Типовая эквивалентность линейных групп и других алгебраических систем

А. Д. МАКСИМОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: a-max@mail.ru

УДК 510.67+512.54

Ключевые слова: эквивалентность типов, эквивалентность в разных логиках, теорема Мальцева, линейные группы.

Аннотация

В работе рассматривается понятие типовой эквивалентности (эквивалентности по типам), введённое И. Б. Плоткиным, приводится несколько примеров элементарно эквивалентных объектов, не эквивалентных по типам, и два способа построения примеров эквивалентных по типам неизоморфных алгебр. Также мы переносим теорему А. И. Мальцева об элементарной эквивалентности линейных групп над полями на случай эквивалентности по типам.

Abstract

A. D. Maksimov, Typical equivalence of linear groups and other algebraic systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 7, pp. 181—196.

The paper is devoted to the notion of typical equivalence introduced by B. I. Plotkin. We give some examples of elementarily equivalent objects that are not typically equivalent and show two ways to construct nonisomorphic typically equivalent algebras. We also prove A. I. Maltsev's theorem on elementary equivalence of linear groups over fields for the case of typical equivalence.

1. Введение

Путь от логической геометрии к теории моделей проходит через алгебраическую логику, в которой рассматривается алгебра формул $\varphi = \varphi(X)$, где X — конечное множество переменных. Строгое определение алгебры $\varphi = \varphi(X)$ дано в работе [4]. Фактически, $\varphi(X)$ — это *множество формул первого порядка над* X, особым образом преобразованное в алгебру формул.

Пусть $W = W(X)$ — свободная алгебра многообразия Θ над X. Тождество $w \equiv w'$, являющееся элементом алгебры $\varphi(X)$, соответствует уравнению $w = w'$ в $W(X)$. Теперь заметим, что $\varphi(X)$ — булева алгебра с тождествами вида $w \equiv w'$ и, кроме того, с действующими кванторами $\exists x$ для всех $x \in X$. Мы называем такие алгебры *расширенными булевыми алгебрами* (см. [4]).

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 7, с. 181—196.

Использование алгебраической логики делает многие понятия теории моделей более прозрачными и удобными для применения геометрических и алгебраических методов.

Данная работа посвящена одному из основных понятий алгебраической логики — типовой эквивалентности (эквивалентности по типам).

В разделе 2 сообщаются основные определения и простейшие факты, связанные с типовой эквивалентностью. В разделе 3 на конкретных примерах показано различие между типовой и элементарной эквивалентностями. В разделе 4 приводятся несколько способов построения примеров эквивалентных по типам неизоморфных алгебр с помощью прямых сумм и произведений. В разделе 5 мы переносим теорему А. И. Мальцева (см. [3]) об элементарной эквивалентности линейных групп над полями в её оригинальной формулировке на случай эквивалентности по типам.

2. Обозначения и определения

Пусть H — алгебраическая система некоторой сигнатуры Ω. *Полной теорией* алгебраической системы H называется множество $\mathrm{Th}(H)$ замкнутых формул первого порядка сигнатуры Ω, истинных на H. Алгебраические системы H_1 и H_2 называются *элементарно эквивалентными*, если $\mathrm{Th}(H_1)$ и $\mathrm{Th}(H_2)$ совпадают.

Теперь введём понятие типовой эквивалентности (см. [4], где она называется логической эквивалентностью). Здесь и далее мы будем считать, что сигнатура Ω не содержит предикатных символов, кроме равенства, которое понимается в традиционном смысле. Зафиксируем произвольное многообразие Θ универсальных алгебр сигнатуры Ω. Пусть H — алгебра из Θ. Для произвольного конечного множества X мы можем определить конечно порождённую свободную алгебру $W(X) \in \Theta$. Для того чтобы определить алгебру $\Phi(X)$, нам потребуются дополнительные понятия.

2.1. Расширенные булевы алгебры

Заметим, что в алгебраической логике кванторы рассматриваются как операции на булевых алгебрах. Пусть B — булева алгебра. Квантор существования в ней — это отображение $\exists \colon B \to B$, обладающее следующими свойствами:

1) $\exists\, 0 = 0$;
2) $\exists\, a > a$;
3) $\exists\,(a \wedge \exists\, b) = \exists\, a \wedge \exists\, b$.

Квантор всеобщности $\forall \colon B \to B$ определяется дуально:

1) $\forall\, 1 = 1$;
2) $\forall\, a < a$;
3) $\forall\,(a \vee \forall\, b) = \forall\, a \vee \forall\, b$.

Здесь 0 и 1 — это ноль и единица алгебры B, a, b — произвольные элементы B. Кванторы $\exists$ и $\forall$ соотносятся друг с другом обычным образом:

$$\overline{\exists\, a} = \forall\, \overline{a}, \quad \overline{\forall\, a} = \exists\, \overline{a}.$$

Пусть Θ и $W = W(X) \in \Theta$ фиксированы и B — булева алгебра. Назовём B *расширенной булевой алгеброй в* Θ *над* $W(X)$, если

1) определены кванторы $\exists\, x$ для всех $x \in X$ в B со свойством $\exists\, x \,\exists\, y = \exists\, y \,\exists\, x$ для всех $x, y \in X$;
2) для любой формулы $w \equiv w'$, где $w, w' \in W$, есть соответствующая константа в B, обозначаемая также через $w \equiv w'$. При этом

   а) $w \equiv w$ — это единица алгебры B;
   б) для любой n-арной операции $\omega \in \Omega$ имеем

$$w_1 \equiv w_1 \,\wedge\, \ldots \,\wedge\, w_n \equiv w'_n < w_1 \ldots w_n\omega \equiv w'_1 \ldots w'_n\omega.$$

Мы можем рассматривать многообразие таких алгебр для данных Θ и $W = W(X)$.

Пример 1. Рассмотрим аффинное пространство $\mathrm{Hom}(W(X), H)$, и пусть

$$\mathrm{Bool}(W(X), H) = \mathrm{Sub}\big(\mathrm{Hom}(W(X), H)\big) —$$

это булева алгебра всех подмножеств A в $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Определим кванторы $\exists\, x$, $x \in X$, на алгебре $\mathrm{Bool}(W(X), H)$. Положим $\mu \in xA$ тогда и только тогда, когда существует $\nu \in A$, такое что $\mu(y) = \nu(y)$ для каждого $y \in X$, $y \neq x$.

Каждое равенство $w \equiv w'$, $w, w' \in W$, интерпретируется на этой алгебре как

$$\mathrm{Val}_H^X(w \equiv w') = \{\mu\colon W \to H \mid (w, w') \in \mathrm{Ker}(\mu)\}.$$

В результате мы получаем расширенную $\mathrm{Bool}(W(X), H)$ в Θ над $W(X)$.

Рассмотрим категорию $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ расширенных булевых алгебр для данного $H \in \Theta$. Её морфизмы имеют вид

$$s_*\colon \mathrm{Bool}(W(X), H) \to \mathrm{Bool}(W(Y), H),$$

где $s\colon W(X) \to W(Y)$ — морфизмы категории Θ^0 (категории свободных алгебр над Θ). Определим переход от s к s_*. Имеем

$$\tilde{s}\colon \mathrm{Hom}(W(Y), H) \to \mathrm{Hom}(W(X), H),$$

определяемый правилом $\tilde{s}(\nu) = \nu\tilde{s}$ для $\nu \in \mathrm{Hom}(W(Y), H)$. Пусть A — подмножество $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Тогда $s_*A = \tilde{s}^{-1}A$. Отображение s_* — гомоморфизм булевых алгебр, но оно не является в общем случае отображением расширенных булевых алгебр.

Мы имеем контравариантный функтор $\Theta^0 \to \mathrm{Hal}_\Theta(H)$.

2.2. Категории Халмоша

Категория Υ называется *категорией Халмоша*, если

1) каждый объект Υ имеет вид $\Upsilon(X)$ и является расширенной булевой алгеброй в Θ над $W(X)$;
2) морфизмы имеют вид $s_*\colon \Upsilon(X) \to \Upsilon(Y)$, где $s\colon W(X) \to W(Y)$ — морфизмы в Θ^0, s_* — гомоморфизмы булевых алгебр и переход $s \to s_*$ происходит в соответствии с контравариантным функтором $\Theta^0 \to \Upsilon$;
3) существуют правила, контролирующие взаимодействие морфизмов с кванторами и равенствами. Соотношения с кванторами имеют следующий вид:

   а) $s_{1*}\,\exists xa = s_{2*}\,\exists xa$, $a \in \Upsilon(X)$, если $s_1 y = s_2 y$ для всех $y \in X$, $y \neq X$;
   б) $s_*\,\exists xa = \exists(sx)(s_* a)$, если $sx = y \in Y$ и $y = sx$ не представляется в виде sx', $x' \in X$, $x' \neq x$;

4) следующие условия определяют соотношения с равенствами:

   а) $s_*(w \equiv w') = (sw \equiv sw')$ для $s\colon W(X) \to W(Y)$, $w, w' \in W(X)$;
   б) $s^x_w a \wedge (w \equiv w') < s^x_{w'} a$ для любого $a \in \Upsilon(X)$, $x \in X$, где $w \in W(X)$ и $s^x_w\colon W(X) \to W(X)$ определяется правилом $s^x_w(x) = w$, $s^x_w(y) = y$, $y \in X$, $y \neq x$.

Категория $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$ — пример категории Халмоша. Другой важный пример — категория Hal^0_Θ алгебр формул $\mathrm{Hal}^0_\Theta(X) = \Phi(X)$, которая играет в логической геометрии такую же роль, как категория Θ^0 в алгебраической геометрии.

2.3. Многосортные алгебры

Мы будем использовать многосортные алгебры, чтобы определить алгебры Халмоша. Односортные алгебры — это алгебры с одним носителем. Многосортные алгебры, имеющие много носителей, обозначаются $G = (G_i,\ i \in \Gamma)$, где Γ — множество сортов, которое может быть и бесконечным. Категории часто связаны с многосортными алгебрами.

Каждая операция w в G обладает типом $\eta = \eta(\omega)$. В односортном случае это арность операции. В многосортном случае мы имеем $\eta = (i_1, \ldots, i_n; j)$ и операцию-отображение $\omega\colon G_{i_1} \times \ldots \times G_{i_n} \to G_j$. Морфизмы многосортных алгебр имеют вид $\mu = (\mu_i,\ i \in \Gamma)\colon G \to G'$, где $\mu_i\colon G_i \to G'_i$ — отображения и μ естественным образом сохраняет операции ω.

Подалгебры, фактор-алгебры и прямые произведения многосортных алгебр определяются обычным способом. Следовательно, можно определить многообразия многосортных алгебр с фиксированным носителем Γ и сигнатурой Ω. В любом таком многообразии существуют свободные алгебры, определяемые многосортными множествами.

2.4. Алгебры Халмоша

Мы рассматриваем многосортные алгебры Халмоша, связанные с категориями Халмоша. Сначала опишем сигнатуру L_X. Возьмём

$$L_X = \{\vee,\, \wedge,\, ^-,\, \exists x,\, x \in X,\, M_X\}$$

для каждого X. Здесь M_X — множество всех равенств над алгеброй $W = W(X)$. Мы добавляем все $s\colon W(X) \to W(Y)$ к L_X, рассматривая их как символы унарных операций. Обозначим новую сигнатуру L_Θ.

Рассмотрим алгебры $\Upsilon = (\Upsilon_X,\ X \in \Gamma)$. Все Υ_X — алгебры в сигнатуре L_X, и унарная операция (отображение) $s_*\colon \Upsilon_X \to \Upsilon_Y$ соответствует каждой $s\colon W(X) \to W(Y)$. Мы называем алгебру Υ в сигнатуре L_Θ алгеброй Халмоша, если

1) все Υ_X — расширенные булевы алгебры в сигнатуре L_X;
2) все отображения $s_*\colon \Upsilon_X \to \Upsilon_Y$ сохраняют операции булевой алгебры и являются гомоморфизмами булевых алгебр;
3) правила, определяющие соотношения между операциями s_* и кванторами и равенствами такие же, как и в определении категорий Халмоша.

Очевидно, что любая категория Халмоша Υ может рассматриваться как алгебра Халмоша и наоборот. В частности, это относится к $\mathrm{Hal}_\Theta(H)$.

2.5. Категории и алгебры формул

Пусть $M = (M_X,\ X \in \Gamma^0)$ — многосортное множество с компонентами M_X.

Возьмём абсолютно свободную алгебру $\Upsilon^0 = (\Upsilon^0_X,\ X \in \Gamma^0)$ над M в сигнатуре L_Θ. Элементы каждой Υ^0_X — логические формулы первого порядка, индуктивно образующиеся из равенств при помощи сигнатуры L_Θ. Поэтому Υ^0 — многосортная алгебра чистых формул первого порядка над равенствами.

Пусть Hal_Θ — многообразие Γ^0-сортных алгебр Халмоша в сигнатуре L_Θ, а Hal^0_Θ — свободная алгебра этого многообразия над многосортным множеством равенств M. Естественным образом определяется гомоморфизм $\pi = (\pi_X,\ X \in \Gamma^0)\colon \Upsilon^0 \to \mathrm{Hal}^0_\Theta$. Если $u \in \Upsilon^0_X$, то образ $u^{\pi_X} = \bar{u}$ в $\mathrm{Hal}^0_\Theta(X)$ рассматривается как сжатая формула.

Обозначая $\mathrm{Hal}^0_\Theta(X) = \Phi(X)$, мы получаем желаемую алгебру сжатых формул. Это расширенная булева алгебра.

Вспомним, что алгебра Халмоша формул Hal^0_Θ в то же время и категория Халмоша. Мы имеем контравариантный функтор $\Theta^0 \to \mathrm{Hal}^0_\Theta$.

Поскольку далее нам потребуется лишь семантика формул, мы будем отождествлять $\Phi(X)$ с множеством формул первого порядка сигнатуры Ω, свободные переменные в которых берутся из множества X.

2.6. Типовая эквивалентность и основные понятия, связанные с ней

Для каждой формулы $u \in \Phi(X)$ определено её значение $\mathrm{Val}_H^X(u) = A$, являющееся подмножеством $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. $\mathrm{Val}_H^X(u)$ содержит гомоморфизмы, соответствующие подстановке в качестве $x \in X$ элементов H, при которых формула истинна. В частности,

$$\mathrm{Val}_H^X(w \equiv w') = \{\mu\colon W \to H \mid (w, w') \in \mathrm{Ker}(\mu)\}.$$

Определим *логическое ядро* $\mathrm{LKer}(\mu)$ гомоморфизма $\mu\colon W \to H$. Формула $u \in \Phi(X)$ принадлежит $\mathrm{LKer}(\mu)$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \mathrm{Val}_H(u)$. Обычное ядро $\mathrm{Ker}(\mu)$ — это множество всех таких (w, w'), что $w \equiv w' \in \mathrm{LKer}(\mu)$. Мы говорим, что μ — *решение* «уравнения» u, если $u \in \mathrm{LKer}(\mu)$

Логическое ядро $\mathrm{LKer}(\mu)$ — ультрафильтр в алгебре Φ. Пусть M_X — множество всех тождеств $w \equiv w'$ над алгеброй $W = W(X)$. Тогда

$$\mathrm{Ker}(\mu) = \mathrm{LKer}(\mu) \cap M_X.$$

Теперь мы можем определить *соответствие между подмножествами* $\Phi(X)$ и $\mathrm{Hom}(W(X), H)$. Рассмотрим произвольное множество $T \subset \Phi(X)$. Пусть

$$T_H^L = A = \{\mu\colon W \to H \mid T \subset \mathrm{LKer}(\mu)\} = \bigcap_{u \in T} \mathrm{Val}_H(u).$$

Здесь A — подмножество $\mathrm{Hom}(W, H)$, состоящее из всех гомоморфизмов μ, которые удовлетворяют всем «уравнениям» $u \in T$. Обратно,

$$A_H^L = T = \bigcap_{\mu \in A} \mathrm{LKer}(\mu) = \{u \in \Phi(X) \mid A \subset \mathrm{Val}_H^X(u)\}.$$

Мы определили *соответствие Галуа* в случае логической геометрии. *Замыкания Галуа* в этом случае — A_H^{LL} и T_H^{LL} соответственно. $T = A_H^L$ всегда является H-замкнутым булевым фильтром в Φ.

Для заданного множества формул $T \subset \Phi(X)$ и $v \in \Phi(X)$ рассмотрим формулу $\bigwedge\limits_{u \in T} u \to v$, или, проще говоря, $T \to v$, где T не обязательно конечно.

Предложение 1 [4]. *Включение $v \in T_H^{LL}$ имеет место тогда и только тогда, когда формула $T \to v$ верна в H.*

Определение 1. Алгебры H_1 и H_2 называются *логически эквивалентными* (или, кратко, *LG-эквивалентными*), если для любого конечного X и $\Phi = \Phi(X)$ мы имеем $T_{H_1}^{LL} = T_{H_2}^{LL}$.

Импликативной теорией $\mathrm{LG\text{-}Th}(H)$ *алгебры* H будем называть множество всех формул вида $T \to v$, которые верны в H. Здесь T — некоторое подмножество Φ (не обязательно конечное), а v — формула из Φ.

Заметим, что формулу импликативной теории можно, не меняя её значения, переписать в виде $\bigvee\limits_{u \in T'} u$, где $T' = \{\neg u \mid u \in T\} \cup \{v\}$. Для удобства будем рассматривать формулы в таком виде.

В работе [5] введено понятие *изотипности* алгебр и доказана эквивалентность понятий изотипности и LG-эквивалентности.

Предложение 2 [4]. *Алгебры H_1 и H_2 логически эквивалентны тогда и только тогда, когда их импликативные теории совпадают, т. е.*

$$\mathrm{LG\text{-}Th}(H_1) = \mathrm{LG\text{-}Th}(H_2).$$

Легко заметить, что любую формулу первого порядка рассматриваемой сигнатуры можно переписать в виде $T \to v$, $T \subset \Phi(X)$, $v \in \Phi(X)$ для некоторого X: пусть T — одноэлементное множество, содержащее тождественно истинную формулу, а v — рассматриваемая формула. Имеет место следующее утверждение.

Предложение 3. *Если алгебры H_1 и H_2 эквивалентны по типам, то они элементарно эквивалентны.*

Определение 2. Алгебра $H \in \Theta$ называется *LG-нётеровой*, если для любого элементарного множества $A = T_H^L$ существует элемент u из $\Phi = \Phi(X)$, такой что $A = \mathrm{Val}_H^X(u)$.

Определение 3. Алгебра $H \in \Theta$ называется *сильно LG-нётеровой*, если для любого элементарного множества $A = T_H^L$ существует конечное подмножество $T_0 \subset T$, такое что $A = T_{0H}^L$.

Определение 4. Алгебра $H \in \Theta$ называется *слабо LG-нётеровой*, если для любой формулы $T \to v \in \mathrm{LG\text{-}Th}(H)$ существует конечное подмножество $T_0 \subset T$, такое что $T_0 \to v \in \mathrm{LG\text{-}Th}(H)$.

Предложение 4 [4]. *Пусть алгебры H_1 и H_2 обладают любым из вышеперечисленных свойств нётеровости. Тогда их LG-эквивалентность равносильна их элементарной эквивалентности.*

В общем случае элементарная эквивалентность не всегда влечёт LG-эквивалентность, как будет показано далее.

3. Примеры элементарно эквивалентных алгебраических систем, не являющихся эквивалентными по типам

Пример 2. Группы $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{R}, +)$ элементарно эквивалентны, но не являются эквивалентными по типам в языке теории групп.

Доказательство. Сначала покажем, что $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{R}, +)$ элементарно эквивалентны. Для этого расширим сигнатуру до $\Omega = \{=, +, 1\}$. Покажем, что при использовании некоторых общих свойств моделей $(\mathbb{Q}, \Omega)$ и $(\mathbb{R}, \Omega)$ применима теорема об элиминации кванторов, т. е. любую формулу первого порядка можно преобразовать в бескванторную (не содержащую связанных переменных) формулу, принимающую те же значения при подстановке конкретных значений свободных переменных.

Рассмотрим формулу $\exists x\ A(y_1, \ldots, y_n, x)$, где A — бескванторная формула. Пусть атомные формулы, содержащиеся в A, принимают вид

$$c_k x = c_{k,1} y_1 + \ldots + c_{k,n} y_n + c_{k,0}, \quad k = 1, \ldots, m,$$

где c_k и $c_{k,l}$, $l = 0, \ldots, n$, — целые числа (подобная запись допустима в силу коммутативности сложения). Теперь заметим, что формула

$$\bigvee_{k\colon c_k \neq 0} \big(A(y_1, \ldots, y_n, (c_{k,1} y_1 + \ldots + c_{k,n} y_n + c_{k,0})/c_k) \vee \\ \vee A(y_1, \ldots, y_n, (c_{k,1} y_1 + \ldots + c_{k,n} y_n + c_{k,0} + 1)/c_k) \big),$$

зависящая только от $y_1, \ldots, y_n$ и не содержащая кванторов, эквивалентна формуле $\exists x\ A(y_1, \ldots, y_n, x)$. Деление на c_k понимается здесь формально (коэффициенты в правой части умножаются на c_k, а левая часть остаётся без изменений). Если же $c_k = 0$ для всех k, то исходная формула не зависит от x, и мы просто переписываем её, опуская квантор.

Взяв любую замкнутую формулу первого порядка сигнатуры $\{=, +, 1\}$, мы можем вынесением кванторов и последовательным применением указанного алгоритма получить формулу с тем же значением, не содержащую переменных. Но такая формула будет одновременно истинной или ложной в обеих рассматриваемых моделях. Таким образом, модели $(\mathbb{Q}, \Omega)$ и $(\mathbb{R}, \Omega)$, а значит и группы $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{R}, +)$, элементарно эквивалентны.

Формула же импликативной теории, различающая $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{R}, +)$, может быть записана в виде

$$\bigvee_{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} (ax + by = 0).$$

Она истинна при рациональных x и y, но является ложной, к примеру, при $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. □

Пример 3. Поле алгебраических чисел $\mathbb{A}$ и поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, элементарно эквивалентные в языке теории колец, эквивалентными по типам не являются.

Доказательство. Доказательство элементарной эквивалентности полей $\mathbb{A}$ и $\mathbb{C}$ приведено в [2].

Импликативные теории $\mathbb{A}$ и $\mathbb{C}$ не совпадают. К примеру, формула

$$\bigvee_{P \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\}} (P(x) = 0)$$

тождественно истинна в $\mathbb{A}$, но ложна при подстановке в качестве x любого числа из $\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$. □

4. Различные конструкции примеров неизоморфных типово эквивалентных объектов

Лемма 1. *Пусть G — произвольная группа (или кольцо), I — произвольный бесконечный набор индексов, для всех $i \in I$ имеет место $G_i \cong G$, $I' \subset I$, причём I' — счётное множество. Пусть $U = \bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ (знак $\oplus$ в данном случае обозначает прямую сумму, т. е. множество элементов декартова произведения с ненулевыми элементами, соответствующими лишь конечному числу индексов), C — подгруппа (подкольцо) U, содержащая элементы, у которых (если рассматривать их как строки из элементов G) значения, не совпадающие с нейтральным элементом G, могут находиться лишь в разрядах, соответствующих $i \in I'$. Тогда U и C эквивалентны по типам в языке теории групп (колец).*

Доказательство. Для начала заметим, что если $A \subset C$, $B \subset U$ и при этом A и B — не более чем счётные множества, то легко построить автоморфизм $\phi\colon U \to U$, такой что $\phi(A) \cup \phi(B) \subset C$ и $\phi(a) = a$ для всех $a \in A$. В частности, для любых значений, поставленных в соответствие конечному набору переменных X, мы можем построить автоморфизм U, переводящий эти значения в элементы C. Обратим внимание, что при переводе свободных переменных формулы языка первого порядка значение сохраняется, а следовательно, формула рассматриваемого вида при подстановке X истинна тогда и только тогда, когда она истинна при подстановке образа X при автоморфизме.

Покажем, что формула φ, принадлежащая импликативной теории U, содержится в то же время и в импликативной теории C. Для удобства будем предполагать следующее: формулы w_t записаны в таком виде, что каждой связанной переменной соответствует ровно один квантор. По теореме о вынесении кванторов можно привести формулы w_t к виду

$$Q_{t1}y_{t1}Q_{t2}y_{t2}\ldots Q_{tm_t}y_{tm_t}A_t(x_1,\ldots,x_n,y_{t1},\ldots,y_{tm_t}),$$

где A_t — бескванторная формула. Пусть фиксированы значения переменных X из C. Возьмём такое t, что $w_t(X)$ истинна как формула над U. Значит, она истинна и в том случае, если в качестве всех связанных переменных, стоящих под кванторами всеобщности, мы будем брать элементы C. Пусть теперь Q_{tk} — квантор существования (если это самый левый из кванторов существования, то всё просто, если же нет, считаем, что предыдущие мы уже разобрали). В случае истинности формулы w_t ему можно приписать функцию, ставящую в соответствие уже выбранным элементам (X и $a_{t1},\ldots,a_{tk-1}$, точнее, тем из них, которые стоят под кванторами всеобщности) некоторый элемент a_{tk}, такой что формула

$$Q_{tk+1}y_{tk+1}\ldots Q_{tm_t}y_{tm_t}A_t(x_1,\ldots,x_n,a_{t1},\ldots,a_{tk},y_{t_k+1},\ldots,y_{tm_t})$$

будет истинна как формула над U. Но если все предыдущие элементы были элементами C, то мы можем построить изоморфизм U, сохраняющий их все и переводящий a_{tk} также в элемент C. Поэтому, рассматривая последовательно (слева направо) все кванторы, получаем, что w_t при данных значениях X истинна и как формула над C.

Обратно, пусть для некоторого набора X из U (а как мы показали, можно считать, что элементы набора X лежат в C) формула φ не содержится в импликативной теории U, т. е. не является истинной ни одна из формул w_t. Значит, для каждой формулы w_t существует набор значений переменных под кванторами всеобщности (их также можно считать элементами C), для которых невозможно подобрать функции $a_{tk}(x_1, \ldots, x_n, a_{t1}, \ldots, a_{tk-1})$ со значениями из U, соответствующие значениям переменных под кванторами существования, и потому тем более невозможно подобрать такие функции со значениями из C.

Таким образом, формула φ не является истинной в C, и лемма доказана. □

Предложение 5. *Пусть G — произвольная группа (кольцо), I и J — произвольные бесконечные наборы индексов, для всех $i \in I$ имеет место $G_i \cong G$, для всех $j \in J$ имеет место $G_j \cong G$. Тогда $\bigoplus\limits_{i \in I} G_i$ и $\bigoplus\limits_{j \in J} G_j$ эквивалентны по типам в языке теории групп (колец).*

Доказательство. Утверждение очевидным образом следует из леммы 1 и из того, что прямые суммы G_i и G_j по счётным подмножествам индексов изоморфны. □

Аналогичное утверждение можно рассмотреть и в случае прямого произведения (т. е. декартова произведения с естественным образом определяемыми операциями).

Предложение 6. *Пусть G — произвольная универсальная алгебра некоторой сигнатуры, I и J — произвольные бесконечные наборы индексов мощности, строго большей, чем мощность носителя G, для всех $i \in I$ имеет место $G_i \cong G$, для всех $j \in J$ имеет место $G_j \cong G$. Пусть $U = \prod\limits_{i \in I} G_i$, $V = \prod\limits_{j \in J} G_j$. Тогда U и V эквивалентны по типам в языке соответствующей сигнатуры.*

Доказательство. Рассмотрим формулу $\bigvee\limits_{t \in T} w_t$, где каждая подформула w_t имеет вид

$$Q_{t1} y_{t1} Q_{t2} y_{t2} \ldots Q_{tm_t} y_{tm_t} A_t(x_1, \ldots, x_n, y_{t1}, \ldots, y_{tm_t})$$

с бескванторной формулой A_t. Предположим, что эта формула не является тождественно истинной в U, т. е. существуют такие $x_1, \ldots, x_n$, что ни одна из формул w_t не является истинной при подстановке их в качестве свободных переменных.

Упорядоченный набор элементов $z_1, \ldots, z_q$ из U мы можем рассматривать как совокупность строк $(z_{i1}, \ldots, z_{iq})_{i \in I}$ элементов из алгебры G. Построим такой набор $(z'_{j1}, \ldots, z'_{jq})_{j \in J}$, чтобы для каждой такой строки $(g_1, \ldots, g_q)$, что

$$\operatorname{card}(\{i \in I \mid (z_{i1}, \ldots, z_{iq}) = (g_1, \ldots, g_q)\}) \leqslant \operatorname{card}(G),$$

выполнялось равенство

$$\operatorname{card}(\{i \in I \mid (z_{i1}, \ldots, z_{iq}) = (g_1, \ldots, g_q)\}) = \\ = \operatorname{card}(\{j \in J \mid (z_{j1}, \ldots, z_{jq}) = (g_1, \ldots, g_q)\}),$$

а для остальных $(g_1, \ldots, g_n)$ имело бы место

$$\operatorname{card}(\{j \in J \mid (z_{j1}, \ldots, z_{jn}) = (g_1, \ldots, g_q)\}) > \operatorname{card}(G)$$

(если G конечно, условия $\leqslant \operatorname{card}(G)$ и $> \operatorname{card}(G)$ заменим на условия $<\omega$ и $\geqslant\omega$ соответственно, где ω — мощность счётного множества). Для построения такого набора будем действовать по индукции. Пусть для $(z_{i1}, \ldots, z_{ik})_{i\in I}$ ($k \geqslant 0$) мы уже построили $(z'_{j1}, \ldots, z'_{jk})_{j\in J}$. Возьмём $z_{k+1} \in U$. Возьмём некоторую строку $(g_1, \ldots, g_k)$ элементов из G. Если мощность множества $\{i \in I \mid (z_{i1}, \ldots, z_{ik}) = (g_1, \ldots, g_k)\}$ не превосходит мощности G (или, в случае конечного G, конечна), построим биективное отображение этого множества на равномощное ему $\{j \in J \mid (z_{j1}, \ldots, z_{jk}) = (g_1, \ldots, g_k)\}$ и положим $z_{jk+1} = g_{k+1}$ для всех j, прообразами которых являются такие i, что $(z_{i1}, \ldots, z_{ik+1}) = (g_1, \ldots, g_{k+1})$. Тогда для любого g_{k+1} будем иметь

$$\operatorname{card}(\{i \in I \mid (z_{i1}, \ldots, z_{ik+1}) = (g_1, \ldots, g_{k+1})\}) = \\ = \operatorname{card}(\{j \in J \mid (z_{j1}, \ldots, z_{jk+1}) = (g_1, \ldots, g_{k+1})\}).$$

Если $\{i \in I \mid (z_{i1}, \ldots, z_{ik}) = (g_1, \ldots, g_k)\}$ имеет большую мощность, чем G (в случае конечного G бесконечно), то пусть G_0 — множество таких $g_{k+1} \in G$, что $\{i \in I \mid (z_{i1}, \ldots, z_{ik+1}) = (g_1, \ldots, g_{k+1})\}$ не превосходит по мощности G (или конечно в случае конечного G). Тогда построим инъективное отображение множества

$$\{i \in I \mid \exists\, g_{k+1} \in G_0 \colon (z_{i1}, \ldots, z_{ik+1}) = (g_1, \ldots, g_{k+1})\}$$

на множество

$$\{j \in J \mid (z_{j1}, \ldots, z_{jk}) = (g_1, \ldots, g_k)\}$$

(обозначим образ отображаемого множества через J_0). Тогда для $j \in J_0$ мы аналогичным образом можем определить значение z_{jk+1} так, чтобы условие на мощность соблюдалось. Далее будем пользоваться тем фактом, что для бесконечного кардинала α декартово произведение множества мощности α и непустого множества с мощностью, не превосходящей α, будет снова иметь мощность α (см. [1]). Представим множество

$$\{j \in J \mid (z_{j1}, \ldots, z_{jk}) = (g_1, \ldots, g_k)\} \setminus J_0$$

как объединение непересекающихся бесконечных и строго превосходящих G по мощности подмножеств J_g, $g \in G \setminus G_0$ и положим $z_{jk+1} = g$ для каждого J_g. Таким образом мы получаем совокупность строк $(z'_{j1}, \ldots, z'_{jk+1})_{j\in J}$, удовлетворяющую требуемым условиям.

Построенная совокупность строк определяет элементы $z'_1, \ldots, z'_q$ прямого произведения V. Будем говорить, что наборы $z_1, \ldots, z_q$ и $z'_1, \ldots, z'_q$ *соответствуют* друг другу, если выполнены вышеуказанные условия. Аналогичным образом, имея изначально $z'_1, \ldots, z'_q$ из V, можно построить по ним $z_1, \ldots, z_q$ из U, и их соответствие, как легко заметить, будет означать соответствие в старом смысле. Из индуктивности построения соответствующего набора следует и тот немаловажный факт, что если $z'_1, \ldots, z'_q$ соответствуют $z_1, \ldots, z_q$, то для $z_{q+1}, \ldots, z_{q+r}$ из U можно построить такие $z'_{q+1}, \ldots, z'_{q+r}$, что наборы $z_1, \ldots, z_{q+r}$ и $z'_1, \ldots, z'_{q+r}$ будут соответствовать друг другу.

По выбранным ранее $x_1, \ldots, x_n \in U$ найдём соответствующие им $x'_1, \ldots, x'_n \in \in V$. Предположим, что формула w_t для некоторого $t \in T$ при подстановке $x'_1, \ldots, x'_n$ является истинной в V. Пусть s — число связанных переменных под кванторами всеобщности в формуле w_t. Истинность формулы w_t в V при данных $x'_1, \ldots, x'_n$ означает существование функций $b'_1, \ldots, b'_r$, ставящих в соответствие значениям переменных под кванторами всеобщности $a'_1, \ldots, a'_s$ подходящие значения переменных под кванторами существования и притом зависящих только от тех переменных, кванторы которых стоят левее соответствующего квантора существования.

Далее будем действовать по следующему алгоритму. Мы имеем выбранные ранее $x_1, \ldots, x_n$, и пусть $c_1, \ldots, c_s$ — произвольно взятые элементы U. Будем двигаться по кванторам формулы w_t слева направо. Пусть она начинается с k ($k \geqslant 0$) кванторов всеобщности. Тогда, имея $x'_1, \ldots, x'_n$, построим такие $c'_1, \ldots, c'_k$, что набор $x'_1, \ldots, x'_n, c'_1, \ldots, c'_k$ соответствует $x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_k$. Пусть после k кванторов всеобщности в формуле идут l кванторов существования и $d'_1, \ldots, d'_l$ — переменные, которые можно подставить вместо переменных под кванторами существования при подстановке $c'_1, \ldots, c'_k$ вместо переменных, стоящих под предшествующими им кванторами всеобщности, в формулу, получающуюся из w_t отбрасыванием кванторов с рассмотренными переменными, чтобы полученная формула была истинной. Такие $d'_1, \ldots, d'_l$ существуют, так как w_t по предположению истинна в V. По ним построим такие $d_1, \ldots, d_l$, чтобы набор $x'_1, \ldots, x'_n, c'_1, \ldots, c'_k, d'_1, \ldots, d'_l$ соответствовал $x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_l$. Будем продолжать этот алгоритм, пока не переберём все связанные переменные в w_t.

Итак, по $x_1, \ldots, x_n$ и произвольному набору значений $c_1, \ldots, c_s$ из U мы построили $x'_1, \ldots, x'_n$, $c'_1, \ldots, c'_s$ из V и по ним значения переменных под кванторами существования $d'_1, \ldots, d'_r$ из V и $d_1, \ldots, d_r$ из U, такие что набор $x'_1, \ldots, x'_n, c'_1, \ldots, c'_s, d'_1, \ldots, d'_r$ соответствует набору $x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_s$, $d_1, \ldots, d_r$ и притом каждое d'_m (и соответственно d_m) можно однозначно определить, исходя только из значений переменных под кванторами всеобщности, стоящими левее m-го квантора существования. Если подставить переменные $x'_1, \ldots, x'_n, c'_1, \ldots, c'_s, d'_1, \ldots, d'_r$ на соответствующие места в формуле A_t (получающейся из w_t отбрасыванием всех кванторов и освобождением связанных переменных), формула будет истинной. Теперь заметим, что элементы $p^1 = = (\ldots p^1_k \ldots)_{k \in K}$ и $p^2 = (\ldots p^2_k \ldots)_{k \in K}$ произвольного прямого произведения $P = \prod\limits_{k \in K} G_k$ равны в том и только том случае, если $p^1_k = p^2_k$ для каждого $k \in K$, и что два терма при данных значениях переменных принимают одинаковые значения в точности в том случае, если для каждого $k \in K$ их значения (как термов над G) совпадают при подстановке в качестве переменных соответствующих элементов из G. Отсюда и из определения соответствия наборов вытекает, что формула A_t истинна и при подстановке вместо соответствующих свободных переменных значений $x_1, \ldots, x_n, c_1, \ldots, c_s, d_1, \ldots, d_r$.

Но так как $c_1, \ldots, c_s$ были выбраны совершенно произвольным образом, а значения $d_1, \ldots, d_r$ зависят только от тех переменных, от которых зависимость допустима, то формула $w_t(x_1, \ldots, x_n)$ при выбранных $x_1, \ldots, x_n$ истинна, что противоречит выбору $x_1, \ldots, x_n$. Значит, $w_t(x'_1, \ldots, x'_n)$ не может быть истинной, а потому (в силу произвольности выбора $t \in T$) и формула $\bigvee\limits_{t \in T} w_t$ не может быть тождественно истинной как формула над V, но не истинной тождественно как формула над U. Из соображений симметрии вытекает и обратное. Утверждение доказано. □

В [5, с. 22—24] доказана изотипность (а значит, и логическая эквивалентность) бесконечномерных линейных пространств над произвольным полем P.

5. Аналог теоремы Мальцева для типовой эквивалентности

Для начала приведём теорему и лемму, доказанные в работе [3].

Теорема 1. *Пусть K — поле характеристики 0. Для каждой группы $\mathcal{G}_n(K)$ ($\mathcal{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{PSL}$) существует предложение $\mathcal{J}_n$ группового языка первого порядка, истинное в $\mathcal{G}_n(K)$ и ложное в группах $\mathcal{G}_m(K)$ при $m \neq n$. Вид формул $\mathcal{J}_n$ не зависит от свойств поля K.*

Лемма 2. *Пусть K — поле характеристики 0, $n \geqslant 2$. Для каждой из групп $\mathrm{GL}_n(K)$, $\mathrm{PGL}_n(K)$, $\mathrm{SL}_{n+1}(K)$, $\mathrm{PSL}_{n+1}(K)$ существуют формулы $\mathcal{R}(a,b)$, $\mathcal{I}(x,a,b)$, $\Sigma(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$ группового языка первого порядка, обладающие следующим свойством: для каждых элементов a, b рассматриваемой группы, находящихся в отношении $\mathcal{R}(a,b)$, совокупность H элементов x, удовлетворяющих требованию $\mathcal{I}(x,a,b)$, является относительно операций $\oplus$, $\otimes$, определяемых формулами $(X \oplus Y = Z) := \Sigma(X,Y,Z)$ и $(X \otimes Y = Z) := \beta(X,Y,Z)$, полем, изоморфным полю K.*

Следующая теорема формулируется аналогично соответствующей теореме работы [3], однако рассматривает уже не элементарную, а импликативную теорию.

Теорема 2. *Для каждой группы $\mathrm{GL}_n(K)$, $\mathrm{PGL}_n(K)$, $\mathrm{SL}_{n+1}(K)$, $\mathrm{PSL}_{n+1}(K)$ ($n \geqslant 2$) существует алгоритм, перерабатывающий каждое предложение импликативной теории групп в предложение импликативной теории колец, причём предложения, истинные на группе, перерабатываются в предложения, истинные на K, и, обратно, существует алгоритм, перерабатывающий предложения* *импликативной теории колец в предложения импликативной теории групп, и при этом предложения, истинные на поле K, перерабатываются в предложения, истинные на рассматриваемой группе.*

Доказательство. Действительно, пусть рассматривается группа $\mathcal{G}(n,K)$ ($\mathcal{G} = \mathrm{GL}_n$, PGL_n $(n \geqslant 2)$, SL_n, PSL_n $(n \geqslant 3)$) и какое-нибудь предложение $\mathcal{U} = (Q_1x_1)\ldots(Q_rx_r)\mathcal{B}(x_1,\ldots,x_r)$ $(Q_i = \exists, \forall)$ языка теории групп. Истинность $\mathcal{U}$ на $\mathcal{G}(n,K)$, очевидно, равносильна истинности на K предложения $\mathcal{U}_K$, получающегося из $\mathcal{U}$ следующим процессом:

а) в формуле $\mathcal{B}(x_1,\ldots,x_r)$ отношения вида $x_i = x_j$ и $x_i = x_jx_k$ заменяем соответственно формулами

$$\bigwedge_{\lambda,\mu}(x_{i\lambda\mu} = x_{j\lambda\mu}) \quad \text{и} \quad \bigwedge_{\lambda,\mu}(x_{i\lambda\mu} = x_{j\lambda 1}x_{k1\mu} + \ldots + x_{j\lambda n}x_{kn\mu});$$

б) если формула $\mathcal{B}_{i+1} = (Q_{i+1}x_{i+1})\ldots(Q_rx_r)\mathcal{B}$ преобразовывается в формулу $\mathcal{Q}_{i+1}$, то формула $\mathcal{B}_i = \forall\, x_i\ (\mathcal{B}_{i+1})$ преобразовывается в формулу

$$\forall\, x_{i11}\,\forall\, x_{i12}\ldots\forall\, x_{inn}\ (\det\|x_{i\lambda\mu}\| \neq 0 \Rightarrow \mathcal{Q}_{i+1}),$$

а формула $\mathcal{B}_i = \exists\, x_i\ (\mathcal{B}_{i+1})$ преобразовывается в формулу

$$\exists\, x_{i11}\,\exists\, x_{i12}\ldots\exists\, x_{inn}\ (\det\|x_{i\lambda\mu}\| \neq 0\ \&\ \mathcal{Q}_{i+1}).$$

Теперь возьмём формулу

$$\mathcal{U} = \forall\, x_1\ldots\forall\, x_r\ \Bigl(\bigwedge_{\mathcal{B}\in T}\mathcal{B}(x_1,\ldots,x_r) \to \mathcal{V}(x_1,\ldots,x_r)\Bigr)$$

импликативной теории групп. Истинность $\mathcal{U}$ на $\mathcal{G}(n,K)$ равносильна истинности на K предложения $\mathcal{U}_K$, получающегося из $\mathcal{U}$ следующим процессом: применим к формулам $\mathcal{B} \in T$ и $\mathcal{V}$ вышеуказанное преобразование; полученные формулы, зависящие от переменных $x_{111}, x_{112}, \ldots, x_{1nn}, \ldots, x_{r11}, x_{r12}, \ldots, x_{rnn}$, будем обозначать $\tilde{\mathcal{B}}$ и $\tilde{\mathcal{V}}$ соответственно. Формула $\mathcal{U}_K$ будет иметь вид

$$\forall\, x_{111}\,\forall\, x_{112}\ldots\forall\, x_{1nn}\ldots\forall\, x_{r11}\,\forall\, x_{r12}\ldots\forall\, x_{rnn} \Bigl(\bigwedge_{\mathcal{C}\in T_K}\mathcal{C}(x_1,\ldots,x_r) \Rightarrow \tilde{\mathcal{V}}(x_1,\ldots,x_r)\Bigr),$$

при этом

$$T_K = \{\tilde{\mathcal{B}} \mid \mathcal{B} \in T\} \cup \{\mathcal{D}_i\}_{i=1}^r,$$

где $\mathcal{D}_i$ — формулы языка теории групп, означающие, что $\det\|x_{i\lambda\mu}\| \neq 0$.

Если рассматривается предложение $\mathcal{U}$ и специальная линейная группа $\mathrm{SL}_n(K)$, то в приведённых выше формулах вместо неравенства

$$\det\|x_{i\lambda\mu}\| \neq 0$$

следует писать равенство $\det\|x_{i\lambda\mu}\| = 1$. Если рассматриваются проективные группы, то существует способ, позволяющий для каждого предложения $\mathcal{U}$ языка теории групп построить новое предложение $\mathcal{U}^\pi$ того же языка, истинное на группе $\mathrm{GL}_n(K)$ или $\mathrm{SL}_n(K)$ тогда и только тогда, когда на соответствующей проективной группе истинно предложение $\mathcal{U}$ (см. [3]).

Таким образом, переход от формул языка теории групп к формулам языка теории колец, относящимся к полю K, совершенно прямой и не зависит от предыдущих теоремы и леммы.

Теперь пусть задана какая-либо формула

$$\mathcal{Q}(x_{t_0+1},\ldots,x_t) = (Q_1x_1)\ldots(Q_{t_0}x_{t_0})\mathcal{D}(x_1,\ldots,x_t)\ (t_0 \leqslant t)$$

языка теории колец и мы хотим знать, выполняется ли она на базисном поле K группы $\mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ — одна из указанных выше групп, на последовательности $f_{t_0+1},\ldots,f_t \in K$. Рассмотрим формулы $\mathcal{R}(a,b)$, $\mathcal{I}(x,a,b)$, $\Sigma(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$, построенные в лемме 2 и относящиеся к группе $\mathcal{G}$. Заменяя в формуле $\mathcal{D}(x_1,\ldots,x_t)$ кольцевые отношения $x+y=z$ и $xy=z$ формульными отношениями $\Sigma(x,y,z)$ и $\beta(x,y,z)$ соответственно и производя ограничения кванторов по всей формуле $\mathcal{Q}$ на множество тех x, которые удовлетворяют отношению $\mathcal{I}(x,a,b)$, получим в результате формулу $\mathcal{Q}_\mathcal{G}(a,b,x_{t_0+1},\ldots,x_t)$ группового языка. Эта формулу утверждает то же самое, что и формула $\mathcal{Q}$, но лишь для множества $\mathcal{H}$. Если элементы a, b выбраны в группе $\mathcal{G}$ так, что истинна формула $\mathcal{R}(a,b)$, то множество $\mathcal{H}$ с отношениями $\Sigma(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$ будет полем, изоморфным полю K. Поэтому истинность $\mathcal{Q}$ на K на последовательности $f_{t_0+1},\ldots,f_t \in K$ равносильна истинности формулы

$$\exists\, a\, \exists\, b\ (\mathcal{R}(a,b) \wedge \mathcal{Q}_\mathcal{G}(a,b,x_{t_0+1},\ldots,x_t)$$

в группе $\mathcal{G}$ на соответствующей последовательности $\tilde{f}_{t_0+1},\ldots,\tilde{f}_t \in \mathcal{G}$.

Теперь рассмотрим произвольную формулу импликативной теории колец

$$\mathcal{Q} = \forall\, x_1 \ldots \forall\, x_t\ \left(\bigwedge_{\mathcal{D}\in S} \mathcal{D}(x_1,\ldots,x_t) \to \mathcal{W}(x_1,\ldots,x_t)\right).$$

Нетрудно понять, как построить соответствующую ей формулу импликативной теории групп. Она будет иметь вид

$$\forall\, a\, \forall\, b\, \forall\, x_1 \ldots \forall\, x_t\ \left(\left(\bigwedge_{\mathcal{D}\in S} \mathcal{D}_\mathcal{G}(a,b,x_1,\ldots,x_t)\right) \wedge \mathcal{R}(a,b) \to \mathcal{W}_\mathcal{G}(a,b,x_1,\ldots,x_t)\right).$$

Действительно, импликация может не быть верна только в случае выполнения условия $\mathcal{R}(a,b)$, но в таком случае для каждой внутренней формулы заданы одни и те же подмножество группы и структура поля на нём, из чего и следует эквивалентность импликаций в вышеуказанных формулах импликативной теории групп и колец. □

Теперь мы можем доказать основную теорему.

Теорема 3. *Пусть K_1, K_2 — поля характеристики ноль, $m,n \geqslant 3$. Тогда для того чтобы группы $\mathcal{G}_m(K_1)$ и $\mathcal{G}_n(K_2)$ ($\mathcal{G} = \mathrm{GL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PSL}$) были эквивалентны по типам, необходимо и достаточно, чтобы $m = n$ и чтобы поля K_1 и K_2 были эквивалентны по типам.*

Доказательство. Достаточность условий очевидна. Действительно, каждое предложение $\mathcal{U}$ импликативной теории групп можно указанным выше способом преобразовать в предложение $\mathcal{U}_K$ импликативной теории колец таким образом, что вид предложения $\mathcal{U}_K$ не зависит от базисного поля и истинность $\mathcal{U}$ на $\mathcal{G}_n(K_1)$ равносильна истинности $\mathcal{U}_K$ на K_1. Истинность же $\mathcal{U}_K$ на K_1 равносильна истинности $\mathcal{U}_K$ на K_2 в силу логической эквивалентности полей K_1 и K_2. Поэтому истинность $\mathcal{U}$ на $\mathcal{G}_n(K_1)$ равносильна истинности $\mathcal{U}$ на $\mathcal{G}_n(K_2)$, и следовательно, $\mathcal{G}_n(K_1)$ и $\mathcal{G}_n(K_2)$ логически эквивалентны.

Необходимость условия $m = n$ вытекает из теоремы 1 и из того, что логически эквивалентные группы должны быть элементарно эквивалентны. Наконец, необходимость соотношения логической эквивалентности полей K_1 и K_2 вытекает из того, что каждое предложение $\mathcal{Q}$ импликативной теории колец можно преобразовать в предложение $\mathcal{Q}_{\mathcal{G}}$ импликативной теории групп, относящееся соответственно к группе $\mathcal{G}_n(K_1)$ или $\mathcal{G}_n(K_2)$ и равносильное первоначальному. Так как вид предложения $\mathcal{Q}_{\mathcal{G}}$ одинаков для групп $\mathcal{G}_n(K_1)$ и $\mathcal{G}_n(K_2)$, то истинность $\mathcal{Q}$ на K_1 равносильна истинности $\mathcal{Q}$ на K_2. $\square$

Литература

[1] Верещагин Н. К., Шень А. Начала теории множеств. — М., 1999.

[2] Кейслер Г., Чэн Ч.Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[3] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. — Новосибирск, 1961. — С. 110—132.

[4] Плоткин Б., Житомирский Г. Некоторые логические инварианты алгебр и логические отношения между алгебрами // Алгебра и анализ. — 2007. — Т. 19, № 5. — С. 829—852.

[5] Plotkin B. Isotyped algebras: Preprint.