Вполне целозамкнутые модули и кольца. III*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный
торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: вполне целозамкнутый модуль, циклический модуль.

Аннотация

Изучаются кольца A, над которыми все циклические правые модули вполне целозамкнуты. Полный ответ получен в случае, когда либо кольцо A полусовершенно, либо каждый кольцевой прямой сомножитель кольца A, являющийся областью, ограничен справа.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Completely integrally closed modules and rings. III, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 7, pp. 205—220.

We study rings A over which all cyclic right modules are completely integrally closed. The complete answer is obtained if either A is a semiperfect ring or each ring direct factor of A that is a domain is right bounded.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули — унитарными. Если мы говорим «A — цепное кольцо», это означает, что A_A и ${}_AA$ — цепные модули.

Модуль X называется *самоинъективным* (или *квазиинъективным*), если для любого его подмодуля Y каждый гомоморфизм $Y \to X$ продолжается до гомоморфизма $X \to X$. Модуль X называется *вполне целозамкнутым*, если для любого его подмодуля Y каждый гомоморфизм $Y \to X$, переводящий в себя некоторый существенный подмодуль из Y, продолжается до гомоморфизма $X \to X$. Терминология объясняется тем, что коммутативная область A с полем частных Q является вполне целозамкнутым A-модулем в точности тогда, когда область A — вполне целозамкнутое (в классическом смысле) подкольцо в поле Q (см. [1, замечание 2.11]). Ясно, что каждый самоинъективный модуль вполне целозамкнут. Над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$ все циклические модули вполне целозамкнуты, но вполне целозамкнутый циклический $\mathbb{Z}$-модуль $\mathbb{Z}$ не самоинъективен.

*Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 08-01-00693-а.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 7, с. 205—220.

Все циклические правые A-модули инъективны в точности тогда, когда A — полупростое артиново кольцо [8]. В [7] описаны кольца, над которыми все циклические правые модули квазиинъективны; в частности, такие кольца полусовершенны, но не обязательно являются артиновыми. Над кольцом вычетов $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ все циклические модули квазиинъективны, но квазиинъективный циклический $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$-модуль $2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ не инъективен. В [2, теорема 1, лемма 14] автор описал локальные области A, над которыми все циклические правые A-модули вполне целозамкнуты (см. теорему A ниже).

Теорема A [2]. *Если A — локальная область, то равносильны следующие условия:*

1) *все циклические правые A-модули вполне целозамкнуты;*
2) *все циклические левые A-модули вполне целозамкнуты;*
3) *все циклические правые A-модули малоинъективны;*
4) *все циклические левые A-модули малоинъективны;*
5) *A — инвариантная цепная область и A содержит не более двух первичных идеалов.*

Основными результатами данной работы являются теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Для полусовершенного кольца A равносильны следующие условия:*

1) *все циклические правые A-модули являются вполне целозамкнутыми модулями;*
2) *все циклические правые A-модули являются малоинъективными модулями;*
3) *$A = A_1 \times \ldots \times A_n$ и для любого i либо A_i — простое артиново кольцо, либо A_i — инвариантная цепная область с не более чем двумя первичными идеалами, либо A_i — инвариантное цепное кольцо с не более чем двумя первичными идеалами, причём для любого нильпотентного идеала B кольца A_i фактор-кольцо A_i/B инъективно справа.*

Например, все коммутативные области дискретного нормирования и все артиновы кольца главных правых (левых) идеалов удовлетворяют теореме 1. В частности, кольцо целых p-адических чисел и все кольца вычетов $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ удовлетворяют теореме 1.

Кольцо A называется *ограниченным справа*, если каждый его существенный правый идеал содержит ненулевой идеал кольца A.

Теорема 2. *Пусть A — кольцо, в котором каждый кольцевой сомножитель, являющийся областью, — ограниченное справа кольцо. (Это так, например, если A — кольцо с полиномиальным тождеством.) Тогда равносильны следующие условия:*

1) *все циклические правые A-модули вполне целозамкнуты;*

2) *$A = A_1 \times \ldots \times A_n$, где для любого i либо A_i — простое артиново кольцо, либо A_i — инвариантное цепное кольцо с не более чем двумя первичными идеалами, причём для любого нильпотентного идеала B кольца A_i фактор-кольцо A_i/B инъективно, либо A_i — вполне целозамкнутая справа, инвариантная область, у которой для любого ненулевого идеала B фактор-кольцо A_i/B является конечным прямым произведением инвариантных цепных колец $A_{i1}, \ldots, A_{ik(i)}$, причём кольцо A_{ij} либо инъективно справа, либо является областью с не более чем двумя первичными идеалами, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k(i)$.*

Мы разобьём доказательство теорем 1 и 2 на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Окончания доказательств теорем 1 и 2 содержатся в замечаниях 22 и 25.

Приведём необходимые определения и обозначения. Через $J(M)$ обозначается *радикал Джекобсона* модуля M. Кольцо A называется *локальным*, если $A/J(A)$ — тело. Кольцо A называется *полусовершенным*, если $A/J(A)$ — артиново кольцо и все его идемпотенты поднимаются до идемпотентов кольца A. Для любого подмножества X правого A-модуля M через $r(X)$ обозначается правый аннулятор множества X в A.

Модуль M называется *цепным*, если в M любые два подмодуля сравнимы по включению. Модуль M называется *инвариантным*, если в M все подмодули вполне инвариантны*.

Модуль M называется *малоинъективным*, если каждый эндоморфизм любого его подмодуля продолжается до эндоморфизма модуля M. Модуль X называется *инъективным относительно модуля Y* (или *Y-инъективным*), если для любого подмодуля Y_1 модуля Y все гомоморфизмы $Y_1 \to X$ продолжаются до гомоморфизмов $Y \to X$. Модуль M над кольцом A называется *инъективным*, если M инъективен относительно любого A-модуля. Модуль M с инъективной оболочкой E называется *квазинепрерывным* [6] (или *π-инъективным* [5]) при выполнении следующих эквивалентных условий (см. [5, 6]):

1) для любого подмодуля X модуля M каждый идемпотентный эндоморфизм модуля X продолжается до идемпотентного эндоморфизма модуля M;
2) для любого подмодуля X модуля M каждое конечное прямое разложение $X = X_1 \oplus \ldots \oplus X_n$ продолжается до прямого разложения $M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$;
3) $f(M) \subseteq M$ для любого идемпотента кольца $\mathrm{End}(E)$;
4) $M = \bigoplus\limits_{i \in I}(M \cap E_i)$ для любого прямого разложения $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$.

Подмодуль Y модуля X называется *существенным*, если Y имеет ненулевое пересечение с каждым ненулевым подмодулем в X. В этом случае говорят, что X — *существенное расширение* модуля Y. Если инъективный модуль M — существенное расширение модуля X, то M называется *инъективной оболочкой*

*Ясно, что кольцо инвариантно справа (слева) в точности тогда, когда все его правые (левые) идеалы являются идеалами. В частности, все коммутативные кольца инвариантны.

модуля X. Хорошо известно, что каждый модуль имеет инъективную оболочку, причём она единственна с точностью до изоморфизма. Кроме того, каждый инъективный модуль, содержащий модуль X, также содержит некоторое своё прямое слагаемое, являющееся инъективной оболочкой модуля X. Модуль M называется *равномерным*, если в M любые два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение*. Модуль M называется *конечномерным*, если M не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых модулей. Правый A-модуль M называется *несингулярным*, если для любого ненулевого элемента $m \in M$ правый идеал $r(m)$ кольца A не является существенным. Кольцо A называется *регулярным*, если $a \in aAa$ для любого $a \in A$. Кольцо без ненулевых делителей нуля называется *областью*. Собственный идеал B кольца A называется *вполне первичным*, если фактор-кольцо A/B является областью.

Лемма 3 [1]. *Каждый вполне целозамкнутый модуль малоинъективен, каждый малоинъективный модуль квазинепрерывен, причём неразложимые квазинепрерывные модули совпадают с равномерными модулями.*

Лемма 4. *Пусть X — самоинъективный модуль и $R = \mathrm{End}(X)$.*

1. $\mathrm{sg}(X) = J(R)$, $R/J(R)$ *— регулярное кольцо и все его идемпотенты поднимаются до идемпотентов кольца R.*
2. *Если X — неразложимый модуль, то X — равномерный модуль с локальным кольцом эндоморфизмов.*
3. *Если A — инъективное справа кольцо, то при естественном изоморфизме $A \to \mathrm{End}(A_A)$ идеал $J(A)$ переходит на идеал $\mathrm{sg}(A_A)$.*

Доказательство. Пункт 1 доказан в [3, 19.27]. Пункт 2 вытекает из пункта 1 и леммы 3. Пункт 3 вытекает из пункта 1. □

Лемма 5. *Пусть $\bar{X}$ — существенное расширение модуля X и Y — модуль.*

1. *Если f — гомоморфизм из Y в $\bar{X}$ и существует такой гомоморфизм $g\colon Y \to X$, что f совпадает с g на $f^{-1}(X)$, то $f(Y) \subseteq X$.*
2. *Если X — Y-инъективный модуль, то $f(Y) \subseteq X$ для любого гомоморфизма $f\colon Y \to \bar{X}$.*
3. *Если f — эндоморфизм модуля $\bar{X}$ и существует такой эндоморфизм g модуля X, что f совпадает с g на $X \cap f^{-1}(X)$, то $f(X) \subseteq X$.*
4. *Если $X \oplus Y$ — квазинепрерывный модуль, то все его прямые слагаемые квазинепрерывны, X — Y-инъективный модуль и $f(Y) \subseteq X$ для любого гомоморфизма $f\colon Y \to \bar{X}$.*

Доказательство. 1. Допустим, что $x^* = (f-g)(x) \in X \cap (f-g)(Y)$, где $x \in Y$. Тогда

$$f(x) = (f-g)(x) + g(x) = x^* + g(x) \in X, \quad x \in f^{-1}(X),$$
$$x^* \in (f-g)\big(f^{-1}(X)\big) = 0, \quad X \cap (f-g)(Y) = 0.$$

*Ясно, что модуль M равномерен в точности тогда, когда все его ненулевые подмодули существенны в M. Кроме того, равномерные справа области совпадают с правыми областями Оре.

Так как $\bar{X}$ — существенное расширение модуля X, то $(f-g)(Y)=0$. Поэтому $f(Y)=g(Y)\subseteq X$.

2. Так как $f\big(f^{-1}(X)\big)\subseteq X$ и X — Y-инъективный модуль, то существует такой гомоморфизм $g\colon Y\to X$, что g совпадает с f на $f^{-1}(X)$. По пункту 1 $f(Y)\subseteq X$.

3. Утверждение 3 следует из пункта 1.

4. Непосредственно проверяется, что все прямые слагаемые квазинепрерывных модулей квазинепрерывны. По пункту 2 остаётся доказать, что X — Y-инъективный модуль. Пусть $u\colon Y\to X\oplus Y$ — естественное вложение, $\pi\colon X\oplus Y\to X$ — проекция с ядром Y, Y_1 — подмодуль в Y и $f_1\colon Y_1\to X$ — гомоморфизм. Существует такой эндоморфизм g_1 модуля $X\oplus Y_1$, что $g_1(x+y_1)=$ $=x+f_1(y_1)$. Тогда $g_1=g_1^2$. Так как модуль $X\oplus Y$ квазинепрерывен, то g_1 продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля $X\oplus Y$. Гомоморфизм $\pi gu\colon Y\to X$ — искомое продолжение гомоморфизма f_1. □

Лемма 6. *Пусть X — модуль с инъективной оболочкой $\bar{X}$, $\mathrm{sg}(\bar{X})$ — идеал кольца $\mathrm{End}(\bar{X})$, образованный всеми эндоморфизмами, ядра которых являются существенными подмодулями в $\bar{X}$. Равносильны следующие условия*:

1) *X — вполне целозамкнутый модуль*;
2) *$f(X)\subseteq X$ для любого эндоморфизма f модуля $\bar{X}$, переводящего в себя некоторый существенный подмодуль модуля X*;
3) *X — малоинъективный модуль и $h(X)\subseteq X$ для любого $h\in\mathrm{sg}(\bar{X})$*;
4) *X — малоинъективный модуль, являющийся конечной прямой суммой вполне целозамкнутых модулей.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1), 2) и 3) доказана в [1, предложение 1.4]. Из этой эквивалентности следует импликация 1) $\Longrightarrow$ 4).

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 3). По соображениям индукции можно считать, что $X=X_1\oplus X_2$, где модули X_1 и X_2 вполне целозамкнуты. По лемме 3 модуль X квазинепрерывен. Пусть $\bar{X}$ — инъективная оболочка модуля X. Тогда $\bar{X}=\bar{X}_1\oplus\bar{X}_2$, где $\bar{X}_1$ и $\bar{X}_2$ — инъективные оболочки модулей X_1 и X_2 соответственно. Пусть $h\in\mathrm{sg}(\bar{X})$, $u_1\colon\bar{X}_1\to\bar{X}$ и $u_2\colon\bar{X}_2\to\bar{X}$ — естественные вложения, $\pi_1\colon\bar{X}\to\bar{X}_1$ и $\pi_2\colon\bar{X}\to\bar{X}_2$ — естественные проекции. Обозначим

$$h_{11}=\pi_1hu_1\in\mathrm{End}(\bar{X}_1),\quad h_{22}=\pi_2hu_2\in\mathrm{End}(\bar{X}_2),$$
$$h_{12}=\pi_2hu_1\in\mathrm{Hom}(\bar{X}_1,\bar{X}_2),\quad h_{21}=\pi_1hu_2\in\mathrm{Hom}(\bar{X}_2,\bar{X}_1).$$

Так как модули X_1 и X_2 вполне целозамкнуты, то по условию 4) $h_{11}(X_1)\subseteq X_1$ и $h_{22}(X_2)\subseteq X_2$. Кроме того, по пункту 4 леммы 5 $h_{21}(X_2)\subseteq X_1$ и $h_{12}(X_1)\subseteq X_2$. Поэтому

$$h(X)=h(X_1\oplus X_2)=h_{11}(X_1)+h_{12}(X_1)+h_{22}(X_2)+h_{21}(X_2)\subseteq X. \qquad \square$$

Лемма 7. *Пусть X — малоинъективный модуль, $\bar{X}$ — существенное расширение модуля X и f — эндоморфизм модуля $\bar{X}$. Обозначим $N=\{x\in X\mid f(x)\in X\}$.*

1. *Если* $f(N) \subseteq N$, *то* $f(X) \subseteq X$.
2. *Если* $f^2(m) \in X$ *для любого такого элемента* $x \in X$, *что* $f(x) \in X$, *то* $f(X) \subseteq X$.
3. *Если* $(f^2 - f)(N) \subseteq X$, *то* $f(X) \subseteq X$.
4. *Если* $(f^2 - f)(X) \subseteq X$, *то* $f(X) \subseteq X$.

Доказательство. 1. Так как $f(N) \subseteq N$ и модуль X малоинъективен, то $(f - g)(N) = 0$ для некоторого эндоморфизма g модуля X. Теперь пункт 1 следует из пункта 3 леммы 5.

2. Утверждение 2 следует из пункта 1.

3. Пусть $x \in N$. Тогда $f(x) \in X$. По условию $(f^2 - f)(x) \in X$. Поэтому $f^2(x) = (f^2 - f)(x) + f(x) \in X$. По пункту 2 $f(X) \subseteq X$.

4. Утверждение 4 следует из пункта 3. □

Лемма 8. *Пусть* X *— малоинъективный модуль,* $\bar{X}$ *— инъективная оболочка модуля* X *и* $\mathrm{sg}(X)$ *— идеал кольца* $\mathrm{End}(X)$*, образованный всеми эндоморфизмами, ядра которых являются существенными подмодулями в* X*.*

1. *Если* $\alpha(Z) \subseteq Z$ *для любого* $\alpha \in \mathrm{sg}(X)$ *и каждого существенного подмодуля* Z *в* X*, то* X *— вполне целозамкнутый модуль.*
2. *Если каждый существенный подмодуль* Y *в* X *вполне инвариантен в* X*, то* X *— вполне целозамкнутый модуль. В частности, если* X *— инвариантный модуль, то* X *— вполне целозамкнутый модуль.*
3. *Если* $\mathrm{sg}(X) = 0$*, то* X *— вполне целозамкнутый модуль.*
4. *Если модуль* X *несингулярен, то* X *— вполне целозамкнутый модуль.*
5. *Если* X *— конечная прямая сумма инвариантных модулей, то* X *— вполне целозамкнутый модуль.*
6. *Если* X *— цепной модуль и* α *— автоморфизм модуля* $\bar{X}$ *с условием* $\alpha(X) \nsubseteq X$*, то* $\alpha^{-1}(X) \subseteq X$*.*
7. *Если* X *— цепной модуль и* $\mathrm{sg}(X) \subseteq J\big(\mathrm{End}(X)\big)$*, то* X *— вполне целозамкнутый модуль.*

Доказательство. 1. Пусть $h \in \mathrm{sg}(\bar{X})$. По лемме 6 достаточно доказать, что $h(X) \subseteq X$. Обозначим через Y сумму всех подмодулей в X, переходящих в себя под действием h. Так как $X \cap \mathrm{Ker}(h) \subseteq Y$, то Y — существенный подмодуль в X. Поскольку $h(Y) \subseteq Y$ и модуль X малоинъективен, то $(h - g)(Y) = 0$ для некоторого эндоморфизма g модуля X. Так как $g\big(X \cap \mathrm{Ker}(h)\big) = 0$, то $g \in \mathrm{sg}(X)$. Обозначим $Z = \{x \in X \mid (h - g)(x) \in Y\}$, $Z^* = \{x \in X \mid h(x) \in X\}$. Так как $h(Z) \subseteq (h - g)(Z) + g(Z) \subseteq X$, то $Z \subseteq Z^* \subseteq X$. Кроме того, $Y \subseteq Z$, Z — существенный подмодуль в X и $(h - g)(Z) \subseteq Y \subseteq Z$. Существует такой гомоморфизм $\beta^*\colon Z^*/Y \to X$, что $\beta^*(z^* + Y) = (h - g)(z^*) \in X$. Тогда $Z/Y = \{z^* + Y \in Z^*/Y \mid \beta^*(z^* + Y) \in Y\}$. Так как Y — существенный подмодуль в X, то Z/Y — существенный подмодуль в Z^*/Y. Так как модуль X малоинъективен и $(h - g)(Z) \subseteq Z$, то $(h - g - f)(Z) = 0$ для некоторого эндоморфизма f модуля X. Так как $f(Y) = (h - g)(Y) = 0$, то $f \in \mathrm{sg}(X)$. Тогда

$f+g \in \mathrm{sg}(X)$. По условию $(g+f)(Z) \subseteq Z$. Кроме того, $(h-g-f)(Z)=0$. Поэтому $h(Z)=(g+f)(Z) \subseteq Z$. Так как Y — сумма всех подмодулей в X, переходящих в себя под действием h, то $Z \subseteq Y \subseteq Z$ и $Z=Y$. Кроме того, Z/Y — существенный подмодуль в Z^*/Y. Поэтому $Z^*/Y=0$ и $Z^*=Y$. По пункту 3 леммы 5 $h(X) \subseteq X$.

2, 3. Утверждения 2 и 3 вытекают из 1.

4. Утверждение 4 вытекает из пункта 3 и того, что $\mathrm{sg}(X)=0$ для несингулярного модуля X.

5. Утверждение 5 вытекает из пункта 2 и леммы 6.

6. Обозначим $N=\{x \in X \mid \alpha^{-1}(x) \in X\}$. Тогда $\alpha^{-1}(N)=\{x \in X \mid \alpha(x) \in X\}$. По пункту 1 леммы 7, применённому к α^{-1}, достаточно доказать, что $\alpha^{-1}(N) \subseteq N$. Допустим, что $\alpha^{-1}(N) \not\subseteq N$. Так как X — цепной модуль, то $N \subseteq \alpha^{-1}(N)$. Тогда $\alpha\big(\alpha^{-1}(N)\big) \subseteq \alpha^{-1}(N)$. Так как $\alpha^{-1}(N)=\{x \in X \mid \alpha(x) \in X\}$, то из пункта 1 леммы 7, применённого к α, вытекает, что $\alpha(X) \subseteq X$. Получено противоречие.

7. Пусть $h \in \mathrm{sg}(\bar{X})$ и $K=X \cap \mathrm{Ker}(h)$. По лемме 6 достаточно доказать, что $h(X) \subseteq X$. По пункту 1 леммы 4 $\mathrm{sg}(\bar{X})=J\big(\mathrm{End}(\bar{X})\big)$. Поэтому $1-h$ — автоморфизм модуля $\bar{X}$, действующий тождественно на существенном подмодуле K модуля X. Тогда автоморфизм $(1-h)^{-1}$ модуля $\bar{X}$ действует тождественно на существенном подмодуле K модуля X. Если $(1-h)(X) \subseteq X$, то $h(X) \subseteq X+(1-h)(X) \subseteq X$, и всё доказано.

Допустим, что $(1-h)(X) \not\subseteq X$. По пункту 6 $(1-h)^{-1}(X) \subseteq X$. Поэтому существует такой эндоморфизм f модуля X, что $f(x)=(1-h)^{-1}(x)$ для всех $x \in X$. Кроме того, $(1-f)(K)=0$, поскольку $(1-h)^{-1}$ действует тождественно на K. Поэтому $1-f \in \mathrm{sg}(X)$. Кроме того, $\mathrm{sg}(X) \subseteq J\big(\mathrm{End}(X)\big)$ по условию. Поэтому $f=1-(1-f)$ — автоморфизм модуля X. Так как $f(x)=(1-h)^{-1}(x)$ для всех $x \in X$, то $(1-h)^{-1}(X)=X$. Поэтому $X=(1-h)(X)$. Получено противоречие, так как $(1-h)(X) \not\subseteq X$. $\square$

Лемма 9 [3, 19.3]. *Модуль M является самоинъективным в точности тогда, когда M — вполне инвариантный подмодуль своей инъективной оболочки.*

Лемма 10. *Пусть M — существенное расширение вполне целозамкнутого модуля X.*

1. *$f(X) \subseteq X$ для любого эндоморфизма f модуля M, переводящего в себя некоторый существенный подмодуль модуля X.*
2. *Если f — эндоморфизм модуля M и $\mathrm{Ker}(f)$ — существенный подмодуль в M, то $f(X) \subseteq X$.*
3. *Если X — существенное расширение некоторого модуля Y, который вполне инвариантен в M, то X — вполне инвариантный подмодуль в M.*
4. *Если X — существенное расширение самоинъективного модуля Y, то X — самоинъективный вполне инвариантный подмодуль в M.*
5. *Если X — существенное расширение полупростого модуля, то X — самоинъективный вполне инвариантный подмодуль в M.*

Доказательство. 1. По условию $f(Y) \subseteq Y$ для некоторого существенного подмодуля Y в X. Обозначим через X_1 модуль $X \cap f^{-1}(X)$ и через $f_1 \in \mathrm{Hom}(X_1, X)$ — ограничение гомоморфизма f на модуль X_1. Так как $Y \subseteq X_1$ и $f_1(Y) = f(Y) \subseteq Y$, то гомоморфизм $f_1 \colon X_1 \to X$ переводит в себя существенный подмодуль вполне целозамкнутого модуля X. Поэтому f_1 продолжается до гомоморфизма $g \colon X \to X$. По пункту 3 леммы 5 $f(X) \subseteq X$.

2. Обозначим $Y = X \cap \mathrm{Ker}(f)$. Тогда Y — существенный подмодуль в X и $f(Y) = 0 \subseteq Y$. По пункту 1 $f(X) \subseteq X$.

3. Утверждение 3 следует из пункта 1.

4. Пусть M' — инъективная оболочка модуля M. Тогда M' — существенное расширение модуля Y, поскольку M' — существенное расширение модуля M, M — существенное расширение модуля X и X — существенное расширение модуля Y. По лемме 9 Y — вполне инвариантный подмодуль в M и M'. По пункту 3 X — вполне инвариантный подмодуль в M и M'. По лемме 9 модуль X самоинъективен.

5. Так как все полупростые модули самоинъективны, то пункт 5 следует из пункта 4. □

Лемма 11. *Для модуля X равносильны следующие условия*:

1) *X — вполне целозамкнутый неразложимый модуль*;
2) *X — равномерный модуль и либо X — самоинъективный модуль с локальным кольцом $\mathrm{End}(X)$ и $\mathrm{sg}(X) = J\big(\mathrm{End}(X)\big)$, либо X — малоинъективный модуль и каждый его ненулевой эндоморфизм является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть M — инъективная оболочка модуля X.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По лемме 3 X — малоинъективный равномерный модуль. Если каждый ненулевой эндоморфизм модуля X является мономорфизмом, то всё доказано. Допустим, что существует ненулевой эндоморфизм $g \in \mathrm{End}(X)$ с ненулевым ядром. Эндоморфизм g продолжается до ненулевого эндоморфизма $h \in \mathrm{sg}(M)$. Обозначим через Y ненулевой вполне инвариантный подмодуль $\sum\limits_{f \in \mathrm{sg}(M)} f(M)$ инъективного равномерного модуля M. По лемме 6 $Y \subseteq X$. По пункту 3 леммы 10 X — вполне инвариантный подмодуль в M. По лемме 9 модуль X самоинъективен. Так как X — неразложимый самоинъективный модуль, то по пункту 2 леммы 4 $\mathrm{End}(X)$ — локальное кольцо и $\mathrm{sg}(X) = J\big(\mathrm{End}(X)\big)$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Без ограничения общности можно считать, что X — малоинъективный модуль и каждый его ненулевой эндоморфизм является мономорфизмом. По пункту 3 леммы 8 X — вполне целозамкнутый модуль. □

Лемма 12 [9, утверждение 2, следствие 1]. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *все циклические правые A-модули квазинепрерывны*;

2) $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, *где* A_i — *либо простое артиново кольцо, либо равномерное справа кольцо, над которым все циклические правые модули квазинепрерывны*, $i = 1, \ldots, n$.

При выполнении этих условий каждый циклический правый A-модуль является конечной прямой суммой циклических равномерных модулей.

Лемма 13. *Пусть M — модуль и все его фактор-модули квазинепрерывны.*

1. *Если все фактор-модули модуля M неразложимы, то M — цепной модуль.*
2. *Если M — циклический модуль над локальным кольцом, то M — цепной модуль.*

Доказательство. 1. Пусть X и Y — подмодули в M, $X \not\subseteq Y$ и

$$h\colon M \to M/(X \cap Y) —$$

естественный эпиморфизм. Неразложимый квазинепрерывный модуль $h(M)$ равномерен. Кроме того, $h(X) \cap h(Y) = h(0)$ и $h(X) \neq h(0)$. Тогда $h(Y) = h(0)$ и $Y = X \cap Y \subseteq X$.

2. Так как все фактор-модули циклических модулей цикличны, то пункт 2 вытекает из пункта 1 и того, что все циклические модули над локальными кольцами неразложимы. □

Лемма 14 [2]. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — цепная справа область и A_A — вполне целозамкнутый модуль*;
2) *A — цепная слева область и A_A — вполне целозамкнутый модуль*;
3) *A — цепная справа область и модуль A_A малоинъективен*;
4) *A — цепная слева область и модуль A_A малоинъективен*;
5) *A — инвариантная цепная область с не более чем двумя первичными идеалами.*

Лемма 15. *Пусть A — кольцо.*

1. *Модуль A_A является вполне целозамкнутым в точности тогда, когда A_A — малоинъективный модуль и существует такой идемпотент $e \in A$, что модуль eA_A несингулярен, а модуль $(1 - e)A_A$ инъективен.*
2. *Если A — несингулярное справа кольцо без нетривиальных идемпотентов, то модуль A_A вполне целозамкнут в точности тогда, когда модуль A_A малоинъективен. При этих условиях A — равномерная справа, инвариантная слева область, обладающая двусторонним классическим кольцом частных.*

Доказательство. 1. Утверждение является частным случаем предложения 2.2 из [1].

2. Утверждение является частным случаем леммы 7 из [2]. □

Лемма 16. *Пусть A — кольцо и $N_l(A)$ — множество всех его левых делителей нуля. Равносильны следующие условия*:

1) *кольцо A не имеет нетривиальных идемпотентов и A_A — вполне целозамкнутый модуль*;
2) *A — равномерное справа кольцо и либо A — инъективное справа локальное кольцо и $J(A) = \mathrm{sg}(A_A) = \mathrm{Sing}(A_A) = N_{\mathrm{l}}(A)$, либо A — инвариантная слева область и A_A — малоинъективный модуль.*

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из пункта 2 леммы 15 и того, что каждый самоинъективный модуль вполне целозамкнут.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По лемме 3 кольцо A равномерно справа. Поэтому $\mathrm{Sing}(A_A) = N_{\mathrm{l}}(A) = \mathrm{sg}(A_A)$. По пункту 1 леммы 15 можно считать, что равномерный модуль A_A либо инъективен, либо несингулярен. Теперь применяем лемму 11 и пункт 2 леммы 15. $\square$

Лемма 17. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — цепное справа, вполне целозамкнутое справа кольцо*;
2) *A — цепное справа, малоинъективное справа кольцо*;
3) *либо A — инвариантная цепная область, имеющая не более двух первичных идеалов, либо A — инъективное справа, цепное справа и слева кольцо.*

Доказательство. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) следует из леммы 14.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) следует из леммы 3.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Если A — область, то по лемме 14 A — инвариантная цепная область, имеющая не более двух первичных идеалов. Допустим, что A не область. Так как A — цепное справа кольцо и $A = \mathrm{End}(A_A)$, то $\mathrm{sg}(A_A) = J(A)$. По пункту 7 леммы 8 A_A — вполне целозамкнутый модуль. По лемме 16 A — инъективное справа кольцо.

Пусть $x, y \in A$. Так как A — цепное справа кольцо, то либо $r(y) \subseteq r(x)$, либо $r(x) \subseteq r(y)$. Поэтому либо существует гомоморфизм $f\colon yA \to xA$ с условием $f(y) = x$, либо существует гомоморфизм $g\colon xA \to yA$ с условием $g(x) = y$. Кроме того, кольцо A инъективно справа. Поэтому либо существует элемент $a \in A$ с условием $ay = x$, либо существует элемент $b \in A$ с условием $bx = y$. Следовательно, A — цепное слева кольцо. $\square$

Лемма 18 [4]. *Пусть A — цепное кольцо и $xA \subseteq Ax$ или $Ax \subseteq xA$ для любого элемента $x \in A$.*

1. *В A каждый первичный идеал вполне первичен.*
2. *Если A — кольцо с условием минимальности для первичных идеалов, то A — инвариантное кольцо.*

Лемма 19. *Пусть A — локальное кольцо, все циклические правые A-модули вполне целозамкнуты и A не область.*

1. *A — инъективное справа, цепное (справа и слева) кольцо.*
2. *$Jx \subseteq xA$ для любого $x \in A$.*
3. *$xA \subseteq Ax$ или $Ax \subseteq xA$ для любого элемента $x \in A$.*

4. A — *инвариантное цепное кольцо с ненулевым первичным радикалом* P, A/P — *область и* A *имеет не более двух первичных идеалов.*

Доказательство. 1. По пункту 2 леммы 13 A — цепное справа кольцо. По лемме 17 A — инъективное справа, цепное слева кольцо.

2. Обозначим $J = J(A)$. По пункту 3 леммы 4 при естественном изоморфизме $A \to \mathrm{End}(A_A)$ идеал J переходит на идеал $\mathrm{sg}(A_A)$. Если $0 \neq x \in A$, то инъективный цепной модуль A_A — инъективная оболочка циклического вполне целозамкнутого модуля xA, откуда по лемме 6 следует, что $JxA \subseteq xA$.

3. Допустим, что $x \in A$, $xa \notin Ax$ и $bx \notin xA$ для некоторых $a, b \in A$. Так как A — цепное кольцо по пункту 1, то $x = cxa = bxd = cbxda$ для некоторых $c, d \in A$. Если элемент c обратим, то $xa = c^{-1}cxa = c^{-1}x \in Ax$, и получаем противоречие. Если элемент d обратим, то $bx = bxd\,d^{-1} = xd^{-1} \in xA$, и получаем противоречие. Поэтому $c, d \in J$ и $x = cbxda \in JxJ$, причём $Jx \subseteq xA$.Поэтому $x \in JxJ \subseteq xJ$ и $x = xy$ для некоторого $y \in J$. Тогда элемент $1 - y$ обратим и $x(1 - y) = 0$, откуда следует, что $x = 0$, $xa \in Ax$, и получаем противоречие.

4. Первичный радикал P цепного кольца A является первичным идеалом. По пункту 3 этой леммы и пункту 1 леммы 18 первичный идеал P вполне первичен. Тогда A/P — цепная область, над которой все циклические правые модули вполне целозамкнуты. По теореме А A/P — инвариантная цепная область и A/P имеет не более двух первичных идеалов. Так как каждый первичный идеал кольца A содержит первичный радикал P, то кольцо A имеет не более двух первичных идеалов. По пункту 2 леммы 18 A — инвариантное кольцо. □

Лемма 20. *Для кольца* A *равносильны следующие условия*:

1) A — *локальное кольцо и все циклические правые* A*-модули вполне целозамкнуты*;
2) A — *инвариантное цепное кольцо,* A *имеет не более двух первичных идеалов и либо* A — *область, либо для любого нильпотентного непервичного идеала* B *кольца* A *фактор-кольцо* A/B *инъективно справа.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По теореме А можно считать, что A не область. По пункту 4 леммы 19 A — инвариантное цепное кольцо с ненулевым первичным радикалом P, A/P — область и A имеет не более двух первичных идеалов. Пусть B — нильпотентный непервичный идеал кольца A. Тогда B строго содержится в P. Поэтому A/B не область. Так как A/B — локальное кольцо и все циклические правые модули над A/B вполне целозамкнуты, то по пункту 4 леммы 19 кольцо A/B инъективно справа.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть B — идеал инвариантного кольца A. Достаточно доказать, что фактор-кольцо A/B является вполне целозамкнутым правым модулем над кольцом A/B. Первичный радикал P инвариантного цепного кольца A является вполне первичным идеалом. Тогда A/P — инвариантная цепная область и A/P имеет не более двух первичных идеалов. Если $P \subseteq B$, то по теореме А A/B — вполне целозамкнутый правый модуль над A/B. Допустим, что $B \subsetneq P$ и $p \in P \setminus B$. Так как A — инвариантное цепное кольцо, то pA — нильпотентный идеал и $B \subset pA$. Тогда B — нильпотентный непервичный идеал. По условию кольцо A/B инъективно справа. Поэтому A/B — вполне целозамкнутый правый модуль над A/B. □

Лемма 21. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *все циклические правые A-модули вполне целозамкнуты*;
2) *$A = A_1 \times \ldots \times A_n$ и A_i либо простое артиново кольцо, либо равномерное справа кольцо, над которым все циклические правые модули вполне целозамкнуты и конечномерны, $i = 1, \ldots, n$*;
3) *$A = A_1 \times \ldots \times A_n$ и для любого i верно, что либо A_i — простое артиново кольцо, либо A_i — инвариантная слева, равномерная справа область, над которой все циклические правые модули вполне целозамкнуты, либо A_i — инвариантное цепное кольцо, A_i имеет не более двух первичных идеалов и для любого нильпотентного непервичного идеала B кольца A_i фактор-кольцо A_i/B инъективно справа.*

Доказательство. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из леммы 20.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) проверяется непосредственно.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) вытекает из лемм 3 и 12.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Без ограничения общности можно считать, что $A = A_i$ — равномерное справа кольцо. Если A — область, то по лемме 15 область A инвариантна слева. Остаётся рассмотреть случай, когда равномерное справа кольцо A не является областью. По лемме 11 A — инъективное справа, локальное кольцо. Теперь применяем лемму 20. □

Замечание 22 (окончание доказательства теоремы 1). Так как все модули над простыми артиновыми кольцами инъективны, то по лемме 21 можно считать, что A — равномерное справа кольцо. Кроме того, равномерное справа кольцо A является полусовершенным в точности тогда, когда A — локальное кольцо. Теперь применяем лемму 20.

Лемма 23. *Пусть A — кольцо и все циклические правые A-модули вполне целозамкнуты.*

1. *Если A имеет существенный нильпотентный левый идеал, то A — инвариантное кольцо и A — конечное прямое произведение цепных колец.*
2. *Если A — область, то A — инвариантная слева, равномерная справа, вполне целозамкнутая справа область и для любого её ненулевого идеала B фактор-кольцо A/B — конечное прямое произведение инвариантных цепных колец.*

Доказательство. 1. Так как A имеет существенный нильпотентный левый идеал, то кольцо A не имеет прямых сомножителей, являющихся простыми артиновыми кольцами или областями. Тогда из леммы 21 следует, что A — конечное прямое произведение инвариантных цепных колец. В частности, A — инвариантное кольцо.

2. По лемме 21 A — инвариантная слева, равномерная справа область. Пусть B — ненулевой собственный идеал в A, содержащий ненулевой необратимый элемент b. Пусть $h\colon A \to A/(Ab^2)$ — естественный кольцевой эпиморфизм. Так как A — инвариантная слева область и $Ab \neq A$, то Ab^2 — идеал, $b \notin Ab^2$ и $h(Ab)$ — ненулевой нильпотентный идеал кольца $h(A)$.

Докажем, что нильпотентный идеал $h(Ab)$ кольца $h(A)$ является существенным левым идеалом в $h(A)$. Пусть $a \in A$ и $h(a) \neq h(0)$. Тогда $h(ab) \in h(Aa) \cap h(Ab)$. Остаётся доказать, что $h(ab) \neq h(0)$. Допустим противное. Тогда $ab = cb^2$ для некоторого $c \in A$. Поэтому $a = cb$, $h(a) = h(cb) = h(0)$, и получаем противоречие.

Так как $h(A)$ имеет существенный нильпотентный левый идеал, то по пункту 1 $h(A)$ — конечное прямое произведение инвариантных цепных колец. Так как $Ab^2 \subseteq B$, то A/B — гомоморфный образ кольца $h(A)$. Поэтому A/B — конечное прямое произведение инвариантных цепных колец. $\square$

Лемма 24. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *A — ограниченная справа область и все циклические правые A-модули вполне целозамкнуты*;
2) *A — вполне целозамкнутая справа, инвариантная область и для любого её ненулевого идеала B фактор-кольцо A/B — конечное прямое произведение инвариантных цепных колец $A_1, \ldots, A_n$, причём каждое кольцо A_i имеет не более двух первичных идеалов и либо A_i — область, либо для любого нильпотентного непервичного идеала B кольца A_i фактор-кольцо A_i/B инъективно справа.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По пункту 2 леммы 23 A — инвариантная слева, вполне целозамкнутая справа область. Пусть C — произвольный ненулевой правый идеал области A. По условию C содержит некоторый ненулевой идеал D области A. По пункту 2 леммы 23 фактор-кольцо A/D инвариантно справа. Поэтому C — идеал области A, и область A инвариантна. Пусть B — произвольный ненулевой идеал области A. По пункту 2 леммы 23 фактор-кольцо A/B является конечным прямым произведением инвариантных цепных колец $A_1, \ldots, A_n$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Достаточно доказать, что для любого ненулевого идеала B инвариантной области A кольцо A/B является вполне целозамкнутым правым A/B-модулем. Это вытекает из леммы 20 и того, что конечное прямое произведение вполне целозамкнутых справа колец является вполне целозамкнутым справа кольцом. $\square$

Замечание 25 (окончание доказательства теоремы 2). Теорема 2 вытекает из лемм 21 и 24.

Предложение 26. *Для кольца A равносильны следующие условия*:

1) *все циклические правые A-модули и все циклические левые A-модули являются вполне целозамкнутыми модулями*;

2) $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ *и для любого* i *либо* A_i *— простое артиново кольцо, либо* A_i *— инвариантное цепное кольцо с не более чем двумя первичными идеалами, причём для любого нильпотентного идеала* B *кольца* A_i *фактор-кольцо* A_i/B *инъективно, либо* A_i *— инвариантная вполне целозамкнутая область, у которой для любого ненулевого идеала* B *фактор-кольцо* A_i/B *является конечным прямым произведением инвариантных цепных колец* $A_{i1}, \ldots, A_{ik(i)}$, *причём кольцо* A_{ij} *либо инъективно, либо является областью с не более чем двумя первичными идеалами,* $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k(i)$.

Предложение 26 вытекает из теоремы 2 и леммы 21.

Модуль M называется *малопроективным*, если каждый эндоморфизм любого его фактор-модуля поднимается до эндоморфизма модуля M; это означает, что для каждого эндоморфизма $\bar{f}$ произвольного фактор-модуля M/X модуля M существует такой эндоморфизм f модуля M, что $hf = \bar{f}h$, где $h\colon M \to M/X$ — естественный эпиморфизм.

Лемма 27. *Для модуля* M *равносильны следующие условия*:

1) *модуль* M *малопроективен и все его фактор-модули малоинъективны*;
2) *модуль* M *малоинъективен и все его подмодули малопроективны.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть N — подмодуль модуля M, $\bar{f}$ — эндоморфизм фактор-модуля $\bar{N} = N/P$ и $h\colon M \to M/P$ — естественный эпиморфизм. Так как модуль M/P малоинъективен, то $\bar{f}$ продолжается до эндоморфизма $\bar{g}$ модуля M/P. Поскольку модуль M малопроективен, то $\bar{g}h = hg$ для некоторого эндоморфизма g модуля M. Поэтому $g(N) \subseteq N$. Тогда g индуцирует эндоморфизм f модуля N и $\bar{f}h_N = h_N f$, где $h_N\colon N \to N/P$ — естественный эпиморфизм. Поэтому модуль N малопроективен.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть M/N — фактор-модуль модуля M, $\bar{X}$ — подмодуль модуля M/N и $\bar{f}$ — эндоморфизм модуля $\bar{X}$. Существует такой подмодуль X модуля M, что $N \subseteq X$ и $\bar{X} = X/N$. Пусть $h\colon X \to X/N$ — естественный эпиморфизм. По условию модуль X малопроективен. Поэтому $\bar{f}h = hf$ для некоторого эндоморфизма f модуля X с условием $f(N) \subseteq N$. Так как модуль M малоинъективен, то f продолжается до некоторого эндоморфизма g модуля M. Поскольку $g(N) = f(N) \subseteq N$, то g индуцирует эндоморфизм $\bar{g}$ модуля M/N. Так как $\bar{g}$ совпадает с $\bar{f}$ на модуле $\bar{X}$, то модуль M/N малоинъективен. □

Лемма 28. *Для кольца* A *равносильны следующие условия*:

1) *все циклические правые* A*-модули малоинъективны*;
2) A *малоинъективно справа и все его правые идеалы являются малопроективными правыми* A*-модулями*;
3) $A = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$, *где* A_i *— либо простое артиново кольцо, либо равномерное справа кольцо, над которым все циклические правые модули малоинъективны и конечномерны,* $i = 1, \ldots, n$;

4) $A = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$, *где* A_i *— либо простое артиново кольцо, либо малоинъективное справа равномерное справа кольцо, в котором все правые идеалы малопроективны,* $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 2) следует из леммы 27 и того, что модуль A_A проективен.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 3) следует из леммы 12 и того, что по лемме 3 каждый малоинъективный модуль квазинепрерывен.

Эквивалентность 3) $\Longleftrightarrow$ 4) следует из эквивалентности 1) $\Longleftrightarrow$ 2).

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Так как над простым артиновым кольцом все модули инъективны, то все циклические правые A_i-модули малоинъективны, $i = 1, \ldots, n$. Так как $A = \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$, то непосредственно проверяется, что все циклические правые A-модули малоинъективны. $\square$

Предложение 29. *Для кольца* A *равносильны следующие условия*:

1) *все циклические правые* A*-модули вполне целозамкнуты*;
2) $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ *и для любого* i *верно, что либо* A_i *— простое артиново кольцо, либо* A_i *— инвариантное цепное кольцо,* A_i *имеет не более двух первичных идеалов и для любого нильпотентного непервичного идеала* B *кольца* A_i *фактор-кольцо* A_i/B *инъективно справа, либо* A_i *— вполне целозамкнутая справа, инвариантная слева, равномерная справа область, в которой все правые идеалы малопроективны, причём* $h(X) \subseteq X$ *для любого циклического правого* A_i*-модуля* X *с инъективной оболочкой* $\bar{X}$ *и каждого* $h \in \operatorname{sg} \bar{X}$.

Предложение 29 вытекает из лемм 28, 21 и 6.

Литература

[1] Туганбаев А. А. Вполне целозамкнутые модули и кольца // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 8. — С. 213—228.

[2] Туганбаев А. А. Вполне целозамкнутые модули и кольца. II // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 3. — С. 237—243.

[3] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. — М.: Мир, 1979.

[4] Brungs H. H., Törner G. Chain rings and prime ideals // Arch. Math. — 1976. — Vol. 27. — P. 253—260.

[5] Goel V. K., Jain S. K. π-injective modules and rings whose cyclics are π-injective // Commun. Algebra. — 1978. — Vol. 6, no. 1. — P. 59—73.

[6] Jeremy L. Modules et anneaux quasi-continus // Can. Math. Bull. — 1974. — Vol. 17, no. 2. — P. 217—228.

[7] Koehler A. Rings with quasi-injective cyclic modules // Quart. J. Math. Oxford Ser. 2. — 1974. — Vol. 25. — P. 51—55.

[8] Osofsky B. L. Rings all of whose finitely generated modules are injective // Pacific J. Math. — 1964. — Vol. 14. — P. 645—650.

[9] Osofsky B. L., Smith P. F. Cyclic modules whose quotients have all complement submodules direct summands // J. Algebra. — 1991. — Vol. 139. — P. 342—354.