

Колокализации и двойственности для модулей и абелевых групп*

П. А. КРЫЛОВ

Томский государственный университет
e-mail: krylov@math.tsu.ru

А. А. ТУГАНБАЕВ

Российский государственный
торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.553+512.541

Ключевые слова: модуль, абелева группа, колокализация, двойственность, тип.

Аннотация

Вводятся стандартные колокализации модулей. Рассматривается двойственность в категории абелевых групп без кручения.

Abstract

P. A. Krylov, A. A. Tuganbaev, Colocalizations and dualities for modules and Abelian groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 7, pp. 161–180.

We introduce standard colocalizations of modules. In the category of torsion-free Abelian groups, a duality is considered.

Данная статья примыкает к [2], где рассматриваются идемпотентные функторы коаугментации в категориях модулей и локализации модулей. Дуализируя эти понятия, приходим к идемпотентным функторам аугментации и колокализациям; в литературе они также называются *клеточными накрытиями*. По аналогии с [2] можно и желательно изучать общие свойства идемпотентных функторов аугментации и колокализаций; можно также заниматься проблемой сохранения ими кольцевых и модульных структур и т. д. Мы ограничиваемся здесь рассмотрением некоторых стандартных колокализаций (см. разделы 1, 2). Эти стандартные колокализации приводят к исследованию некоторой двойственности в категории абелевых групп без кручения (см. раздел 2). В разделе 3

*Первый автор поддержан федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, государственные контракты П937 от 20 августа 2009 г. и 02.740.11.0238 от 7 июля 2009 г. Второй автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 08-01-00693-а «Структурная теория колец».

вычисляются типы групп $A \otimes B$ и $\text{Hom}(B, A)$, где A и B — группы без кручения конечного ранга. Эти вопросы, в частности, инспирированы результатами раздела 2.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, модули предполагаются унитарными и правыми, если не оговорено противное.

1. Стандартные колокализации модулей

Пусть даны кольца S и R и кольцевой гомоморфизм $e: S \rightarrow R$. На всяком R -модуле A можно задать структуру S модуля по правилу $as = ae(s)$ для всех $a \in A$, $s \in S$. Этот S -модуль называется *притягивающим* (относительно e). Аналогичным образом левые R -модули являются притягивающими левыми S -модулями. В частности, R есть S - S -бимодуль, при этом e — бимодульный гомоморфизм. Фактор-модуль $R/e(S)$ обозначаем R_0 . Все R -модули считаются притягивающими S -модулями.

Приведём ряд определений из [2]. Назовём R -модуль A *Т(e)-модулем* или *Т-модулем относительно гомоморфизма e* , если отображение $A \otimes_S R \rightarrow A \otimes_R R$, $a \otimes_S r \rightarrow a \otimes_R r$, — изоморфизм. При фиксированном гомоморфизме e вместо «Т(e)-модуль» говорим также «Т-модуль». Назовём R -модуль A *Е(e)-модулем*, или *Е-модулем относительно гомоморфизма e* , или просто *Е-модулем* (при фиксированном e), если $\text{Hom}_S(R, A) = \text{Hom}_R(R, A)$.

Если кольцо R является Т(e)-модулем как правый R -модуль, то R назовём *Т(e)-кольцом*, или *Т-кольцом относительно e* , или кратко *Т-кольцом*. Если кольцо R — Е(e)-модуль как правый R -модуль, то R будем называть *Е(e)-кольцом*, или *Е-кольцом относительно e* , или просто *Е-кольцом*. Фактически мы ввели правые Т-кольца и правые Е-кольца. Аналогично определяются левые Т-кольца и левые Е-кольца. Свойство быть Т-кольцом лево-право симметрично.

Пусть A — R -модуль. Назовём *Т(e)-радикалом* или *Т-радикалом относительно гомоморфизма e* сумму $W(A)$ всех таких подмодулей C в A , что C есть Т(e)-модуль. Постановка в соответствие каждому R -модулю A его Т(e)-радикала $W(A)$ является идемпотентным радикалом в категории R -модулей. $W(A)$ есть наибольший R -подмодуль, являющийся Т(e)-модулем.

Далее рассматриваем S -модули. Пусть A и B — модули. Гомоморфизм $f: B \rightarrow A$ называется *колокализацией* модуля A , если для всякого гомоморфизма $\alpha: B \rightarrow A$ существует единственный гомоморфизм $\beta: B \rightarrow B$ со свойством $\alpha = f\beta$. Итак, f является колокализацией в точности тогда, когда отображение $f_*: \text{Hom}_S(B, B) \rightarrow \text{Hom}_S(B, A)$, индуцированное f , является изоморфизмом правых $\text{End}_S B$ -модулей (и поэтому $\text{Hom}_S(B, A)$ — циклический свободный $\text{End}_S B$ -модуль).

Колокализации $f: B \rightarrow A$ и $g: C \rightarrow A$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм $h: C \rightarrow B$ с условием $g = fh$.

Зафиксируем гомоморфизм колец $e: S \rightarrow R$. Пусть A — некоторый S -модуль. Группа $\text{Hom}_S(R, A)$ является R -модулем и притягивающим S -модулем. Возьмём отображение значения $v: \text{Hom}_S(R, A) \rightarrow A$, $v(\alpha) = \alpha(1)$, $\alpha \in \text{Hom}_S(R, A)$, являющееся S -гомоморфизмом (см. текст перед предложением 1.5 в [2]). Посмотрим, как, исходя из v , можно получить какую-то колокализацию модуля A . Пусть v обозначает также ограничение гомоморфизма v на определённый выше $T(e)$ -радикал $W(\text{Hom}_S(R, A))$ R -модуля $\text{Hom}_S(R, A)$. Для краткости обозначим $\text{Hom}_S(R, A)$ через $H(R)$.

Предложение 1.1.

1. *Отображение значения $v: W(H(R)) \rightarrow A$, $\alpha \rightarrow \alpha(1)$, является колокализацией для любого модуля A .*
2. *Отображение значения $v: H(R) \rightarrow A$ есть колокализация для любого модуля A в точности тогда, когда R — T -кольцо относительно e .*

Доказательство. 1. Индуцированный гомоморфизм

$$v_*: \text{Hom}(W(H(R)), W(H(R))) \rightarrow H(W(H(R)))$$

действует по формуле $\varphi \rightarrow v\varphi$, где $v\varphi(\alpha) = \varphi(\alpha)(1)$, $\alpha \in H(R)$. С другой стороны, учитывая предложение 1.7 (3) из [2], имеем соотношения

$$\begin{aligned} \text{Hom}_S(W(H(R)), W(H(R))) &= \text{Hom}_R(W(H(R)), \\ (H(R) \cong \text{Hom}_S(W(H(R)) \otimes_R R, A) &\cong H(W(H(R))). \end{aligned}$$

Композиция представленных гомоморфизмов действует по той же формуле. Таким образом, v_* — изоморфизм и $v: W(H(R)) \rightarrow A$ — колокализация.

2. Если R — T -кольцо, то каждый R -модуль является T -модулем [2, теорема 2.6]. Следовательно, $W(H(R)) = H(R)$, и можно использовать пункт 1.

Обратно, допустим, что для любого S -модуля A отображение значения $v: H(R) \rightarrow A$ есть колокализация. В частности, это верно для любого R -модуля A . Возьмём некоторый R -модуль A и произвольный эндоморфизм φ S -модуля $H(R)$. Определим отображение $\psi: H(R) \rightarrow H(R)$ по формуле

$$\psi(\alpha)(x) = (\varphi(\alpha)(1))x, \quad \alpha \in H(R), \quad x \in R.$$

Отображение ψ является S -эндоморфизмом, т. е.

$$\psi(\alpha s) = \psi(\alpha)s, \quad \alpha \in H(R), \quad s \in S.$$

Действительно, для любого $x \in R$ верны равенства

$$\begin{aligned} \psi(\alpha s)(x) &= (\varphi(\alpha s)(1))x = ((\varphi(\alpha)s)(1))x = (\varphi(\alpha)(s))x = \\ &= (\varphi(\alpha)(1 \cdot s))x = (\varphi(\alpha)(1)s)x = (\varphi(\alpha)(1))(sx) = \varphi(\alpha)(sx) = (\varphi(\alpha)s)x. \end{aligned}$$

Также верны равенства

$$v\psi(\alpha) = \psi(\alpha)(1) = (\varphi(\alpha)(1)) \cdot 1 = \varphi(\alpha)(1) = v\varphi(\alpha).$$

Отсюда следует, что $v\psi = v\varphi$. Так как v — колокализация, то $\psi = \varphi$. Следовательно, $\varphi(\alpha)(x) = (\varphi(\alpha)(1))x$ для всех $\varphi: H(R) \rightarrow H(R)$, $\alpha \in H(R)$, $x \in R$. Для произвольного элемента $r \in R$ получаем

$$\varphi(\alpha)(xr) = (\varphi(\alpha)(1))xr = ((\varphi(\alpha)(1))x)r = (\varphi(\alpha)(x))r.$$

Итак, $\varphi(\alpha)$ является R -гомоморфизмом для каждого φ . Взяв $\varphi = 1$, получаем, что любой S -гомоморфизм $R \rightarrow A$ является R -гомоморфизмом. Поэтому все R -модули являются E -модулями относительно f . По [2, теорема 2.6] R — T -кольцо. $\square$

Колокализации из предложения 1.1 можно назвать *стандартными*; заметим, что стандартные локализации изучаются в [2, § 9].

В оставшейся части раздела рассматриваются модули над некоторым кольцом P . Стандартные колокализации P -модулей можно строить с помощью колец эндоморфизмов.

Пусть A — P -модуль и $S = \text{End}_P A$ — его кольцо эндоморфизмов. Предположим, что имеется кольцевой гомоморфизм $e: S \rightarrow R$. Группа гомоморфизмов $\text{Hom}_S(R, A)$ есть R - P -бимодуль, а отображение значения $v: \text{Hom}_S(R, A) \rightarrow A$, $v(\alpha) = \alpha(1)$, $\alpha \in \text{Hom}_S(R, A)$, является P -гомоморфизмом. Можно сформулировать вопрос о том, когда v есть колокализация P -модуля A ; аналогичный вопрос для локализаций сформулирован в [2, § 10]. Мы получим некоторые результаты, относящиеся к этому вопросу. При этом возникает некоторая двойственность между колокализациями модуля A в $\text{mod-}P$ и локализациями кольца S в $S\text{-mod}$.

Пусть $f: B \rightarrow A$ — колокализация P -модулей. Определим несколько отображений, связанных с гомоморфизмом f . Во-первых, индуцированный гомоморфизм

$$f_*: \text{Hom}_P(B, B) \rightarrow \text{Hom}_P(B, A), \quad f_*(\beta) = f\beta, \quad \beta \in \text{Hom}_P(B, B),$$

является изоморфизмом. Обозначим через φ изоморфизм, обратный к f_* . Тогда $\varphi(\alpha) = \beta$ для $\alpha \in \text{Hom}_P(B, A)$, где $\alpha = f\beta = f\varphi(\alpha)$.

Замечание. Будет полезна формула

$$\alpha = f\varphi(\alpha). \quad (1)$$

Возьмём также индуцированный гомоморфизм

$$f^*: \text{Hom}_P(A, A) \rightarrow \text{Hom}_P(B, A), \quad f^*(\alpha) = \alpha f, \quad \alpha \in \text{Hom}_P(A, A).$$

Обозначим

$$e = \varphi f^*: \text{End}_P A \rightarrow \text{End}_P B.$$

С помощью формулы (1) получаем, что равенство $e(\alpha) = \beta$ равносильно равенству $f\beta = \alpha f$. Отображение e является кольцевым гомоморфизмом. Его

существование можно также непосредственно вывести из определения колокализации, если рассмотреть диаграмму

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & A \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Зададим умножение на группе $\text{Hom}_P(B, A)$ так, чтобы получилось кольцо, причём f оказался единичным элементом этого кольца. Полагаем $\alpha\gamma = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha)\varphi(\gamma))$ для любых $\alpha, \gamma \in \text{Hom}_P(B, A)$. Учитывая (1), получаем

$$\varphi^{-1}(\varphi(\alpha)\varphi(\gamma)) = f\varphi(\alpha)\varphi(\gamma) = \alpha\varphi(\gamma),$$

откуда вытекает следующая формула для умножения в кольце $\text{Hom}_P(B, A)$:

$$\alpha\gamma = \alpha\varphi(\gamma). \quad (2)$$

Отображения φ и f_* становятся кольцевыми изоморфизмами. Следовательно, f^* также является гомоморфизмом. Получаем коммутативную диаграмму кольцевых гомоморфизмов

$$\begin{array}{ccc} \text{End}_P A & \xrightarrow{e} & \text{End}_P B \\ \parallel & & \uparrow \varphi \downarrow f_* \\ \text{End}_P A & \xrightarrow{f^*} & \text{End}_P B \end{array} \quad (3)$$

Введём обозначения: $S = \text{End}_P A$, $R = \text{End}_P B$. Имеется кольцевой гомоморфизм $e: S \rightarrow R$. Рассмотрим R как S - S -бимодуль. Группа $\text{Hom}_P(B, A)$ является левым S -модулем. Кроме того, f_* и φ — изоморфизмы левых S -модулей. Действительно, для любых $\beta \in \text{End}_P B$ и $s \in S$ имеем равенства

$$\begin{aligned} f_*(s\beta) &= fs\beta = fe(s)\beta = f(\varphi f^*)(s)\beta, \\ sf_*(\beta) &= s(f\beta) = (sf)\beta. \end{aligned}$$

Затем применим формулу (1) и получим равенства

$$f(\varphi f^*)(s) = f\varphi(sf) = sf.$$

Поэтому $f_*(s\beta) = sf_*(\beta)$ и f_* , φ — S -модульные гомоморфизмы.

Для любого P -модуля C имеется естественный гомоморфизм

$$\begin{aligned} \eta_C: C &\rightarrow \text{Hom}_S(\text{Hom}_P(C, A), A), \\ \eta_C(c)(\alpha) &= \alpha(c), \quad c \in C, \quad \alpha \in \text{Hom}_P(C, A), \end{aligned}$$

и аналогичный гомоморфизм η_M для любого левого S -модуля M , причём индексы C и M иногда опускаются. Эти гомоморфизмы определяют известные

естественные преобразования функторов, связанные со следующими контравариантными функторами:

$$\mathrm{Hom}_P(-, A): \mathrm{mod}\text{-}P \rightarrow S\text{-mod}, \quad \mathrm{Hom}_S(-, A): S\text{-mod} \rightarrow \mathrm{mod}\text{-}P.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_A &= \{C \in \mathrm{mod}\text{-}P \mid \eta_C - \text{изоморфизм}\}, \\ \mathcal{N}_A &= \{M \in S\text{-mod} \mid \eta_M - \text{изоморфизм}\}. \end{aligned}$$

Указанные функторы определяют двойственность между категориями $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{N}_A$.

По-прежнему пусть $f: B \rightarrow A$ — колокализация, причём $B \in \mathcal{D}_A$, $S = \mathrm{End}_P A$, $R = \mathrm{End}_P B$. Следовательно, имеется изоморфизм

$$\eta: B \rightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_P(B, A), A),$$

а также изоморфизм

$$\varphi^*: \mathrm{Hom}_S(R, A) \rightarrow \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_P(B, A), A),$$

индуцированный φ . Можно образовать колокализацию

$$f\eta^{-1}\varphi^*: \mathrm{Hom}_S(R, A) \rightarrow A,$$

эквивалентную f ; обозначим её через g . Верна формула

$$g(\gamma) = \gamma(1), \quad \gamma \in \mathrm{Hom}_S(R, A).$$

Действительно, запишем равенства

$$g(\gamma) = f\eta^{-1}\varphi^*(\gamma) = f\eta^{-1}(\gamma\varphi).$$

Для любого элемента $b \in B$ имеем $\eta(b)(f) = f(b)$. Возьмём $b = \eta^{-1}(\gamma\varphi)$ и получим равенства

$$g(\gamma) = f(b) = \eta(b)(f) = \eta(\eta^{-1}(\gamma\varphi))(f) = \gamma\varphi(f) = \gamma(1).$$

По аналогии со стандартными колокализациями из предложения 1.1 назовём колокализацию g *стандартной*.

Пусть A и B — некоторые P -модули, $f: B \rightarrow A$ — гомоморфизм. Модуль C называется *f -колокальным*, если для любого гомоморфизма $\alpha: C \rightarrow A$ существует единственный гомоморфизм $\beta: C \rightarrow B$ с условием $\alpha = f\beta$. В этом случае будем также говорить, что гомоморфизм f и модуль C *коортогональны* друг другу. Если f — колокализация, то f и B коортогональны друг другу.

Для P -модуля X обозначим через X' фактор-модуль $X / \cap \mathrm{Ker}(\alpha)$, где α пробегает все гомоморфизмы $X \rightarrow A$. Модуль X' называется *коследом* модуля A в X . Для любого ненулевого элемента $y \in X'$ найдётся гомоморфизм $\beta: X' \rightarrow A$ со свойством $\beta(y) \neq 0$. Группы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_P(X, A)$ и $\mathrm{Hom}_P(X', A)$ канонически изоморфны, и их можно отождествить.

Теорема 1.2. Пусть $f: B \rightarrow A$ — колокализация P -модулей, причём $B \in \mathcal{D}_A$. Обозначим $S = \mathrm{End}_P A$.

1. Колокализация f эквивалентна стандартной колокализации

$$g: \text{Hom}_S(R, A) \rightarrow A, \quad g(\alpha) = \alpha(1), \quad \alpha \in \text{Hom}_S(R, A),$$

где R — любое левое E -кольцо относительно некоторого гомоморфизма $e: S \rightarrow R$ и $R \in \mathcal{N}_A$. Обратно, если R — левое E -кольцо относительно некоторого гомоморфизма $e: S \rightarrow R$ и $R \in \mathcal{N}_A$, то отображение значения $\text{Hom}_S(R, A) \rightarrow A$ есть колокализация модуля A .

2. Пусть $R = \text{End}_P B$ и $e: S \rightarrow R$ — гомоморфизм из начала раздела, $g: \text{Hom}_S(R, A) \rightarrow A$ — некоторая колокализация из 1. Модуль C с условием $C' \in \mathcal{D}_A$ является g -колокальным в точности тогда, когда $C' \cong \text{Hom}_S(M, A)$, где M — некоторый левый E -модуль относительно гомоморфизма e и $M \in \mathcal{N}_A$.

Доказательство. 1. Пусть $R = \text{End}_P B$ и $e: S \rightarrow R$ — гомоморфизм, определённый в начале раздела. Эквивалентность колокализаций f и g отмечена перед теоремой. Будем рассматривать колокализацию g . Функторы $\text{Hom}_P(-, A)$ и $\text{Hom}_S(-, A)$ определяют двойственность между категориями $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{N}_A$. Поэтому каждый гомоморфизм между левыми S -модулями $\text{Hom}_P(D, A)$ и $\text{Hom}_P(C, A)$ индуцируется однозначно определённым гомоморфизмом между P -модулями C и D . То же верно для любых левых S -модулей и функтора $\text{Hom}_S(-, A)$. Так как $B \in \mathcal{D}_A$ и левые S -модули R и $\text{Hom}_P(B, A)$ изоморфны, то $R \in \mathcal{N}_A$.

Пусть α — эндоморфизм левого S -модуля R с условием $\alpha(1) = 0$. Для любого $\gamma \in \text{Hom}_S(R, A)$ имеем

$$g\alpha^*(\gamma) = g(\gamma\alpha) = \gamma\alpha(1) = 0, \quad g\alpha^* = 0,$$

где α^* — эндоморфизм P -модуля $\text{Hom}_S(R, A)$, индуцированный α . Поскольку g — колокализация, то $\alpha^* = 0$, а из рассуждений предыдущего абзаца следует, что $\alpha = 0$. По левостороннему аналогу следствия 2.2 из [2] получаем, что R — левое E -кольцо относительно e . Из [2, предложение 9.4] также следует, что гомоморфизм $e: S \rightarrow R$ есть локализация в $S\text{-mod}$.

2. Пусть C — некоторый P -модуль. Прежде всего заметим, что C является g -колокальным модулем в точности тогда, когда $C' — g -колокальный модуль. Для доказательства этого важно то, что для любого ненулевого $\alpha \in \text{Hom}_S(R, A)$ существует P -гомоморфизм $h: \text{Hom}_S(R, A) \rightarrow A$ со свойством $h(\alpha) \neq 0$. Действительно, выберем элемент $r \in R$ со свойством $\alpha(r) \neq 0$. Определим отображение h , полагая $h(\beta) = g(r\beta)$, $\beta \in \text{Hom}_S(R, A)$. Тогда h — P -гомоморфизм и$

$$h(\alpha) = g(r\alpha) = r\alpha(1) = \alpha(r) \neq 0.$$

Допустим теперь, что P -модуль C с условием $C' \in \mathcal{D}_A$ является g -колокальным. Обозначим левый S -модуль $\text{Hom}_P(C', A)$ через M . Тогда $M \in \mathcal{N}_A$. С помощью левостороннего аналога предложения 3.11 из [2] покажем, что M — левый E -модуль относительно гомоморфизма $e: S \rightarrow R$. Обозначим R - P -бимодуль $\text{Hom}_S(R, A)$ через V . Так как модуль C' коортгонален g , то индуцированный гомоморфизм $g_*: \text{Hom}_P(C', V) \rightarrow \text{Hom}_P(C', A)$ является изоморфизмом

левых S -модулей. Поскольку V — левый R -модуль, то $\text{Hom}_P(C', V)$ тоже левый R -модуль. Следовательно, $\text{Hom}_P(C', V)$ удовлетворяет условию на след предложения 3.11 (2) из [2]. Поэтому условие на след выполнено для модуля M . S -модули S , R и M принадлежат подкатегории $\mathcal{N}_A$. Поэтому все P -модульные гомоморфизмы $\text{Hom}_S(M, A) \rightarrow \text{Hom}_S(R, A)$ имеют вид γ^* , где γ — однозначно определённый S -гомоморфизм $R \rightarrow M$, и т. д. (см. начало доказательства пункта 1).

Пусть теперь $\alpha: R \rightarrow M$ — S -гомоморфизм со свойством $\alpha(1) = 0$. Аналогично ситуации в доказательстве пункта 1 можно убедиться, что $\alpha = 0$. Согласно [2, предложение 3.11] M обладает такой структурой левого R -модуля, что M — притягивающий S -модуль и M — E -модуль относительно e .

Обратно, пусть C — такой модуль, что $C' \in \mathcal{D}_A$ и $C' \cong \text{Hom}_S(M, A)$, где M — некоторый левый S -модуль, $M \in \mathcal{N}_A$ и M — E -модуль относительно e . Достаточно доказать, что P -модуль $\text{Hom}_S(M, A)$ коортогонален g . Снова модули S , R и M принадлежат $\mathcal{N}_A$, откуда вытекает, что все P -гомоморфизмы нужных модулей индуцируются однозначно определёнными гомоморфизмами соответствующих S -модулей. Требуемое утверждение вытекает из того, что S -модуль M ортогонален гомоморфизму e на основании левостороннего аналога теоремы 7.3 из [2]. $\square$

Колокализации групп рассматриваются в [5, 6, 8, 10–12] и других работах.

Замечание. Пусть A и B — S -модули. Некоторая колокализация $B \rightarrow A$ существует в точности тогда, когда $\text{Hom}_S(B, A)$ — циклический свободный $\text{End}_S B$ -модуль. Аналогично (см. [2, § 9]) некоторая локализация $A \rightarrow B$ существует в точности тогда, когда $\text{Hom}_S(A, B)$ — циклический свободный левый $\text{End}_S B$ -модуль. Можно поставить более общие вопросы. Когда $\text{Hom}_S(B, A)$ или $\text{Hom}_S(A, B)$ — конечно порождённый свободный (или проективный) $\text{End}_S B$ -модуль? В [14] сформулирована программа изучения группы $\text{Hom}(A, B)$ как $\text{End } B$ -модуля или $\text{End } A$ -модуля для абелевых групп A и B (проблемы 11–13), см. также конец работы [1]. В [13] характеризуются группы A и B , для которых эти модули инъективны.

2. Колокализации абелевых групп и двойственность

Разумеется, все конструкции и результаты раздела 1 применимы к абелевым группам, рассматриваемым как $\mathbb{Z}$ -модули. В этом и следующем разделах мы рассматриваем абелевы группы без кручения.

Буква p обозначает некоторое простое число, $\mathbb{Q}$ — аддитивная группа рациональных чисел или поле рациональных чисел, $\mathbb{Q}_p$ — подкольцо в $\mathbb{Q}$, состоящее из рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на p . Через $t(A)$ обозначается тип группы A без кручения ранга 1, $\text{OT}(A)$ — внешний тип группы A

без кручения конечного ранга, $\text{OT}(A)$ определяется в начале раздела 3. Если A — некоторая группа без кручения, то $\Pi(A) = \{p \mid pA \neq A\}$, $r(A)$ — ранг группы A , $\langle a \rangle_*$ — наименьшая чистая подгруппа в A , содержащая элемент a . В выражениях $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X, Y)$, $\text{End}_{\mathbb{Z}} X$, $X \otimes_{\mathbb{Z}} Y$ индекс $\mathbb{Z}$ опускается. Тензорное произведение $A \otimes \mathbb{Q}_p$ обозначается через A_p . Обращаем внимание на то, что выражение «Е-кольцо R » означает, что R — Е-кольцо относительно естественного гомоморфизма $\mathbb{Z} \rightarrow R$.

Применим теорему 1.2 к описанию некоторых колокализаций групп без кручения ранга 1. В связи с этим описанием приведём одно обобщение известной двойственности Уорфилда.

Пусть A — некоторая группа без кручения ранга 1, т. е. A — подгруппа в $\mathbb{Q}$, и S — её кольцо эндоморфизмов. Можно отождествить кольцо S с подкольцом поля $\mathbb{Q}$, порождённым единицей и всеми дробями $1/p$, где $pA = A$. Следующее понятие имеет большое значение для нас. Группа C без кручения называется *локально свободной*, если $C \otimes \mathbb{Q}_p$ — свободный $\mathbb{Q}_p$ -модуль для любого $p \in \Pi(C)$ (см. [4, 16]).

Какие группы без кручения и S -модули без кручения составляют определённые в разделе 1 категории $\mathcal{D}_A$ и $\mathcal{N}_A$? По известной теореме Уорфилда [16] группа C без кручения конечного ранга входит в $\mathcal{D}_A$ в точности тогда, когда C локально свободна, $\Pi(C) = \Pi(A)$ и $\text{OT}(C) \leq t(A)$. S -модуль M без кручения принадлежит $\mathcal{N}_A$ в точности тогда, когда M локально свободен как группа, $\Pi(M) = \Pi(A)$ и $\text{OT}(M) \leq t(A)$ (нужно учесть, что в рассматриваемой ситуации S -гомоморфизмы совпадают с $\mathbb{Z}$ -гомоморфизмами). В разделе 1 отмечено, что функторы $\text{Hom}(-, A)$ и $\text{Hom}_S(-, A)$ задают двойственность между категорией таких групп C и категорией таких модулей M . Эта двойственность называется *двойственностью Уорфилда*. В теореме 2.9 мы приведём некоторую менее удовлетворительную характеристику групп $C \in \mathcal{D}_A$ бесконечного ранга.

Теперь можно вывести следующий результат из теоремы 1.2.

Теорема 2.1. Пусть A — группа без кручения ранга 1 и $S = \text{End } A$. Пусть $f: B \rightarrow A$ — колокализация, где B — локально свободная группа без кручения конечного ранга, $\Pi(B) = \Pi(A)$ и $\text{OT}(B) \leq t(A)$. Тогда колокализация f эквивалентна стандартной колокализации $g: \text{Hom}_S(R, A) \rightarrow A$, где R — некоторое Е-кольцо без кручения конечного ранга, $\Pi(R) = \Pi(A)$ и $\text{OT}(R) \leq t(A)$. Обратно, если R — Е-кольцо без кручения конечного ранга, R — локально свободный S -модуль, $\Pi(R) = \Pi(A)$ и $\text{OT}(R) \leq t(A)$, то отображение значения $\text{Hom}_S(R, A) \rightarrow A$ есть колокализация.

Расширим понятие локально свободной группы. По аналогии с сепарабельными группами назовём $\mathbb{Q}_p$ -модуль M *сепарабельным*, если каждое конечное множество его элементов содержится в некотором свободном прямом слагаемом модуля M . Группа C без кручения называется *локально сепарабельной*, если $C \otimes \mathbb{Q}_p$ — сепарабельный $\mathbb{Q}_p$ -модуль для любого $p \in \Pi(C)$.

Локально свободная группа C является локально сепарабельной. Обратное верно, например, для счётных групп C .

Предложение 2.2. Если A — локально сепарабельная группа без кручения, то группа $\text{Hom}(M, A)$ локально сепарабельна для любой группы M . В частности, утверждение верно для группы A ранга 1.

Доказательство. Можно считать, что M — группа без кручения. Имеется p -чисто точная последовательность

$$0 \rightarrow A \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}_p = A_p,$$

т. е. образ отображения значения $A \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}_p$ — p -чистая подгруппа. Следовательно, существует чисто точная последовательность $\mathbb{Q}_p$ -модулей

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A) \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow \text{Hom}(M, A_p) \otimes \mathbb{Q}_p \cong \text{Hom}(M, A_p).$$

Пусть B — некоторая p -базисная подгруппа группы M . Можно записать чисто точную последовательность $\mathbb{Q}_p$ -модулей

$$0 \rightarrow \text{Hom}(M, A_p) \rightarrow \text{Hom}(B, A_p).$$

$\mathbb{Q}_p$ -модуль $\text{Hom}(B, A_p)$ изоморфен прямому произведению некоторого множества копий модуля A_p . Это прямое произведение является сепарабельным $\mathbb{Q}_p$ -модулем. Следовательно, $\text{Hom}(M, A) \otimes \mathbb{Q}_p$ — сепарабельный модуль, поскольку он является чистым подмодулем сепарабельного модуля. Таким образом, $\text{Hom}(M, A)$ — локально сепарабельная группа. $\square$

Лемма 2.3. Если N — чистая подгруппа локально сепарабельной группы M без кручения, то N — локально сепарабельная группа.

Доказательство. Достаточно заметить, что $\mathbb{Q}_p$ -модуль $N \otimes \mathbb{Q}_p$ изоморфен чистому подмодулю сепарабельного модуля $M \otimes \mathbb{Q}_p$. $\square$

Для данной группы A прямое произведение некоторого множества копий группы A называется A -векторной группой. Следующая лемма известна.

Лемма 2.4. Для любых двух групп без кручения M и A группа $\text{Hom}(M, A)$ изоморфна подгруппе A -векторной группы.

Замечание. Известно, что для любых двух групп M и A равносильны следующие утверждения:

- 1) естественное отображение $M \rightarrow \text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A)$ — мономорфизм;
- 2) для всякого ненулевого элемента $m \in M$ существует гомоморфизм $\alpha: M \rightarrow A$ со свойством $\alpha(m) \neq 0$;
- 3) группа M изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы.

Если M и A — группы без кручения и $r(A) = 1$, то к 1)–3) можно добавить следующие утверждения [16]:

- 4) $\text{OT}(M) \leq t(A)$;
- 5) $r(\text{Hom}(M, A)) = r(M)$.

Далее используем краткие обозначения $H(M) = \text{Hom}(M, A)$ и $H^2(M) = \text{Hom}(\text{Hom}(M, A), A)$. Кроме того, $\eta: M \rightarrow H^2(M)$ — естественный гомоморфизм, определённый в разделе 1.

Лемма 2.5. Пусть M и A — группы без кручения. Предположим, что естественный гомоморфизм $\eta: M \rightarrow H^2(M)$ является мономорфизмом. $\text{Im } \eta$ — p -чистая подгруппа в $H^2(M)$ в точности тогда, когда для любого элемента $m \in M \setminus pM$ существует гомоморфизм $\alpha \in H(M)$ с условием $\alpha(m) \in A \setminus pA$.

Доказательство. Предположим, что $\text{Im } \eta$ — p -чистая подгруппа в $H^2(M)$. Допустим противное, т. е. существует элемент $m \in M \setminus pM$, для которого $\alpha(m) \in pA$ для всех $\alpha \in H(M)$. Тогда для каждого $\alpha \in H(M)$ существует единственный элемент a со свойством $\eta(m)(\alpha) = \alpha(m) = pa$. Определим гомоморфизм $\Phi \in H^2(M)$ правилом $\Phi(\alpha) = a$, $\alpha \in H(M)$. Ясно, что $\eta(m) = p\Phi$. Так как $\text{Im } \eta$ — p -чистая подгруппа, то $\Phi \in \text{Im } \eta$ и $\Phi = \eta(n)$, где $n \in M$. Тогда

$$\eta(m) = p\Phi = p\eta(n), \quad \eta(m - pn) = 0.$$

Поэтому $m = pn \in pM$, что невозможно. Следовательно, $\alpha(m) \notin pA$ для некоторого $\alpha \in H(M)$.

Обратно, пусть выполнено условие леммы. Предположим, что $m \in M$, $\Phi \in H^2(M)$ и $\eta(m) = p\Phi$. Для любого $\alpha \in H(M)$ имеем

$$\alpha(m) = \eta(m)(\alpha) = p\Phi(\alpha) \in pA.$$

Поэтому $m \in pM$ и $m = pn$, $n \in M$. Теперь получаем

$$p\Phi = \eta(m) = p\eta(n), \quad \Phi = \eta(n) \in \text{Im } \eta.$$

Это означает, что $\text{Im } \eta$ — p -чистая подгруппа в $H^2(M)$. □

Через $h_p^M(m)$ или $h_p(m)$ обозначается p -высота элемента m в группе M .

Теорема 2.6. Пусть M и A — группы без кручения, $r(A) = 1$. Следующие условия эквивалентны:

- 1) естественный гомоморфизм $\eta: M \rightarrow H^2(M)$ является мономорфизмом и $\text{Im } \eta$ — чистая подгруппа в $H^2(M)$;
- 2) M — локально сепарабельная группа, изоморфная некоторой подгруппе A -векторной группы, и $\Pi(M) = \Pi(A)$;
- 3) группа M изоморфна некоторой чистой подгруппе группы $W = \prod_{i \in I} A_i$, где $r(A_i) = 1$, $t(A_i) \leq t(A)$, $\Pi(A_i) = \Pi(A)$ для всех $i \in I$ и $|I| = |H(M)|$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 3). Пусть I — индексное множество мощности $|H(M)|$ и $H(M) = \{\alpha_i \mid i \in I\}$. Обозначим $A_i = M / \text{Ker } \alpha_i$, $i \in I$. Так как $A_i \cong \text{Im } \alpha_i \subseteq A$, то

$$r(A_i) = 1, \quad t(A_i) \leq t(A), \quad \Pi(A) \subseteq \Pi(A_i).$$

Также справедливы включения

$$\Pi(A_i) \subseteq \Pi(M) \subseteq \Pi(H^2(M)) \subseteq \Pi(A).$$

Следовательно, $\Pi(A_i) = \Pi(A)$. Обозначим $W = \prod_{i \in I} A_i$. Пусть $\sigma_i: M \rightarrow A_i$ — естественные эпиморфизмы, $\pi_i: W \rightarrow A$ — естественные проекции, $i \in I$. Определим отображение $\theta: M \rightarrow W$, полагая $\theta(m) = \langle \sigma_i(m) \rangle$, $m \in M$. Ясно, что

θ — мономорфизм. Нужно проверить, что $\text{Im } \theta$ — чистая подгруппа в W . Возьмём некоторый ненулевой элемент $m \in M$ и простое число $p \in \Pi(M)$. Так как подгруппа $\text{Im } \eta$ чиста в $H^2(M)$, то по лемме 2.5 существует $\alpha_i \in H(M)$ с условием $h_p^M(m) = h_p^A(\alpha_i(m))$. Поскольку $h_p^{A_i}(\sigma_i(m)) \leq h_p^A(\alpha_i(m))$, то $h_p^M(m) = h_p^{A_i}(\sigma_i(m))$. Получаем соотношения

$$h_p^{\text{Im } \theta}(\theta(m)) = h_p^M(m) = h_p^{A_i}(\sigma_i(m)) = h_p^{A_i}(\pi_i \theta(m)) \geq h_p^W(\theta(m)) \geq h_p^{\text{Im } \theta}(\theta(m)),$$

из которых вытекает равенство $h_p^{\text{Im } \theta}(\theta(m)) = h_p^W(\theta(m))$. Доказано, что каждый элемент подгруппы $\text{Im } \theta$ имеет одинаковые высоты в $\text{Im } \theta$ и в W , откуда следует, что $\text{Im } \theta$ — чистая подгруппа в W .

Докажем импликацию 3) $\Rightarrow$ 2). Поскольку $t(A_i) \leq t(A)$, то каждая группа A_i изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы. Из 3) следует, что то же верно для M . Имеем $\Pi(M) \subseteq \Pi(W) = \Pi(A)$. Обратное включение следует из того, что M изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы. Обозначим $V = \bigoplus_{i \in I} H(A_i)$. Тогда

$$\text{Hom}(V, A) \cong \prod_{i \in I} \text{Hom}(H(A_i), A) \cong \prod_{i \in I} A_i = W.$$

По предложению 2.2 W — локально сепарабельная группа. По 3) и лемме 2.3 M — локально сепарабельная группа.

Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). По замечанию перед леммой 2.5 η — мономорфизм. Подгруппа $\text{Im } \eta$ чиста в $H^2(M)$, если она p -чиста для каждого p . Воспользуемся леммой 2.5. Зафиксируем число p с условием $pM \neq M$. Нужно найти такой гомоморфизм $\alpha \in H(M)$, что $\alpha(m) \notin pA$. Выберем гомоморфизм $\beta \in H(M)$ с условием $\beta(m) \neq 0$ и обозначим через β_p гомоморфизм

$$M_p = M \otimes \mathbb{Q}_p \rightarrow A \otimes \mathbb{Q}_p = A_p,$$

индуцированный β . Так как $p \in \Pi(M)$, то $p \in \Pi(A)$. Следовательно, $A_p \cong \mathbb{Q}_p$ и $M_p / \text{Ker } \beta_p \cong \mathbb{Q}_p$. Поэтому $M_p = N_1 \oplus \text{Ker } \beta_p$, где $N_1 \cong \mathbb{Q}_p$. Так как M — сепарабельный $\mathbb{Q}_p$ -модуль и $m \notin \text{Ker } \beta_p$, то существует прямое разложение $M_p = N \oplus \text{Ker } \beta_p$, где $N \cong \mathbb{Q}_p$ и $m \in N$.

Существует гомоморфизм $\gamma_p: M_p \rightarrow A_p$, который изоморфно отображает N на $\mathbb{Q}_p$ и аннулирует $\text{Ker } \beta_p$. Пусть γ — ограничение γ_p на M . Верны равенства

$$\text{Ker } \gamma = M \cap \text{Ker } \gamma_p = M \cap \text{Ker } \beta_p = \text{Ker } \beta.$$

Поэтому $\text{Im } \gamma \cong \text{Im } \beta \subseteq A$. По [16, лемма 1] существует целое число s с условием $s \cdot \text{Im } \gamma \subseteq A$. Так как подгруппа A p -чиста в A_p , то число s можно выбрать взаимно простым с p . Обозначим $\alpha = s\gamma$. Тогда $\alpha \in H(M)$. Так как $\gamma_p(m) \notin pA_p$, то $\alpha(m) \notin pA$. Итак, $\alpha \in H(M)$ и $\alpha(m) \notin pA$, что и требовалось. $\square$

Пусть M и A — группы без кручения и $r(A) = 1$. Если M удовлетворяет второму условию теоремы 2.6, то зафиксируем группу W и мономорфизм $\theta: M \rightarrow W$, построенные при доказательстве импликации 1) $\Rightarrow$ 3) этой теоремы. Таким образом, если M — локально сепарабельная группа, изоморфная

некоторой подгруппе A -векторной группы, и $\Pi(M) = \Pi(A)$, то мы ассоциируем мономорфизм $\theta: M \rightarrow W$ с M . Мы сохраняем все обозначения из доказательства теоремы 2.6.

Лемма 2.7. *Индукированный гомоморфизм $\theta^*: H(W) \rightarrow H(M)$ является эпиморфизмом.*

Доказательство. Возьмём произвольный гомоморфизм $\alpha \in H(M)$. Нужно найти такой гомоморфизм $\beta \in H(W)$, что $\alpha = \theta^*(\beta)$. Гомоморфизм α совпадает с α_j для некоторого $j \in I$. Существует гомоморфизм $\mu_j: A_j \rightarrow A$ со свойством $\mu_j \sigma_j = \alpha_j$. Существует гомоморфизм $\beta \in H(W)$, который совпадает с μ_j на A_j и аннулирует дополнительное слагаемое к A_j . Заметим, что $\beta(w) = \beta \pi_j(w) = \mu_j \pi_j(w)$ для любого $w \in W$. Для любого $m \in M$ получаем

$$\alpha(m) = \mu_j \sigma_j(m) = \mu_j \pi_j \theta(m) = \beta \theta(m).$$

Поэтому $\alpha = \beta \theta = \theta^*(\beta)$. $\square$

По построению группа W совпадает с $\prod_{i \in I} A_i$, где $r(A_i) = 1$, $t(A_i) \leq t(A)$, $\Pi(A_i) = \Pi(A)$ для всех $i \in I$. Следовательно, $\eta_{A_i}: A_i \rightarrow H^2(A_i)$ — изоморфизм для каждого $i \in I$. Поэтому, если $|I|$ — неизмеримый кардинал, то $\eta_W: W \rightarrow H^2(W)$ также изоморфизм (см. [3, следствие 94.5]).

Следствие 2.8. *Имеется коммутативная диаграмма с точными строками*

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\theta} & W \\ & & \downarrow \eta_M & & \downarrow \eta_W \\ 0 & \longrightarrow & H^2(M) & \xrightarrow{\theta^{**}} & H^2(W) \end{array}.$$

Кроме того, если $|M|$ — неизмеримый кардинал, то η_W — изоморфизм.

Доказательство. Так как η — естественное преобразование, то диаграмма коммутативна. Так как по лемме 2.7 θ^* — эпиморфизм, то нижняя строка точна. Если $|M|$ — неизмеримый кардинал, то η_W — изоморфизм, поскольку $|I| = |H(M)| \leq 2^{|M|}$. $\square$

Трудно найти простые условия того, чтобы гомоморфизм η из теоремы 2.6 был изоморфизмом. Приведём некоторое внешнее условие, которое связано с тем, как подгруппа $\text{Im } \theta$ расположена в W .

Теорема 2.9. *Пусть M и A — группы без кручения, $r(A) = 1$, M изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы, $\Pi(M) = \Pi(A)$ и $|M|$ — неизмеримый кардинал. Гомоморфизм $\eta: M \rightarrow H^2(M)$ является изоморфизмом в точности тогда, когда фактор-группа $W/\text{Im } \theta$ изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы, где $\theta: M \rightarrow W$ — ассоциированный с M мономорфизм.*

Доказательство. Обозначим $K = W/\text{Im } \theta$, и пусть $\varkappa: W \rightarrow K$ — естественный эпиморфизм. Имеется коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\theta} & W & \xrightarrow{\varkappa} & K & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \eta_M & & \downarrow \eta_W & & \downarrow \eta_K & & \\ 0 & \longrightarrow & H^2(M) & \longrightarrow & H^2(W) & \longrightarrow & H^2(K) & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

В диаграмме η_M — мономорфизм и η_W — изоморфизм. Группа K изоморфна некоторой подгруппе A -векторной группы в точности тогда, когда η_K — мономорфизм. Из рассмотрения диаграммы вытекает, что η_K — мономорфизм в точности тогда, когда η_M — изоморфизм. $\square$

3. Типы групп $A \otimes B$ и $\text{Hom}(B, A)$

Вычислим некоторые типы групп, указанных в названии раздела. Это вычисление, с одной стороны, представляет самостоятельный интерес, а с другой — вызвано результатами раздела 2.

Если (k_i) — характеристика, т. е. последовательность из целых неотрицательных чисел и символа ∞ , то $[(k_i)]$ обозначает тип, содержащий эту характеристику. Типы можно складывать, а иногда вычитать. А именно, если $s = [(k_i)]$ и $t = [(l_i)]$ — два типа, то $s + t = [(k_i + l_i)]$. Пусть $t \leq s$. Выберем характеристики (k_i) и (l_i) так, что $l_i \leq k_i$ для всех i . Тогда $s - t = [(k_i - l_i)]$. При этом мы считаем, что ∞ плюс или минус нечто есть ∞ . Ясно также, как определяется произведение натурального числа на тип.

Определим несколько типов групп (см. подробности в [4]). Пусть A — группа без кручения ранга n , $\{x_1, \dots, x_n\}$ — некоторая её максимальная линейно независимая система элементов. Обозначим $X_i = \langle x_i \rangle_*$, $i = 1, \dots, n$. По определению *внутренний тип* $\text{IT}(A)$ группы A есть $\inf\{t(X_1), \dots, t(X_n)\}$. Обозначим $Y_i = \langle x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \rangle_*$, $i = 1, \dots, n$. *Внешний тип* $\text{OT}(A)$ группы A есть $\sup\{t(A/Y_1), \dots, t(A/Y_n)\}$. Внутренний и внешний типы не зависят от выбора максимальной линейно независимой системы элементов, т. е. являются инвариантами группы A . Если X — произвольная чистая подгруппа ранга 1 группы A , то $\text{IT}(A) \leq t(X)$; если же Y — произвольная фактор-группа ранга 1 группы A , то $t(Y) \leq \text{OT}(A)$.

Пусть $F = \bigoplus_{i=1}^n \langle x_i \rangle$ — свободная подгруппа в A ранга n . Тогда A/F — периодическая группа, $A/F = \bigoplus_p S_p$, где S_p — p -группа,

$$S_p = \mathbb{Z}(p^{k_{p1}}) \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}(p^{k_{pn}}), \quad 0 \leq k_{p1} \leq \dots \leq k_{pn} \leq \infty,$$

где $\mathbb{Z}(p^{k_{pi}})$ — квазициклическая группа, если $k_{pi} = \infty$. Определим n типов $t_1, \dots, t_n$ так, что тип t_i содержит характеристику $(k_{pi}) = (k_{2i}, k_{3i}, \dots, k_{pi}, \dots)$, $i = 1, \dots, n$. Эти типы также не зависят от конкретной максимальной линейно независимой системы элементов. Справедливы равенства $\text{IT}(A) = t_1$, $\text{OT}(A) = t_n$. Определим ещё один тип $\text{UT}(A)$ равенством $\text{UT}(A) = t_1 + \dots + t_n$. Тип $\text{UT}(A)$ называется *ультратипом* группы A . Итак, ультратип $\text{UT}(A)$ содержит характеристику $(k_{p1} + \dots + k_{pn})$. Известно, что $\text{UT}(A) = \text{t}(\wedge^n A)$, где $\wedge^n A$ — n -я внешняя степень группы A ; $\wedge^n A$ — группа без кручения ранга 1 (см. [16]).

Пусть F' — некоторая свободная подгруппа в A ранга n , $A/F' = \bigoplus_p S'_p$ и $(v_2, v_3, \dots, v_p, \dots)$ — некоторая характеристика, принадлежащая типу $\text{UT}(A)$. Тогда для почти всех p верно равенство $|S'_p| = p^{v_p}$, причём неравенство возможно только тогда, когда S'_p — конечная группа. Итак, ультратип группы A несёт информацию о мощностях p -компонент группы A/F' .

Тип Ричмена $\text{RT}(A)$ группы A есть вектор $(t_1, \dots, t_n)$. Типы $\text{IT}(A)$, $\text{OT}(A)$ и $\text{UT}(A)$ однозначно восстанавливаются по типу Ричмена. Мы вычислим внутренний тип, внешний тип и ультратип групп $A \otimes B$ и $\text{Hom}(B, A)$ для некоторых групп A и B , исходя из соответствующих типов этих групп. Начнём со следующей леммы.

Лемма 3.1. Пусть A — группа без кручения конечного ранга и X — некоторая её нетривиальная чистая подгруппа. Тогда верно равенство

$$\text{UT}(A) = \text{UT}(X) + \text{UT}(A/X).$$

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь максимальную линейно независимую систему элементов $x_1, \dots, x_k$ группы X и дополним её до максимальной линейно независимой системы $x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$ группы A . Обозначим

$$F = \bigoplus_{i=1}^n \langle x_i \rangle, \quad F_1 = \bigoplus_{i=1}^k \langle x_i \rangle, \quad F_2 = \bigoplus_{i=k+1}^n \langle x_i \rangle.$$

Тогда $F = F_1 \oplus F_2$ и группа A/F изоморфна расширению группы $(X \oplus F_2)/F$ посредством группы $A/(X \oplus F_2)$. Для этих групп имеем

$$(X \oplus F_2)/F = (X \oplus F_2)/(F_1 \oplus F_2) \cong X/F_1, \\ A/(X \oplus F_2) \cong (A/X)/((X \oplus F_2)/X) = (A/X)/\bar{F}_2,$$

где $\bar{F}_2 = \bigoplus_{i=k+1}^n \langle \bar{x}_i \rangle$, $\bar{x}_i = x_i + X$. Здесь F , F_1 , F_2 — существенные свободные подгруппы групп A , X и A/X соответственно. Следовательно, любая ненулевая p -компонента группы A/F изоморфна расширению p -компоненты группы X/F_1 посредством p -компоненты группы $(A/X)/\bar{F}_2$. Поэтому мощность p^{v_p} p -компоненты группы A/F равна произведению $p^{u_p} p^{w_p}$ мощностей p -компонент групп X/F_1 и $(A/X)/\bar{F}_2$ соответственно. Поэтому верно равенство $v_p = u_p + w_p$ для каждого p , откуда вытекает требуемое равенство для ультратипов. $\square$

Если A и B — группы без кручения конечного ранга, то хорошо известно равенство $r(A \otimes B) = r(A)r(B)$. Если A и B имеют ранг 1, то $t(A \otimes B) = t(A) + t(B)$. Следующее предложение содержит обобщения второго равенства.

Предложение 3.2. Если A и B — группы без кручения конечного ранга, то верны следующие равенства:

- 1) $IT(A \otimes B) = IT(A) + IT(B)$;
- 2) $OT(A \otimes B) = OT(A) + OT(B)$;
- 3) $UT(A \otimes B) = r(B)UT(A) + r(A)UT(B)$.

Доказательство. Обозначим через G тензорное произведение $A \otimes B$. Пусть $x_1, \dots, x_m$ и $y_1, \dots, y_n$ — максимальные линейно независимые системы элементов групп A и B соответственно. Тогда множество $\{x_i \otimes y_j\}$ — максимальная линейно независимая система элементов группы G . Далее обозначим $X_i = \langle x_i \rangle_*$, $i = 1, \dots, m$, $Y_j = \langle y_j \rangle_*$, $j = 1, \dots, n$. В доказательствах равенств 1) и 2) будем считать, что индексы i и j принимают все значения $i = 1, \dots, m$ и $j = 1, \dots, n$ соответственно.

Докажем равенство 1). Для каждой пары индексов i, j существует чистое вложение $\varkappa_{ij}: X_i \otimes Y_j \rightarrow A \otimes B$, образ которого равен $\langle x_i \otimes y_j \rangle_*$. Поэтому получаем

$$\begin{aligned} IT(G) &= \inf\{t(X_i \otimes Y_j)\} = \inf\{t(X_i) + t(Y_j)\} = \\ &= \inf\{t(X_i)\} + \inf\{t(Y_j)\} = IT(A) + IT(B). \end{aligned}$$

Докажем равенство 2). Обозначим

$$\begin{aligned} X_i &= \langle x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m \rangle_*, \quad Y_j = \langle y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n \rangle_*, \\ Z_{ij} &= \langle x_k \otimes y_l \mid k \neq i, l \neq j \rangle_*. \end{aligned}$$

Покажем, что существует канонический изоморфизм $(A \otimes B)/Z_{ij} \cong A/X_i \otimes B/Y_j$. Возьмём естественный эпиморфизм $\tau: A \otimes B \rightarrow A/X_i \otimes B/Y_j$. Ясно, что $Z_{ij} \subseteq \text{Ker } \tau$. Поскольку $r(\text{Ker } \tau) = mn - 1 = r(Z_{ij})$ и Z_{ij} — чистая подгруппа в $A \otimes B$, то $Z_{ij} = \text{Ker } \tau$. Следовательно, указанный изоморфизм существует. Теперь согласно определению внешнего типа имеем равенства

$$\begin{aligned} OT(G) &= \sup\{t((A \otimes B)/Z_{ij})\} = \sup\{t(A/X_i \otimes B/Y_j)\} = \\ &= \sup\{t(A/X_i) + t(B/Y_j)\} = \sup\{t(A/X_i)\} + \sup\{t(B/Y_j)\} = \\ &= OT(A) + OT(B). \end{aligned}$$

Докажем равенство 3). Проведём доказательство с помощью индукции по произведению рангов групп A и B ; это произведение равно рангу группы G . Если $r(A) = 1 = r(B)$, то

$$r(G) = 1, \quad UT(G) = t(G) = t(A) + t(B) = UT(A) + UT(B).$$

Предположим, что утверждение верно для всех групп A и B с условием $r(A)r(B) < k$, где $k > 1$. Пусть группы A и B удовлетворяют условию

$r(A)r(B) = k$. В предположении $r(A) \geq 2$ возьмём некоторую чистую подгруппу X в A ранга 1. Из леммы 3.1 и предположения индукции вытекают равенства

$$\begin{aligned} \text{UT}(A \otimes B) &= \text{UT}(X \otimes B) + \text{UT}(A/X \otimes B) = \\ &= r(B) \text{UT}(X) + \text{UT}(B) + r(B) \text{UT}(A/X) + (r(A) - 1) \text{UT}(B) = \\ &= r(B)(\text{UT}(X) + \text{UT}(A/X)) + r(A) \text{UT}(B) = r(B) \text{UT}(A) + r(A) \text{UT}(B). \quad \square \end{aligned}$$

Если A и B — группы без кручения конечного ранга, то верно неравенство

$$r(\text{Hom}(B, A)) \leq r(B)r(A).$$

Мы обобщим известное равенство

$$t(\text{Hom}(B, A)) = t(A) - t(B),$$

где A и B — группы без кручения ранга 1 и $t(B) \leq t(A)$.

Предложение 3.3. Пусть B и A — группы без кручения, $r(B) < \infty$, $r(A) = 1$ и $\text{OT}(B) \leq t(A)$. Обозначим $M = \text{Hom}(B, A)$. Тогда верны следующие равенства:

- 1) $\text{IT}(M) = t(A) - \text{OT}(B)$;
- 2) $\text{OT}(M) = t(A) - \text{IT}(B)$;
- 3) $\text{UT}(M) = r(B)t(A) - \text{UT}(B)$.

Доказательство. Докажем первое равенство. Пусть $y_1, \dots, y_n$ — максимальная линейно независимая система элементов группы B ,

$$Y_j = \langle y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_n \rangle_*, \quad j = 1, \dots, n.$$

Имеем чистые вложения $\text{Hom}(B/Y_j, A) \rightarrow \text{Hom}(B, A)$ для всех j . отождествим каждую группу $\text{Hom}(B/Y_j, A)$ с её образом при этом вложении. Так как $t(B/Y_j) \leq \text{OT}(B) \leq t(A)$, то $\text{Hom}(B/Y_j, A)$ — чистая подгруппа ранга 1 в $\text{Hom}(B, A)$ и её тип равен $t(A) - t(B/Y_j)$. В каждой группе $\text{Hom}(B/Y_j, A)$ зафиксируем ненулевой гомоморфизм φ_j . Покажем, что $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — линейно независимая система. Действительно, пусть $s_1\varphi_1 + \dots + s_n\varphi_n = 0$, где $s_1, \dots, s_n$ — какие-то целые числа. Так как $y_i \in Y_j$ при $i \neq j$, то $\varphi_j(y_i) = 0$. Поэтому $s_j\varphi_j(y_j) = 0$, откуда следует, что $s_j = 0$ для всех $j = 1, \dots, n$. Система $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ максимальна, поскольку $r(M) \leq r(B)r(A) = r(B)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{IT}(M) &= \inf\{t(\text{Hom}(B/Y_j, A))\} = \inf\{t(A) - t(B/Y_j)\} = \\ &= t(A) - \sup\{t(B/Y_j)\} = t(A) - \text{OT}(B). \end{aligned}$$

Докажем равенство 2). Обозначим $X_j = \langle y_j \rangle_*$, $j = 1, \dots, n$, где $y_1, \dots, y_n$ — элементы из доказательства первого равенства. Имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(B/X_j, A) \rightarrow \text{Hom}(B, A) \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}(X_j, A) \xrightarrow{\beta} \text{Ext}(B/X_j, A),$$

в которой группа расширений не имеет кручения, так как $\text{OT}(B/X_j) \leq \text{OT}(B) \leq t(A)$ [7]. Имеем

$$r(\text{Hom}(B/X_j, A)) = r(B/X_j) = r(B) - 1, \quad r(\text{Hom}(B, A)) = r(B)$$

(см. замечание после леммы 2.4). Следовательно, $\text{Im } \alpha \neq 0$. Так как $t(X_j) \leq \text{OT}(B) \leq t(A)$, то можно проверить, что $\text{Hom}(X_j, A)$ — группа ранга 1. Поэтому $\text{Im } \beta$ — периодическая группа. Следовательно, $\beta = 0$. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — гомоморфизмы, выбранные при доказательстве первого равенства. Напомним, что они образуют максимальную линейно независимую систему элементов группы $\text{Hom}(B, A)$. Так как $\varphi_j \in \text{Hom}(B/Y_j, A)$, то $\langle \varphi_i \mid i \neq j \rangle_* = \text{Hom}(B/X_j, A)$. Теперь можно записать

$$\begin{aligned} \text{OT}(M) &= \sup\{t(\text{Hom}(X_j, A))\} = \sup\{t(A) - t(X_j)\} = \\ &= t(A) - \inf\{t(X_j)\} = t(A) - \text{IT}(B). \end{aligned}$$

Докажем равенство 3). Если $r(B) = 1$, то $\text{UT}(B) = t(B)$ и равенство $\text{UT}(M) = r(B)t(A) - \text{UT}(B)$ известно. Предположим, что это равенство верно для всех групп B ранга меньше n с условием $n > 1$, и пусть B — группа ранга n . Выберем в B некоторую чистую подгруппу X ранга 1. Как и при доказательстве равенства 2), имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}(B/X, A) \rightarrow \text{Hom}(B, A) \rightarrow \text{Hom}(X, A) \rightarrow 0.$$

По лемме 3.1 и предположению индукции верны равенства

$$\begin{aligned} \text{UT}(\text{Hom}(B, A)) &= \text{UT}(\text{Hom}(B/X, A)) + \text{UT}(\text{Hom}(X, A)) = \\ &= (n-1)t(A) - \text{UT}(B/X) + t(A) - \text{UT}(X) = nt(A) - \text{UT}(B). \quad \square \end{aligned}$$

Пусть B и A — некоторые группы. Как и в разделе 1, обозначим через B' кослед B в A . Напомним, что группы $\text{Hom}(B, A)$ и $\text{Hom}(B', A)$ канонически изоморфны. Если B и A — группы без кручения, $r(B) < \infty$ и $r(A) = 1$, то $\text{OT}(B') \leq t(A)$ по замечанию после леммы 2.4. Теперь из предложения 3.3 получаем следующий результат.

Следствие 3.4. Пусть B и A — группы без кручения, $r(B) < \infty$, $r(A) = 1$ и $M = \text{Hom}(B, A)$. Тогда верны следующие равенства:

- 1) $\text{IT}(M) = t(A) - \text{OT}(B')$;
- 2) $\text{OT}(M) = t(A) - \text{IT}(B')$;
- 3) $\text{UT}(M) = r(B')t(A) - \text{UT}(B')$.

Следствие 3.5. Пусть B и A — группы без кручения конечного ранга, A — локально свободная группа, $\text{OT}(B) \leq \text{IT}(A)$ и $M = \text{Hom}(B, A)$. Тогда M — локально свободная группа ранга $r(B)r(A)$ и верны следующие равенства:

- 1) $\text{IT}(M) = \text{IT}(A) - \text{OT}(B)$;
- 2) $\text{OT}(M) = \text{OT}(A) - \text{IT}(B)$;
- 3) $\text{UT}(M) = r(B)\text{UT}(A) - r(A)\text{UT}(B)$.

Доказательство. По предложению 2.2 группа M локальна свободна. Пусть X — группа без кручения ранга 1 и её тип равен $\text{OT}(A)$. Обозначим $C = \text{Hom}(A, X)$. Так как группа A локально свободна, причём $\text{OT}(A) = \text{t}(X)$ и $\Pi(A) = \Pi(X)$, то $A \cong \text{Hom}(C, X)$ (см. [16] или теорему 2.6). Имеются изоморфизмы

$$\text{Hom}(B, A) \cong \text{Hom}(B, \text{Hom}(C, X)) \cong \text{Hom}(B \otimes C, X).$$

Из неравенства $\text{OT}(B) \leq \text{IT}(A)$ вытекает равенство $\text{r}(M) = \text{r}(B) \text{r}(A)$ (см. [16], это равенство также вытекает из замечания после леммы 2.4 и неравенства $\text{OT}(B \otimes C) \leq \text{t}(X)$).

Докажем равенство 1). По предложению 3.3

$$\text{IT}(C) = \text{t}(X) - \text{OT}(A) = \text{OT}(A) - \text{OT}(A), \quad \text{OT}(C) = \text{OT}(A) - \text{IT}(A).$$

Также верны равенства

$$\text{OT}(B \otimes C) = \text{OT}(B) + \text{OT}(C) = \text{OT}(B) + \text{OT}(A) - \text{IT}(A) \leq \text{OT}(A) = \text{t}(X).$$

Теперь по предложению 3.3 получаем

$$\text{IT}(M) = \text{t}(X) - \text{OT}(B \otimes C) = \text{OT}(A) - \text{OT}(A) + \text{IT}(A) - \text{OT}(B).$$

Кроме того, так как группа A локально свободна, то характеристики типов $\text{OT}(A)$ и $\text{IT}(A)$ содержат символ ∞ на одних и тех же местах. Поэтому можно удалить разность $\text{OT}(A) - \text{OT}(A)$ из последнего равенства. В итоге получаем $\text{IT}(M) = \text{IT}(A) - \text{OT}(B)$.

Докажем равенство 2). Можно использовать предложение 3.3, чтобы получить равенства

$$\begin{aligned} \text{OT}(M) &= \text{t}(X) - \text{IT}(B \otimes C) = \\ &= \text{OT}(A) - (\text{IT}(B) + \text{OT}(A) - \text{OT}(A)) = \text{OT}(A) - \text{IT}(B). \end{aligned}$$

Докажем равенство 3). Учитывая предложения 3.2 и 3.3, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \text{UT}(C) &= \text{r}(A) \text{t}(X) - \text{UT}(A) = \text{r}(A) \text{OT}(A) - \text{UT}(A), \\ \text{UT}(B \otimes C) &= \text{r}(C) \text{UT}(B) + \text{r}(B) \text{UT}(C) = \\ &= \text{r}(A) \text{UT}(B) + \text{r}(B) (\text{r}(A) \text{OT}(A) - \text{UT}(A)), \\ \text{UT}(M) &= \text{r}(B \otimes C) \text{t}(X) - \text{UT}(B \otimes C) = \\ &= \text{r}(B) \text{r}(A) \text{OT}(A) - \text{r}(A) \text{UT}(B) - \text{r}(B) \text{r}(A) \text{OT}(A) + \text{r}(B) \text{UT}(A) = \\ &= \text{r}(B) \text{UT}(A) - \text{r}(A) \text{UT}(B). \end{aligned} \quad \square$$

Литература

- [1] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Модули над кольцами формальных матриц // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 8. — С. 145—211.

- [2] Крылов П. А., Туганбаев А. А. Идемпотентные функторы и локализации в категориях модулей и абелевых групп // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2010. — Т. 16, вып. 7. — С. 75—159.
- [3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 2. — М.: Мир, 1977.
- [4] Arnold D. M. Finite rank torsion-free Abelian groups and rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).
- [5] Buckner J., Dugas M. Co-local subgroups of Abelian groups // *Abelian Groups, Rings, Modules, and Homological Algebra. Selected Papers of a Conference on the Occasion of Edgar Earle Enochs' 72nd Birthday, Auburn, AL, USA, September 9—11, 2004* / P. Goeters, ed. — Boca Raton: Chapman & Hall, 2006. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 249). — P. 29—37.
- [6] Chachólski W., Damian E., Farjoun E. D., Segev Y. The A -core and A -cover of a group // *J. Algebra*. — 2009. — Vol. 321. — P. 631—666.
- [7] Chekhlov A. R., Krylov P. A. On L. Fuchs's problems 17 and 43 // *J. Math. Sci.* — 2007. — Vol. 143, no. 5. — P. 3517—3602.
- [8] Dugas M. Co-local subgroups of Abelian groups. II // *J. Pure Appl. Algebra*. — 2007. — Vol. 208. — P. 117—126.
- [9] Farjoun E. D. Cellular Spaces, Null Spaces and Homotopy Localization. — New York: Springer, 1973. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1622).
- [10] Farjoun E. D., Göbel R., Segev Y. Cellular covers of groups // *J. Pure Appl. Algebra*. — 2007. — Vol. 208. — P. 61—76.
- [11] Farjoun E. D., Göbel R., Segev Y., Shelah S. On kernels of cellular covers // *Groups Geom. Dyn.* — 2007. — Vol. 1, no. 4. — P. 409—419.
- [12] Fuchs L., Göbel R. Cellular covers of Abelian groups // *Results Math.* — 2009. — Vol. 53. — P. 59—76.
- [13] Grinshpon S. Ya., Krylov P. A. Fully invariant subgroups, full transitivity, and homomorphism groups of Abelian groups // *J. Math. Sci.* — 2005. — Vol. 128, no. 3. — P. 2894—2997.
- [14] Krylov P. A., Mikhalev A. V., Tuganbaev A. A. Endomorphism Rings of Abelian Groups. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2003.
- [15] Krylov P. A., Tuganbaev A. A. Modules over Discrete Valuation Domains. — Berlin: Walter de Gruyter, 2008. — (De Gruyter Exp. Math.; Vol. 43).
- [16] Warfield R. B., Jr. Homomorphisms and duality for torsion-free groups // *Math. Z.* — 1968. — Vol. 107. — P. 189—200.