \in \operatorname{End}_S A \mid \alpha X = 0\}$$

для всех конечных подмножеств X модуля A. Кольцо $\operatorname{End}_S A$ является полным топологическим кольцом в конечной топологии (см. [47, теорема 16.1]). Понятие конечной топологии можно распространить на группы гомоморфизмов. Для конечного подмножества $X \subseteq A$ положим

$$U_X = \{\alpha \in \operatorname{Hom}_S(A, B) \mid \alpha X = 0\}.$$

Здесь U_X — подмодуль левого $\operatorname{End}_S B$-модуля $\operatorname{Hom}_S(A, B)$. Модуль $\operatorname{Hom}_S(A, B)$ превращается в топологический $\operatorname{End}_S B$-модуль, если составить его базу окрестностей нуля из подмодулей U_X для всех X и задать на $\operatorname{End}_S B$ конечную топологию.

Свойство 17. Если группа $\operatorname{Hom}_S(A, LA)$ дискретна в конечной топологии, то кольцо эндоморфизмов $\operatorname{End}_S(LA)$ также дискретно в конечной топологии. Для конечно порождённого модуля A кольцо $\operatorname{End}_S(LA)$ дискретно в конечной топологии.

Действительно, пусть конечное подмножество $X \subseteq A$ таково, что из $\alpha X = 0$, $\alpha \in \operatorname{Hom}_S(A, LA)$, следует $\alpha = 0$. Пусть $\beta \in \operatorname{End}_S(LA)$ и $\beta(fX) = 0$. Тогда $\beta f = 0$ и $\beta = 0$, откуда следует, что кольцо $\operatorname{End}_S(LA)$ дискретно. $\square$

Запишем один результат общего характера, полезный в различных ситуациях.

Предложение 6.4. *Пусть $0 \to B \to A \to C \to 0$ — точная последовательность S-модулей и (L, f) — идемпотентный функтор в категории $\mathrm{mod}\text{-}S$. Тогда существует коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & LB \arrow[r, "j"] & G \arrow[r] & H \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$

в которой g — L-эквивалентность и h — изоморфизм.

Доказательство. Обозначим модуль LB через D. Считаем, что гомоморфизм f из диаграммы — это f_B и i — вложение. Исходя из гомоморфизмов i и f, построим универсальный квадрат. Положим $G = (A \oplus D)/Z$, где $Z = \big\{\big(b, -f(b)\big) \mid b \in B\big\}$. Гомоморфизмы j и g определяются следующим образом:

$$j(d) = d + Z, \quad d \in D, \quad g(a) = a + Z, \quad a \in A.$$

Первый квадрат в диаграмме становится коммутативным. Поскольку i — мономорфизм, то и j — мономорфизм. Также имеем $j(D) = (D + Z)/Z$ и $g(A) = (A + Z)/Z$.

Докажем равенство $D + Z = B \oplus D$. Проверим только, что $B \subseteq D + Z$, поскольку остальное очевидно. Для элемента $b \in B$ получаем

$$b = (b, 0) = \big(0, f(b)\big) + \big(b, -f(b)\big) \in D + Z.$$

Имеем соотношения

$$C \cong A/B \cong (A \oplus D)/(B \oplus D) \cong \big((A \oplus D)/Z\big)/\big((B \oplus D)/Z\big) = G/j(D).$$

Более точно, изоморфизм фактор-модулей A/B и $G/j(D)$ индуцируется гомоморфизмом g. Обозначим модуль $G/j(D)$ через H, и пусть $G \to H$ — естественный эпиморфизм. Ясно, что можно выбрать изоморфизм $h\colon C \to H$ так, что второй квадрат также будет коммутативным.

Покажем, что гомоморфизм g есть L-эквивалентность, т. е. g ортогонален любому L-локальному модулю X. Возьмём произвольный гомоморфизм $\alpha\colon A \to X$. Так как f — отображение коаугментации, то существует единственный гомоморфизм $\gamma\colon D \to X$ со свойством $\alpha i = \gamma f$. Положим $\beta = \alpha + \gamma\colon A \oplus D \to X$. Для любого элемента $\big(b, -f(b)\big) \in Z$ имеем

$$\beta\big(b, -f(b)\big) = \alpha b - (\gamma f)b = (\alpha i)b - (\gamma f)b = 0.$$

Следовательно, β индуцирует гомоморфизм $G \to X$, переводящий $(a, d) + Z$ в $\alpha(a) + \gamma(d)$ для всех $a \in A$, $d \in D$. Будем обозначать этот индуцированный гомоморфизм также через β. Допустим, что $\delta\colon G \to X$ — гомоморфизм со свойством $\delta g = \alpha$. Ясно, что δ совпадает с β на подмодуле $(A + Z)/Z$. Справедливы равенства

$$\alpha i = \beta g i = \beta j f, \quad \alpha i = \delta g i = \delta j f.$$

Поскольку f — L-эквивалентность и X — L-локальный модуль, то по предложению 6.2 получаем, что $\beta j = \delta j$. Следовательно, δ совпадает с β на подмодуле $(D+Z)/Z$. Доказано, что эти гомоморфизмы совпадают на модуле $(A \oplus D)/Z$, т. е. они совпадают на G. Поэтому g ортогонален X и g — L-эквивалентность. □

Следствие 6.5. *Если выполнены условия предложения* 6.4 *и* B — *ациклический модуль, то гомоморфизм* $A \to C$ *есть* L-*эквивалентность.*

Выявим основные связи между идемпотентными функторами и радикалами, в том числе идемпотентными радикалами. Определение этих радикалов приведено в разделе 4.

Пусть (L, f) — идемпотентный функтор в категории S-модулей. Для каждого модуля A положим $r(A) = \operatorname{Ker} f_A$, где $f_A \colon A \to LA$ — отображение коаугментации. Получаем радикал r категории $\operatorname{mod}\text{-}S$ (см. также свойство 10).

Действительно, пусть $g \colon A \to B$ — гомоморфизм модулей. Из равенства $Lgf_A = f_B g$ вытекает включение $g(\operatorname{Ker} f_A) \subseteq \operatorname{Ker} f_B$, что означает выполнение условия 1) из определения радикала. Обозначим через C фактор-модуль $A/r(A)$. Модуль C изоморфен подмодулю локального модуля LA. По свойству 11 $f_C \colon C \to LC$ — мономорфизм. Поэтому $r(C) = \operatorname{Ker} f_C = 0$, и выполняется условие 2) из определения радикала. О выполнимости условия 3) (т. е. равенстве $r\big(r(A)\big) = r(A)$ для всех модулей A) можно сказать следующее. Условие 3) выполняется в точности тогда, когда $\operatorname{Ker} f_A$ — ациклический модуль (см. предложение 6.7).

Если отображение коаугментации f_A является эпиморфизмом для каждого модуля A, то такой функтор L называется *эпирефлектором*.

Пусть теперь r — некоторый радикал в категории $\operatorname{mod}\text{-}S$. Полагая $LA = A/r(A)$ для каждого модуля A, получаем эпирефлектор (L, f), где $f_A \colon A \to LA$ — естественный эпиморфизм. Из всего сказанного следует, что имеется взаимно-однозначное соответствие между эпирефлекторами и радикалами в категории S-модулей. Следующая теорема переносит на модули соответствующий результат для групп, доказанный в [26].

Теорема 6.6. *Пусть* (L, f) — *идемпотентный функтор в категории* $\operatorname{mod}\text{-}S$. *Тогда* L *есть эпирефлектор в точности тогда, когда класс* L-*локальных модулей замкнут относительно перехода к подмодулям, и* L *соответствует идемпотентному радикалу в точности тогда, когда класс* L-*локальных модулей замкнут относительно перехода к подмодулям и расширениям* (*такой функтор называется редукцией*).

Доказательство. Допустим, что L — эпирефлектор. Пусть C — L-локальный модуль и B — подмодуль в C. Отображение коаугментации $f \colon B \to LB$ является эпиморфизмом. Вложение $B \to C$ пропускается через f, поэтому f — мономорфизм. Следовательно, $B \cong LB$ и B — L-локальный модуль.

Наоборот, пусть класс L-локальных модулей замкнут относительно перехода к подмодулям. Возьмём произвольный модуль B с отображением коаугментации

$f\colon B \to LB$. По свойству 16 вложение $\operatorname{Im} f \to LB$ есть L-эквивалентность. Следовательно, оно является изоморфизмом (надо учесть, что $\operatorname{Im} f$ — L-локальный модуль) и f — эпиморфизм. Получаем, что L — эпирефлектор.

Теперь допустим, что радикал r, соответствующий функтору L, является идемпотентным. Это означает, что $r(A) = \operatorname{Ker} f_A$ и $r\big(r(A)\big) = r(A)$ для любого модуля A. Так как L — эпирефлектор, то из доказанного выше следует, что класс L-локальных модулей замкнут относительно перехода к подмодулям. Пусть $0 \to B \to A \to C \to 0$ — точная последовательность модулей, в которой B и C — L-локальные модули. Имеем $r(B) = 0 = r(C)$. Так как $r(A)$ отображается в $r(C)$, то $r(A) \subseteq B$. Из соотношений

$$r(A) = r\big(r(A)\big) \subseteq r(B) = 0$$

следует, что $r(A) = 0$. Поэтому A — L-локальный модуль, что и требовалось доказать.

Наконец, допустим, что класс L-локальных модулей замкнут относительно перехода к подмодулям и расширениям. Из доказанного выше вытекает, что L — эпирефлектор. Поэтому $LA \cong A/r(A)$ для всех модулей A. Осталось показать, что $r\big(r(A)\big) = r(A)$ для всех модулей A или $L\big(r(A)\big) = 0$ для всех A (см. предложение 6.7).

Возьмём какой-нибудь модуль A. В соответствии с предложением 6.4 имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & r(A) \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & LA \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L\big(r(A)\big) \arrow[r] & G \arrow[r] & LA \arrow[r] & 0
\end{tikzcd},$$

в которой g есть L-эквивалентность. Композиция g с эпиморфизмом $G \to LA$ есть L-эквивалентность. Можно считать, что этот эпиморфизм также является L-эквивалентностью. Модуль G локален, поскольку он является расширением локального модуля с помощью локального модуля. Следовательно, отображение $G \to LA$ есть изоморфизм. Поэтому $L\big(r(A)\big) = 0$. $\square$

С идемпотентным функтором (L, f) можно связать как радикал r, так и некоторый идемпотентный радикал. Именно, из свойств 13 и 14 следует, что класс L-ациклических модулей является радикальным (радикальные классы введены в разделе 4), поэтому этот класс определяет идемпотентный радикал. Более конкретно, каждый модуль A содержит наибольший ациклический подмодуль $a(A)$. Соответствие $A \to a(A)$ является идемпотентным радикалом категории mod-S; условия 1)—3) из определения радикала в разделе 4 проверяются с помощью свойства 13. Из свойств 13 и 10 также вытекает, что $a(A) \subseteq r(A)$ для любого модуля A. Можно сформулировать следующее утверждение, относящееся к совпадению этих радикалов.

Предложение 6.7. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) r — *идемпотентный радикал*;
2) $\operatorname{Ker} f_A$ — *ациклический модуль для любого модуля* A;
3) *радикалы* a *и* r *совпадают.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Из равенства $r\bigl(r(A)\bigr) = r(A)$ вытекает, что отображение коаугментации $\operatorname{Ker} f_A \to L \operatorname{Ker} f_A$ является нулевым. Поэтому выполнено утверждение 2).

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Имеем $a(A) \subseteq r(A)$, $r(A) = \operatorname{Ker} f_A \subseteq a(A)$ и $a = r$.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. □

Замечание. Также отметим, что естественный эпиморфизм $A \to A/a(A)$ является эквивалентностью по следствию 6.5. Мы будем рассматривать радикал a также в разделе 9; этот радикал можно назвать *ациклическим радикалом*.

7. Стандартные идемпотентные функторы

Любой кольцевой гомоморфизм $S \to R$ определяет идемпотентный функтор в категории mod-S. Мы называем его *стандартным* функтором. Располагая произвольным идемпотентным функтором в mod-S, можно определить некоторый стандартный функтор. Мы рассматриваем также действие идемпотентного функтора в mod-S на кольцо S. И ещё мы обратим внимание на продолжение идемпотентных функторов, заданных в категории mod-R, до идемпотентных функторов в mod-S при условии, что имеется кольцевой гомоморфизм $S \to R$.

В этом разделе S обозначает некоторое фиксированное кольцо. Пусть L — идемпотентный функтор в категории mod-S с коаугментацией f. Если A — некоторый S-модуль, то $f_A \colon A \to LA$ — отображение коаугментации; индекс A иногда опускается.

Введём несколько гомоморфизмов, связанных с отображением коаугментации $f \colon A \to LA$. Во-первых, аддитивный гомоморфизм

$$f^* \colon \operatorname{Hom}_S(LA, LA) \to \operatorname{Hom}_S(A, LA), \quad f^*(\beta) = \beta f, \quad \beta \in \operatorname{Hom}_S(LA, LA),$$

индуцированный f, является изоморфизмом по предложению 6.1. Пусть φ обозначает обратный к f^* изоморфизм. Тогда $\varphi(\alpha) = \beta$, $\alpha \in \operatorname{Hom}_S(A, LA)$, где $\alpha = \beta f = \varphi(\alpha) f$.

Замечание. В дальнейшем часто будет использоваться равенство

$$\alpha = \varphi(\alpha) f. \tag{3}$$

Из предложения 5.5 и замечания перед предложением 5.4 следует, что отображение $\operatorname{End}_S A \to \operatorname{End}_S(LA)$, $\alpha \to L\alpha$, является гомоморфизмом колец. Мы будем обозначать его через L, что не приведёт к путанице.

Возьмём также индуцированный гомоморфизм

$$f_*\colon \operatorname{Hom}_S(A, A) \to \operatorname{Hom}_S(A, LA), \quad f_*(\alpha) = f\alpha, \quad \alpha \in \operatorname{Hom}_S(A, A).$$

Используя (3), получаем равенство $\varphi(f\alpha)f = f\alpha$. Так как f — коаугментация, то верно равенство $L(\alpha)f = f\alpha$. Поэтому $\varphi(f\alpha)f = L(\alpha)f$ и $\varphi(f\alpha) = L\alpha$ по свойству единственности, сформулированному перед предложением 6.2. Так как $\varphi(f\alpha) = (\varphi f_*)(\alpha)$, то $\varphi f_* = L$.

С помощью изоморфизма φ можно задать умножение на группе $\operatorname{Hom}_S(A, LA)$ так, что получится кольцо, причём единичным элементом будет отображение коаугментации f. Именно, полагаем $\alpha\gamma = \varphi^{-1}\big(\varphi(\alpha)\varphi(\gamma)\big)$ для любых $\alpha, \gamma \in$ $\in \operatorname{Hom}_S(A, LA)$. Учитывая (3), получаем

$$\varphi^{-1}\big(\varphi(\alpha)\varphi(\gamma)\big) = \varphi(\alpha)\varphi(\gamma)f = \varphi(\alpha)\gamma,$$

откуда вытекает следующая формула для умножения в кольце $\operatorname{Hom}_S(A, LA)$:

$$\alpha\gamma = \varphi(\alpha)\gamma. \tag{4}$$

Отображения φ и f^* становятся изоморфизмами колец. Следовательно, f_* — кольцевой гомоморфизм. Имеем коммутативную диаграмму колец

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{End}_S A \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, equal] & \operatorname{Hom}_S(A, LA) \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \\
\operatorname{End}_S A \arrow[r, "L"] & \operatorname{End}_S(LA) \arrow[u, shift right, "f_*"']
\end{tikzcd} . \tag{5}$$

Идемпотентные функторы сохраняют определённые кольцевые и модульные структуры. В следующем разделе мы более детально исследуем проблему сохранения этих структур.

По-прежнему (L, f) — идемпотентный функтор в категории mod-S. В случае «бимодулей» получается исчерпывающий результат.

Предложение 7.1. *Пусть R — кольцо и A — R-S-бимодуль. Тогда можно задать структуру левого R-модуля на S-модуле LA так, что LA будет R-S-бимодулем. При этом построенная R-модульная структура является единственной, для которой $f\colon A \to LA$ — R-гомоморфизм. Если $\beta\colon A \to C$ — гомоморфизм R-S-бимодулей, то $L\beta\colon LA \to LC$ — R-гомоморфизм.*

Доказательство. Так как A — R-S-бимодуль, то существует кольцевой гомоморфизм

$$\sigma\colon R \to \operatorname{End}_S A, \quad \sigma(r)(a) = ra, \quad r \in R, \quad a \in A$$

(см. раздел 3). Возьмём композицию гомоморфизмов $L\sigma\colon R \to \operatorname{End}_S(LA)$. Полагая

$$rb = \big(L\sigma(r)\big)(b), \quad r \in R, \quad b \in LA,$$

получаем структуру левого R-модуля на LA. Более точно, LA — R-S-бимодуль. Для любых элементов $r \in R$ и $a \in A$ верны равенства

$$f(ra) = f\big(\sigma(r)(a)\big) = \big(f\sigma(r)\big)(a) = \big(L\big(\sigma(r)\big)f\big)(a) = \Big(L\big(\sigma(r)\big)\Big)\big(f(a)\big) = rf(a).$$

Следовательно, f — R-гомоморфизм.

Допустим, что на LA имеется ещё одно умножение $\circ$, относительно которого LA является R-S-бимодулем, а f есть R-гомоморфизм. Пусть $\tau\colon R \to \mathrm{End}_S(LA)$ — кольцевой гомоморфизм, соответствующий умножению $\circ$. Для любых элементов $r \in R$ и $a \in A$ имеем $rf(a) = f(ra) = r \circ f(a)$. Поэтому

$$\big(L\sigma(r)\big)\big(f(a)\big) = \big(\tau(r)\big)\big(f(a)\big), \quad L\sigma(r)f = \tau(r)f$$

и $L\sigma(r) = \tau(r)$ по свойству единственности. Следовательно, $L\sigma = \tau$. Это означает, что две S-модульные структуры на LA совпадают.

Пусть $\beta\colon A \to C$ — гомоморфизм R-S-бимодулей. Покажем, что отображение $L\beta\colon LA \to LC$ — R-гомоморфизм. Зафиксируем элемент $r \in R$ и определим отображение $g\colon LA \to LC$, полагая $g(b) = L(\beta)(rb) - rL(\beta)(b)$, $b \in LA$. Тогда g — S-модульный гомоморфизм. Для каждого элемента $a \in A$ имеем

$$\begin{aligned} gf_A(a) = L(\beta)\big(rf_A(a)\big) - rL(\beta)\big(f_A(a)\big) = L(\beta)f_A(ra) - r(f_C\beta)(a) = \\ = L(\beta)f_A(ra) - f_C\beta(ra) = L(\beta)f_A(ra) - L(\beta)f_A(ra) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому $gf_A = 0$ и $g = 0$. Следовательно, $L\beta$ — R-гомоморфизм. □

Работы [22, 25] содержат различные варианты следующей теоремы для случая, когда S — кольцо целых чисел.

Теорема 7.2. *Пусть (L, f) — идемпотентный функтор в категории $\mathrm{mod}\text{-}S$ с коаугментацией f. Пусть $f\colon S \to LS$ обозначает также отображение коаугментации, причём $LS \neq 0$.*

1. *На модуле LS можно так задать умножение, что LS становится кольцом, причём это единственное умножение, для которого f — кольцевой гомоморфизм.*
2. *LS есть S-S-бимодуль, и f — бимодульный гомоморфизм. Кроме того, LS есть E-кольцо относительно гомоморфизма f, причём $rs = rf(s)$ и $sr = f(s)r$ для всех $r \in LS$ и $s \in S$, т. е. LS — притягивающий правый и левый S-модуль.*
3. *Если S — коммутативное кольцо, то LS — коммутативное кольцо.*
4. *Для любого S-модуля A S-модульная структура на LA единственным образом продолжается до LS-модульной структуры, причём LA — E-модуль относительно гомоморфизма f.*

Доказательство. Докажем утверждения 1 и 2. Обозначим модуль LS через R. Рассмотрим коммутативную диаграмму колец (5) для модуля A, равного S. В частности, имеем изоморфизм колец $f^*\colon \mathrm{End}_S R \to \mathrm{Hom}_S(S, R)$ и обратный к нему φ. Рассмотрим изоморфизм S-модулей

$$v\colon \mathrm{Hom}_S(S, R) \to R, \quad v(\alpha) = \alpha(1), \quad \alpha \in \mathrm{Hom}_S(S, R).$$

Модуль $\mathrm{Hom}_S(S,R)$ является кольцом с умножением, задаваемым формулой (4). С помощью отображения v зададим умножение на R следующим образом. Пусть $x,y\in R$ и $x=\alpha(1)$, $y=\gamma(1)$, где $\alpha,\gamma\in\mathrm{Hom}_S(S,R)$. Полагаем

$$xy=(\alpha\gamma)(1). \tag{6}$$

Если применить (4), то имеем равенства

$$xy=(\alpha\gamma)(1)=(\varphi(\alpha)\gamma)(1)=\varphi(\alpha)(y) \tag{6$'$}$$

или

$$xy=\Big(\varphi^{-1}\big(\varphi(\alpha)\varphi(\gamma)\big)\Big)(1). \tag{6$''$}$$

В результате получаем кольцо R с единичным элементом $f(1)$, который мы обозначим просто 1; при этом v становится изоморфизмом колец.

Для любого $\beta\in\mathrm{End}_S R$ верны равенства

$$vf^*(\beta)=v(\beta f)=\beta f(1)=\beta(1).$$

Следовательно, композиция изоморфизмов $vf^*\colon \mathrm{End}_S R\to R$ совпадает с отображением значения (см. следствие 2.2).

Проверим, что отображение $f\colon S\to R$ является кольцевым гомоморфизмом. Пусть $x,y\in S$ и $f(x)=\alpha(1)$, где $\alpha\in\mathrm{Hom}_S(S,R)$. Тогда

$$f(x)f(y)=(\varphi(\alpha)f)(y)=\alpha(y)=\alpha(1\cdot y)=\alpha(1)y=f(x)y=f(xy)$$

(последнее равенство вытекает из того, что f — S-гомоморфизм). В частности, $f(y)=1_Ry$ для любого y. Так как отображение значения $\mathrm{End}_S R\to R$ есть изоморфизм, то по следствию 2.2 R — E-кольцо относительно гомоморфизма f.

Возьмём произвольные элементы $r\in R$, $s\in S$ и запишем $r=\alpha(1)$, где $\alpha\in\mathrm{Hom}_S(S,R)$. Так как

$$rf(s)=\varphi(\alpha)\big(f(s)\big)=(\varphi(\alpha)f)(s)=\alpha(s)=\alpha(1)s=rs,$$

то $rs=rf(s)$.

Допустим, что на R существует ещё одно такое умножение $\circ$, что $\langle R,+,\circ\rangle$ — кольцо, f — кольцевой гомоморфизм (т. е. $f(xy)=f(x)\circ f(y)$, $x,y\in S$) и $rs=r\circ f(s)$, $r\in R$, $s\in S$ (т. е. R — притягивающий S-модуль относительно «нового» гомоморфизма $f\colon S\to R$). Зафиксируем элемент $r\in R$ и определим отображения $\alpha_r,\beta_r\colon R\to R$, полагая $\alpha_r(x)=rx$ и $\beta_r(x)=r\circ x$. Так как $rs=rf(s)$ и $rs=r\circ f(s)$, то непосредственно проверяется, что α_r и β_r — S-эндоморфизмы. Поскольку $\alpha_r(1)=\beta_r(1)$, то $\alpha_r=\beta_r$ (см. следствие 2.2). Поэтому два умножения на R совпадают.

Утверждения о том, что LS есть S-S-бимодуль и f — бимодульный гомоморфизм, вытекают из предложения 7.1.

Докажем, что $sr=f(s)r$ для любых элементов $s\in S$, $r\in R$. Возьмём кольцевой гомоморфизм $\sigma\colon S\to\mathrm{End}_S S$, где $\sigma(s)(x)=sx$, $s,x\in S$. Справедливо равенство $sr=\big(L\sigma(s)\big)(r)$, $s\in S$, $r\in R$ (см. доказательство предложения 7.1).

Зафиксируем элемент $s \in S$. Определим отображение $\beta_s\colon R \to R$ формулой $\beta_s(y) = f(s)y$, $y \in R$. Так как $ys = yf(s)$, то $(zy)s = z(ys)$, $z, y \in R$. Тогда непосредственно проверяется, что β_s — S-эндоморфизм. Для произвольных элементов $s, x \in S$ верны равенства

$$\beta_s f(x) = \beta_s\bigl(f(x)\bigr) = f(s)f(x), \quad \bigl(f\sigma(s)\bigr)(x) = f(sx).$$

Так как f — кольцевой гомоморфизм, то

$$\beta_s f(x) = f\bigl(\sigma(s)\bigr)(x) = L\sigma(s)f(x).$$

Таким образом, $\beta_s f = L\sigma(s)f$ и $\beta_s = L\sigma(s)$. Далее, $\beta_s(x) = f(s)x$ и $L\sigma(s)(x) = sx$. Следовательно, $sx = f(s)x$, что и утверждалось.

Докажем утверждение 3. Пусть S — коммутативное кольцо. Для фиксированного элемента $s \in S$ определим отображение $\gamma\colon R \to R$ формулой $\gamma(x) = xs - sx$, $x \in R$. На самом деле γ — S-эндоморфизм. Так как $\gamma(1) = 0$ и R — E-кольцо, то по следствию 2.2 $\gamma = 0$. Поэтому $xs = sx$ или $xf(s) = f(s)x$ для всех $x \in R$ и $s \in S$. Последнее означает, что $f\colon S \to R$ — центральный гомоморфизм. Согласно предложению 2.5 R — коммутативное кольцо.

Для доказательства утверждения 4 воспользуемся предложением 3.11. Проверим, что $\mathrm{Hom}_S(R_0, LA) = 0$ и $\mathrm{tr}_R A = A$, где $R_0 = R/fS$. Модуль R_0 ацикличен (см. свойство 15 в разделе 6). Теперь первое равенство вытекает из свойства 13 из раздела 6. Для элемента $b \in LA$ выберем гомоморфизм $\alpha\colon S \to LA$ со свойством $\alpha(1) = b$. Существует $\beta\colon R \to LA$, для которого $\beta f = \alpha$. Тогда $\beta f(1) = \alpha(1) = b$, откуда получаем $\mathrm{tr}_R A = A$. Теперь утверждение 4 вытекает из предложения 3.11. В частности, LA — притягивающий S-модуль относительно гомоморфизма f (в этом смысле понимается продолжение S-модульной структуры). Единственность R-модульной структуры на LA вытекает из предложения 3.11 и следствия 3.3. (О единственности модульной структуры говорилось перед следствием 3.2.) □

Итак, если (L, f) — идемпотентный функтор в $\mathrm{mod}\text{-}S$, то имеем гомоморфизм колец $f\colon S \to LS$, причём LS — E-кольцо относительно f. Сейчас мы покажем, что каждый гомоморфизм колец $e\colon S \to R$ даёт идемпотентный функтор в категории $\mathrm{mod}\text{-}S$. Мы проверим ниже, что можно без ограничения общности считать, что R является E-кольцом относительно e.

Итак, пусть $e\colon S \to R$ — некоторый гомоморфизм колец. Как обычно, мы считаем каждый R-модуль притягивающим S-модулем относительно e. В таком случае любой R-гомоморфизм будет S-гомоморфизмом. Поэтому категорию $\mathrm{mod}\text{-}R$ можно рассматривать как подкатегорию категории $\mathrm{mod}\text{-}S$, что мы далее и будем делать. Напомним, что все S-модульные гомоморфизмы $A \to B$, где B — некоторый $\mathrm{E}(e)$-модуль, являются R-модульными по предложению 1.7. Таким образом, класс всех $\mathrm{E}(e)$-модулей — это полная подкатегория категории $\mathrm{mod}\text{-}S$.

Определим функтор F в категории $\mathrm{mod}\text{-}S$. Для S-модуля A полагаем $FA = A \otimes_S R/H(A \otimes_S R)$, где H — это E-радикал относительно гомоморфизма e;

эти радикалы определены в разделе 4. Если $\alpha\colon A \to B$ — S-гомоморфизм, то α индуцирует R-гомоморфизм $\alpha \otimes 1\colon A \otimes_S R \to B \otimes_S R$. Так как гомоморфизмы переводят радикалы модулей в радикалы, то $\alpha \otimes 1$ индуцирует R-гомоморфизм (следовательно, и S-гомоморфизм) $\overline{\alpha \otimes 1}\colon FA \to FB$. Полагаем $F\alpha = \overline{\alpha \otimes 1}$.

В категории абелевых групп следующая теорема, по существу, доказана Пирсом [53].

Теорема 7.3. *Пусть $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец, причём R — Е-кольцо относительно e.*

1. *F — идемпотентный функтор в категории* mod-S.
2. *F-локальные S-модули совпадают с* Е-*модулями относительно гомоморфизма e.*

Доказательство. 1. Ввиду предложений 5.6 и 6.1 нужно доказать, что любой S-модуль A обладает рефлекцией в полную подкатегорию всех Е-модулей относительно гомоморфизма e. Заметим, что фактор-модуль $A \otimes_S R/H(A \otimes_S R)$ является Е-модулем по лемме 4.4. Возьмём композицию отображения значения (см. текст перед предложением 1.3) $v\colon A \to A \otimes_S R$ с естественным эпиморфизмом $A \otimes_S R \to A \otimes_S R/H(A \otimes_S R)$. Обозначим эту композицию снова через v или v_A, если надо подчеркнуть роль модуля A. Пусть теперь B — некоторый Е-модуль и $\alpha\colon A \to B$ — произвольный S-гомоморфизм. Обозначим через β композицию индуцированного гомоморфизма $\alpha \otimes 1\colon A \otimes_S R \to B \otimes_S R$ и гомоморфизма $B \otimes_S R \to B$, $b \otimes r \to br$, т. е. $\beta(a \otimes r) = \alpha(a)r$, $a \in A$, $r \in R$. Поскольку $\beta\big(H(A \otimes_S R)\big) \subseteq H(B) = 0$, то β индуцирует гомоморфизм $A \otimes_S R/H(A \otimes_S R) \to B$, $\overline{a \otimes r} \to \alpha(a)r$, который мы будем также обозначать через β (черта означает смежный класс относительно $H(A \otimes_S R)$). Для любого элемента $a \in A$ имеем

$$\beta v(a) = \beta(a \otimes 1) = \alpha(a) \cdot 1 = \alpha(a), \quad \alpha = \beta v.$$

Допустим, что $\gamma\colon FA \to B$ — ещё один S-гомоморфизм со свойством $\alpha = \gamma v$. Как отмечено выше, β и γ — R-модульные гомоморфизмы. Если $a \in A$ и $r \in R$, то

$$\gamma(\overline{a \otimes r}) = \gamma(\overline{a \otimes 1})r = \gamma v(a)r = \beta v(a)r = \beta(\overline{a \otimes 1})r = \beta(\overline{a \otimes r}), \quad \gamma = \beta.$$

Ещё отметим, что ввиду предложения 6.1 гомоморфизм v есть отображение коаугментации для функтора F.

2. Из утверждения 4 теоремы 7.2 следует, что любой F-локальный модуль является Е-модулем относительно гомоморфизма $v\colon S \to FS$. Но $FS \cong R/H(R) = R$. Так как гомоморфизм e совпадает с композицией гомоморфизма v с записанным изоморфизмом, то любой F-локальный модуль есть Е-модуль относительно e. Обратное вытекает из предложения 5.6. ☐

Замечание. Добавим к второму утверждению теоремы 7.3, что если A — R-модуль, то отображение значения $A \to A \otimes_S R$ индуцирует изоморфизм $A/H(A) \cong A \otimes_S R/H(A \otimes_S R)$. Если же A есть Е-модуль относительно e, то $FA \cong A$.

Назовём функтор F из теоремы 7.3 *стандартным идемпотентным функтором, построенным по гомоморфизму* e.

Если кольцо R не является Е-кольцом, то можно взять гомоморфизм πe, где $\pi\colon R \to R/H(R)$ — естественный эпиморфизм. Тогда можно применить теорему 7.3 к гомоморфизму πe.

Предложение 7.4. *Для гомоморфизма* $e\colon S \to R$ *равносильны следующие условия*:

1) *пара* (F, v) *есть идемпотентный функтор в* mod-S, *где* $FA = A \otimes_S R$ *для каждого* S-*модуля* A *и отображение коаугментации* $v_A\colon A \to A \otimes_S R$ *есть отображение значения* $a \to a \otimes 1$, $a \in A$;
2) R *есть* Т-*кольцо относительно* e.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Имеем $FR \cong R \otimes_S R$. По утверждению 4 теоремы 7.2 $R \otimes_S R$ есть Е-модуль относительно гомоморфизма $v_S\colon S \to FS = S \otimes_S R$. Так как гомоморфизм e равен композиции гомоморфизма v_S и канонического изоморфизма $S \otimes_S R \cong R$, то $R \otimes_S R$ есть Е-модуль относительно e, а R есть Т-кольцо (см. теорему 2.6).

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Любой R-модуль является Е-модулем по теореме 2.6. Следовательно, $H(A \otimes_S R) = 0$ для всех S-модулей A по лемме 4.4. Осталось применить теорему 7.3. $\square$

Пусть теперь (L, f) — некоторый идемпотентный функтор в категории mod-S. Тогда по теореме 7.2 LS является кольцом, отображение коаугментации $f\colon S \to LS$ — кольцевой гомоморфизм и кольцо LS есть Е-кольцо относительно e. Поэтому можно образовать стандартный идемпотентный функтор F, построенный по гомоморфизму f. Назовём его *стандартным* (*идемпотентным*) *функтором, ассоциированным с* L. Как связаны между собой функторы L и F?

Обозначим кольцо LS через R. Из теоремы 7.3 следует, что для S-модуля A гомоморфизм $v\colon A \to FA$ ортогонален LB, где B — любой S-модуль (надо учесть, что LB есть Е-модуль относительно f). Следовательно, v есть L-эквивалентность по предложению 6.2. Таким образом, $LA \cong LFA$. Это даёт естественную эквивалентность функторов L и LF. В самом деле, если $\alpha\colon A \to C$ — гомоморфизм, то $F(\alpha)v_A = v_C\alpha$, поскольку v — естественное преобразование. Отсюда получаем, что $LF(\alpha)L(v_A) = L(v_C)L(\alpha)$. Функторы L и FL также естественно эквивалентны. Действительно, выше замечено, что для любого S-модуля A отображение $v_{LA}\colon LA \to FLA$ есть изоморфизм. Именно эти изоморфизмы приводят к естественной эквивалентности между L и FL.

Пусть A — S-модуль. Существует единственный гомоморфизм $g_A\colon FA \to LA$ со свойством $f_A = g_A v_A$ ((F, v) — стандартный функтор, определённый выше). Гомоморфизмы g_A дают естественное преобразование функторов $g\colon F \to L$. Действительно, пусть $\alpha\colon A \to C$ — гомоморфизм S-модулей. Имеем равенства $g_A v_A = f_A$ и $g_C v_C = f_C$. Поскольку f и v — естественные преобразования, то также верны равенства $L(\alpha)f_A = f_C\alpha$ и $F(\alpha)v_A = v_C\alpha$. Из этих равенств вытекает равенство $L(\alpha)g_A v_A = g_C F(\alpha)v_A$ и затем $L(\alpha)g_A = g_C F(\alpha)$. Поэтому g —

естественное преобразование функторов. Это вытекает также из теоремы 7.3 и предложения 6.3.

Дополним предложение 6.3 несколькими замечаниями о естественных эквивалентностях между идемпотентными функторами.

Пусть (L, f) и (K, k) — идемпотентные функторы в $\mathrm{mod}\text{-}S$ и $h\colon L \to K$ — естественная эквивалентность. Конечно, при этом эквивалентность h согласована с преобразованиями f и k, как это условлено понимать в замечании перед предложением 6.3. Во-первых, нетрудно доказать следующие три факта, второй из которых содержится в предложении 6.3.

1. Гомоморфизм S-модулей $\gamma\colon A \to B$ есть L-эквивалентность в точности тогда, когда γ есть K-эквивалентность.
2. Класс L-локальных модулей совпадает с классом K-локальных модулей.
3. S-модуль A является $\mathrm{E}(f)$-модулем в точности тогда, когда A — $\mathrm{E}(k)$-модуль.

Из теорем 7.2, 7.3 и предложения 6.3 вытекает следствие 7.5.

Следствие 7.5.

1. *Пусть $e\colon S \to R$ и $g\colon S \to T$ — гомоморфизмы колец, причём R — $\mathrm{E}(e)$-кольцо и T — $\mathrm{E}(g)$-кольцо. Стандартные идемпотентные функторы F и G, построенные по гомоморфизмам e и g, естественно эквивалентны в точности тогда, когда существует кольцевой изоморфизм $h\colon R \to T$ со свойством $he = g$ (это некоторая переформулировка теоремы 3.12).*
2. *Идемпотентный функтор (L, f) естественно эквивалентен стандартному функтору, ассоциированному с L, в точности тогда, когда каждый Е-модуль относительно отображения коаугментации $f\colon S \to LS$ является L-локальным.*

Приведём два следствия для рефлективных подкатегорий в $\mathrm{mod}\text{-}S$.

Следствие 7.6. *Пусть $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец, причём R — Е-кольцо относительно e.*

1. *Класс всех Е-модулей относительно гомоморфизма e является рефлективной подкатегорией в $\mathrm{mod}\text{-}S$.*
2. *Категория $\mathrm{mod}\text{-}R$ является рефлективной подкатегорией в $\mathrm{mod}\text{-}S$ в точности тогда, когда R есть Т-кольцо относительно e.*

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из теоремы 7.3 и предложения 6.1.

Докажем второе утверждение. Если R — $\mathrm{T}(e)$-кольцо, то каждый R-модуль является $\mathrm{E}(e)$-модулем и можно использовать первое утверждение. Если же подкатегория $\mathrm{mod}\text{-}R$ рефлективна, то она полна. Следовательно, любой S-гомоморфизм R-модулей будет R-гомоморфизмом. Поэтому любой R-модуль является $\mathrm{E}(e)$-модулем. Следовательно, R — $\mathrm{T}(e)$-кольцо по теореме 2.6. □

Следующий результат вытекает из предложений 5.6, 6.1 и теоремы 7.2.

Следствие 7.7. *Пусть $\mathcal{D}$ — рефлективная подкатегория в* mod-S. *Тогда существуют такие кольцо R и гомоморфизм $f\colon S \to R$, что R — E-кольцо относительно f и $\mathcal{D}$ состоит из $\mathrm{E}(f)$-модулей.*

Как и раньше, пусть $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец. Мы рассматриваем категорию mod-R как подкатегорию в mod-S. Изучим вопрос о продолжении идемпотентных функторов, действующих в категории mod-R, до идемпотентных функторов в категории mod-S. Сначала надо корректно сформулировать этот вопрос. Начнём с того, что́ следует понимать под ограничением идемпотентного функтора, заданного в категории mod-S, на категорию mod-R. Пусть (L, f) — идемпотентный функтор в mod-S и A — R-модуль. Тогда LA — S-модуль. Допустим, что мы располагаем каноническим, т. е. не зависящим от конкретного модуля A, способом превращения S-модуля LA в R-модуль, причём этот способ таков, что получается идемпотентный функтор L' в mod-R, где $L'\colon A \to LA$ и отображение коаугментации есть $f_A\colon A \to LA$ (в частности, f_A есть R-гомоморфизм). Рассуждая более общо, мы считаем ограничением функтора L любой идемпотентный функтор в mod-R, естественно эквивалентный функтору L'.

Пусть теперь K — идемпотентный функтор в категории mod-R. Сформулируем следующим образом вопрос о продолжении функтора K. Требуется найти такой идемпотентный функтор L в категории mod-S, что его ограничение на категорию mod-R естественно эквивалентно функтору K. Возникает также вопрос о единственности продолжения, который мы запишем в следующем виде. Когда два продолжения функтора K естественно эквивалентны?

Теорема 7.8. *Пусть R — T-кольцо относительно гомоморфизма $e\colon S \to R$. Тогда каждый идемпотентный функтор в категории* mod-R *продолжается до идемпотентного функтора в категории* mod-S.

Доказательство. Пусть K — идемпотентный функтор в категории mod-R с коаугментацией f. Обозначим через (F, v) стандартный идемпотентный функтор в категории mod-S, построенный по гомоморфизму e как в предложении 7.4. Именно, $FA = A \otimes_S R$ для каждого S-модуля A, а отображение коаугментации есть отображение значения $v\colon A \to FA$, $a \to a \otimes 1$, $a \in A$. Положим $L = KF$, где считаем F функтором из mod-S в mod-R. Покажем, что L является искомым продолжением функтора K.

Так как R — $\mathrm{T}(e)$-кольцо, то по теореме 2.6 каждый R-модуль является $\mathrm{E}(e)$-модулем. Из теоремы 7.3 получаем, что класс F-локальных модулей совпадает с классом всех R-модулей. Поэтому $FA \cong A$ для любого R-модуля A.

Ясно, что L-локальные модули являются K-локальными. Если C — K-локальный модуль, то $LC = KFC \cong KC \cong C$ и C — L-локальный модуль. Поэтому класс L-локальных модулей совпадает с классом K-локальных модулей.

Проверим, что L — идемпотентный функтор в категории mod-S. Ввиду предложений 5.6 и 6.1 надо доказать, что любой S-модуль A обладает рефлекцией в полную подкатегорию модулей, изоморфных LY для какого-то модуля Y. Возьмём произвольный S-гомоморфизм $\alpha\colon A \to LY$. По теореме 7.3 существует единственный S-гомоморфизм $\beta\colon FA \to LY$ со свойством $\beta v = \alpha$. Так как R — $\mathrm{T}(e)$-кольцо, то β — R-гомоморфизм по теореме 2.6 и предложению 1.7. Поскольку LY — K-локальный модуль, то существует единственный R-гомоморфизм $\gamma\colon LA \to LY$ со свойством $\gamma f = \beta$. Теперь получаем $\gamma(fv) = \beta v = \alpha$. Пусть $\delta\colon LA \to LY$ — такой S-гомоморфизм, что $\delta(fv) = \alpha$. Тогда из $(\delta f)v = \alpha$ получаем $\delta f = \beta$. Учитывая, что δ — R-гомоморфизм, получаем $\delta = \gamma$. Итак, L — идемпотентный функтор в $\mathrm{mod}\text{-}S$ с коаугментацией fv.

Ограничение функтора L на подкатегорию $\mathrm{mod}\text{-}R$ в принятом выше смысле является идемпотентным функтором L' с коаугментацией fv. Для любого R-модуля A имеем естественный изоморфизм $L'A = KFA \cong KA$. Он определяет естественную эквивалентность функторов L' и K, согласованную с коаугментациями fv и f. Эквивалентность этих функторов вытекает также из предложения 6.3. Таким образом, функтор L является продолжением функтора K. □

Вопрос о единственности продолжения функторов в теореме 7.8 без затруднений решается для таких идемпотентных функторов (L, f) в категории $\mathrm{mod}\text{-}S$, что существует кольцевой гомоморфизм $g\colon R \to LS$ со свойством $ge = f$. Согласно теореме 7.2 для любого S-модуля A на LA каноническим образом задаётся структура LS-модуля. Поэтому на LA можно задать структуру притягивающего R-модуля относительно g, полагая $br = bg(r)$ для любых $b \in LA$, $r \in R$. Можно говорить об ограничении функтора L на подкатегорию $\mathrm{mod}\text{-}R$. Оно является идемпотентным функтором с коаугментацией f. Пусть теперь некоторый такой функтор L продолжает функтор K. Всякий K-локальный модуль является L-локальным. Для любого S-модуля A имеем $LA \cong LLA \cong KLA$, так как LA — R-модуль. Поэтому любой L-локальный модуль является K-локальным. Итак, любые два продолжения функтора K имеют равные классы локальных модулей. По предложению 6.3 эти продолжения эквивалентны.

8. Сохранение кольцевых и модульных структур идемпотентными функторами

Замечательное свойство идемпотентных функторов заключается в том, что они сохраняют кольцевые и модульные структуры и гомоморфизмы (см. также предложение 7.1 и теорему 7.2). Основные результаты данного раздела для категории $\mathrm{mod}\text{-}\mathbb{Z}$ абелевых групп представлены в том или ином виде в работах [25, 32].

Зафиксируем некоторое кольцо P. Если не оговорено противное, то все встречающиеся функторы заданы в категории $\mathrm{mod}\text{-}P$ правых P-модулей. Если L — идемпотентный функтор с коаугментацией f и A — некоторый P-модуль, то $f_A\colon A \to LA$ — отображение коаугментации. Как и в предыдущем разделе, индекс A иногда опускается.

Мы используем гомоморфизмы из раздела 7, появляющиеся в связи с отображением коаугментации $f\colon A \to LA$.

Сформулируем результаты и докажем правосторонний аналог предложения 7.1. Пусть P-модуль A является также модулем над некоторым кольцом S. Кроме того, считаем, что существует кольцевой гомоморфизм $e\colon P \to S$, причём A — притягивающий P-модуль относительно e. Это мы будем предполагать всегда в аналогичных ситуациях.

Отметим, что если e — центральный гомоморфизм и P — коммутативное кольцо, то S есть P-алгебра и наоборот, а $\operatorname{End}_P A$ — P-модуль.

Теорема 8.1. *Пусть P — коммутативное кольцо, $e\colon P \to S$ — центральный гомоморфизм, A — S-модуль и (L, f) — идемпотентный функтор в категории* mod-P.

1. *На P-модуле LA можно задать структуру S-модуля так, что LA — притягивающий P-модуль, причём это единственная S-модульная структура, для которой $f\colon A \to LA$ — S-гомоморфизм.*
2. *Если $\beta\colon A \to C$ — S-модульный гомоморфизм, то $L\beta\colon LA \to LC$ также S-модульный гомоморфизм.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Существует антигомоморфизм колец $\sigma\colon S \to \operatorname{End}_P A$, $\sigma(s)(a) = as$, $s \in S$, $a \in A$ (см. раздел 3; следует учесть, что e — центральный гомоморфизм и A — притягивающий P-модуль относительно e). Образуем композицию гомоморфизмов $L\sigma\colon S \to \operatorname{End}_P LA$. Полагая $bs = \big(L\sigma(s)\big)(b)$ для всех $s \in S$, $b \in LA$, получим структуру S-модуля на LA, причём LA — притягивающий P-модуль относительно e. Для проверки этого возьмём гомоморфизм колец $\rho\colon P \to \operatorname{End}_P LA$, $\rho(t)(b) = bt$, $t \in P$, $b \in LA$. Зафиксируем элемент $t \in P$. Тогда $\rho(t)$ есть P-эндоморфизм $LA \to LA$ и верно равенство $\rho(t)f = f\sigma\big(e(t)\big)$, где $f\colon A \to LA$ — отображение коаугментации. Действительно, для элемента $a \in A$ имеем

$$(\rho(t)f)(a) = \rho(t)\big(f(a)\big) = f(a)t,$$
$$\Big(f\sigma\big(e(t)\big)\Big)(a) = f\Big(\sigma\big(e(t)\big)\Big)(a) = f\big(ae(t)\big) = f(at) = f(a)t.$$

Так как $f\sigma\big(e(t)\big) = L\sigma\big(e(t)\big)f$, то

$$\rho(t)f = L\sigma\big(e(t)\big)f, \quad \rho(t) = L\sigma\big(e(t)\big).$$

Следовательно, $bt = be(t)$ для любых $b \in LA$ и $t \in P$. Поэтому LA — притягивающий P-модуль.

Для любых элементов $s \in S$ и $a \in A$ верны равенства

$$f(as) = f\sigma(s)(a) = (L\sigma(s)f)(a) = L\sigma(s)\big(f(a)\big) = f(a)s.$$

Поэтому f — S-гомоморфизм.

Допустим, что на LA имеется ещё одно S-модульное умножение $\circ$, причём LA — притягивающий P-модуль относительно гомоморфизма $e\colon P \to S$ и f —

S-гомоморфизм. Пусть $\tau\colon S \to \operatorname{End}_P LA$ — кольцевой антигомоморфизм, соответствующий умножению $\circ$ (см. раздел 3; $\tau(s)$ будет P-гомоморфизмом, поскольку e — центральный гомоморфизм). Для любых элементов $s \in S$ и $a \in A$ имеем $f(a)s = f(as) = f(a) \circ s$. Поэтому

$$L\sigma(s)\bigl(f(a)\bigr) = \tau(s)\bigl(f(a)\bigr), \quad L\sigma(s)f = \tau(s)f$$

и $L\sigma(s) = \tau(s)$ по свойству единственности (см. замечание перед предложением 6.2). Следовательно, $L\sigma = \tau$, что означает совпадение двух S-модульных структур на LA.

Доказательство утверждения 2 аналогично доказательству подобного утверждения в предложении 7.1. □

Конечно, верен также левосторонний аналог теоремы 8.1.

В условиях предложения 7.1 или теоремы 8.1 получаем, что если C — локальный P-модуль (т. е. f_C — изоморфизм), то единственный гомоморфизм $\gamma\colon LA \to C$ со свойством $\gamma f_A = \beta$ является S-модульным.

Частично объединим предложение 7.1 и теорему 8.1.

Следствие 8.2. *Если в условиях теоремы* 8.1 *A является R-S-бимодулем, то имеем R-S-бимодуль LA.*

Доказательство. Имеем левый R-модуль и правый S-модуль LA. Пусть $\sigma\colon R \to \operatorname{End}_P A$ и $\tau\colon S \to \operatorname{End}_P A$ — кольцевые гомоморфизмы, соответствующие структурам R-модуля и S-модуля на A. Так как A — R-S-бимодуль, то $\sigma(r)\tau(s) = \tau(s)\sigma(r)$ для любых $r \in R$ и $s \in S$. Отсюда получаем, что $L\sigma(r)L\tau(s) = L\tau(s)L\sigma(r)$. Это равенство означает, что LA — R-S-бимодуль. □

Пусть P — коммутативное кольцо и $e\colon P \to S$ — центральный гомоморфизм колец. Пусть (L, f) — идемпотентный функтор в категории $\text{mod-}P$. На основании теоремы 8.1 можно говорить об ограничении функтора L на категорию $\text{mod-}S$ (об ограничении функторов см. рассуждения перед теоремой 7.8). В самом деле, если A — S-модуль, то P-модуль LA можно каноническим способом превратить в S-модуль. Функтор L переводит S-гомоморфизмы в S-гомоморфизмы. Таким образом, L есть функтор в $\text{mod-}S$. Отображение коаугментации $f\colon A \to LA$ является S-гомоморфизмом. Следовательно, имеется естественное преобразование $1_{\text{mod-}S} \to L$. При этом пара (L, f) является идемпотентным функтором в $\text{mod-}S$. Нужно убедиться, что любой S-модуль A обладает рефлекцией в полную подкатегорию модулей, изоморфных LY для некоторого S-модуля Y (см. предложения 5.6 и 6.1). Пусть $\alpha\colon A \to LY$ — некоторый S-гомоморфизм. Тогда α — P-гомоморфизм. Следовательно, существует единственный P-гомоморфизм $\beta\colon LA \to LY$ со свойством $\beta f = \alpha$. После теоремы 8.1 отмечено, что β — S-гомоморфизм. Таким образом, имеем идемпотентный функтор L в категории $\text{mod-}S$ с коаугментацией f (сохраняем те же обозначения). Применяя к этому функтору теорему 7.2 и следствие 8.2, приходим к основному результату этого раздела.

Теорема 8.3. *Пусть P — коммутативное кольцо, $e\colon P \to S$ — центральный гомоморфизм колец, (L, f) — идемпотентный функтор в категории* mod-P *и* $LS \neq 0$.

1. *На LS можно задать умножение так, что LS станет кольцом, причём это единственное умножение, для которого f есть кольцевой гомоморфизм.*
2. *LS есть S-S-бимодуль, и f — бимодульный гомоморфизм. LS есть* E-*кольцо относительно гомоморфизма f, и верны равенства $rs = rf(s)$, $sr = f(s)r$ для всех $r \in LS$ и $s \in S$, т. е. LS — притягивающий правый и левый S-модуль. Кроме того, LS — притягивающий P-модуль.*
3. *Если S — коммутативное кольцо, то LS — коммутативное кольцо.*
4. *Для любого S-модуля A S-модульная структура на LA единственным образом продолжается до LS-модульной структуры. При этом LA —* E-*модуль относительно гомоморфизма f. Если A является R-S-бимодулем, то имеем LR-LS-бимодуль LA.*

Доказательство. Достаточно доказать последнее утверждение пункта 4.

По следствию 8.2 имеем R-S-бимодуль LA. Пусть $\sigma\colon R \to \mathrm{End}_P A$ — кольцевой гомоморфизм, $\tau\colon S \to \mathrm{End}_P A$ — кольцевой антигомоморфизм, соответствующие структурам R-модуля на A и S-модуля на A. Заметим, что σ и τ — P-гомоморфизмы. Гомоморфизм $L\sigma$ задаёт структуру левого R-модуля на LA, антигомоморфизм $L\tau$ задаёт структуру правого S-модуля на LA (см. теорему 8.1). Кольцевой гомоморфизм $L\colon \mathrm{End}_P A \to \mathrm{End}_P(LA)$ также является P-гомоморфизмом (см. начало доказательства предложения 8.4).

Пусть $\mu\colon LR \to \mathrm{End}_P(LA)$ — гомоморфизм, соответствующий структуре левого LR-модуля на LA; такая структура существует по левосторонним аналогам теоремы 8.1 и утверждения 4 теоремы 8.3. Тогда μ — P-гомоморфизм. Так как LA — притягивающий R-модуль относительно гомоморфизма $f_R\colon R \to LR$, то верны равенства
$$rb = f_R(r)b = \mu\big(f_R(r)\big)(b)$$
для любых $r \in R$, $b \in LA$. С другой стороны, имеем равенство $rb = \big(L\sigma(r)\big)(b)$ (см. доказательство теоремы 8.1). Следовательно, $\mu f_R = L\sigma$, т. е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f_R"] \arrow[d, "\sigma"'] & LR \arrow[d, "\mu"] \\ \mathrm{End}_P A \arrow[r, "L"] & \mathrm{End}_P(LA) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Заметим, что такой гомоморфизм μ единственен, поскольку $\mathrm{End}_P(LA)$ — локальный P-модуль по свойству 12 из раздела 6. Существование такого μ также прямо вытекает из локальности P-модуля $\mathrm{End}_P(LA)$, если учесть, что по предложению 8.4 μ — кольцевой гомоморфизм. При этом

$\mu = hL(\sigma)$, где $h\colon L\operatorname{End}_P A \to \operatorname{End}_P(LA)$ — гомоморфизм, указанный в конце раздела. Аналогично если $\nu\colon LS \to \operatorname{End}_P(LA)$ — антигомоморфизм, соответствующий структуре правого LS-модуля на LA, то $\nu f_S = L\tau$.

Так как LA есть R-S-бимодуль, то $L\sigma(r)L\tau(s) = L\tau(s)L\sigma(r)$ для всех $r \in R$, $s \in S$. Следовательно, $\mu f_R(r)\nu f_S(s) = \nu f_S(s)\mu f_R(r)$. Покажем, что $\mu(x)\nu(y) = \nu(y)\mu(x)$ для всех $x \in LR$, $y \in LS$.

Зафиксируем элемент $s \in S$ и возьмём P-гомоморфизм

$$\Phi\colon LR \to \operatorname{End}_P(LA), \quad \Phi(x) = \mu(x)\nu f_S(s) - \nu f_S(s)\mu(x), \quad x \in LR.$$

Для всякого элемента $r \in R$ имеем $\Phi f_R(r) = 0$. Поэтому $\Phi f_R = 0$ и $\Phi = 0$, так как $\operatorname{End}_P(LA)$ — локальный P-модуль. Зафиксируем теперь элемент $x \in LR$ и рассмотрим P-гомоморфизм

$$\Psi\colon LS \to \operatorname{End}_P(LA), \quad \Psi(y) = \mu(x)\nu(y) - \nu(y)\mu(x), \quad y \in LS.$$

Тогда $\Psi f_S(s) = 0$ для любого $s \in S$ и $\Psi = 0$ для любого $x \in LR$. Это означает, что $\mu(x)\nu(y) = \nu(y)\mu(x)$ и LA есть LR-LS-бимодуль. □

Заметим, что утверждение 4 теоремы 8.3 полезно для приложений.

При определённых условиях идемпотентные функторы сохраняют кольцевые гомоморфизмы.

Предложение 8.4. *Пусть P — коммутативное кольцо, $e\colon P \to S$, $e'\colon P \to R$ — центральные гомоморфизмы колец, (L, f) — идемпотентный функтор в категории $\text{mod-}P$, $LS \neq 0$, $LR \neq 0$ и $g\colon S \to R$ — кольцевой гомоморфизм со свойством $ge = e'$. Тогда Lg — кольцевой гомоморфизм.*

Доказательство. Для P-модулей LS и LR верны все утверждения теоремы 8.3. Пусть $f_S\colon S \to LS$ и $f_R\colon R \to LR$ — отображения коаугментации. Для любых элементов $s \in S$ и $t \in P$ верны равенства

$$g(st) = g\big(se(t)\big) = g(s)g\big(e(t)\big) = g(s)e'(t) = g(s)t.$$

Следовательно, g — P-модульный гомоморфизм. В силу теоремы 8.3 LS — притягивающий модуль относительно гомоморфизмов e и f_S. Поэтому LS — притягивающий модуль относительно гомоморфизма f_Se, т. е. $yt = y \cdot (f_Se)t$ для всех $y \in LS$, $t \in P$. Поэтому $(zy)t = z(yt)$ для любых $z, y \in LS$, $t \in P$. Аналогичное утверждение верно для кольца LR. (Также верно равенство $(zy)t = (zt)y$.)

Обозначим гомоморфизм Lg через h и покажем, что $h(zy) = h(z)h(y)$ для любых $z, y \in LS$. Зафиксируем элемент $z \in LS$ и определим отображение $\gamma\colon LS \to LR$, где $\gamma(y) = h(zy) - h(z)h(y)$, $y \in LS$. Из равенств

$$\begin{aligned}\gamma(yt) = h\big(z(yt)\big) - h(z)h(yt) = h\big((zy)t\big) - h(z)(h(y)t) =\\ = h(zy)t - \big(h(z)h(y)\big)t = \gamma(y)t, \quad y \in LS, \quad t \in P,\end{aligned}$$

вытекает, что γ — P-гомоморфизм. Нам нужно доказать, что $\gamma f_S = 0$. Во-первых, для элемента $x \in S$ верно

$$(\gamma f_S)x = \gamma\big(f_S(x)\big) = h\big(zf_S(x)\big) - h(z) \cdot h\big(f_S(x)\big).$$

Мы считаем кольцо R S-модулем, полагая $rs = r \cdot g(s)$ для элементов $r \in R$, $s \in S$. Тогда g становится S-модульным гомоморфизмом, так как $g(xs) = g(x)g(s) = g(x)s$ для всех $x, s \in S$. По теореме 8.1 LR — S-модуль, а по утверждению 2 теоремы 8.3 $br = b \cdot f_R(r)$, где $b \in LR$, $r \in R$. Тогда $bg(s) = b \cdot f_R\big(g(s)\big)$ для произвольного элемента $s \in S$.

Сейчас применим формулу (6′) из раздела 7 к умножению в кольце LR. Пусть $\varphi\colon \mathrm{Hom}_R(R, LR) \to \mathrm{End}_R LR$ — изоморфизм, обратный к изоморфизму, индуцированному отображением f_R. Пусть $b = \alpha(1)$, где $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(R, LR)$. Тогда $\alpha = \varphi(\alpha) f_R$. Применяя (6′), получаем

$$b \cdot f_R\big(g(s)\big) = \varphi(\alpha)\Big(f_R\big(g(s)\big)\Big) = (\varphi(\alpha) f_R)\big(g(s)\big) = (\alpha g)s = \alpha g(1)s = \alpha(1)s = bs$$

(нужно учесть, что f_R — единичный элемент кольца $\mathrm{Hom}_R(R, LR)$, см. текст перед формулой (4) в разделе 7).

По теореме 8.1 Lg — S-гомоморфизм. Учитываем также утверждение 2 теоремы 8.3 и получаем $h\big(z f_S(x)\big) = h(zx) = h(z)x$. С другой стороны,

$$h(z) \cdot h\big(f_S(x)\big) = h(z) \cdot (f_R g)(x) = h(z)x.$$

В итоге получаем, что $\gamma f_S = 0$. Следовательно, $\gamma = 0$ для всех $z \in LS$. Это означает, что Lg — кольцевой гомоморфизм. Это также можно доказать, дважды используя свойство универсальности коаугментации f, как в доказательстве утверждения 4 теоремы 8.3. $\square$

Как частный случай мы получаем, что если выполнены условия предложения 8.4 и R — локальный модуль (т. е. f_R — изоморфизм), то единственный P-модульный гомоморфизм $h\colon LS \to R$ со свойством $hf_S = g$ является кольцевым гомоморфизмом.

Можно применить этот частный случай к следующей ситуации. Пусть по-прежнему (L, f) — идемпотентный функтор в mod-P. Если A — некоторый P-модуль, то $\mathrm{End}_P A$ и $\mathrm{End}_P LA$ — P-модули. По теореме 8.3 соответствующее отображение коаугментации $f\colon \mathrm{End}_P A \to L\,\mathrm{End}_P A$ является кольцевым гомоморфизмом. Имеем также отображения

$$e\colon P \to \mathrm{End}_P A, \quad e'\colon P \to \mathrm{End}_P LA,$$

где

$$e(t)(a) = at, \quad e'(t)(b) = bt, \quad t \in P, \quad a \in A, \quad b \in LA.$$

Более точно, e и e' — центральные гомоморфизмы колец и верно равенство $Le = e'$. По свойству 12 из раздела 6 $\mathrm{End}_P LA$ — локальный P-модуль. Согласно рассуждениям предыдущего абзаца существует единственный кольцевой гомоморфизм $h\colon L\,\mathrm{End}_P A \to \mathrm{End}_P LA$ со свойством $hf = L$. Возникает вопрос:

> для каких функторов L гомоморфизм h будет изоморфизмом для всех P-модулей A?

Замечание. Все результаты этого раздела справедливы для категории абелевых групп mod-$\mathbb{Z}$ и любого кольца S, поскольку единственный кольцевой гомоморфизм $\mathbb{Z} \to S$ является центральным.

9. Функторы локализации и локализации модулей

Важным источником идемпотентных функторов являются функторы локализации относительно отображений. В связи с этими функторами локализации определим также понятие локализаций модулей. Давно появились и имеют исключительное значение классические локализации колец и модулей относительно множеств знаменателей (см., например, [55, 57, 58, 60]); также используются более общие локализации относительно кручений (см., например, [3, 45, 51, 52, 58, 59]).

Функторы локализации и локализации модулей относительно отображений являются конструкциями более широкого характера. Действительно, любая классическая локализация или локализация относительно кручения обязательно приводит к определённой рефлективной подкатегории и соответствующему рефлектору и, следовательно, к идемпотентному функтору (см. предложение 6.1). Таким образом, эти известные локализации являются примерами локализаций, исследуемых в этом и последующих разделах.

Мы обозначаем через S некоторое кольцо; рассматриваются S-модули.

Пусть A и B — некоторые модули, $f\colon A \to B$ — гомоморфизм. Модуль M называется *f-локальным*, если он ортогонален f (понятие ортогональности морфизма и объекта введено в разделе 6). Модуль M f-локален в точности тогда, когда индуцированное отображение $f^*\colon \mathrm{Hom}_S(B, M) \to \mathrm{Hom}_S(A, M)$ является изоморфизмом (см. начало раздела 7). Класс всех f-локальных модулей обозначается через $f^\perp$.

Существенный момент заключается в том, что $f^\perp$ есть рефлективная подкатегория категории mod-S (как обычно, класс объектов отождествляется с соответствующей полной подкатегорией). Таким образом, существует рефлекция на полную подкатегорию $f^\perp$; она обозначается через L_f. По предложению 6.1 L_f — идемпотентный функтор, причём f — отображение коаугментации. Мы будем называть функтор L_f *функтором локализации* или просто *локализацией*.

Замечание. Обратим внимание читателя на то, что в литературе идемпотентные функторы иногда называют функторами локализации или локализациями.

Для краткости мы называем L_f-эквивалентность *f-эквивалентностью*.

Конструкция функтора L_f есть частный случай хорошо известной конструкции ортогональной рефлекции. Эта конструкция и её свойства широко рассматривались в литературе (см. [15, 16, 18—21, 25, 28, 39, 48]).

Для морфизма f произвольной категории $\mathcal{C}$ можно аналогично определить класс $f^\perp$. Однако функтор локализации L_f существует не всегда. Фактически, категория $\mathcal{C}$ должна удовлетворять довольно слабым условиям, чтобы функторы L_f существовали для всех морфизмов f в $\mathcal{C}$ (см. цитированные в предыдущем абзаце источники). Категория mod-S является такой категорией.

Согласно определению гомоморфизм f ортогонален всем f-локальным модулям. По предложению 6.2 f есть f-эквивалентность.

Лемма 9.1. *Пусть $f\colon A \to B$ — гомоморфизм. Если модуль B ортогонален f, то $B \cong L_f A$, при этом f представляет собой отображение коаугментации f_A в смысле, указанном в свойстве 2 из раздела 6.*

Доказательство. Как только что отмечено, f есть f-эквивалентность. Согласно определению B — f-локальный модуль. По свойству 2 из раздела 6 $B \cong L_f A$. □

Учитывая эту простую лемму, приходим к следующему важному выводу. Пусть L — некоторый идемпотентный функтор в mod-S с коаугментацией g. Для всякого модуля M отображение коаугментации $g_M\colon M \to LM$ и модуль LM удовлетворяют условию леммы. Следовательно, $LM \cong L_f M$, где $f = g_M$. Нельзя сказать, что L имеет вид L_f для всех модулей M, поскольку гомоморфизм g_M меняется с изменением M. Но можно говорить, что всякое свойство модулей, которое сохраняется функторами локализации, автоматически сохраняется произвольными идемпотентными функторами. С другой стороны, всё известное для идемпотентных функторов применимо к функторам локализации.

Введём основное понятие данного раздела. Гомоморфизм $f\colon A \to B$ называется *локализацией* модуля A или *f-локализацией*, если f ортогонален B. Таким образом, f является локализацией в точности тогда, когда индуцированное отображение $f^*\colon \mathrm{Hom}_S(B,B) \to \mathrm{Hom}_S(A,B)$ является изоморфизмом левых $\mathrm{End}_S B$-модулей (и поэтому $\mathrm{Hom}_S(A,B)$ — циклический свободный $\mathrm{End}_S B$-модуль).

Пусть $f\colon A \to B$ — локализация. Тогда существует функтор локализации L_f в mod-S. Класс локальных относительно L_f модулей совпадает с классом f-локальных модулей. В частности, $B \cong L_f A$ и f есть отображение коаугментации.

Локализации $f\colon A \to B$ и $g\colon A \to C$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм $h\colon B \to C$ со свойством $g = hf$. Понятно, что если $f\colon A \to B$ — локализация и $h\colon B \to C$ — изоморфизм, то $hf\colon A \to C$ — локализация, эквивалентная f. Если f и g — эквивалентные локализации, то $f^\perp = g^\perp$ и функторы локализации L_f и L_g естественно эквивалентны по предложению 6.3.

Если $f\colon A \to B$ — локализация, то для модуля B и функтора L_f справедливы свойства локальных модулей и идемпотентных функторов, сформулированные в разделе 6.

Применим исследования, описанные в разделах 7 и 8, к функторам локализации и к локализациям модулей. Конечно, все результаты этого раздела можно доказать прямо, используя только определение локализации. Из предложения 7.1 вытекает следующее утверждение для локализаций.

Предложение 9.2. *Пусть R — кольцо, A — R-S-бимодуль и $f\colon A \to B$ — локализация S-модулей. Тогда на B можно задать структуру R-модуля так, что B будет R-S-бимодулем, причём эта R-модульная структура является единственной, для которой f есть R-гомоморфизм.*

Из теоремы 7.2 вытекает следующий результат.

Теорема 9.3. *Пусть R — ненулевой S-модуль и $f\colon S \to R$ — локализация модуля S.*

1. *На R можно так задать умножение, что R станет кольцом, причём это единственное умножение, для которого f — кольцевой гомоморфизм.*
2. *R есть S-S-бимодуль, f — бимодульный гомоморфизм, R — E-кольцо относительно гомоморфизма f. Кроме того, $rs = rf(s)$ и $sr = f(s)r$ для всех $r \in R$ и $s \in S$, т. е. R — притягивающий правый и левый S-модуль.*
3. *Если S — коммутативное кольцо, то R — коммутативное кольцо.*

Верно также утверждение, обратное к утверждению 2 теоремы 9.3.

Предложение 9.4. *Если $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец и R — E-кольцо относительно e, то e является локализацией модуля S.*

Доказательство. Мы считаем кольцо R притягивающим S-модулем. В таком случае e — S-гомоморфизм. Пусть $\alpha\colon S \to R$ — некоторый S-гомоморфизм. Определим отображение $\beta\colon R \to R$ по формуле $\beta(x) = \alpha(1)\cdot x$, $x \in R$. Тогда β — R-гомоморфизм. Следовательно, β — S-гомоморфизм и $\beta(1) = \alpha(1)$. Отсюда следует, что $(\beta e)(1) = \beta(1) = \alpha(1)$ и $\beta e = \alpha$. Допустим, что $\gamma\colon R \to R$ — такой S-гомоморфизм, что $\alpha = \gamma e$. Так как R — E-кольцо, то γ — R-гомоморфизм по предложению 1.7. Верны равенства $\beta(1) = \alpha(1) = (\gamma e)(1) = \gamma(1)$ и $\gamma = \beta$. Таким образом, гомоморфизм e ортогонален R, поэтому он является локализацией. □

Пусть $e\colon S \to R$ — центральный гомоморфизм колец, $H(R)$ — E-радикал кольца R относительно e, определённый в конце раздела 4, и $\pi\colon R \to R/H(R)$ — естественный эпиморфизм. Тогда $R/H(R)$ есть E-кольцо относительно гомоморфизма πe. Следовательно, πe — локализация кольца S. Итак,

любой центральный гомоморфизм $S \to R$ даёт локализацию кольца S.

Как в разделе 8, пусть P — коммутативное кольцо и $e\colon P \to S$ — центральный гомоморфизм.

Предложение 9.5. *Пусть $f\colon A \to B$ — локализация P-модулей.*

1. *Если A — S-модуль, то на P-модуле B можно задать структуру S-модуля так, что B — притягивающий P-модуль, причём эта единственная S-модульная структура, для которой f — S-модульный гомоморфизм. Кроме того, f — локализация S-модулей.*
2. *Если A является R-S-бимодулем, то имеем R-S-бимодуль B.*

Доказательство. Нужно применить теорему 8.1, следствие 8.2 и предложение 9.2 к соответствующему функтору локализации L_f. □

После доказательства следствия 8.2 было отмечено, что можно говорить об ограничении любого идемпотентного функтора L в категории mod-P на категорию mod-S. Это касается и функторов локализации. Поэтому из теоремы 8.3 и предложения 9.5 вытекает следующий результат.

Теорема 9.6. *Пусть P — коммутативное кольцо, $e\colon P \to S$ — центральный гомоморфизм колец и $f\colon S \to R$ — локализация P-модулей.*

1. *На P-модуле R можно так задать умножение, что R станет кольцом, причём это единственное умножение, для которого f — кольцевой гомоморфизм.*
2. *R есть S-S-бимодуль, f — бимодульный гомоморфизм, R является* E-*кольцом относительно гомоморфизма f. Верны равенства $rs = rf(s)$ и $sr = f(s)r$ для всех $r \in R$ и $s \in S$, т. е. R — притягивающий правый и левый S-модуль. Кроме того, R — притягивающий P-модуль.*
3. *f является локализацией S-модулей.*
4. *Если S — коммутативное кольцо, то R — коммутативное кольцо.*

Следующие утверждения связаны с теоремой 7.3 и предложением 7.4.

Предложение 9.7. *Пусть $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец и H —* E-*радикал относительно гомоморфизма e* (см. раздел 4).

1. *Для любого S-модуля A гомоморфизм*
$$A \to A \otimes_S R/H(A \otimes_S R), \quad a \to \overline{a \otimes 1}, \quad a \in A,$$
является локализацией.
2. *Для данного S-модуля A отображение*
$$v\colon A \to A \otimes_S R, \quad a \to a \otimes 1, \quad a \in A,$$
является локализацией в точности тогда, когда S-модуль $A \otimes_S R$ есть AM-модуль (*такие модули введены перед следствием* 3.2).
3. *Отображение значения $A \to A \otimes_S R$ есть локализация для любого модуля A в точности тогда, когда R —* T-*кольцо относительно e.*

Доказательство. Утверждение 1 следует из доказательства теоремы 7.3.

Докажем второе утверждение. Пусть отображение значения $v\colon A \to A \otimes_S R$ есть локализация. Возьмём произвольный эндоморфизм β S-модуля $A \otimes_S R$. Формула $\gamma(a \otimes x) = \beta(a \otimes 1)x$, $a \in A$, $x \in R$, задаёт эндоморфизм γ R-модуля $A \otimes_S R$ (аналогичная ситуация будет рассматриваться ниже). Нетрудно проверить, что $\beta v = \gamma v$. Отсюда следует, что $\beta = \gamma$ и β — R-эндоморфизм. Итак, $A \otimes_S R$ — AM-модуль.

Наоборот, допустим, что $A \otimes_S R$ — AM-модуль. Пусть $\alpha\colon A \to A \otimes_S R$ — S-гомоморфизм. Отображение
$$A \times R \to A \otimes_S R, \quad (a, x) \to \alpha(a)x, \quad a \in A, \quad x \in R,$$
является сбалансированным над S. Поэтому существует эндоморфизм β S-модуля $A \otimes_S R$ со свойством $\beta(a \otimes x) = \alpha(a)x$. Для любого элемента $a \in A$ имеем

$\beta v(a) = \beta(a \otimes 1) = \alpha(a)$ и $\alpha = \beta v$. Пусть γ — ещё один эндоморфизм S-модуля $A \otimes_S R$ со свойством $\alpha = \gamma v$. По предположению β и γ — R-эндоморфизмы, поэтому

$$\beta(a \otimes x) = \beta(a \otimes 1)x = \beta v(a)x = \alpha(a)x$$

для любых $a \in A$ и $x \in R$. Аналогично имеем $\gamma(a \otimes x) = \alpha(a)x$. Поэтому $\gamma = \beta$. Таким образом, β — единственный эндоморфизм со свойством $\alpha = \beta v$ и v — локализация.

Докажем утверждение 3. Пусть для любого S-модуля A отображение значения $v\colon A \to A \otimes_S R$ является локализацией. В частности, это верно для любого R-модуля A. По лемме 1.1 имеет место равенство S-модулей $A \otimes_S R = C \oplus D$, где C — R-модуль, изоморфный A. Пусть μ — некоторый эндоморфизм S-модуля C. Считая, что μ аннулирует D, рассмотрим μ как эндоморфизм модуля $A \otimes_S R$. По условию и по утверждению 2 μ — R-эндоморфизм. Поэтому μ будет эндоморфизмом R-модуля C. Получаем, что A — AM-модуль. Итак, каждый R-модуль является AM-модулем. По теореме 3.6 R — $\mathrm{T}(e)$-кольцо. Обратно, если R — $\mathrm{T}(e)$-кольцо, то любой R-модуль будет $\mathrm{E}(e)$-модулем по теореме 2.6. Поэтому $H(A \otimes_S R) = 0$ и по утверждению 1 отображение $v\colon A \to A \otimes_S R$ есть локализация. $\square$

Локализации, появившиеся в предложении 9.7, можно называть *стандартными* (см. теорему 7.3 о стандартных идемпотентных функторах).

Пусть (L, f) — некоторый идемпотентный функтор в категории $\mathrm{mod}\text{-}S$. Положим $R_0 = LS/\operatorname{Im} f$. Пусть H — E-радикал относительно гомоморфизма $f\colon S \to LS$, определённый в разделе 4. Пусть a — ациклический радикал, введённый в конце раздела 6. Заметим, что R_0 есть S-S-бимодуль по теореме 7.2. По свойству 15 из раздела 6 R_0 — ациклический модуль. Для любого модуля A модуль $A \otimes_S R_0$ тоже ацикличен. Полупростой класс радикала H состоит из модулей A со свойством $\mathrm{Hom}_S(R_0, A) = 0$. Для каждого модуля A верно включение $H(A) \subseteq a(A)$. Действительно, $H\big(H(A)\big) = H(A)$ и $H(C) = 0$ для любого локального модуля C (надо принять во внимание, что $\mathrm{Hom}_S(R_0, A) = 0$ по предложению 1.5 и теореме 7.2). Следовательно, $\mathrm{Hom}_S(H(A), C) = 0$, $H(A)$ — ациклический модуль по свойству 13 из раздела 6 и $H(A) \subseteq a(A)$.

Обозначим через L_0 функтор локализации относительно гомоморфизма $R_0 \to 0$. Понятно, что модуль C является L_0-локальным в точности тогда, когда $\mathrm{Hom}_S(R_0, C) = 0$. Из свойства 13 в разделе 6 вытекает, что модуль A будет L_0-ациклическим в точности тогда, когда из равенства $\mathrm{Hom}_S(R_0, B) = 0$ следует равенство $\mathrm{Hom}_S(A, B) = 0$ для любого модуля B. Теперь ясно, что класс L_0-локальных модулей совпадает с полупростым классом радикала H, а класс L_0-ациклических модулей совпадает с радикальным классом радикала H. Из теоремы 6.6 вытекает, что радикал, соответствующий функтору L_0, совпадает с H. Поэтому функтор L_0 является редукцией (см. теорему 6.6). Также говорят, что L_0 — R_0-*редукция*.

Класс радикальных модулей радикала a есть класс L-ациклических модулей. Каждый L_0-ациклический модуль является L-ациклическим. Проверим это.

Возьмём L_0-ациклический модуль D. Если C — произвольный L-локальный модуль, то $\mathrm{Hom}_S(R_0, C) = 0$, поскольку R_0 — L-ациклический модуль. Поэтому $\mathrm{Hom}_S(D, C) = 0$. По свойству 13 из раздела 6 D — L-ациклический модуль.

Если класс L-ациклических модулей совпадает с классом L_0-ациклических модулей, то мы будем называть модуль R_0 *универсальным ациклическим модулем* в соответствии с терминологией теории гомотопий и теории групп (см. [20, 29]). Из сказанного выше можно вывести следующий результат.

Следствие 9.8. *Равносильны следующие утверждения*:

1) *R_0 — универсальный ациклический модуль*;
2) *радикалы a и H совпадают*;
3) *если $H(A) = 0$, то $a(A) = 0$ для любого модуля A*;
4) *если $\mathrm{Hom}_S(R_0, B) = 0$ для какого-то модуля B, то $\mathrm{Hom}_S(D, B) = 0$ для всех ациклических модулей D.*

Вернёмся к локализациям. Основные вопросы о локализациях модулей над кольцом S могут быть сформулированы в следующем виде.

1. Для данного модуля A описать все его локализации.

Пусть $f\colon A \to B$ — локализация модуля A.

2. Найти рефлективную подкатегорию $f^{\perp}$, т. е. класс всех f-локальных модулей.
3. Определить соответствующий функтор локализации L_f, т. е. рефлектор на полную подкатегорию $f^{\perp}$.
4. Найти все ациклические модули для функтора L_f.

Для самого кольца S на первые три вопроса есть полные ответы. Р. С. Пирс [53] разобрал в целом случай $S = \mathbb{Z}$.

Теорема 9.9.

1. *Локализации S-модуля S совпадают с кольцевыми гомоморфизмами $e\colon S \to R$, где R — некоторое* E*-кольцо относительно e.*
2. *Пусть $e\colon S \to R$ — гомоморфизм колец, причём R —* E*-кольцо относительно e. Тогда*
   а) *класс всех e-локальных модулей совпадает с классом всех* E*-модулей относительно e*;
   б) *функтор локализации L_e есть стандартный функтор, построенный по гомоморфизму e* (*эти функторы определены после доказательства теоремы* 7.3).

Доказательство. Утверждение 1 вытекает из теоремы 9.3 и предложения 9.4.

Докажем утверждение 2 а). Класс e-локальных модулей — это то же самое, что класс L_e-локальных модулей. Из теоремы 7.3 вытекает, что каждый e-локальный модуль будет E-модулем относительно гомоморфизма e. Наоборот, пусть B — E-модуль относительно e. Свойство, что B ортогонален e, можно доказать рассуждениями, аналогичными рассуждениям из доказательства предложения 9.4.

Докажем утверждение 2 б). Функтор L_e есть рефлектор на подкатегорию $e^{\perp}$. По утверждению 2 а) и теореме 7.3 стандартный функтор F, построенный по гомоморфизму e, также есть рефлектор на подкатегорию $e^{\perp}$. Таким образом, функторы L_e и F имеют одни и те же классы локальных модулей. Следовательно, эти функторы естественно эквивалентны по предложению 6.3. □

Функторы локализации — хорошо известное понятие в теории категорий. Понятия «ортогональность», «f-локальный объект», «f-эквивалентность» появились в теории категорий, а затем стали рассматриваться для групп и модулей (см. [31, 32, 48, 54]). Функторы локализации имеют длинную историю и интенсивно изучались во многих областях математики. Новые приложения этих функторов в теории групп и теории гомотопий даны в [20, 25, 39, 48] и многих других работах.

Понятие ортогональности морфизма и объекта обобщается следующим образом. Пусть $\mathcal{C}$ — некоторая категория. Для класса морфизмов $\mathcal{M}$ категории $\mathcal{C}$ обозначим через $\mathcal{M}^{\perp}$ класс объектов, ортогональных всем морфизмам из $\mathcal{M}$. Класс $\mathcal{M}^{\perp}$ называется *классом ортогональности*. Такие классы ортогональности появляются в различных контекстах в алгебре, геометрии и топологии. Часто рассматривается вопрос, является ли данный класс ортогональности $\mathcal{M}^{\perp}$ рефлективным, т. е. имеет ли вложение $\mathcal{M}^{\perp} \to \mathcal{C}$ левый сопряжённый функтор $L\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}^{\perp}$. Это *проблема ортогональности подкатегории*. Соответствующие левые сопряжённые функторы называются *функторами локализации*.

Сейчас мы определим ортогональные пары, являющиеся полезным инструментом для решения проблемы ортогональности. Для класса объектов $\mathcal{O}$ категории $\mathcal{C}$ обозначим через $\mathcal{O}^{\perp}$ класс всех морфизмов, ортогональных всем объектам из $\mathcal{O}$. *Ортогональная пара* $(\mathcal{S}, \mathcal{D})$ состоит из класса $\mathcal{S}$ морфизмов и класса $\mathcal{D}$ объектов, таких что $\mathcal{S}^{\perp} = \mathcal{D}$ и $\mathcal{D}^{\perp} = S$. Если $\mathcal{M}$ — некоторый класс морфизмов, то $(\mathcal{M}^{\perp\perp}, \mathcal{M}^{\perp})$ есть *ортогональная пара, порождённая* $\mathcal{M}$. Если же $\mathcal{O}$ — некоторый класс объектов, то $(\mathcal{O}^{\perp}, \mathcal{O}^{\perp\perp})$ есть *ортогональная пара, порождённая* $\mathcal{O}$. Всякий идемпотентный функтор L категории $\mathcal{C}$ даёт ортогональную пару, если взять класс L-эквивалентностей в качестве $\mathcal{S}$ и класс L-локальных объектов в качестве $\mathcal{D}$. Класс объектов $\mathcal{D}$ называется *рефлективным*, если он является частью некоторой ортогональной пары $(\mathcal{S}, \mathcal{D})$, ассоциированной с каким-то идемпотентным функтором. Проблему ортогональности подкатегории можно переформулировать как вопрос о том, каждая ли ортогональная пара является ассоциированной с некоторым идемпотентным функтором. В категории групп этот вопрос остаётся открытым. Из [29] следует, что ответ зависит от дополнительных теоретико-множественных предположений. В частности, неизвестно, все ли идемпотентные функторы имеют форму L_f для некоторого гомоморфизма f.

Локализации, ассоциированные с ортогональными парами, порождёнными одним морфизмом f (мы называем их f-локализациями), изучались во многих работах и привели к интересным исследованиям в теории групп и теории гомотопий (см. работы, цитированные выше).

10. Локализации некоторых модулей и колец

Пусть $f\colon A \to B$ — модульный гомоморфизм. Мы исследуем одну ситуацию, когда вопрос о том, является ли f локализацией, и другие близкие вопросы допускают удовлетворительные ответы. Затем мы применяем эти исследования к локализациям T-колец.

Мы рассматриваем модули над некоторым кольцом P. Стандартные в определённом смысле локализации P-модулей можно строить с помощью колец эндоморфизмов. Пусть A — P-модуль, $S = \operatorname{End}_P A$. Предположим, что имеется кольцевой гомоморфизм $e\colon S \to R$. Тогда отображение значения $v\colon A \to R \otimes_S A$, $v(a) = 1 \otimes a$, $a \in A$, является P-гомоморфизмом. Можно сформулировать вопрос о том, когда v является локализацией P-модуля A (ср. со стандартными локализациями из предложения 9.7). При этом возникает некоторое соответствие между локализациями модуля A в mod-P и локализациями кольца S в mod-S.

Пусть $f\colon A \to B$ — локализация P-модулей. В этом случае имеется функтор локализации L_f, причём $L_f A \cong B$ и f — отображение коаугментации (см. лемму 9.1). Для модуля A и функтора L_f можно записать диаграмму колец (5) из раздела 7. Именно, группа $\operatorname{Hom}_P(A, B)$ является кольцом, а индуцированные отображения

$$f^*\colon \operatorname{End}_P B \to \operatorname{Hom}_P(A, B), \quad f_*\colon \operatorname{End}_P A \to \operatorname{Hom}_P(A, B) —$$

кольцевой изоморфизм и кольцевой гомоморфизм соответственно. По-прежнему φ обозначает изоморфизм, обратный к f^*. Имеем кольцевой гомоморфизм $\varphi f_*\colon \operatorname{End}_P A \to \operatorname{End}_P B$, где

$$\varphi f_*(\alpha) = \varphi(f\alpha) = \beta, \quad f\alpha = \beta f = \varphi(f\alpha)f,$$

это также можно вывести из определения локализации модуля.

Введём обозначения $S = \operatorname{End}_P A$, $R = \operatorname{End}_P B$ и $e = \varphi f_*$.

Итак, мы имеем гомоморфизм колец $e\colon S \to R$ и рассматриваем R как S-S-бимодуль. Стандартным образом группа $\operatorname{Hom}_P(A, B)$ является правым S-модулем. При этом f^* и φ — изоморфизмы S-модулей. Действительно, для $\beta \in \operatorname{End}_P B$ и $s \in S$ имеем равенства

$$f^*(\beta s) = (\beta s)f = \beta(\varphi f_*)(s)f, \quad f^*(\beta)s = (\beta f)s = \beta(fs).$$

Далее, $(\varphi f_*)(s)f = \varphi(fs)f = fs$. Наконец, $f^*(\beta s) = f^*(\beta)s$ и f^* — S-модульный изоморфизм.

Пусть A — некоторый P-модуль. P-модуль X называется *A-разрешимым*, если естественное отображение

$$\theta\colon \operatorname{Hom}_P(A, X) \otimes_S A \to X, \quad \theta(\alpha \otimes a) = \alpha(a), \quad \alpha \in \operatorname{Hom}_P(A, X), \quad a \in A,$$

является изоморфизмом P-модулей; термин «A-разрешимый модуль» используется в [46]. В основном мы будем рассматривать или A-разрешимые модули X, или такие модули X, что след $\operatorname{tr}_A X$ модуля A в X — A-разрешимый модуль (см. определение следа в разделе 4). Подобные ситуации не редки (см. раздел 11).

Вернёмся к локализации P-модулей $f\colon A \to B$. Допустим, что B — A-разрешимый модуль. Тогда имеются изоморфизмы

$$\theta\colon \operatorname{Hom}_P(A,B)\otimes_S A \to B, \quad \varphi\otimes 1\colon \operatorname{Hom}_P(A,B)\otimes_S A \to R\otimes_S A.$$

Можно образовать локализацию $(\varphi\otimes 1)\theta^{-1}f\colon A \to R\otimes_S A$, эквивалентную f (понятие эквивалентности локализаций введено в разделе 9). Обозначим через g композицию $(\varphi\otimes 1)\theta^{-1}f\colon A \to R\otimes_S A$. Нетрудно проверить, что для g верна формула $g(a) = 1\otimes a$, $a\in A$. В соответствии с этим мы будем рассматривать локализацию $g\colon A\to R\otimes_S A$, $a\to 1\otimes a$, $a\in A$. Можно назвать эту локализацию *стандартной* по аналогии со стандартными локализациями из предложения 9.7.

В разделе 9 мы сформулировали четыре вопроса о локализациях модулей. Рассмотрим их для локализаций, являющихся модулями, близкими к A-разрешимым.

Для P-модуля X обозначим через X' след $\operatorname{tr}_A X$. Пусть $\mathcal{E}$ обозначает полную подкатегорию таких P-модулей X, что X' — A-разрешимый модуль. Пусть $\mathcal{M}_A$ — полная подкатегория в mod-S, состоящая из таких модулей M, что естественное отображение

$$\eta\colon M\to \operatorname{Hom}_P(A, M\otimes_S A), \quad \eta(m)(a) = m\otimes a, \quad m\in M, \quad a\in A,$$

является изоморфизмом S-модулей. Функторы $\operatorname{Hom}_P(A,-)$ и $(-)\otimes_S A$ определяют эквивалентность между категорией A-разрешимых модулей и категорией $\mathcal{M}_A$ (см. [46, § 34]).

Теорема 10.1. *Пусть $f\colon A\to B$ — локализация P-модулей, причём B — A-разрешимый модуль. Обозначим $S = \operatorname{End}_P A$.*

1. *Локализация f эквивалентна стандартной локализации $g\colon A\to R\otimes_S A$, $a\to 1\otimes a$, $a\in A$, где R — E-кольцо относительно некоторого гомоморфизма $e\colon S\to R$ и $R\in\mathcal{M}_A$. Обратно, если R — E-кольцо относительно некоторого гомоморфизма $e\colon S\to R$ и $R\in\mathcal{M}_A$, то отображение значения $A\to R\otimes_S A$ есть локализация модуля A.*
2. *Пусть $R = \operatorname{End}_P B$ и $e\colon S\to R$ — гомоморфизм из начала раздела, $g\colon A\to R\otimes_S A$ — некоторая локализация из пункта 1. Модуль $C\in\mathcal{E}$ является g-локальным в точности тогда, когда $C'\cong M\otimes_S A$, где M — некоторый E-модуль относительно гомоморфизма e и $M\in\mathcal{M}_A$.*

Доказательство. 1. Пусть $R = \operatorname{End}_P B$ и $e\colon S\to R$ — гомоморфизм из начала раздела. Эквивалентность локализаций f и g отмечена перед теоремой. Рассмотрим локализацию g. Поскольку S-модули R и $\operatorname{Hom}_P(A,B)$ изоморфны (см. начало раздела) и отображение $\theta\colon \operatorname{Hom}_P(A,B)\otimes_S A\to B$ является изоморфизмом, то $R\in\mathcal{M}_A$. Убедимся, что R есть E-кольцо относительно гомоморфизма e. Пусть $\alpha\colon R \to R$ — S-эндоморфизм и $\alpha(1) = 0$. Для индуцированного эндоморфизма $\alpha \otimes 1$ P-модуля $R \otimes_S A$ имеем

$$(\alpha \otimes 1)g(a) = (\alpha \otimes 1)(1 \otimes a) = \alpha(1) \otimes a = 0$$

для любого $a \in A$. Поэтому $(\alpha \otimes 1)g = 0$ и $\alpha \otimes 1 = 0$, так как g — локализация. Далее, $\alpha = 0$, поскольку $R \in \mathcal{M}_A$ (см. также замечания после доказательства). Следовательно, R — E-кольцо относительно e по следствию 2.2. Из предложения 9.4 вытекает, что гомоморфизм $e\colon S \to R$ есть локализация в mod-S.

Обратно, пусть $e\colon S \to R$ — некоторый кольцевой гомоморфизм, R — E-кольцо относительно e и $R \in \mathcal{M}_A$. Отождествим модули A и $S \otimes_S A$. Так как $S, R \in \mathcal{M}_A$, то любой P-гомоморфизм $\alpha\colon S \otimes_S A \to R \otimes_S A$ имеет вид $\gamma \otimes 1$ для единственного S-гомоморфизма $\gamma\colon S \to R$. Аналогичное утверждение верно для гомоморфизмов из $R \otimes_S A$ в $R \otimes_S A$. Также надо учесть, что гомоморфизм g равен $e \otimes 1$. После этого утверждение 1 вытекает из того, что $e\colon S \to R$ — локализация в mod-S (см. предложение 9.4).

2. Пусть C — некоторый P-модуль. Прежде всего заметим, что ортогональность модуля C гомоморфизму g равносильна ортогональности модуля C' этому гомоморфизму (надо учесть, что след модуля A в $R \otimes_S A$ совпадает с $R \otimes_S A$).

Допустим теперь, что модуль C лежит в $\mathcal{E}$ и C ортогонален g. По условию отображение $\theta\colon \mathrm{Hom}_P(A, C') \otimes_S A \to C'$ является изоморфизмом. Обозначим S-модуль $\mathrm{Hom}_P(A, C')$ через M. Тогда $M \in \mathcal{M}_A$. С помощью предложения 3.11 мы покажем, что M — E-модуль относительно гомоморфизма $e\colon S \to R$. Обозначим R-P-бимодуль $R \otimes_S A$ через V. Так как C' ортогонален g, то индуцированный гомоморфизм $g^*\colon \mathrm{Hom}_P(V, C') \to \mathrm{Hom}_P(A, C')$ является изоморфизмом S-модулей. Так как V — левый R-модуль, то $\mathrm{Hom}_P(V, C')$ — R-модуль. Поэтому $\mathrm{Hom}_P(V, C')$ удовлетворяет условиям на след утверждения 2) предложения 3.11. Поэтому условие на след выполнено для модуля M. S-модули S, R и M принадлежат подкатегории $\mathcal{M}_A$. Поэтому все P-модульные гомоморфизмы $R \otimes_S A \to M \otimes_S A$ имеют вид $\beta \otimes 1$, где β — однозначно определённый S-гомоморфизм $R \to M$, и т. п. (см. также доказательство утверждения 1). Теперь пусть $\alpha\colon R \to M$ — S-модульный гомоморфизм со свойством $\alpha(1) = 0$. Аналогично ситуации в доказательстве утверждения 1 можно доказать, что $\alpha = 0$. По предложению 3.11 M обладает такой структурой R-модуля, что M — притягивающий S-модуль и M — E-модуль относительно гомоморфизма $e\colon S \to R$.

Обратно, пусть C — такой модуль из $\mathcal{E}$, что $C' \cong M \otimes_S A$, где M — некоторый E-модуль относительно e и $M \in \mathcal{M}_A$. Достаточно доказать, что C' или, эквивалентно, модуль $M \otimes_S A$ ортогонален g. Снова модули S, R и M принадлежат $\mathcal{M}_A$, поэтому все P-гомоморфизмы нужных модулей индуцируются однозначно определёнными гомоморфизмами соответствующих S-модулей. Требуемое утверждение вытекает из того, что E-модуль M ортогонален гомоморфизму e по теореме 7.3. ☐

Утверждение 2 теоремы 10.1 и первые утверждения теоремы 10.2 и следствия 10.3 могут быть получены из теоремы 9.9, поскольку категория A-разрешимых модулей эквивалентна категории $\mathcal{M}_A$ (см. абзац перед теоремой 10.1).

Пусть $f\colon A\to B$ — локализация P-модулей, причём B — A-разрешимый модуль. Как и раньше, пусть $R=\operatorname{End}_P B$. Поскольку $\theta\colon \operatorname{Hom}_P(A,B)\otimes_S A\to B$ — изоморфизм, имеет место канонический изоморфизм между кольцом эндоморфизмов S-модуля $\operatorname{Hom}_P(A,B)$ и кольцом R. Отсюда следует, что соответствие $\alpha\to\alpha\otimes 1$, $\alpha\in\operatorname{End}_S R$, является изоморфизмом колец $\operatorname{End}_S R\cong\operatorname{End}_P(R\otimes_S A)$. Поскольку R — E-кольцо относительно гомоморфизма e, получаем $\operatorname{End}_S R\cong\cong\operatorname{End}_R R\cong R$. Таким образом, $\operatorname{End}_P(R\otimes_S A)\cong R$. Более точно, любой эндоморфизм P-модуля $R\otimes_S A$ есть умножение на некоторый элемент из R. Как отмечалось в доказательстве теоремы 10.1, гомоморфизм $e\colon S\to R$ является локализацией в $\operatorname{mod-}S$.

Снова возьмём локализацию $f\colon A\to B$, где B — A-разрешимый модуль. Пусть $S=\operatorname{End}_P A$, $R=\operatorname{End}_P B$ и $e\colon S\to R$ — гомоморфизм, построенный в начале раздела. Тогда отображение $g\colon A\to R\otimes_S A$, $a\to 1\otimes a$, $a\in A$, есть локализация, эквивалентная f. По теореме 10.1 R — E-кольцо относительно e и $R\in\mathcal{M}_A$. Найдём рефлекцию некоторых модулей из $\mathcal{E}$ в подкатегорию f-локальных модулей или, эквивалентно, в подкатегорию g-локальных модулей. Также можно сказать, что мы определим значение функтора локализации L_g на некоторых модулях.

Для P-модулей A и C мы используем некоторые обозначения из раздела 4: $\operatorname{tr}_A C$ обозначает след A в C и $\operatorname{tr}_A^\infty C$ обозначает «обобщённый» след A в C.

Пусть K — стандартный функтор в категории $\operatorname{mod-}S$, построенный по гомоморфизму $e\colon S\to R$ (см. теорему 7.3). Имеется в виду, что $KM = = M\otimes_S R/H(M\otimes_S R)$ для S-модуля M, где H — E-радикал относительно гомоморфизма e. В следующей теореме L_g обозначает функтор локализации для локализации g.

Теорема 10.2. *Пусть $g\colon A\to R\otimes_S A$ — локализация, описанная выше. Допустим, что $KN\in\mathcal{M}_A$ для любого модуля $N\in\mathcal{M}_A$.*

1. *Если C — модуль со свойством $\operatorname{tr}_A C=0$, то $L_gC\cong C$, т. е. C — локальный модуль. Если C — A-разрешимый модуль и $M=\operatorname{Hom}_P(A,C)$, то $L_gC\cong\cong KM\otimes_S A$.*
2. *Если C — такой P-модуль, что $\operatorname{tr}_A^\infty C$ — A-разрешимый модуль, то L_gC есть «значение» универсального квадрата, построенного в доказательстве ниже; при этом $\operatorname{tr}_A^\infty(L_gC)=L_g(\operatorname{tr}_A^\infty C)$ и $L_gC/\operatorname{tr}_A^\infty(L_gC)\cong C/\operatorname{tr}_A^\infty C$.*

Доказательство. 1. Если $\operatorname{tr}_A C=0$, то

$$\operatorname{Hom}_P(R\otimes_S A,C)\cong\operatorname{Hom}_S\bigl(R,\operatorname{Hom}_P(A,C)\bigr)=0$$

и C — локальный модуль.

Для A-разрешимого модуля C естественное отображение из $\operatorname{Hom}_P(A,C)\otimes_S A$ в C является изоморфизмом, поэтому $M\in\mathcal{M}_A$. Кроме того, можно взять модуль $M\otimes_S A$ вместо C. По условию $KM\in\mathcal{M}_A$. Кроме того, KM — E-модуль относительно гомоморфизма $e\colon S\to R$ по лемме 4.4. Гомоморфизм $v\colon M\to KM$, определённый в доказательстве теоремы 7.3, является отображением коаугментации для функтора K. Докажем, что отображение $v\otimes 1\colon M\otimes_S A\to KM\otimes_S A$

является рефлекцией. Прежде всего, из включения $KM \in \mathcal{M}_A$ вытекает, что $KM \otimes_S A$ — A-разрешимый модуль. Он g-локален по теореме 10.1. Теперь, если G — некоторый g-локальный модуль, то по теореме 10.1 имеет место изоморфизм $G' \cong N \otimes_S A$, где N — некоторый Е-модуль относительно гомоморфизма e и $N \in \mathcal{M}_A$. Поскольку все гомоморфизмы нужных P-модулей индуцируются однозначно определёнными гомоморфизмами S-модулей, то оставшаяся часть доказательства аналогична соответствующей части доказательства теоремы 10.1. Кроме того, надо учесть теорему 7.3 и тот факт, что N есть Е-модуль.

2. Пусть C — такой P-модуль, что $\operatorname{tr}_A^\infty C$ — A-разрешимый модуль. Обозначим через C_1 A-разрешимый модуль $\operatorname{tr}_A^\infty C$. Пусть $h\colon C_1 \to L_g C_1$ — рефлекция, построенная в пункте 1. Обозначим $D = L_g C_1$. Пусть $i\colon C_1 \to C$ — естественное вложение. Используя гомоморфизмы i и h, построим универсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} C_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[d, "k"'] \\ L_g C_1 \arrow[r, "j"] & G \end{tikzcd},$$

подобный используемому в предложении 6.4. Так как i — мономорфизм, то j — мономорфизм. Также имеем $j(D) = (D + Z)/Z$ и $k(C) = (C + Z)/Z$. Верно равенство $D + Z = C_1 \oplus D$. Следовательно, $j(D) = (C_1 \oplus D)/Z$. Так как j — мономорфизм и из доказательства пункта 1 вытекает, что D — A-разрешимый модуль, то $j(D) \subseteq \operatorname{tr}_A G \subseteq \operatorname{tr}_A^\infty G$. На самом деле здесь имеют место равенства. Действительно, верны соотношения

$$G/j(D) = \big((C \oplus D)/Z\big)/\big((C_1 \oplus D)/Z\big) \cong (C \oplus D)/(C_1 \oplus D) \cong C/C_1.$$

Поэтому из равенства $\operatorname{Hom}_P(A, C/C_1) = 0$ вытекает $\operatorname{Hom}_P\big(A, G/j(D)\big) = 0$. Теперь ясно, что $j(D) = \operatorname{tr}_A G = \operatorname{tr}_A^\infty G$, откуда получаем, что $G \in \mathcal{E}$.

Осталось проверить, что гомоморфизм $k\colon C \to G$ является рефлекцией. Пусть $\alpha\colon C \to X$ — гомоморфизм в некоторый g-локальный модуль X. Требуется доказать, что существует единственный гомоморфизм $\beta\colon G \to X$ со свойством $\beta k = \alpha$. Можно использовать рассуждения, аналогичные рассуждениям из последнего абзаца доказательства предложения 6.4 (там проверяется, что гомоморфизм g ортогонален L-локальному модулю X).

Равенство из утверждения 2 содержится в приведённых выше рассуждениях, а изоморфизм вытекает из доказательства предложения 6.4. □

Конечно порождённый проективный образующий модуль называется *прообразующим* модулем. Если A — прообразующий P-модуль, то функторы $H = \operatorname{Hom}_P(A, -)$ и $T = (-) \otimes_S A$ задают эквивалентность категорий mod-P и mod-S, где $S = \operatorname{End}_P A$ (см. [17, теорема 22.2]). Каждый P-модуль является A-разрешимым, а подкатегория $\mathcal{M}_A$ совпадает с mod-S. С учётом этих фактов из теорем 10.1 и 10.2 получается следующий результат, обобщающий в свою очередь теорему 9.9.

Следствие 10.3. *Пусть A — прообразующий P-модуль, $S = \mathrm{End}_P A$.*

1. *Каждая локализация модуля A является стандартной локализацией $g\colon A \to R \otimes_S A$, где R — E-кольцо относительно некоторого гомоморфизма $e\colon S \to R$.*
2. *P-модуль C g-локален, где g — какая-то локализация модуля A из пункта 1, в точности тогда, когда $C \cong M \otimes_S A$, где M — некоторый E-модуль относительно гомоморфизма e.*
3. *Пусть g — какая-то локализация модуля A из пункта 1. Тогда для P-модуля C имеем $L_g C \cong KM \otimes_S A$, где $M = \mathrm{Hom}_P(A, C)$. Таким образом, функтор локализации L_g естественно эквивалентен композиции функторов TKH, где K — стандартный функтор, определённый перед теоремой 10.2.*

К утверждению 3 добавим, что если мы отождествим модуль C с модулем $M \otimes_S A$, то $v \otimes 1$ будет отображением коаугментации $M \otimes_S A \to KM \otimes_S A$ (см. доказательство утверждения 1 теоремы 10.2).

Перед теоремой 9.9 мы сформулировали четыре вопроса о локализациях модулей. Теорема 9.9 даёт ответы на эти вопросы для локализаций кольца S в категории mod-S; следствие 10.3 является более общим результатом. Напомним, что локализации S-модуля S совпадают с кольцевыми гомоморфизмами $e\colon S \to R$, где R — некоторое E-кольцо относительно e. Мы будем постоянно иметь в виду эту характеризацию локализаций кольца S.

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть $e\colon P \to S$ — гомоморфизм колец и $f\colon S \to R$ — локализация в mod-P. Вряд ли возможно получить простые ответы на указанные вопросы для произвольной локализации f. Если P — коммутативное кольцо и $e\colon P \to S$ — центральный гомоморфизм, то по теореме 9.6 R будет E-кольцом относительно гомоморфизма f, откуда следует, что f — локализация в mod-S.

До конца раздела зафиксируем следующие обозначения: $e\colon P \to S$ — центральный гомоморфизм колец, причём P — коммутативное кольцо, $f\colon S \to R$ — некоторый гомоморфизм колец. Из теоремы 9.6 вытекает, что можно считать R кольцом при обсуждении локализаций кольца S. Мы считаем, что кольцо R является притягивающим P-модулем относительно гомоморфизма fe, т. е. $rt = r \cdot fe(t)$, $r \in R$, $t \in P$ (если f — локализация в mod-P, то это всегда так по теореме 9.6).

Предложение 10.4.

1. *Пусть $f\colon S \to R$ — локализация в mod-P. Кольцо R является E-кольцом относительно гомоморфизма fe (т. е. fe — локализация в mod-P) в точности тогда, когда R — E-модуль относительно гомоморфизма e.*
2. *Если f — локализация в mod-S и R — E-модуль относительно гомоморфизма e, то f является локализацией в mod-P.*

Доказательство. 1. По теореме 9.6 R есть Е-кольцо относительно f, т. е. $\mathrm{Hom}_S(R,R) = \mathrm{Hom}_R(R,R)$. Пусть R является Е-модулем относительно e, т. е. $\mathrm{Hom}_P(S,R) = \mathrm{Hom}_S(S,R)$. Тогда $\mathrm{Hom}_P(R,R) = \mathrm{Hom}_S(R,R)$ по предложению 1.7. В итоге получаем, что $\mathrm{Hom}_P(R,R) = \mathrm{Hom}_R(R,R)$ и R есть Е-кольцо относительно fe.

Теперь допустим, что R — Е-кольцо относительно fe. Возьмём произвольный P-гомоморфизм $\alpha\colon S \to R$. Так как f — локализация, то найдётся P-гомоморфизм $\beta\colon R \to R$ со свойством $\alpha = \beta f$. На самом деле β — R-модульный гомоморфизм. По предложению 1.7 β — S-модульный гомоморфизм. Так как α — композиция S-модульных гомоморфизмов (нужно использовать теорему 9.6), то α — S-модульный гомоморфизм. Тогда $\mathrm{Hom}_P(S,R) = \mathrm{Hom}_S(S,R)$ и R — Е-модуль относительно e.

2. Любой P-гомоморфизм $\alpha\colon S \to R$ является S-гомоморфизмом. Для данного α определим отображение $\beta\colon R \to R$ по формуле $\beta(r) = \alpha(1)\cdot r$, $r \in R$. Для любых $r \in R$ и $t \in P$ имеем

$$\beta(r)t = (\alpha(1)\cdot r)t = (\alpha(1)\cdot r)\cdot fe(t) = \alpha(1)\cdot(rt) = \beta(rt),$$

т. е. β — P-гомоморфизм. Следовательно, β — S-гомоморфизм и β — R-гомоморфизм. Так как $\beta f(1) = \alpha(1)\cdot f(1) = \alpha(1)$, то $\beta f = \alpha$. Допустим, что $\gamma\colon R \to R$ — гомоморфизм со свойством $\gamma f = \alpha$. Тогда $\gamma f(1) = \beta f(1)$ и $\gamma(1) = \beta(1)$. Следовательно, $\gamma = \beta$, поскольку γ и β — R-гомоморфизмы. Показано, что $f\colon S \to R$ является локализацией в mod-P. $\square$

В оставшейся части раздела считаем, что S — Т-кольцо относительно гомоморфизма $e\colon P \to S$. При таком предположении все S-модули будут Е-модулями по теореме 2.6, а P-гомоморфизмы S-модулей являются S-гомоморфизмами по предложению 1.7. В частности, $\mathrm{Hom}_P(S,R) = \mathrm{Hom}_S(S,R)$, т. е. R — Е-модуль относительно e.

Предложение 10.5. *Пусть P — коммутативное кольцо, $e\colon P \to S$ — центральный гомоморфизм и S — Т-кольцо относительно e. Для кольцевого гомоморфизма $f\colon S \to R$ эквивалентны следующие утверждения*:

1) f — *локализация в* mod-P;
2) f — *локализация в* mod-S;
3) fe — *локализация в* mod-P;
4) R — *Е-кольцо относительно* f;
5) R — *Е-кольцо относительно* fe.

Доказательство. P-гомоморфизмы S-модулей являются S-гомоморфизмами. Поэтому легко проверить эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2); при этом надо учесть утверждение 2 предложения 10.4. Эквивалентности 2) $\Longleftrightarrow$ 4), 3) $\Longleftrightarrow$ 5) и импликация 1) $\Longrightarrow$ 5) вытекают из теоремы 9.9. Если выполнено условие 5), то $\mathrm{Hom}_R(R,R) = \mathrm{Hom}_P(R,R) = \mathrm{Hom}_S(R,R)$, поэтому выполнено 4). $\square$

В условиях предложения выполнены включения $(fe)^{\perp}_{P} \subseteq f^{\perp}_{S} \subseteq f^{\perp}_{P}$ (см. обозначения в начале раздела 9). Это означает, что каждый fe-локальный P-модуль является f-локальным S-модулем и каждый f-локальный S-модуль является f-локальным P-модулем. Вообще говоря, включения являются строгими. Строение классов модулей $(fe)^{\perp}_{P}$ и $f^{\perp}_{S}$ описано в теореме 9.9. Ситуация с классом $f^{\perp}_{P}$ более сложная.

Применим результаты, касающиеся A-разрешимых модулей, к локализациям $f\colon S \to R$. Это означает, что мы берём P-модуль S в качестве модуля A. В первую очередь заметим, что если B — некоторый P-модуль, то по следствию 3.3 S-модульная структура на B единственна, если она существует и согласована с гомоморфизмом e. Поэтому фразы типа «P-модуль является S-модулем» корректны. Справедлив следующий факт.

Лемма 10.6. *P-модуль B S-разрешим в точности тогда, когда B является S-модулем.*

Доказательство. Имеем

$$\operatorname{End}_P S \cong \operatorname{End}_S S \cong S.$$

Теперь пусть B — S-разрешимый P-модуль. Это означает, что естественное отображение $\operatorname{Hom}_P(S, B) \otimes_S S \to B$ является изоморфизмом. Фактически, мы имеем изоморфизм $\operatorname{Hom}_P(S, B) \to B$, $\alpha \to \alpha(1)$. Поскольку $\operatorname{Hom}_P(S, B)$ — S-модуль, то B — S-модуль, причём B — притягивающий P-модуль.

Если P-модуль B является S-модулем, то композиция канонических изоморфизмов

$$\operatorname{Hom}_P(S, B) \otimes_S S \cong \operatorname{Hom}_P(S, B) = \operatorname{Hom}_S(S, B) \cong B$$

действует по формуле $\alpha \otimes s \to \alpha(s)$. Поэтому B — S-разрешимый модуль. $\square$

Теперь мы рассмотрим вопросы 2 и 3, сформулированные перед теоремой 9.9, для локализации $f\colon S \to R$. При этом мы учитываем лемму 10.6 и равенство $A = S$. Кроме того, в данном случае подкатегория $\mathcal{M}_S$ совпадает с mod-S, поскольку для любого S-модуля M композиция канонических изоморфизмов

$$M \cong \operatorname{Hom}_S(S, M) = \operatorname{Hom}_P(S, M) \cong \operatorname{Hom}_P(S, M \otimes_S S)$$

совпадает с естественным изоморфизмом η, определённым в начале раздела. Наконец, локализация $f\colon S \to R$ является стандартной. Если C — некоторый P-модуль, то след $\operatorname{tr}_S C$ обозначим через C', как и раньше.

Следствие 10.7. *Пусть C — такой P-модуль, что P-модуль C' является S-модулем. Равносильны следующие условия*:

1) *C — f-локальный P-модуль*;
2) *C' — f-локальный S-модуль*;
3) *$C' \cong M$, где M — E-модуль относительно гомоморфизма f или, эквивалентно, относительно fe.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) вытекает из того, что любые P-гомоморфизмы $S \to C$ и $R \to C$ есть гомоморфизмы $S \to C'$ и $R \to C'$. Последние гомоморфизмы являются S-гомоморфизмами. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 3) вытекает из теоремы 10.1. $\square$

Теперь найдём рефлекции P-модулей в подкатегорию f-локальных модулей. Обратим внимание на то, что в данном случае гомоморфизм e из теоремы 10.2 есть гомоморфизм f. Как и в теореме 10.2, пусть K обозначает стандартный функтор в категории $\mathrm{mod}\text{-}S$, построенный по гомоморфизму $f\colon S \to R$ или, эквивалентно, по гомоморфизму $fe\colon P \to R$. Из теоремы 10.2 можно вывести следующий результат.

Следствие 10.8. *Пусть C — P-модуль.*

1. *Если C является S-модулем, то $L_f C \cong KC$.*
2. *Если $\mathrm{tr}_S^\infty C$ является S-модулем, то $L_f C$ есть «значение» универсального квадрата из доказательства утверждения 2 теоремы 10.2 и верны указанные там соотношения.*

11. Идемпотентные функторы и локализации в категории абелевых групп: случай p-групп и групп без кручения

Все конструкции и результаты предыдущих разделов применимы к абелевым группам как $\mathbb{Z}$-модулям. В частности, это верно для результатов, относящихся к P-модулям и центральному гомоморфизму $e\colon P \to S$, где P — коммутативное кольцо (см. разделы 8, 9). Для любого кольца S гомоморфизм $\mathbb{Z} \to S$ является центральным. В этом и следующем разделах основное внимание обращается на то, как идемпотентные функторы действуют на некоторых известных группах. Кроме того, мы получим информацию о локализациях некоторых известных групп.

Мы рассматриваем только абелевы группы. Термины теории абелевых групп, применённые к кольцу или модулю, относятся к их аддитивным группам. Например, слова «периодическое кольцо S» или «редуцированный модуль M» означают, что S — периодическая группа и M — редуцированная группа. В выражениях $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,Y)$, $\mathrm{End}_{\mathbb{Z}}\, X$, $X \otimes_{\mathbb{Z}} Y$ индекс $\mathbb{Z}$ опускается.

Через p обозначается некоторое простое число, $\mathbb{Z}(n)$ — циклическая группа порядка n, $\mathbb{Z}_n$ — кольцо вычетов, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ — квазициклическая p-группа, $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел или поле рациональных чисел, $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Подчеркнём, что выражение «Е-кольцо R» означает, что R — Е-кольцо относительно гомоморфизма $\mathbb{Z} \to R$.

Пусть дан идемпотентный функтор (L, f) с коаугментацией f в категории абелевых групп. Начнём с циклических групп и их прямых сумм. По теореме 7.2 $L\mathbb{Z}$ есть Е-кольцо. Из теоремы 7.3 следует, что любое Е-кольцо служит «образом» кольца $\mathbb{Z}$ для некоторого идемпотентного функтора L. Периодическое Е-кольцо является конечным прямым произведением колец $\mathbb{Z}_{p^k}$ для различных p. Мощность Е-кольца без кручения может быть сколь угодно большой [37], поэтому нет ограничений на мощность $|L\mathbb{Z}|$. Смешанные Е-кольца могут быть устроены довольно сложно [41].

Перейдём к конечным циклическим группам. По свойству 8 из раздела 6 достаточно рассмотреть циклические группы вида $\mathbb{Z}(p^k)$. Как всегда, f_A, или просто f, обозначает отображение коаугментации $A \to LA$.

Теорема 11.1 (К. Касакуберта [25]).

1. *Либо $\mathbb{Z}(p)$ — локальная группа, либо $L\mathbb{Z}(p) = 0$.*
2. *Если $\mathbb{Z}(p^n)$ — локальная группа для некоторого $n \geqslant 2$, то для каждого $k < n$ группа $\mathbb{Z}(p^k)$ тоже локальна.*
3. *Если $A = \mathbb{Z}(p^n)$, то либо $LA = 0$, либо $LA \cong \mathbb{Z}(p^k)$ для некоторого k, где $1 \leqslant k \leqslant n$.*

Доказательство. 1. Если $L\mathbb{Z}(p) \neq 0$, то $L\mathbb{Z}(p)$ — $\mathbb{Z}_p$-модуль по теореме 8.1 (см. также теорему 8.3). Поэтому $L\mathbb{Z}(p)$ — прямая сумма копий группы $\mathbb{Z}(p)$. По свойству 7 из раздела 6 $\mathbb{Z}(p)$ — локальная группа.

2. Если $L\mathbb{Z}(p) = 0$, то $L\mathbb{Z}(p^n) = 0$ для всех n. Это можно доказать индукцией, применяя следствие 6.5 к точным последовательностям вида

$$0 \to \mathbb{Z}(p) \to \mathbb{Z}(p^k) \to \mathbb{Z}(p^{k-1}) \to 0.$$

Следовательно, если $\mathbb{Z}(p^n)$ — локальная группа для некоторого $n \geqslant 2$, то группа $\mathbb{Z}(p)$ локальна по утверждению 1. Затем применяем свойство 9 из раздела 6 и спускаемся вниз с помощью точных последовательностей вида

$$0 \to \mathbb{Z}(p^{k-1}) \to \mathbb{Z}(p^k) \to \mathbb{Z}(p) \to 0.$$

3. Допустим, что $LA \neq 0$. Тогда LA есть $\mathbb{Z}_{p^n}$-модуль по теореме 8.1. Пусть k, $1 \leqslant k \leqslant n$, — наименьшее натуральное число, для которого LA есть $\mathbb{Z}_{p^k}$-модуль. Тогда LA имеет прямое слагаемое $\mathbb{Z}(p^k)$. Поэтому $\mathbb{Z}(p^k)$ — локальная группа. Так как fA — циклическая группа порядка не больше p^k, то fA — локальная группа по утверждению 2. По свойству 6 из раздела 6 f_A — эпиморфизм. Поэтому $LA \cong \mathbb{Z}(p^k)$. $\square$

Можно составить полное описание действия функтора L на циклических p-группах (см. [25]). Имеются следующие три возможности.

1. $L\mathbb{Z}(p) = 0$. В этом случае $L\mathbb{Z}(p^n) = 0$ для всех n, т. е. все $\mathbb{Z}(p^n)$ — ациклические группы.
2. Найдётся наибольшее натуральное число d со свойством, что $\mathbb{Z}(p^d)$ — локальная группа. Тогда $L\mathbb{Z}(p^n) \cong \mathbb{Z}(p^n)$ при $n \leqslant d$ и $L\mathbb{Z}(p^n) \cong \mathbb{Z}(p^d)$ при $n > d$.
3. $L\mathbb{Z}(p^n) \cong \mathbb{Z}(p^n)$ для всех n.

Утверждение 1 вытекает из доказательства пункта 2 теоремы 11.1. Рассмотрим утверждение 2. Если $n \leqslant d$, то можно использовать пункт 2 теоремы 11.1. Пусть $n > d$. По теореме 11.1 $L\mathbb{Z}(p^n) \cong \mathbb{Z}(p^k)$, где $k \leqslant d$. Число k не может быть меньше d. Эпиморфизм $\mathbb{Z}(p^n) \to \mathbb{Z}(p^k)$ есть L-эквивалентность. Поэтому он ортогонален группе $\mathbb{Z}(p^d)$. Это возможно только при $k = d$.

Из теоремы 8.1 и свойства 8 из раздела 6 вытекает следующий факт.

Следствие 11.2. *Если A — конечная группа, то LA тоже конечная группа и $f_A\colon A \to LA$ — эпиморфизм.*

Группа A называется *ограниченной*, если $nA = 0$ для некоторого n. Ограниченная группа A является модулем над кольцом $\mathbb{Z}_n$ для некоторого n. Тогда по теореме 8.1 LA также будет $\mathbb{Z}_n$-модулем. Поэтому LA — ограниченная группа. Сформулируем более точный результат.

Теорема 11.3 (К. Касакуберта [25], А. Либман [48]). *Пусть A — ограниченная группа. Тогда LA тоже ограниченная группа и отображение коаугментации $f\colon A \to LA$ есть эпиморфизм.*

Доказательство. Ограниченная группа является прямой суммой конечного числа p-групп, поэтому достаточно доказать результат для ограниченной p-группы A. Обозначим через D фактор-группу LA/fA. По свойству 15 из раздела 6 группа D и все её фактор-группы являются ациклическими. Покажем, что $D = 0$. Допустим противное. В таком случае LA содержит $\mathbb{Z}(p)$ в качестве подгруппы. Из свойства 11 из раздела 6 вытекает, что $L\mathbb{Z}(p) \neq 0$. С другой стороны, поскольку мы допустили, что $D \neq 0$, то $\mathbb{Z}(p)$ есть некоторая фактор-группа группы D. Следовательно, $L\mathbb{Z}(p) = 0$. Получено противоречие. Поэтому $D = 0$ и f — эпиморфизм. □

В целом также понятно, как идемпотентные функторы действуют на делимых группах.

Теорема 11.4 (К. Касакуберта [25]).

1. *Если D — делимая группа, то LD — делимая группа и $f\colon D \to LD$ — эпиморфизм.*
2. *Прямая сумма локальных делимых групп есть локальная делимая группа.*

Доказательство. 1. Группа fD — гомоморфный образ делимой группы. Поэтому fD — делимая группа, являющаяся прямым слагаемым в LD. Следовательно, $fD = LD$ по свойству 7 из раздела 6.

2. Прямое произведение $\prod\limits_{i\in I} D_i$ локальных делимых групп D_i локально, а прямая сумма $\bigoplus\limits_{i\in I} D_i$ является прямым слагаемым в этом произведении. По свойству 7 из раздела 6 $\bigoplus\limits_{i\in I} D_i$ — локальная группа. □

Любая делимая группа является прямой суммой копий группы $\mathbb{Q}$ и квазициклических групп $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Для этих групп имеем

$$L\mathbb{Z}(p^\infty) = 0 \quad\text{или}\quad L\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Z}(p^\infty), \qquad L\mathbb{Q} = 0 \quad\text{или}\quad L\mathbb{Q} = \mathbb{Q}.$$

Нужно учесть, что любой ненулевой гомоморфный образ группы $\mathbb{Z}(p^\infty)$ есть группа $\mathbb{Z}(p^\infty)$, а $L\mathbb{Q}$ при $L\mathbb{Q} \neq 0$ есть $\mathbb{Q}$-пространство по теореме 8.1.

Пусть по-прежнему имеется идемпотентный функтор (L, f) в категории абелевых групп. Мы уже знаем его значение на циклических p-группах. Как L действует на произвольных p-группах? Ситуация здесь довольно сложная.

Любая p-группа каноническим образом превращается в $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модуль; такие модули называются *p-адическими*. Кольцо $\hat{\mathbb{Z}}_p$ является примером полной области дискретного нормирования. В [47] изложена теория модулей над (не обязательно полными) областями дискретного нормирования. Исследуя действие функтора L на p-группах, можно было бы считать, что L задан в категории p-адических модулей (см. абзац после следствия 8.2). В связи с этим отметим, что если $L\hat{\mathbb{Z}}_p \neq 0$, то $L\hat{\mathbb{Z}}_p$ есть одно из следующих четырёх колец: $\hat{\mathbb{Z}}_p$, $\mathbb{Z}_{p^k}$, $\hat{\mathbb{Q}}_p$, $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \hat{\mathbb{Q}}_p$, где k — некоторое натуральное число и $\hat{\mathbb{Q}}_p$ — поле p-адических чисел. Кроме того, примарные $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модули совпадают с p-группами и гомоморфизмы p-групп совпадают с их гомоморфизмами как $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модулей. Мы будем всё это иметь в виду.

Перечислим несколько фактов, связанных с действием функтора L на p-группах.

1. Если $\mathbb{Z}(p)$ — ациклическая группа, то любая p-группа является ациклической.

Действительно, если A — p-группа, то имеется мономорфизм $\mathbb{Z}(p) \to A$. Поэтому $a(A) = A$ и A — ациклическая группа, где a — радикал, определённый в разделе 6.

Далее считаем, что $\mathbb{Z}(p)$ — локальная группа.

2. Если $\mathbb{Z}(p^\infty)$ — локальная группа, то любая p-группа является локальной.

Пусть D — делимая оболочка p-группы A. Группы D и D/A являются делимыми p-группами. По теореме 11.4 эти группы локальны. По свойству 9 из раздела 6 группа A локальна, поскольку A — ядро естественного эпиморфизма $D \to D/A$.

Теперь будем считать, что $\mathbb{Z}(p^\infty)$ — ациклическая группа. Тогда каждая делимая p-группа является ациклической. Для неделимой p-группы A существует ненулевой гомоморфизм $A \to \mathbb{Z}(p)$. Тогда A не является ациклической по свойству 13 из раздела 6. Итак, ациклические p-группы совпадают с делимыми p-группами. Радикал $a(A)$ p-группы A совпадает с её делимой частью.

Представим p-группу A в виде $A = C \oplus D$, где C — редуцированная группа и D — делимая группа. Тогда $LA \cong LC \oplus LD$, где LD — делимая p-группа по теореме 11.4. Поэтому мы в дальнейшем ограничимся редуцированными p-группами A.

3. Если A — p-группа, то LA — редуцированная группа и её периодическая часть является p-группой.

Запишем $LA = B \oplus D$, где B — редуцированная группа и D — делимая группа. Кроме того, $D = D_t \oplus D_0$, где D_t — периодическая группа и D_0 — группа без кручения. Из включения $fA \subseteq B \oplus D_t$ вытекает, что $LA = B \oplus D_t$ (см. свойство 7 из раздела 6). Поэтому D_t является локальной ациклической группой. Оставшаяся часть утверждения вытекает из того, что LA — p-адический модуль.

4. Если $fA \neq LA$, то LA/fA — делимая группа, причём её периодическая часть есть p-группа.

По свойству 15 из раздела 6 LA/fA — ациклическая группа. Если считать L функтором в категории p-адических модулей, то получим, что LA/fA — p-адический модуль. Поэтому группа LA/fA делится на все простые числа $q \neq p$. Группа LA/fA также делится на p, так как в противном случае найдётся ненулевой гомоморфизм $LA/fA \to \mathbb{Z}(p)$. Но это невозможно, поскольку LA/fA — ациклическая группа и $\mathbb{Z}(p)$ — локальная группа. Доказано, что LA/fA — делимая группа. Её периодическая часть является p-группой, поскольку LA/fA — $\hat{\mathbb{Z}}_p$-модуль.

Следуя [54], мы разделим все идемпотентные функторы на следующие четыре класса.

Класс I состоит из всех таких функторов L, что $L\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Z}(p^\infty)$.

Класс II состоит из всех таких функторов L, что $L\mathbb{Z}(p^\infty) = 0$ и существует такое натуральное число n, что $L\mathbb{Z}(p^n) \neq \mathbb{Z}(p^n)$.

Класс III состоит из всех таких функторов L, что $L\mathbb{Z}(p^\infty) = 0$, $L\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ и $L\mathbb{Z}(p^n) = \mathbb{Z}(p^n)$ для любого $n \geqslant 1$.

Класс IV состоит из всех таких функторов L, что $L\mathbb{Q} = 0$ и $L\mathbb{Z}(p^n) = \mathbb{Z}(p^n)$ для любого $n \geqslant 1$.

Теорема 11.5 [54].

1. *Если функтор L принадлежит классу* I, *то любая p-группа локальна.*
2. *Если функтор L принадлежит классу* II, *то LA — ограниченная p-группа для любой p-группы A.*
3. *Если функтор L принадлежит классу* III, *то LA — редуцированная p-группа для любой p-группы A.*

Доказательство. 1. Утверждение 1 совпадает с приведённым выше свойством 2. Для любой p-группы A имеем $LA \cong A$.

2. Перед следствием 11.2 мы установили, что существует такое натуральное число d, что $L\mathbb{Z}(p^n) \cong \mathbb{Z}(p^d)$ для всех $n \geqslant d$. Поэтому $p^d(LA) = 0$ для любой конечной p-группы A. Произвольная p-группа A изоморфна пределу прямого спектра конечных p-групп A_i, $i \in I$. По свойству 5 из раздела 6

$$LA \cong L \varinjlim LA_i.$$

Поэтому $p^d(LA) = 0$ и LA — ограниченная группа.

3. Можно считать, что $fA \neq LA$. По свойству 4 LA/fA — p-группа, так как $\mathbb{Q}$ — локальная группа. Учитывая свойство 3, получаем, что LA — редуцированная p-группа. □

Первые два класса функторов, введённые выше, понятны. Для лучшего понимания двух других классов нужно использовать более тонкие методы исследования. В [54] рассматриваются соотношения между локализациями p-групп и локализациями их базисных подгрупп применительно к классу III. Для функторов из класса IV группа LA может быть как p-группой, так и смешанной группой. Примером такого функтора является функтор Ext-пополнения. Группа $\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)$ называется *копериодической оболочкой* $A^\bullet$ группы A, причём для p-группы A можно взять группу $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}(p^\infty), A)$ (см., например, [47] о копериодических модулях и копериодических оболочках). Существует естественный гомоморфизм $f_A\colon A \to A^\bullet$, являющийся вложением, если A — редуцированная группа. Если для каждой группы A обозначить $LA = A^\bullet$, то получаем идемпотентный функтор (L, f), называемый *функтором* Ext-*пополнения*.

Трудно сказать что-нибудь конкретное о действиях идемпотентных функторов на группах без кручения. Мы рассмотрим локализации групп без кручения ранга 1 и увидим, что даже в этом случае положение не до конца понятно.

Как и в случае E-колец, кольцо R называется T-кольцом, если R — T-кольцо относительно гомоморфизма $\mathbb{Z} \to R$ (см. начало раздела). Сформулируем приложения результатов из раздела 10 к T-кольцам в терминах абелевых групп. Любое кольцо вычетов $\mathbb{Z}_n$ и любое подкольцо поля $\mathbb{Q}$ являются T-кольцами. Характеризация T-колец получена в [22]. Именно, кольцо S является T-кольцом в точности тогда, когда $S/T(S)$ — подкольцо поля $\mathbb{Q}$, любая ненулевая p-компонента S_p изоморфна $\mathbb{Z}(p^k)$ для некоторого k и $S/T(S)$ делится на p (см. раздел 12 о значении использованных здесь обозначений и терминов).

Будем рассматривать T-кольца без кручения, т. е. подкольца поля $\mathbb{Q}$. Некоторое время мы будем считать, что S — подкольцо поля $\mathbb{Q}$. Нас интересуют локализации кольца S, являющиеся группами без кручения (можно сразу сказать — кольцами без кручения).

Пусть B — группа без кручения и $b \in B$. Обозначим через $\mathrm{t}(b)$ *тип* элемента b в группе B и обозначим через $\mathrm{t}(A)$ тип группы без кручения A ранга 1. Для типа τ и группы без кручения B обозначим $B(\tau) = \{b \in B \mid \mathrm{t}(b) \geqslant \tau\}$. Группа $B(\tau)$ является чистой вполне инвариантной подгруппой в B. Заметим, что $\mathrm{Hom}(S, B) \cong B(\tau)$, где $\tau = \mathrm{t}(S)$. Для кольца S можно дополнить лемму 10.6 следующим образом. Группа без кручения B является S-модулем в точности тогда, когда $pB = B$ для любого простого числа p со свойством $pS = S$. После этого нетрудно проверить, что $\mathrm{tr}_S B = B(\tau) = \mathrm{tr}_S^\infty B$. Таким образом, группа $B(\tau)$ всегда S-разрешима, поскольку $B(\tau)$ — S-модуль.

Если $e\colon S \to R$ — кольцевой гомоморфизм, то R-модуль M является E-модулем относительно e в точности тогда, когда M — E-модуль относительно гомоморфизма $\mathbb{Z} \to R$ (надо использовать предложение 10.5 и учесть, что S — T-кольцо). Тензорное произведение $X \otimes_S Y$ S-модулей канонически изоморфно тензорному произведению $X \otimes_{\mathbb{Z}} Y = X \otimes Y$, поэтому индекс S можно опускать. Кроме того, стандартный функтор K, построенный по гомоморфизму $e\colon S \to R$, естественно эквивалентен стандартному функтору, построенному по гомоморфизму $\mathbb{Z} \to R$. Поэтому можно их не различать.

Если $f\colon A \to B$ — локализация групп, то мы следуем разделам 9, 10 и обозначаем через L_f соответствующий функтор локализации. Учитывая изложенное, из предложения 10.5 и следствий 10.7 и 10.8 выводим следующий результат.

Теорема 11.6 (М. Дугас [32]). *Пусть S — подкольцо поля $\mathbb{Q}$ и $\tau = t(S)$.*

1. *Кольцевой гомоморфизм $f\colon S \to R$ является локализацией в точности тогда, когда R есть* E*-кольцо.*
2. *Пусть f — некоторая локализация из пункта* 1. *Группа без кручения C является f-локальной в точности тогда, когда $C(\tau) \cong M$, где M — некоторый* E*-модуль.*
3. *Пусть f — некоторая локализация из пункта* 1. *Тогда*
   а) *если группа без кручения C является S-модулем, то $L_f C \cong KC$, где K — стандартный функтор, построенный по гомоморфизму $\mathbb{Z} \to R$;*
   б) *если C — произвольная группа без кручения, то $L_f C$ есть «значение» универсального квадрата для вложения $C(\tau) \to C$ и отображения коаугментации $C(\tau) \to L_f\big(C(\tau)\big)$, причём*
$$(L_f C)(\tau) = L_f\big(C(\tau)\big), \quad L_f C/(L_f C)(\tau) \cong C/C(\tau).$$

Можно исследовать более общую ситуацию. Пусть A — некоторая группа без кручения ранга 1 (т. е. A — подгруппа в $\mathbb{Q}$), S — её кольцо эндоморфизмов, τ — её тип (если τ — идемпотентный тип, то $S \cong A$ и мы попадаем в условия теоремы 11.6). Для любой группы без кручения B верно, что $\operatorname{tr}_A B = B(\tau)$. Однако равенство $\operatorname{tr}_A B = \operatorname{tr}_A^\infty B$ верно не всегда, т. е. равенство $\big(B/B(\tau)\big)(\tau) = 0$ верно не всегда. Группа B A-разрешима в точности тогда, когда $B = B(\tau)$. Поэтому любая группа без кручения входит в подкатегорию $\mathcal{E}$, определённую перед теоремой 10.1. Любой S-модуль без кручения M входит в подкатегорию $\mathcal{M}_A$, определённую перед теоремой 10.1. Р. Б. Уорфилд [62] доказал, что категория A-разрешимых групп без кручения эквивалентна категории S-модулей без кручения, причём эквивалентность определяется функторами $\operatorname{Hom}(A, -)$ и $(-)\otimes_S A$; более общие эквивалентности установлены в [46]. Поскольку S — T-кольцо, то остаются в силе все рассуждения перед теоремой 11.6. Теперь из теорем 10.1 и 10.2 вытекает следующий результат.

Теорема 11.7 (М. Дугас [32]). *Пусть A — группа без кручения ранга 1, $S = \operatorname{End} A$, $\tau = t(A)$. Пусть $f\colon A \to B$ — локализация, где B — группа без кручения со свойством $B = B(\tau)$.*

1. *Локализация f эквивалентна стандартной локализации $g\colon A \to R \otimes A$, где R — некоторое* E*-кольцо без кручения, являющееся S-модулем. Обратно, если R — некоторое* E*-кольцо без кручения, являющееся S-модулем, то отображение значения $A \to R \otimes A$ есть локализация.*
2. *Пусть g — некоторая локализация из пункта* 1 *и C — группа без кручения. Тогда C — g-локальная группа в точности тогда, когда $C(\tau) \cong M \otimes A$, где M — некоторый* E*-модуль без кручения.*
3. *Пусть g — некоторая локализация из пункта* 1 *и C — группа без кручения. Если $C(\tau) = 0$, то $L_g C \cong C$, т. е. C — локальная группа. Если $C = C(\tau)$, то $L_g C \cong KM \otimes A$, где $M = \operatorname{Hom}(A, C)$, K — стандартный функтор, построенный по гомоморфизму $\mathbb{Z} \to R$.*

4. *Пусть g — некоторая локализация из пункта 1 и C — группа без кручения. Если $\bigl(C/C(\tau)\bigr)(\tau) = 0$, то L_gC есть «значение» универсального квадрата для вложения $C(\tau) \to C$ и отображения коаугментации $C(\tau) \to L_gC(\tau)$. При этом верны соотношения из утверждения* 3 б) *теоремы* 11.6.

Из одного результата М. Дугаса [32] следует, что не все локализации групп без кручения ранга 1 имеют вид, указанный в теореме 11.7. М. Дугас также построил группу без кручения C, для которой «значение» универсального квадрата из утверждения 4 неизоморфно L_gC. М. Дугас пишет, что задача описания L_gC остаётся нерешённой. Приведём пример ситуации, когда можно вычислить группу L_gC. Для произвольной группы без кручения C представим такой универсальный квадрат, как в утверждении 4 теоремы 11.7:

$$\begin{tikzcd} C(\tau) \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "k"] \\ L_gC(\tau) \arrow[r, "j"] & G \end{tikzcd}.$$

Обозначим $D = L_gC(\tau)$. По предложению 6.4 k есть g-эквивалентность, т. е. $L_gC \cong L_gG$ и $G/j(D) \cong C/C(\tau)$. В доказательстве утверждения 2 теоремы 10.2 доказано включение $j(D) \subseteq G(\tau)$. Заметим, что $L_gC(\tau)$ и G — группы без кручения. Если группа $C/C(\tau)$ имеет конечный ранг (это так, например, если C — группа конечного ранга), то можно получить группу L_gC, взяв несколько универсальных квадратов, подобных построенному. В самом деле, если $j(D) = G(\tau)$, то по утверждению 3 теоремы 11.7 G — локальная группа и $L_gC \cong G$. Если же $j(D) \neq G(\tau)$, то $\mathrm{r}\bigl(G/G(\tau)\bigr) < \mathrm{r}\bigl(C/C(\tau)\bigr)$, где $\mathrm{r}(X)$ обозначает ранг группы X. В таком случае строим универсальный квадрат

$$\begin{tikzcd} G(\tau) \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ L_gG(\tau) \arrow[r] & G_1 \end{tikzcd},$$

повторяем рассуждения и т. д. Поскольку ранги убывают, мы придём через несколько шагов к универсальному квадрату, у которого в нижнем правом углу находится локальная группа. Эту группу можно взять в качестве L_gC.

Замечание. Если C — произвольная группа, то возможно, что группу L_gC можно построить с помощью аналогичной трансфинитной процедуры (как и в случае конструкции ортогональной рефлекции). Аналогичное замечание можно сделать о более общих локализациях из теоремы 10.2.

12. Идемпотентные функторы и локализации в категории абелевых групп: случай смешанных групп

Сделаем несколько замечаний о действии идемпотентных функторов на некоторых смешанных группах и о локализациях некоторых смешанных колец. Смешанные группы обязательно содержат как ненулевые элементы конечного порядка, так и элементы бесконечного порядка.

Для некоторой группы A её наибольшая подгруппа, являющаяся p-группой, называется *p-компонентой* группы A; она обозначается через A_p. Через $\mathrm{T}(A)$ обозначается *периодическая часть* (или *периодическая подгруппа*) группы A. Имеется прямое разложение $\mathrm{T}(A) = \bigoplus\limits_p A_p$.

Если L — идемпотентный функтор и A — смешанная группа со свойством $L\mathrm{T}(A) = 0$, то по следствию 6.5 $LA \cong L\big(A/\mathrm{T}(A)\big)$, и исследование сводится к группам без кручения. Если же $L\mathrm{T}(A) \neq 0$, то при поиске группы LA имеются дополнительные трудности.

Многие специалисты заинтересовались смешанными группами, лежащими между прямой суммой и прямым произведением своих p-компонент. Мы называем их *sp-группами* (термин образован от слов «sum» и «product»); sp-группы обладают разнообразными интересными свойствами.

Группа A называется *sp-группой*, если A — редуцированная смешанная группа с бесконечным числом ненулевых p-компонент и естественное вложение $\bigoplus\limits_p A_p \to A$ продолжается до чистого вложения $A \to \prod\limits_p A_p$. Таким образом, если A — sp-группа, то можно считать, что

$$\bigoplus_p A_p \subset A \subseteq \prod_p A_p,$$

причём A — чистая подгруппа в $\prod\limits_p A_p$ (это равносильно делимости фактор-группы $A/\mathrm{T}(A)$). Здесь и далее мы предполагаем в подобных ситуациях, что p пробегает множество всех простых чисел, относящихся к A, т. е. множество всех p со свойством $A_p \neq 0$. Если A — sp-группа, то для каждого p, относящегося к A, имеем $A = A_p \oplus B_p$ и $pB_p = B_p$, где B_p — дополнительное слагаемое (оно находится однозначно).

Можно определить более широкий класс групп A. Для таких групп A также выполнены приведённые выше включения и A_p является p-адическим модулем для каждого p.

Аналогично определим sp-кольцо S, заменив p-адический модуль A_p на p-адическую алгебру S_p. Итак, если S — sp-кольцо, то выполнены чистые вложения колец

$$\bigoplus_p S_p \subset S \subseteq \prod_p S_p,$$

где S_p — p-адическая алгебра для каждого p, относящегося к S. Кольцо эндоморфизмов sp-группы A и его центр дают примеры sp-колец.

Каждая sp-группа A является модулем над многими sp-кольцами (например, над $\operatorname{End} A$). Среди таких колец можно выбрать наименьшее (в определённом смысле) кольцо.

Пусть $\chi = (k_p)$ — некоторая характеристика, т. е. последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞, пронумерованных всеми простыми числами. Считаем, что $k_p \neq 0$ для бесконечного множества простых чисел p. Для каждого p определим кольцо S_p, зависящее от χ; считаем, что $S_p = 0$ при $k_p = 0$, S_p — кольцо вычетов $\mathbb{Z}_{p^k}$ при $0 < k_p < \infty$ и S_p — кольцо целых p-адических чисел $\hat{\mathbb{Z}}_p$ при $k_p = \infty$. Обозначим $\bar{K}(\chi) = \prod\limits_p S_p$ и $T(\chi) = \bigoplus\limits_p S_p$. Тогда фактор-кольцо $\bar{K}(\chi)/T(\chi)$ — $\mathbb{Q}$-алгебра. Пусть $K(\chi)$ — такое подкольцо в $\bar{K}(\chi)$, что $T(\chi) \subset K(\chi)$ и $K(\chi)/T(\chi) = \mathbb{Q}$. Если $k_p = \infty$ для всех простых чисел p, то такое кольцо $K(\chi)$ обозначим через $K(\infty)$ или K. Кольцо K называется *кольцом псевдорациональных чисел*.

Рассмотрим некоторые свойства колец $K(\chi)$. Если χ_1 и χ_2 — характеристики, то $\chi_1 \leqslant \chi_2$ тогда и только тогда, когда существует сюръективный гомоморфизм колец $K(\chi_2) \to K(\chi_1)$. Следовательно, каждый $K(\chi_1)$-модуль есть притягивающий $K(\chi_2)$-модуль; в частности, каждый $K(\chi_1)$-модуль есть K-модуль. Для кольца $K(\chi)$ известны вид элементов, строение идеалов и фактор-колец.

Пусть дана sp-группа A. Составим характеристику $\chi_m = (k_p)$ следующим образом. Полагаем $k_p = 0$ при $A_p = 0$ и $k_p = \infty$, если A_p — неограниченная группа. В противном случае пусть p^{k_p} — точная верхняя грань порядков элементов группы A. На группе A можно задать структуру $K(\chi_m)$-модуля, используя то, что A — чистая подгруппа в $\prod\limits_p A_p$. Характеристика χ_m является наименьшей с таким свойством. Для любой характеристики $\chi \geqslant \chi_m$ имеем $K(\chi)$-модуль A.

Какие $K(\chi)$-модули являются E-модулями (относительно гомоморфизма $\mathbb{Z} \to K(\chi)$)? Удобнее взять более широкий класс sp-колец. Пусть S — такое sp-кольцо, что каждая его ненулевая p-компонента есть либо кольцо вычетов, либо кольцо целых p-адических чисел. Фактор-группа $S/\langle 1\rangle$ делима. Следовательно, S есть E-кольцо, а любой редуцированный S-модуль является E-модулем по предложению 1.5. В таких ситуациях S-модульная структура единственна по следствию 3.3, поэтому фразы типа «группа B есть S-модуль» имеют точный смысл (см. замечание перед леммой 10.6). Следовательно, любое кольцо $K(\chi)$ является E-кольцом. Если sp-группы A и B являются $K(\chi)$-модулями, то $\operatorname{Hom}_{K(\chi)}(A, B) = \operatorname{Hom}(A, B)$ по предложению 1.7.

Характеристика χ называется *локально свободной*, если $k_p < \infty$ для всех p. Если S — некоторое определённое выше кольцо, то S является T-кольцом в точности тогда, когда $S = K(\chi)$, где χ — какая-нибудь локально свободная характеристика. В этом случае $A \otimes_{K(\chi)} B \cong A \otimes B$ для любых $K(\chi)$-модулей A и B по предложению 1.7.

Из сказанного выше можно сделать следующий вывод. Если мы задаём структуру $K(\chi)$-модуля на sp-группе A, то свойства такого модуля близки к свойствам группы A. До конца раздела мы используем параллельно групповую терминологию и модульную терминологию по отношению к sp-группам.

Рассмотрение sp-групп как модулей над sp-кольцами даёт дополнительные средства для изучения sp-групп.

Определим несколько условий конечности для модулей и абелевых групп. Модуль A называется *малым*, если для любого множества модулей $\{B_i\}_{i\in I}$ образ каждого гомоморфизма $A \to \bigoplus_{i\in I} B_i$ содержится в сумме конечного числа некоторых модулей B_i. Модуль A называется *самомалым*, если образ любого гомоморфизма $A \to \bigoplus_{i=1}^{\infty} A_i$, где $A_i \cong A$ для всех i, содержится в сумме конечного числа некоторых слагаемых A_i.

Для группы A обозначим

$$\mathrm{End_t}\, A = \mathrm{Hom}\big(A, \mathrm{T}(A)\big)$$

и

$$\mathrm{End_f}\, A = \{\alpha \in \mathrm{End}\, A \mid \alpha A \text{ содержится в сумме конечного числа компонент } A_p\}.$$

Заметим, что $\mathrm{End_t}\, A$ и $\mathrm{End_f}\, A$ — идеалы кольца $\mathrm{End}\, A$ и $\mathrm{End_f}\, A \subseteq \mathrm{End_t}\, A$. Говорят, что sp-группа A *удовлетворяет условию на проекции*, если существует такая свободная подгруппа F группы A, что образ ограничения проекции $A \to A_p$ на F совпадает с A_p для почти всех p.

Теорема 12.1 [4]. *Для sp-группы A равносильны следующие условия*:

1) *A — самомалая группа*;
2) $\mathrm{End_t}\, A = \mathrm{End_f}\, A$ *и каждая компонента A_p — конечная группа*;
3) *любой периодический эпиморфный образ G группы A является прямой суммой делимой группы и конечной группы*;
4) *группа A удовлетворяет условию на проекции и каждая группа A_p конечна.*

Для модуля одним из условий конечности является то, что его кольцо эндоморфизмов дискретно в конечной топологии (информация о конечной топологии приведена в разделе 6 и [46,47]). Модуль с дискретным кольцом эндоморфизмов является самомалым [46].

Предложение 12.2 [4]. *Кольцо эндоморфизмов sp-группы A дискретно в конечной топологии в точности тогда, когда существует такая свободная подгруппа F конечного ранга группы A, что образ проекции $F \to A_p$ совпадает с A_p для почти всех p, а для остальных p группы A_p конечны.*

Определим категорию Уокера Walk (см. [47]). Объектами категории Walk являются абелевы группы, а $\mathrm{Hom}(A,B)/\mathrm{Hom}\big(A,\mathrm{T}(B)\big)$ — множество морфизмов $\mathrm{Hom_W}(A,B)$ из A в B. В частности, $\mathrm{End}\, A/\mathrm{End_t}\, A$ — кольцо эндоморфизмов группы A в Walk; это кольцо обозначается через $\mathrm{End_W}\, A$. Категория Walk является аддитивной категорией с бесконечными суммами и ядрами. Заметим, что для sp-группы A группа $A/\mathrm{T}(A)$ является $\mathbb{Q}$-пространством, а кольцо $\mathrm{End_W}\, A$ — $\mathbb{Q}$-алгебра.

Обозначим через $\mathcal{W}$ полную подкатегорию категории Walk, состоящую из sp-групп A со свойством $\mathrm{End_t}\, A = \mathrm{End_f}\, A$. Тогда $\mathcal{W}$ — аддитивная категория с расщепляющимися идемпотентами. Следовательно, в ней выполняется теорема Крулля—Шмидта о единственности разложения объекта в прямую сумму объектов с локальными кольцами эндоморфизмов. Если все компоненты A_p группы A из $\mathcal{W}$ ограниченны, то идеал $\mathrm{End_t}\, A$ совпадает с идеалом эндоморфизмов конечного порядка. Поэтому

$$\mathrm{End_W}\, A = \mathrm{End}\, A/\,\mathrm{End_t}\, A = \mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Q}.$$

Взяв такие группы A, мы получим так называемую *категорию квазигомоморфизмов*.

Пусть далее $\mathcal{W}_\mathrm{f}$ обозначает полную подкатегорию категории $\mathcal{W}$, состоящую из групп конечного ранга. Возьмём некоторую группу $A \in \mathcal{W}_\mathrm{f}$. $\mathbb{Q}$-алгебра $\mathrm{End_W}\, A$ вкладывается в $\mathrm{End}_\mathbb{Q}\, A/\mathrm{T}(A)$. Так как $\dim_\mathbb{Q} A/\mathrm{T}(A) < \infty$, то $\mathrm{End_W}\, A$ — конечномерная $\mathbb{Q}$-алгебра, $\mathrm{End_W}\, A = \mathrm{End}\, A \otimes \mathbb{Q}$. Поэтому по аналогии с группами без кручения можно назвать $\mathrm{End_W}\, A$ *кольцом квазиэндоморфизмов* или *алгеброй квазиэндоморфизмов* группы A (см. выше о категории квазигомоморфизмов).

Различные условия конечности, определённые нами, по существу, равносильны для sp-групп конечного ранга. Понятие конечно порождённого $K(\chi)$-модуля служит объединяющей идеей. Следующая теорема выявляет замечательные связи между свойствами sp-группы A и её свойствами как $K(\chi)$-модуля. Через $\mathrm{r}_0(A)$ обозначается ранг без кручения смешанной группы A.

Теорема 12.3 [4, 6].

1. *Для sp-группы A равносильны следующие условия*:
   1) $\mathrm{r}_0(A) < \infty$ *и* A — *самомалая группа*;
   2) $\mathrm{r}_0(A) < \infty$, $A \in \mathcal{W}_f$ *и каждая компонента* A_p — *конечная группа*;
   3) $\mathrm{r}_0(A) < \infty$, A *удовлетворяет условию на проекции и каждая компонента* A_p — *конечная группа*;
   4) $\mathrm{r}_0(A) < \infty$ *и кольцо* $\mathrm{End}\, A$ *дискретно в конечной топологии*;
   5) A — *конечно порождённый* K-*модуль*;
   6) A — *конечно порождённый* $K(\chi)$-*модуль для некоторой локально свободной характеристики* χ;
   7) A — *малый* K-*модуль*.
2. *Если* A — *группа из* $\mathcal{W}_\mathrm{f}$, *то* $A = B \oplus G$, *где* B — *самомалая sp-группа*, G — *периодическая группа, т. е.* $A \cong B$ *в категории* $\mathcal{W}$.

Приведём нужную нам информацию о строении модулей над кольцами $K(\chi)$ (см. [1, 2]). $K(\chi)$-модуль M равен $N \oplus D$, где подмодуль N не содержит ненулевых $\mathbb{Q}$-пространств, а D — наибольший подмодуль в M, являющийся $\mathbb{Q}$-пространством. Кроме того, либо группа N является периодической, либо

$N = B \oplus G$, где B — sp-группа и G — делимая периодическая группа. Если χ — локально свободная характеристика, то N или периодическая группа, или sp-группа.

Как действуют идемпотентные функторы на sp-группах?

Теорема 12.4. *Пусть дан идемпотентный функтор (L, f).*

1. *Если χ — локально свободная характеристика и A — sp-группа, являющаяся $K(\chi)$-модулем, то $LA = B \oplus D$, где D — делимая группа без кручения и B либо периодическая группа, либо sp-группа.*
2. *Если A — самомалая sp-группа конечного ранга, то LA — самомалая группа. Более точно, $LA = B \oplus D$, где D — делимая группа без кручения конечного ранга и B либо конечная группа, либо самомалая sp-группа. В последнем случае если $D \neq 0$, то B имеет конечный ранг.*

Доказательство. 1. По теореме 8.1 LA есть $K(\chi)$-модуль, и можно сослаться на предыдущий текст.

2. По теореме 12.3 A — конечно порождённый $K(\chi)$-модуль для некоторой локально свободной характеристики χ. По свойству 17 из раздела 6 кольцо $\mathrm{End}_{K(\chi)}(LA)$ дискретно в конечной топологии. Следовательно, LA — самомалый $K(\chi)$-модуль. По замечанию перед теоремой $LA = B \oplus D$, где D — делимая группа без кручения, а B либо периодическая группа, либо sp-группа. Так как LA — самомалый модуль, то D имеет конечный ранг. Так как B — редуцированная группа, то B является E-модулем относительно гомоморфизма $\mathbb{Z} \to K(\chi)$. Следовательно, её групповые эндоморфизмы совпадают с $K(\chi)$-модульными эндоморфизмами. Поэтому B — самомалая группа. Теперь если B — периодическая группа, то B конечна [46]. Если B — sp-группа и $D \neq 0$, то B должна иметь конечный ранг. Надо учесть, что $B/\mathrm{T}(B)$ — делимая группа без кручения. □

Очень кратко исследуем вопросы 1—3 из раздела 9 о локализациях для кольца $K(\chi)$, где χ — локально свободная характеристика. Напомним, что $K(\chi)$ есть Т-кольцо. Как и для подколец поля $\mathbb{Q}$ в разделе 11, используем предложение 10.5 и следствия 10.7, 10.8, касающиеся локализаций произвольных Т-колец.

Обозначим кольцо $K(\chi)$ через S. Возьмём некоторую локализацию $f\colon S \to R$, где по предложению 9.7 можно считать, что R — кольцо. Тогда R является S-модулем и R есть E-кольцо по предложению 10.5. Используя текст перед теоремой 12.3, можно проверить, что R либо произведение конечного числа колец вычетов и поля $\mathbb{Q}$, либо sp-кольцо. Рассмотрим более важный второй случай. Для каждого p имеем $S = S_p \oplus N_p$, где p-компонента S_p есть кольцо вычетов. Ограничение f на S_p есть локализация $S_p \to R_p$, и R_p также является кольцом вычетов (см. абзац после теоремы 11.1).

Пусть B — sp-группа. В связи с леммой 10.6 уточним, когда B является S-модулем. Группа B является S-модулем в точности тогда, когда каждая компонента B_p является S_p-модулем. Действительно, можно считать, что $S = K/I$, где I — некоторый идеал кольца псевдорациональных чисел K. Если B_p является S_p-модулем, то $I_pB_p = 0$ для любого p, где I_p — p-компонента идеала I.

Поэтому $IB = 0$, и B есть S-модуль. Группа B_p является S_p-модулем в точности тогда, когда порядки её элементов не превосходят p^k, где $S_p = \mathbb{Z}_{p^k}$. Поэтому понятно, когда sp-группа B есть S-модуль.

Пусть $\chi = (p^{k_p})$, где $S = K(\chi)$. Обозначим через $B[\chi]$ множество

$$\{b = (b_p) \in B \mid \text{порядок элемента } b_p \text{ не превосходит } p^{k_p} \text{ для любого } p\}.$$

Мы используем обозначение $B[\chi]$ также для периодической группы B. Ясно, что B есть S-модуль в точности тогда, когда $B = B[\chi]$. Имеет место изоморфизм $\mathrm{Hom}(S, B) \cong B[\chi]$ при соответствии $\alpha \to \alpha(1)$, $\alpha \in \mathrm{Hom}(S, B)$. Действительно,

$$\mathrm{Hom}(S, B) = \mathrm{Hom}(S, B[\chi]) = \mathrm{Hom}_S(S, B[\chi]) \cong B[\chi].$$

Теперь понятно, что $\mathrm{tr}_S\, B = B[\chi]$.

В случае подгруппы $\mathrm{tr}_S^\infty\, B$ ситуация менее однозначная. Например, если группы S и B относятся к одним и тем же простым числам p, то $\mathrm{tr}_S^\infty\, B = B$.

Аналогично теореме 11.6 можно вывести следующий результат из предложения 10.5 и следствий 10.7 и 10.8.

Теорема 12.5. *Пусть $S = K(\chi)$, где χ — локально свободная характеристика.*

1. *Кольцевой гомоморфизм $f\colon S \to R$ является локализацией в точности тогда, когда R — E-кольцо.*
2. *Пусть C — sp-группа и f — некоторая локализация из пункта 1, причём R — sp-кольцо. Тогда C — f-локальная группа в точности тогда, когда $C[\chi] \cong M$, где M — некоторый R-модуль.*
3. *Пусть f — некоторая локализация из пункта 1, причём R — sp-кольцо, L_f — соответствующий функтор локализации. Тогда*
   а) *если $C[\chi] = 0$, то $L_f C \cong C$, т. е. C — локальная группа; если sp-группа C является S-модулем, то $L_f C \cong KC$, где K — стандартный функтор, построенный по гомоморфизму $\mathbb{Z} \to R$;*
   б) *если C — такая sp-группа, что $(C/C[\chi])[\chi] = 0$, то $L_f C$ есть «значение» универсального квадрата для вложения $C[\chi] \to C$ и отображения коаугментации $C[\chi] \to L_f(C[\chi])$. При этом*

$$(L_f C)[\chi] = L_f(C[\chi]), \quad L_f C/(L_f C)[\chi]) \cong C/C[\chi].$$

Если $(C/C[\chi])[\chi] \neq 0$, то в некоторых случаях можно построить группу $L_f C$ с помощью нескольких универсальных квадратов (см. конец раздела 11).

Безусловно, необходимо изучать все вопросы, затронутые в разделах 11 и 12, более детально и систематически.

Литература

[1] Зиновьев Е. Г. csp-кольца как обобщение колец псевдорациональных чисел // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 35—38.

[2] Зиновьев Е. Г. Инъективные и делимые модули над csp-кольцами // Вестн. Томск. гос. ун-та. — 2007. — Вып. 299. — С. 96—97.

[3] Кашу А. И. Радикалы и кручения в модулях. — Кишинёв: Штиинца, 1983.

[4] Крылов П. А. Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 793—812.

[5] Крылов П. А. Аффинные группы модулей и их автоморфизмы // Алгебра и логика. — 2001. — Т. 40, № 1. — С. 60—82.

[6] Крылов П. А. Наследственные кольца эндоморфизмов смешанных абелевых групп // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 1. — С. 108—119.

[7] Крылов П. А. Радикал Джекобсона кольца эндоморфизмов абелевой группы // Алгебра и логика. — 2004. — Т. 43, № 1. — С. 60—76.

[8] Крылов П. А., Классен Е. Д. Центр кольца эндоморфизмов расщепляющейся смешанной абелевой группы // Сиб. мат. журн. — 1999. — Т. 40, № 5. — С. 1074—1085.

[9] Крылов П. А., Пахомова Е. Г. Абелевы группы и регулярные модули // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, № 3. — С. 402—411.

[10] Тимошенко Е. А. Т-радикалы и Е-радикалы в категории модулей // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 45, № 1. — С. 201—210.

[11] Царёв А. В. Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимые группы // Алгебра и анализ. — 2006. — Т. 18, № 4. — С. 198—214.

[12] Царёв А. В. Проективные и образующие модули над кольцом псевдорациональных чисел // Мат. заметки. — 2006. — Т. 80, № 3. — С. 437—448.

[13] Царёв А. В. Некоторые морфизмы модулей над кольцом псевдорациональных чисел // Сиб. мат. журн. — 2008. — Т. 49, № 4. — С. 945—953.

[14] Царёв А. В. Сервантные подкольца колец $\mathbb{Z}_\chi$ // Мат. сб. — 2009. — Т. 200, № 10. — С. 123—150.

[15] Adámek J., Rosický J. Locally Presentable and Accessible Categories. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 189).

[16] Adams J. F. Localization and Completion. — Chicago: Univ. of Chicago, 1975.

[17] Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — New York: Springer, 1974.

[18] Bousfield A. K. The localization of spaces with respect to homology // Topology. — 1975. — Vol. 14. — P. 133—150.

[19] Bousfield A. K. Construction of factorization systems in categories // J. Pure Appl. Algebra. — 1977. — Vol. 9. — P. 207—220.

[20] Bousfield A. K. Homotopical localizations of spaces // Amer. J. Math. — 1997. — Vol. 119. — P. 1321—1354.

[21] Bousfield A. K., Kan D. M. Homotopy Limits, Completions and Localizations. — Berlin: Springer, 1972. — (Lect. Notes Math.; Vol. 304).

[22] Bowshell R. A., Schultz P. Unital rings whose additive endomorphisms commute // Math. Ann. — 1977. — Vol. 228. — P. 197—214.

[23] Braun G., Göbel R. E-algebras whose torsion part is not cyclic // Proc. Amer. Math. Soc. — 2005. — Vol. 133, no. 8. — P. 2251—2258.

[24] Buckner J., Dugas M. Quasi-localizations of $\mathbb{Z}$ // Israel J. Math. — 2007. — Vol. 160. — P. 349—370.

[25] Casacuberta C. On structures preserved by idempotent transformations of groups and homotopy types // Crystallographic Groups and Their Generalizations. II. Proc. of the Workshop, Katholieke Universiteit Leuven, Campus Kortrijk, Belgium, May 26—28, 1999 / P. Igodt, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2000. — (Contemp. Math.; Vol. 262). — P. 39—68.

[26] Casacuberta C., Descheemaeker An. Relative group completions // J. Algebra. — 2005. — Vol. 285. — P. 451—469.

[27] Casacuberta C., Golasiński M., Tonks A. Homotopy localization of groupoids // Forum Math. — 2006. — Vol. 18. — P. 967—982.

[28] Casacuberta C., Peschke G., Pfenninger M. On orthogonal pairs in categories and localization // Adams Memorial Symposium on Algebraic Topology. Vol. 1. Proc. of a Symposium, Held in Manchester, UK, in July 1990 / N. Ray, G. Walker, eds. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992. — (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; Vol. 175). — P. 211—223.

[29] Casacuberta C., Scevenels D. On the existence of group localizations under large cardinals axioms // Rev. Real Acad. Cienc. Ser. A. Mat. — 2001. — Vol. 95. — P. 163—170.

[30] Dugas M. Large E-modules exist // J. Algebra. — 1991. — Vol. 142. — P. 405—413.

[31] Dugas M. Localizations of torsion-free Abelian groups // J. Algebra. — 2004. — Vol. 278. — P. 411—429.

[32] Dugas M. Localizations of torsion-free Abelian groups. II // J. Algebra. — 2005. — Vol. 284. — P. 811—823.

[33] Dugas M., Feigelstock S. Self-free modules and E-rings // Commun. Algebra. — 2003. — Vol. 31, no. 3. — P. 1387—1402.

[34] Dugas M., Feigelstock S. A-rings // Colloq. Math. — 2003. — Vol. 96, no. 2. — P. 277—291.

[35] Dugas M., Feigelstock S., Hausen J. M-free Abelian groups // Rocky Mountain J. Math. — 2002. — Vol. 32, no. 4. — P. 1367—1382.

[36] Dugas M., Göbel R. On radicals and products // Pacific J. Math. — 1985. — Vol. 118. — P. 79—104.

[37] Dugas M., Mader A., Vinsonhaler C. Large E-rings exist // J. Algebra. — 1987. — Vol. 108, no. 1. — P. 88—101.

[38] Dugas M., Vinsonhaler C. Two-sided E-rings // J. Pure Appl. Algebra. — 2003. — Vol. 185. — P. 87—102.

[39] Farjoun E. D. Cellular Spaces, Null Spaces and Homotopy Localization. — Berlin: Springer, 1996. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1622).

[40] Fuchs L., Lee S. B. Superdecomposable E(R)-algebras // Commun. Algebra. — 2005. — Vol. 33. — P. 3009—3016.

[41] Göbel R., Goldsmith B. Classifying E-algebras over Dedekind domains // J. Algebra. — 2006. — Vol. 306. — P. 566—575.

[42] Göbel R., Herden D. The existence of large E(R)-algebras that are sharply transitive modules // Commun. Algebra. — 2008. — Vol. 36. — P. 120—131.

[43] Göbel R., Strüngmann L. Almost-free E(R)-algebras and E(A, R)-modules // Fund. Math. — 2001. — Vol. 169. — P. 175—192.

[44] Göbel R., Trlifaj J. Approximations and Endomorphism Algebras of Modules. — Berlin: Walter de Gruyter, 2006.

[45] Kato T. Duality between colocalization and localization // J. Algebra. — 1978. — Vol. 55. — P. 351—374.

[46] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.

[47] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Modules over Discrete Valuation Domains. — Berlin: Walter de Gruyter, 2008. — (De Gruyter Exp. Math.; Vol. 43).

[48] Libman A. Cardinality and nilpotency of localizations of groups and G-modules // Israel J. Math. — 2000. — Vol. 117. — P. 221—237.

[49] Mac Lane S. Categories for the Working Mathematician. — Berlin: Springer, 1971; 1998.

[50] Mader A., Vinsonhaler C. Torsion-free E-modules // J. Algebra. — 1988. — Vol. 115, no. 2. — P. 401—411.

[51] Ohtake K. Colocalization and localization // J. Pure Appl. Algebra. — 1977. — Vol. 11, no. 13. — P. 217—241.

[52] Ohtake K. Equivalence between colocalization and localization in Abelian categories with applications to the theory of modules // J. Algebra. — 1982. — Vol. 79. — P. 169—205.

[53] Pierce R. S. E-modules // Abelian Group Theory. Proc. of the 1987 (4th) Perth Conf. Held August 9—14, 1987 (Perth, Western Australia) / L. Fuchs, R. Göbel, Ph. Schultz, eds. — Providence: Amer. Math. Soc., 1989. — (Contemp. Math.; Vol. 87). — P. 221—240.

[54] Rodríguez J. L., Scherer J., Strüngmann L. On localizations of torsion Abelian groups // Fund. Math. — 2004. — Vol. 183. — P. 123—138.

[55] Rowen L. H. Ring Theory. — Boston: Academic Press, 1988.

[56] Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Aust. Math. Soc. — 1973. — Vol. 15. — P. 60—69.

[57] Stenström B. Rings and Modules of Quotients. — Berlin: Springer, 1971. — (Lect. Notes Math.; Vol. 237).

[58] Stenström B. Rings of Quotients: An Introduction to Methods of Ring Theory. — Berlin: Springer, 1975.

[59] Tachikawa H., Ohtake K. Colocalization and localization in Abelian categories // J. Algebra. — 1979. — Vol. 56, no. 1. — P. 1—23.

[60] Tuganbaev A. A. Semidistributive Rings and Modules. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[61] Vinsonhaler C. E-rings and related structures // Non-Noetherian Commutative Ring Theory / S. T. Chapman, S. Glaz, eds. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2000. — (Math. Its Appl.; Vol. 520). — P. 387—402.

[62] Warfield R. B. Jr. Homomorphisms and duality for torsion-free groups // Math. Z. — 1968. — Vol. 107. — P. 189—200.