E-разрешимые модули*

А. Р. ЧЕХЛОВ
Томский государственный университет
e-mail: cheklov@math.tsu.ru

УДК 512.553

Ключевые слова: коммутатор, коммутаторно инвариантный подмодуль, E-коммутант модуля, E-центр модуля, E-нормализатор.

Аннотация

Определяются E-нильпотентные и E-разрешимые модули. Доказывается ряд свойств таких модулей. Так, у E-нильпотентного модуля все его прямые слагаемые вполне инвариантны, а у E-разрешимого модуля E-коммутант содержится в пересечении всех максимальных коммутаторно инвариантных подмодулей. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых модуль конечной длины является E-разрешимым.

Abstract

A. R. Chekhlov, E-solvable modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 7, pp. 221—236.

E-nilpotent and E-solvable modules have been defined. Some properties of such modules have been proved. For instance, all direct summands of an E-nilpotent module are fully invariant, and the E-commutant of an E-solvable module is contained in the intersection of all maximal commutatorically invariant submodules. Necessary and sufficient conditions under which a finite length module is E-solvable have been found.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, модули — унитарными. Модули рассматриваются над некоторым фиксированным кольцом. Через $E(M)$ обозначается кольцо эндоморфизмов модуля M, через 1_M — тождественный его автоморфизм, через $Z(R)$ — центр кольца R. Запись $A \leqslant M$ означает, что A — подмодуль модуля M; $B \leqslant \text{fi}\, M$ означает, что B — вполне инвариантный его подмодуль, т. е. $fB \subseteq B$ для каждого $f \in E(M)$. Если $f\colon M \to N$ — некоторое отображение, то $f|H$ — ограничение f на $H \subseteq M$. Если M, N — модули, $\mathrm{Hom}(M,N)$ — их группа гомоморфизмов и $\varnothing \neq H \subseteq M$, то через $\mathrm{Hom}(M,N)H$ обозначается подмодуль в N, порождённый всеми подмножествами fH, где f пробегает группу $\mathrm{Hom}(M,N)$. Через $\langle H\rangle$ обозначается подмодуль модуля, порождённый его подмножеством $H \neq \varnothing$; $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа (или кольцо) целых чисел; $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел.

*Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы, государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.

Известно значение понятий нильпотентности и разрешимости для теории некоммутативных групп и алгебр (см., например, [1—3, 7]). Заменяя в кольце эндоморфизмов $E(M)$ модуля M операцию умножения операцией коммутирования $\varphi \circ \psi = \varphi\psi - \psi\varphi$, получаем лиево кольцо эндоморфизмов $L\big(E(M)\big)$ модуля M. В статье рассматривается действие $L\big(E(M)\big)$ на модули M и по аналогии определяются E-нильпотентные и E-разрешимые модули. Автору эти понятия в литературе не встречались.

1. *E*-центр, *E*-коммутант

Напомним, что если R — кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b; если $a_1, \ldots, a_n \in R$, то $[a_1, \ldots, a_n] = \big[[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n\big]$.

Подмодуль A модуля M назовём *коммутаторно инвариантным* (обозначение $A \leqslant \mathrm{ci}\ M$), если $[\varphi, \psi]A \subseteq A$ для всех $\varphi, \psi \in E(M)$. Ясно, что если $A \leqslant \mathrm{ci}\ M$, то $\alpha A \leqslant \mathrm{ci}\ M$ для любого $\alpha \in Z\big(E(M)\big)$. Коммутаторно инвариантные подгруппы абелевых групп изучались в [18], а в [16, 17, 21] изучались проективно инвариантные подгруппы абелевых групп, т. е. подгруппы, инвариантные относительно проекций.

Как хорошо известно, коммутатор $[x, y]$ является билинейной знакопеременной функцией от x, y. Некоторые другие свойства коммутаторов приведены в [18, 19, 22].

Свойства коммутаторов.

1. $[a, b]c = a[b, c] + [ac, b]$, $[a, b]c = [a, bc] + b[c, a]$; $c[a, b] = [c, a]b + [a, cb]$, $c[a, b] = [ca, b] + [b, c]a$.
2. *Если a — обратимый элемент кольца, то* $a[b, c] = [aba^{-1}, aca^{-1}]a$, $[b, c]a = a[a^{-1}ba, a^{-1}ca]$.
3. *Если кольцо R не имеет ненулевых нильпотентных элементов и удовлетворяет тождеству $[x_1, \ldots, x_{n+1}] = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то оно коммутативно.*

Доказательство. Свойства 1, 2 проверяются непосредственно.

Допустим, что $u = [a_1, \ldots, a_n] \neq 0$, где $a_1, \ldots, a_n \in R$, и пусть $a = [a_1, \ldots, a_{n-1}]$. Тогда $au = a(aa_n - a_n a) = [a, aa_n] \in Z(R)$ и, значит, $a_n[a, aa_n] = [a, aa_n]a_n$. Следовательно, $a_n a[a, a_n] = aa_n[a, a_n]$ или $[a, a_n]^2 = 0$. Тогда $u = [a, a_n] = 0$. Противоречие. □

E-центром модуля M назовём его подмодуль

$$Z(M) = \{a \in M \mid [\varphi, \psi]a = 0 \text{ для всех } \varphi, \psi \in E(M)\}.$$

Подмодуль

$$M' = \langle [\varphi, \psi]M \mid \varphi, \psi \in E(M) \rangle$$

назовём *E-коммутантом* модуля M.

Ясно, что если $M' \subseteq A \leqslant M$, то $A \leqslant \text{ci } M$; коммутативность кольца $E(M)$ эквивалентна любому из равенств $Z(M) = M$, $M' = 0$. Возможно равенство $M' = Z(M)$; например, если $M = A \oplus B$, где $B \leqslant \text{fi } M$, кольца $E(A)$ и $E(B)$ коммутативны и $\mathrm{Hom}(A, B)A = B$, то $M' = B = Z(M)$ (см. пункт 1 леммы 1.1 и пункт 2 леммы 1.4).

Если $a \in M$, то через $[\varphi, \psi]a$ обозначим *коммутатор* элемента a, относящейся к эндоморфизмам φ, ψ. Определим по индукции

$$M^{(0)} = M, \quad M^{(1)} = M', \ldots, \quad M^{(n+1)} = \big\langle [\varphi, \psi]\big(M^{(n)}\big) \bigm| \varphi, \psi \in E(M)\big\rangle$$

и

$$M^{(\alpha)} = \bigcap_{\rho<\alpha} M^{(\rho)}$$

при предельном ординале α.

Из свойства 1 коммутаторов следует, что E-центр и E-коммутант — вполне инвариантные подмодули.

Если $M = A \oplus B$, то, как вытекает из следующей леммы, может случиться так, что $A' = 0$ и $B' = 0$, но $M' = M$.

Лемма 1.1.

1. *Пусть $M = A \oplus B$. Тогда $M' = \langle A', B', \mathrm{Hom}(A, B)A, \mathrm{Hom}(B, A)B\rangle$. Кроме того, если для любых $a \in A$, $b \in B$ найдутся такие $x \in B$, $y \in A$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}(A, B)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(B, A)$, что $\varphi y = b$, $\psi x = a$, то каждый элемент модуля M является коммутатором.*
2. *Если $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, то $M' = \bigoplus_{i\in I} M_i'$ в точности тогда, когда $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)M_i \subseteq M_j'$ для любых $i, j \in I$, $j \neq i$.*

Доказательство. Пусть $\pi\colon M \to A$, $\theta\colon M \to B$ — проекции, $\gamma \in \mathrm{Hom}(A, B)$ и $z \in A$. Тогда если $f \in E(M)$ такой, что $f|A = \gamma$, $f|B = 1_B$, то $[\theta, f]z = \gamma z$. Это доказывает, что $\mathrm{Hom}(A, B)A \subseteq M'$. Если теперь $\xi, \eta \in E(M)$, то

$$\begin{aligned}[\xi, \eta]z &= [(\pi + \theta)\xi, (\pi + \theta)\eta]z = \\ &= [\pi\xi, \pi\eta]z + (\pi\xi\theta\eta - \pi\eta\theta\xi)z + (\theta\xi\pi\eta + \theta\xi\theta\eta - \theta\eta\pi\xi - \theta\eta\theta\xi)z.\end{aligned}$$

Здесь $[\pi\xi, \pi\eta]z \in A'$, второе слагаемое принадлежит $\mathrm{Hom}(B, A)B$, а третье $\mathrm{Hom}(A, B)A$. Продолжим φ, ψ до эндоморфизмов модуля M, полагая их действия равными нулевому эндоморфизму на соответствующих дополнительных прямых слагаемых. Тогда $[\pi, \varphi + \psi](x - y) = a + b$.

Второе утверждение вытекает из первого. □

Лемма 1.2. *Пусть $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, $\pi_i\colon M \to M_i$ — соответствующие проекции. Тогда*

1) *если $A \leqslant M$, то $A \leqslant \text{ci } M$ в том и только в том случае, когда $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)\pi_i A \subseteq A \cap M_j$ и $[\varphi_i, \psi_i]\pi_i A \subseteq A \cap M_i$ для любых $\varphi_i, \psi_i \in E(M_i)$, где $i, j \in I$ и $j \neq i$;*

2) *если* $A_i \leqslant \mathrm{ci}\ M_i$, *то* $A = \bigoplus_{i\in I} A_i \leqslant \mathrm{ci}\ M$ *в том и только в том случае, когда* $\mathrm{Hom}(M_i, M_j)A_i \subseteq A_j$ *для всех* $i, j \in I$, *где* $j \neq i$;
3) *если* $M_i \leqslant \mathrm{fi}\ M$ *и* $A_i \leqslant M_i$, *то* $A = \bigoplus_{i\in I} A_i \leqslant \mathrm{ci}\ M$ *в том и только в том случае, когда* $A_i \leqslant \mathrm{ci}\ M_i$ *для всех* $i \in I$;
4) *коммутаторно инвариантный подмодуль* A *модуля* M *является его вполне инвариантный подмодулем в том и только в том случае, когда* $\pi_i A = A \cap M_i$ *и* $A \cap M_i \leqslant \mathrm{fi}\ M_i$ *для каждого* $i \in I$;
5) *если для каждого* M_i *найдётся* M_j $(j \neq i)$ *со свойством* $M_i \cong M_j$, *то все коммутаторно инвариантные подмодули модуля* M *являются вполне инвариантными.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Необходимость. Пусть $f \in \mathrm{Hom}(M_i, M_j)$, $B_i = \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} M_j$. Продолжим f до $\bar f \in E(M)$, полагая $\bar f|M_i = f$, $\bar f|B_i = 0$. Тогда если $a_i + b_i \in A$ $(a_i \in M_i,\ b_i \in B_i)$, то $[\bar f, \pi_i](a_i + b_i) = f a_i \in A \cap M_j$. Необходимость включения $[\varphi_i, \psi_i]\pi_i A \subseteq A \cap M_i$ очевидна.

Достаточность. Пусть $B_i = \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} M_j$, $\theta\colon M \to B_i$ — проекция, $1 - \theta = \pi$. Тогда $\pi = \pi_i$ и если $\alpha, \beta \in E(M)$ и $a = \pi x$ для некоторого $x \in A$, то

$$\begin{aligned}
&[\alpha, \beta]a = [(\pi + \theta)\alpha, (\pi + \theta)\beta]a = \\
&\quad = [\pi\alpha, \pi\beta]a + [\pi\alpha, \theta\beta]a + [\theta\alpha, \pi\beta]a + [\theta\alpha, \theta\beta]a = \\
&\quad = [\pi\alpha, \pi\beta]a + (\pi\alpha\theta\beta - \pi\beta\theta\alpha)a + (\theta\alpha\pi\beta + \theta\alpha\theta\beta - \theta\beta\pi\alpha - \theta\beta\theta\alpha)a.
\end{aligned}$$

Учитывая свойства подмодуля A, получаем

$$\begin{aligned}
&[\pi\alpha, \pi\beta]a \in [\pi\alpha, \pi\beta]\pi A \subseteq A \cap M_i, \\
&(\pi\alpha\theta\beta - \pi\beta\theta\alpha)a \in \mathrm{Hom}(B_i, M_i)\theta A = \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \mathrm{Hom}(M_j, M_i)\pi_j A \subseteq A \cap M_i, \\
&(\theta\alpha\pi\beta + \theta\alpha\theta\beta - \theta\beta\pi\alpha - \theta\beta\theta\alpha)a \in \\
&\quad \in \mathrm{Hom}(M_i, B_i)\pi A = \sum_{j\in I\setminus\{i\}} \mathrm{Hom}(M_i, M_j)\pi A \subseteq \sum_{j\in I\setminus\{i\}} (A \cap M_j).
\end{aligned}$$

Поскольку $x = \pi_1 x + \ldots + \pi_n x$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, где $\pi_j = \pi_{i_j}$, и $i_j \in I$, $j = 1, \ldots, n$, то $[\alpha, \beta]x \in A$.

Утверждения 2)—4) вытекают из 1).

Докажем утверждение 5). Если $A \leqslant \mathrm{ci}\ M$, то в данном случае $A = \bigoplus (A \cap M_i)$. Действительно, если π — проекция M на M_i и $\pi a = x$ для некоторого $a \in A$, то при условии, что $\varphi\colon M_i \to M_j$ и $\psi\colon M_j \to M_i$ — взаимно обратные изоморфизмы, имеем $b = \varphi x \in A \cap M_j$ и $x = \psi b \in A \cap M_i$. Аналогично показывается, что $fx \in A \cap M_i$ для любого $f \in E(M_i)$. Этого в силу п. 4) достаточно для вполне инвариантности A. $\square$

Из пункта 1) леммы 1.2 следует, что коммутаторно инвариантные прямые слагаемые всякого модуля вполне инвариантны.

Существуют не вполне инвариантные коммутаторно инвариантные подмодули. Действительно, пусть a, b — элементы абелевой группы с порядками $\mathrm{o}(a) = p$, $\mathrm{o}(b) = p^3$, $A = \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle$ и $H = \langle a + pb \rangle$. Для подгруппы H выполнены условия пункта 1) леммы 1.2, поэтому $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$, однако $H \not\leqslant \mathrm{fi}\ A$.

Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 1.3.

1. *Пусть $A \leqslant \mathrm{ci}\ M$. Тогда*
   а) *если B — прямое слагаемое модуля M и π — проекция M на B, то $A \cap B$, $\pi A \leqslant \mathrm{ci}\ B$;*
   б) *если $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, $\pi_i \colon M \to M_i$ — соответствующие проекции и $A_0 = \bigoplus_{i \in I} (A \cap M_i)$, $A^0 = \bigoplus_{i \in I} (\pi_i A)$, то $A_0, A^0 \leqslant \mathrm{ci}\ M$, $A_0 \leqslant A \leqslant A^0$ и $A_0 = A^0$, если и только если $A = \bigoplus_{i \in I} (A \cap M_i)$.*
2. *Если $M = B \oplus G$, где $G \leqslant \mathrm{fi}\ M$ и $A \leqslant \mathrm{ci}\ B$, то $A \oplus \mathrm{Hom}(B, G)A \leqslant \mathrm{ci}\ M$.*

Несложно проверяется, что если $H \leqslant \mathrm{fi}\ G$ и $G \leqslant \mathrm{ci}\ A$, то $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$; если $H \leqslant \mathrm{ci}\ G$ и $G \leqslant \mathrm{fi}\ A$, то $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$. Как показывает пример 3 из [18], может случиться так, что $H \leqslant \mathrm{ci}\ G$, $G \leqslant \mathrm{ci}\ A$, но $H \not\leqslant \mathrm{ci}\ A$.

В [18, теорема 7] найдены наименьшая коммутаторно инвариантная подгруппа, содержащая данное прямое слагаемое, а также наибольшая коммутаторно инвариантная подгруппа, содержащаяся в данном прямом слагаемом.

Лемма 1.4.

1. *Пусть $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ и $A_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} M_j$. Тогда*
   а) *$Z(M) = \bigoplus_{i \in I} (Z(M) \cap M_i)$;*
   б) *если для всякого $i \in I$ и любого $0 \neq a \in M_i$ существует $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_i, A_i)$ со свойством $\varphi a \neq 0$, то $Z(M) = 0$;*
   в) *$\varphi(Z(M) \cap M_i) = 0$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_i, A_i)$;*
   г) *$Z(M) \cap M_i \subseteq Z(M_i)$. Равенство $Z(M) \cap M_i = Z(M_i)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi\bigl(Z(M_i)\bigr) = 0$ для любого $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_i, A_i)$.*
2. *Если $M = A \oplus B$ и $B \leqslant \mathrm{fi}\ M$, то $Z(M) = G \oplus Z(B)$, где $G = Z(A) \cap \cap \Bigl(\bigcap_{\varphi \in \mathrm{Hom}(A,B)} \ker \varphi \Bigr)$.*

Доказательство. Утверждение а) следует из вполне инвариантности E-центра.

Докажем утверждение б). Пусть $a = a_1 + \ldots + a_n \in Z(M)$, где $0 \neq a_j \in M_{i_j}$ ($j = 1, \ldots, n$, $i_j \in I$), $\theta \colon M \to A_{i_1}$ — проекция и $\varphi \in \mathrm{Hom}(M_{i_1}, A_{i_1})$ такой, что $\varphi a_1 \neq 0$. Считаем, что $\varphi \in E(M)$, полагая $\varphi | M_{i_1} = \varphi$, $\varphi | A_{i_1} = 0$. Тогда $[\theta, \varphi] a = \varphi a_1 \neq 0$. Следовательно, $a \notin Z(M)$. Поэтому $Z(M) = 0$ в силу произвольности элемента a.

Утверждение в) вытекает из доказательства утверждения б).

Докажем утверждение г). Включение $Z(M) \cap M_i \subseteq Z(M_i)$ очевидно. Если $Z(M_i) \subseteq Z(M)$, то из в) следует равенство $\varphi\big(Z(M_i)\big) = 0$ для любого $\varphi \in$ $\in \mathrm{Hom}(M_i, A_i)$. Пусть теперь $\pi\colon M \to M_i$, $\theta\colon M \to A_i$ — проекции, $\alpha, \beta \in E(M)$ и $a \in Z(M_i)$. Имеем

$$[\alpha,\beta]a = [(\pi+\theta)\alpha, (\pi+\theta)\beta]a = [\pi\alpha, \pi\beta]a + [\pi\alpha, \theta\beta]a + [\theta\alpha, \pi\beta]a + [\theta\alpha, \theta\beta]a.$$

Здесь $(\pi\alpha)|M_i, (\pi\beta)|M_i \in E(M_i)$, поэтому $[\pi\alpha, \pi\beta]a = 0$, а оставшиеся три слагаемых равны 0, поскольку в $[\pi\alpha, \theta\beta]$, $[\theta\alpha, \theta\beta]$, $[\theta\alpha, \theta\beta]$ входят эндоморфизмы $\theta\alpha$, $\theta\beta$, действующие на элементах из M_i как гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}(M_i, A_i)$. Итак, $Z(M_i) \subseteq Z(M)$.

Докажем утверждение 2. Согласно пунктам а), г) $Z(M) = (Z(M) \cap A) \oplus$ $\oplus\, (Z(M) \cap B)$, где $(Z(M) \cap B) = Z(B)$. В силу пункта в) $Z(M) \cap A \subseteq G$, а из пункта г) следует обратное включение $G \subseteq Z(M) \cap A$. $\square$

Из леммы 1.4, в частности, следует, что для гомоморфизма $f\colon M \to N$ не обязательно $f\big(Z(M)\big) \subseteq Z(N)$. Кроме того, если $M = \bigoplus M_i$ ($M = \prod M_i$), где $M_i \leqslant \mathrm{fi}\ M$, то $Z(M) = \bigoplus Z(M_i)$ ($Z(M) = \prod Z(M_i)$). Если $M = \bigoplus M_i$ ($M = \prod M_i$), где $|I| > 1$ и $M_i \cong M_j$ при $i, j \in I$, то $Z(M) = 0$.

2. E-нильпотентные и E-разрешимые модули

Модуль M назовём *E-нильпотентным класса n*, если $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}] = 0$ для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in E(M)$ и $[\beta_1, \ldots, \beta_n] \neq 0$ для некоторых $\beta_1, \ldots, \beta_n \in E(M)$, т. е. n — класс нильпотентности лиева кольца эндоморфизмов $L\big(E(M)\big)$ модуля M.

Модуль назовём *E-энгелевым* класса $\leqslant n$, если $\Big[\alpha, \underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{n}\Big] = 0$ для любых его эндоморфизмов α, β (об энгелевых некоммутативных группах см., например, [7, § Д 264; 3, § 18]).

Напомним, что кольцо называется *нормальным* [8], если все его идемпотенты центральны. Согласно [8, утверждение 3.28] кольцо эндоморфизмов модуля нормально тогда и только тогда, когда все его прямые слагаемые вполне инвариантны. Абелевы группы с нормальным кольцом эндоморфизмов изучались в [20].

Предложение 2.1. *В E-энгелевом модуле M все его прямые слагаемые вполне инвариантны. В частности, кольцо $E(M)$ нормальное.*

Доказательство. Если $M = A \oplus B$, а $\alpha \in E(M)$ такой, что $\alpha|B = 1_B$ и $0 \neq \alpha a \in B$ для некоторого $a \in A$, то определим $\beta \in E(M)$ следующим образом: $\beta|A = \alpha$, $\beta|B = 0$. Теперь если $\psi_1 = [\beta, \alpha]$ и $\psi_{n+1} = [\psi_n, \alpha] = \Big[\beta, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n+1}\Big]$, то $\psi_n a = (-1)^n \alpha a \neq 0$. Это доказывает утверждение. $\square$

Модуль M назовём *E-разрешимым*, если $M^{(n)} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Наименьшее такое n назовём *классом* E-разрешимости модуля M. Прямые слагаемые E-разрешимого модуля являются E-разрешимыми модулями. E-нильпотентные и E-разрешимые абелевы группы изучались в [22].

Отметим, что для каждого n существуют E-разрешимые модули класса n, не являющиеся E-нильпотентными.

Пример. Пусть $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ — кольцо целых гауссовых чисел. Рассмотрим кольцо $(\mathbb{Z}[i])[x,^{-}]$, состоящее из многочленов от x с коэффициентами из $\mathbb{Z}[i]$, для которых выполняется равенство $xa = \bar{a}x$, где $\bar{a}$ — комплексное число, сопряжённое к a. Пусть теперь $K_n = (\mathbb{Z}[i])[x,^{-}]/(x^n)$, где (x^n) — идеал, порождённый x^n. Тогда $[f, g] \in xK_n$ для любых $f, g \in K_n$. Поэтому $[f_{2n}, f_{2n-1}] \cdots [f_2, f_1] = 0$ для всех $f_1, \ldots, f_{2n} \in K_n$. Аддитивная группа кольца K_n является счётной редуцированной группой без кручения. Поэтому по теореме Корнера [4, теорема 29.2] существует абелева группа A, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно K_n. Поскольку, например, $\Big[x, \underbrace{i, \ldots, i}_{m}\Big] = (-2i)^m x \neq 0$, то A не является даже E-энгелевой. В качестве колец эндоморфизмов можно также взять кольца треугольных целочисленных матриц с постоянными коэффициентами по главной диагонали.

Отметим следующее свойство рассматриваемых понятий.

Пусть R — кольцо и $[x, y, y] = 0$ для любых $x, y \in R$. Тогда

$$0 = [x, y + z, y + z] = [x, y, z] + [x, z, y].$$

Согласно тождеству Якоби

$$[x, z, y] = [x, y, z] + [y, z, x].$$

Следовательно,

$$2[x, y, z] + [y, z, x] = 0.$$

Из

$$0 = [y, z + x, z + x] = [y, z, x] + [y, x, z]$$

получаем

$$[y, z, x] = -[y, x, z] = [x, y, z].$$

Поэтому $3[x, y, z] = 0$. Аналогичным образом, используя тождество

$$[x, y, z, t] + [y, x, t, z] + [z, t, x, y] + [t, z, y, x] = 0$$

и уже доказанное равенство $3[x, y, z] = 0$, можно получить, что $[x, y, z, t] = 0$ для любых $x, y, z, t \in R$ (см. также [2, гл. I, упр. 9 к § 1]). Следовательно, всякий E-энгелев модуль класса не выше 2 является E-нильпотентным класса не выше 3, а если в нём соотношение $3m = 0$ влечёт $m = 0$, то он является и E-нильпотентным класса не выше 2.

Из определения вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 2.1. *Для модуля M эквиваленты следующие условия*:

1) M — *E-разрешимый модуль класса не выше n*;
2) $[\alpha_{2n}, \alpha_{2n-1}] \cdots [\alpha_2, \alpha_1] = 0$ *для любых* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} \in E(M)$;
3) $M^{(n-1)} \subseteq Z(M)$.

Лемма 2.2. *Пусть* $M = \bigoplus\limits_{i \in I} M_i$. *Тогда*

1) *если $M_i \leqslant \text{fi}\ M$ для каждого $i \in I$, то модуль M E-разрешимый класса не выше n в том и только в том случае, когда все M_i — E-разрешимые модули класса не выше n, причём если хотя бы один модуль M_i E-разрешимый класса n, то M также E-разрешимый модуль класса n*;
2) *если M — E-разрешимый модуль класса не выше n и $0 \leqslant r < n$, то $(\alpha_{n-r} \cdots \alpha_1) M_i^{(r)} = 0$ для каждого $i \in I$ и любых $\alpha_k \in \mathrm{Hom}(M_{i_k}, M_{i_{k+1}})$, где $i_1 = i$, $i_{k+1} \in I \setminus \{i_k\}$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Докажем второе утверждение. Пусть θ — проекция M на $\bigoplus\limits_{j \in I \setminus \{i\}} M_j$, а $f \in E(M)$ такой, что $f|M_i = \alpha_1$ и $f\Bigl(\bigoplus\limits_{j \in I \setminus \{i\}} M_j\Bigr) = 0$. Тогда если $a \in M_i^{(r)}$, то $[\theta, f]a = \alpha_1 a \in M^{(r+1)}$ (очевидно, что $M_i^{(r)} \subseteq M^{(r)}$). Следовательно, для указанных эндоморфизмов α_k имеем $(\alpha_{n-r} \cdots \alpha_1) M_i^{(r)} \subseteq M^{(n)} = 0$. □

Лемма 2.3. *Пусть $M = A \oplus B$, где $B \leqslant \text{fi}\ M$. Тогда M — E-разрешимый модуль класса не выше n в том и только в том случае, когда*

1) *A, B — E-разрешимые модули класса не выше n*;
2) $\mathrm{Hom}(A, B) A^{(n-1)} = 0$;
3) *если $0 \leqslant r < n-1$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_{2(n-r-1)} \in E(B)$, то*

$$[\varphi_{2(n-r-1)}, \varphi_{2(n-r-1)-1}] \cdots [\varphi_2, \varphi_1]\bigl(\mathrm{Hom}(A, B) A^{(r)}\bigr) = 0.$$

Более того, n — класс E-разрешимости модуля M хотя бы при одном из следующих трёх условий:

а) $[\beta_{2(n-r-2)}, \beta_{2(n-r-2)-1}] \cdots [\beta_2, \beta_1]\bigl(\mathrm{Hom}(A, B) A^{(r)}\bigr) \neq 0$ *при некоторых* $\beta_1, \ldots, \beta_{2(n-r-2)} \in E(B)$ *и* $0 \leqslant r < n-2$;
б) $A^{(n-1)} \neq 0$;
в) $B^{(n-1)} \neq 0$.

В частности, если кольца $E(A)$, $E(B)$ коммутативны и $\mathrm{Hom}(A, B) \neq 0$, то M — E-разрешимый модуль класса 2.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\theta\colon M \to B$ — проекция, $\alpha \in \mathrm{Hom}(A, B)$, а $f \in E(M)$ такой, что $f|A = \alpha$, $f|B = 1_B$. Тогда если $a \in A$, то $[\theta, f] = \alpha a \in M'$. Поскольку $A^{(r)} \subseteq M^{(r)}$, это доказывает утверждения 2) и 3).

Достаточность. Пусть $\pi\colon M \to A$, $\theta\colon M \to B$ — проекции, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} \in E(M)$. Имеем

$$[\alpha_2, \alpha_1] = (\pi + \theta)[\alpha_2, \alpha_1](\pi + \theta) = \pi[\alpha_2, \alpha_1]\pi + \theta[\alpha_2, \alpha_1]\pi + \theta[\alpha_2, \alpha_1]\theta$$

(мы учли, что $\pi[\alpha_2, \alpha_1]\theta = 0$). Далее, $\theta[\alpha_2, \alpha_1]\theta = [\alpha_2\theta, \alpha_1\theta]$, где $\alpha_2\theta|B, \alpha_1\theta|B \in E(B)$. Осталось проверить действие $[\alpha_{2n}, \alpha_{2n-1}] \cdots [\alpha_2, \alpha_1]$ на A. Если $a \in A$, то

$$[\alpha_2, \alpha_1]a = (\pi[\alpha_2, \alpha_1]\pi + \theta[\alpha_2, \alpha_1]\pi)a = [\pi\alpha_2, \pi\alpha_1]a + \theta[\alpha_2, \alpha_1]a.$$

Здесь первое слагаемое принадлежит A', а второе принадлежит следу A в B, поэтому аннулируется при действии $[\alpha_{2n}, \alpha_{2n-1}] \cdots [\alpha_4, \alpha_3]$. Применение индукции завершает доказательство. $\square$

Используя лемму 1.1, можно найти $M^{(n)}$ модуля $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ для каждого натурального n.

Лемма 2.4. *Если $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$, где $|I| > 1$, и $\pi_i\colon M \to M_i$ — соответствующие проекции, то M — E-разрешимый модуль класса не выше n в том и только в том случае, когда $[\varphi_2, \varphi_1]\big(\pi_i M^{(n-1)}\big) = 0$ и $\alpha\big(\pi_i M^{(n-1)}\big) = 0$ для каждого $i \in I$, любых $\varphi_1, \varphi_2 \in E(M_i)$ и $\alpha \in \mathrm{Hom}(M_i, M_j)$ при произвольном $j \in I \setminus \{i\}$.*

Доказательство. Пусть $A_i = \bigoplus_{j\in I\setminus\{i\}} M_j$, $\pi\colon M \to M_i$, $\theta\colon M \to A_i$ — проекции, $\alpha, \beta \in E(M)$. Если $a \in \pi_i M^{(n-1)}$, то

$$[\alpha, \beta]a = [(\pi + \theta)\alpha, (\pi + \theta)\beta]a = [\pi\alpha, \pi\beta]a + [\pi\alpha, \theta\beta]a + [\theta\alpha, \pi\beta]a + [\theta\alpha, \theta\beta]a.$$

Здесь $\pi\alpha|M_i, \pi\beta|M_i \in E(M_i)$, поэтому $[\pi\alpha, \pi\beta]a = 0$. Оставшиеся слагаемые равны нулю, поскольку в скобки $[\pi\alpha, \theta\beta]$, $[\theta\alpha, \pi\beta]$, $[\theta\alpha, \theta\beta]$ в качестве множителей входят гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}(M_i, A_i)$. $\square$

Пусть $\{M_i\}_{i\in I}$ — некоторое множество модулей (над одним и тем же кольцом). Рассмотрим на нём следующее отношение:

$$M_i < M_j, \quad \text{если} \quad \mathrm{Hom}(M_i, M_j) \neq 0, \quad \text{где} \quad i \neq j.$$

Если $M_{i_j} < M_{i_{j+1}}$, $j = 1, \ldots, n$, и

$$\mathrm{Hom}(M_{i_n}, M_{i_{n+1}})\big(\ldots\big(\mathrm{Hom}(M_2, M_3)(\mathrm{Hom}(M_1, M_2)M_1)\big)\ldots\big) \neq 0,$$

то подмножество $\{M_{i_j}\}_{j=1}^{n+1}$ будем называть *цепью*, а число n — *длиной* этой цепи. Если n — максимальная длина таких цепей, то будем говорить, что множество $\{M_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет *условию n-максимальности*.

Предложение 2.2. *Пусть $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ ($M = \prod_{i\in I} M_i$), где никакое кольцо $E(M_i)$ не содержит ненулевых нильпотентных элементов.*

1. *M является E-нильпотентным модулем тогда и только тогда, когда кольцо $E(M)$ коммутативно.*

2. *M является E-разрешимым модулем класса $n+1$ тогда и только тогда, когда каждое кольцо $E(M_i)$ коммутативно и множество $\{M_i\}_{i\in I}$ удовлетворяет условию n-максимальности.*

Доказательство. 1. Поскольку по предложению 2.1 все подмодули M_i вполне инвариантны, то утверждение вытекает из свойства 3 коммутаторов.

2. Прямые слагаемые E-разрешимого модуля также E-разрешимы. Следовательно, если $\alpha,\beta\in E(M_i)$ для некоторого $i\in I$, то $[\alpha,\beta]^{n+1}(M_i)\subseteq M_i^{(n+1)}=0$, т. е. $[\alpha,\beta]^{n+1}=0$ и, значит, $[\alpha,\beta]=0$. Таким образом, все кольца $E(M_i)$ коммутативны. Поэтому данное утверждение вытекает из леммы 1.1. □

Из предложения 2.2, в частности, следует, что для полупростого модуля M как условие E-разрешимости, так и условие E-нильпотентности эквивалентны коммутативности кольца $E(M)$.

Теорема 2.1. *Пусть M — модуль конечной длины n, $N(R)$ — нильпотентный радикал кольца $R=E(M)$. Тогда эквивалентны следующие условия*:

а) *M — E-разрешимый модуль*;

б) $[R,R]\subseteq N(R)$.

Доказательство. Докажем импликацию а) $\Longrightarrow$ б). Если $M^{(n)}=0$, то $[\alpha,\beta]^n=0$ для любых $\alpha,\beta\in E(M)$ и, значит, $[\alpha,\beta]\in N(R)$.

Докажем импликацию б) $\Longrightarrow$ а). Из $N(R)^n=0$ следует, что $[R,R]^n=0$, а это означает E-разрешимость M. □

Из определения вытекает, что если M — E-разрешимый модуль, то $Z(M)\neq 0$; кроме того, если $0\neq A\leqslant\mathrm{ci}\,M$, то $A\cap Z(M)\neq 0$.

Для E-разрешимого модуля M класса n возможен случай, когда $M^{(n-1)}\neq$ $\neq Z(M)$. Например, пусть $M=A\oplus B\oplus C$, где кольца $E(A)$, $E(B)$, $E(C)$ коммутативны, для каждого $0\neq a\in A$ существует $f\in\mathrm{Hom}(A,B)$ со свойством $fa\neq 0$, $\mathrm{Hom}(A,C)=0$ и подмодули B, C вполне инвариантны в M. Тогда $M''=0$ и $M'=\mathrm{Hom}(A,B)A\subseteq B\neq Z(M)=B\oplus C$.

Если $H\leqslant\mathrm{ci}\,M$ и $R=E(M)$, то положим

$$Z_M(M/H)=\{\bar a\in M/H\mid[\alpha,\beta]\bar a=0\text{ для всех }\alpha,\beta\in R\}.$$

Если $A\subseteq M$, то через

$$N_M(A)=\{m\in M\mid[\alpha,\beta]m\in A\text{ для всех }\alpha,\beta\in R\}$$

обозначим *E-нормализатор* подмножества A в модуле M. Индекс M иногда будем опускать.

Если $0\in A$, то $Z(M)=N(0)\subseteq N(A)$, а если $0\notin A$, то $N(A)=\varnothing$. Если $A\leqslant M$, то $Z(A)\subseteq N(A)\leqslant M$. Очевидно, что если $A\leqslant M$, то $A\subseteq N(A)$ в точности тогда, когда $A\leqslant\mathrm{ci}\,M$, и в этом случае $N(A)$ также является коммутаторно инвариантным подмодулем в M. Из свойства 1 коммутаторов следует, что если $A\leqslant\mathrm{fi}\,M$, то $N(A)\leqslant\mathrm{fi}\,M$. Из свойства 2 следует, что инвариантность подмодуля A влечёт инвариантность $N(A)$. Ясно, что $A=N(A)$ для $A\leqslant M$

в точности тогда, когда $A \leqslant \mathrm{ci}\ M$ и M/A — *коммутаторно точный* фактор-модуль, т. е. для любого $0 \neq \bar{x} = x + A \in M/A$ найдутся $\alpha, \beta \in E(M)$ со свойством $[\alpha, \beta]\bar{x} \neq 0$. Отсюда несложно вывести, что для прямого слагаемого A равенство $A = N(A)$ выполняется тогда и только тогда, когда A вполне инвариантно и $Z(C) = 0$ для каждого (эквивалентно, для некоторого в силу их изоморфизма) дополнительного прямого слагаемого C.

Ряд

$$A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq A_{i+n} \subseteq \ldots$$

подмодулей A_i ($i \in I$) модуля M назовём *E-центральным*, если $A_i \leqslant \mathrm{ci}\ M$ и $A_{i+1}/A_i \subseteq Z_M(M/A_i)$ (эквивалентно, $A_{i+1} \subseteq N_M(A_i)$) для всех $i \in I$. Если же $A_i \leqslant \mathrm{ci}\ M$ для всех $i \in I$, то ряд назовём *E-нормальным*.

Если M — модуль, то положим по индукции

$$Z_0(M) = 0, \quad Z_1(M) = Z(M), \ldots, \quad Z_i(M)/Z_{i-1}(M) = Z_M\big(M/Z_{i-1}(M)\big),$$
$$Z_\alpha = \bigcup_{\rho<\alpha} Z_\rho(M)$$

при предельном ординале α.

Обозначим для краткости $Z_\alpha = Z_\alpha(M)$. Ряд

$$0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_\alpha \subseteq \ldots$$

назовём *верхним E-центральным* рядом модуля M. Подмодули Z_α назовём *E-гиперцентрами* модуля M. Из свойства 1 коммутаторов вытекает, что все E-гиперцентры являются вполне инвариантными подмодулями. В модуле без кручения все E-гиперцентры являются чистыми подмодулями, поэтому все факторы верхнего E-центрального ряда также модули без кручения (под модулем *без кручения* ${}_RM$ понимается такой модуль, что $rm \neq 0$ для любого $0 \neq m \in M$ и любого неделителя нуля $r \in R$, а под *чистым* подмодулем — такой подмодуль A, что $rA = A \cap rM$ для всех $r \in M$).

Если $A \subseteq M$, то подмодуль

$$\langle [\alpha, \beta]a \mid a \in A,\ \alpha, \beta \in E(M) \rangle$$

назовём *E-коммутантом* подмножества A в M и обозначим через $[A, M]$. Если $A \leqslant \mathrm{ci}\ M$, то $[A, M] \leqslant \mathrm{ci}\ M$, а если $A \leqslant \mathrm{fi}\ M$, то из свойства 1 коммутаторов следует, что $[H, A] \leqslant \mathrm{fi}\ M$. Всегда $[A + B, M] = [A, M] + [B, M]$ для $A, B \subseteq M$.

Обозначим $[A, M]_1 = A + [A, M]$, $[A, M]_{n+1} = [A, M]_n + \big[[A, M]_n, M\big]$ при $n \geqslant 1$. Тогда $\bar{A} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [A, M]_n$ — наименьший коммутаторно инвариантный подмодуль, содержащий A. Действительно, $\bar{A} \leqslant \mathrm{ci}\ M$ и всякий коммутаторно инвариантный подмодуль, содержащий A, содержит и $\bar{A}$. Из свойства 2 коммутаторов следует, что инвариантность A влечёт инвариантность $\bar{A}$.

Положим по индукции $L_1(M) = M$, $L_{i+1}(M) = [L_i(M), M]$ и $L_\alpha(M) = \bigcap\limits_{\rho<\alpha} L_\rho(M)$, если α — предельное ординальное число. Отметим, что $L_n(M) = M^{(n-1)}$ для $n \in \mathbb{N}$ и $L_\alpha(M) \leqslant \mathrm{fi}\ M$ для каждого ординала α.

Заметим, что

$$L_{n+1}(M) = \langle [\alpha_{2n}, \alpha_{2n-1}] \cdots [\alpha_2, \alpha_1]a \mid a \in M,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} \in E(M) \rangle,$$
$$Z_n(M) = \{a \in M \mid [\alpha_{2n}, \alpha_{2n-1}] \cdots [\alpha_2, \alpha_1]a = 0,\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} \in E(M)\}.$$

E-разрешимые модули класса не выше n являются подклассом класса BL_n-модулей — модулей M со свойством $[\alpha, \beta]^n = 0$ для всех $\alpha, \beta \in E(M)$. Теория колец эндоморфизмов абелевых групп подробно изложена в [4], там представлены как классические результаты, так и открытые проблемы. К данной тематике можно отнести статьи [6, 10—15] автора. Отметим также сборник задач [5].

Внимание автора на класс BL_n обратил профессор П. А. Крылов. Абелевы группы из класса BL_2 изучались в [19, 20].

Если

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq M_{n-1} \subseteq M_n = M —$$

E-центральный ряд, то получаем включения $M_i \subseteq Z_i$ и $L_j \subseteq M_{n-j+1}$, где $Z_i = Z_i(M)$, $L_j = L_j(M)$, $i = 0, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n+1$.

Ряд

$$L_1(M) \supseteq L_2(M) \supseteq \ldots$$

назовём *нижним E-центральным* рядом модуля M.

Из вышеприведённых включений следует, что в E-разрешимом модуле верхний и нижний E-центральные ряды обрываются, причём их длины равны классу E-разрешимости модуля. В частности, в E-разрешимом модуле все его E-центральные ряды обрываются, минимальная длина таких рядов совпадает с классом E-разрешимости модуля.

Хотя верхний и нижний E-центральные ряды E-разрешимого модуля имеют одинаковую длину, они сами не обязаны совпадать. Так, в приведённом выше примере E-разрешимого модуля $M = A \oplus B \oplus C$ верхний E-центральный ряд имеет вид $0 \subset B \oplus C \subset M$, а нижний — $0 \subset \mathrm{Hom}(A, B)A \subset M$.

Предложение 2.3. *Для модуля M равносильны следующие условия*:

1) *M — E-разрешимый модуль класса n*;
2) *$Z_n(M) = M$ и $Z_{n-1}(M) \neq M$*;
3) *$L_{n+1}(M) = 0$, но $L_n(M) \neq 0$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как $L_i \subseteq Z_{n-i+1}$, то $L_1 = M \subseteq Z_n$, т. е. $Z_n = M$. Допустим, что $Z_{n-1} = M$. Тогда $L_2 = M' \subseteq Z_{n-2}$ и по индукции $L_i \subseteq Z_{n-i}$. Значит, $L_n = M^{(n-1)} \subseteq Z_0 = 0$. Противоречие с условием $M^{(n-1)} \neq 0$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Имеем $L_{n+1} \subseteq Z_0 = 0$. Если $L_n = 0$, то $L_{n-1} \subseteq Z_1$. По индукции $L_{n-k} \subseteq Z_k$ или $L_k \subseteq Z_{n-k}$. Поэтому $L_1 = M \subseteq Z_{n-1}$. Противоречие.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. □

Предложение 2.4. *Если M — E-разрешимый модуль класса n, то для любого его подмодуля A ряд последовательных E-нормализаторов достигает M не позже чем через n шагов. В частности, всякий коммутаторно инвариантный подмодуль E-разрешимого модуля входит в некоторый E-центральный ряд.*

Доказательство. Обозначим $A_0 = A$, $A_{i+1} = N(A_i)$. Достаточно проверить, что $Z_i \subseteq A_i$. Для $i = 0$ это очевидно, а далее имеем $Z_{i+1} = N(Z_i) \subseteq \subseteq N(A_i) = A_{i+1}$. Оставшееся утверждение для коммутаторно инвариантных подмодулей следует из того, что если $A \leqslant \mathrm{ci}\, M$, то $A \cap Z_i \leqslant \mathrm{ci}\, M$, $A \cap Z_{i+1} \subseteq \subseteq N(A \cap Z_i)$ и $A \subseteq N(A_i)$. □

Коммутаторно инвариантный подмодуль A модуля M назовём *E-малым*, если из $M = A + S$, где S — некоторый коммутаторно инвариантный подмодуль, следует, что $S = A$.

Элемент $x \in M$ назовём *E-необразующим* модуля M, если $\overline{\langle x\rangle}$ — E-малый подмодуль. Очевидно, что любой коммутаторно инвариантный подмодуль, содержащийся в E-малом подмодуле, является E-малым; сумма конечного числа E-малых подмодулей является E-малым подмодулем. В силу сказанного сумма всех E-малых подмодулей совпадает с множеством E-необразующих элементов модуля M.

Обозначим через $\operatorname{crad} M$ пересечение всех максимальных коммутаторно инвариантных подмодулей модуля M, если они существуют; $\operatorname{crad} M = M$ в противном случае. Через $\operatorname{csoc} M$ обозначим сумму всех минимальных коммутаторно инвариантных подмодулей модуля M. Если B — минимальный коммутаторно инвариантный подмодуль в M, то $B \subseteq Z(M)$ или $B \subseteq M'$, поэтому $\operatorname{csoc} M \subseteq \subseteq Z(M) + M'$.

Предложение 2.5.

1. *Множество S всех E-необразующих элементов модуля M совпадает с* $\operatorname{crad} M$.
2. $\operatorname{csoc} M$ *совпадает с пересечением Q всех существенных коммутаторно инвариантных подмодулей модуля M.*

Доказательство. 1. Докажем, что $S \subseteq \operatorname{crad} A$. Если M не содержит максимальных коммутаторно инвариантных подмодулей, то утверждение очевидно. Пусть теперь $x \in S$ и H — максимальный коммутаторно инвариантный подмодуль в M. Если $x \notin H$, то $\overline{\langle x\rangle} + H = M$ и $H \neq M$. Это противоречит включению $x \in S$.

Докажем, что $\operatorname{crad} M \subseteq S$. Пусть, напротив, существуют элемент $x \in \operatorname{crad} M$ и $B \leqslant \mathrm{ci}\, M$ такие, что $B \neq M$, но $\overline{\langle x\rangle} + B = M$. По лемме Цорна найдётся коммутаторно инвариантный подмодуль H модуля M, максимальный среди коммутаторно инвариантных подмодулей, содержащих B и не содержащих x. Ясно, что H — максимальный коммутаторно инвариантный подмодуль. Но тогда $x \in \operatorname{crad} M \subseteq H$. Противоречие.

2. Если B — минимальный коммутаторно инвариантный подмодуль, а A — существенный коммутаторно инвариантный подмодуль, то $B \cap A = B$ и, значит, $\operatorname{csoc} M \subseteq A$.

Пусть теперь $N \leqslant Q$ и $N \leqslant \mathrm{ci}\, M$. Если K — максимальный элемент в множестве коммутаторно инвариантных подмодулей модуля M, таких что $N \cap K = 0$, то $H = N + K$ — существенный коммутаторно инвариантный подмодуль в M. Далее, $Q = N \oplus (K \cap Q)$. Таким образом, каждый коммутаторно инвариантный подмодуль модуля M, содержащийся в Q, выделяется в Q прямым слагаемым. Отсюда следует, что $Q \subseteq \operatorname{csoc} M$. Действительно, конечно порождённый коммутаторно инвариантный подмодуль, содержащийся в Q, содержит максимальный коммутаторно инвариантный подмодуль, а отсюда уже следует, что каждый содержащийся в Q ненулевой коммутаторно инвариантный подмодуль содержит минимальный коммутаторно инвариантный подмодуль. Несложно убедиться, что Q является суммой минимальных коммутаторно инвариантных подмодулей, т. е. $Q \subseteq \operatorname{csoc} M$. □

Предложение 2.6. *Если M — E-разрешимый модуль и A — его коммутаторно инвариантный подмодуль с условием $A + M' = M$, то $A = M$. В частности, $M' \subseteq \operatorname{crad} M$.*

Доказательство. Положим $A_i = A + Z_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $A_m \subset M$ и $A_{m+1} = M$. Тогда

$$M' = [M, M] = [A, M] + [Z_{m+1}, M] \subseteq A + Z_m = A_m.$$

Следовательно, $A + M' \subseteq A_m \subset M$. Противоречие. Включение $M' \subseteq \operatorname{crad} M$ следует из предложения 2.5. □

Коммутаторно инвариантный подмодуль P модуля M назовём *E-полупервичным*, если для любого подмодуля A модуля M из включения $[A, M] \subseteq P$ следует, что $A \subseteq P$. Отметим, что включение $[A, M] \subseteq P$ эквивалентно включению $[\bar{A}, M] \subseteq P$.

Пересечение всех E-полупервичных подмодулей модуля M обозначим через $P(M)$. Из определения следует, что $Z(M) \subseteq P(M)$, в частности, $M = P(M)$ для E-разрешимого модуля M.

Элемент a модуля M назовём *строго E-нильпотентным*, если для любой последовательности $\{\alpha_n \in E(M) \mid n \in \mathbb{N}\}$ найдётся такой номер m, что $[\alpha_{2m}, \alpha_{2m-1}] \cdots [\alpha_2, \alpha_1]a = 0$.

Следующий результат является аналогом характеризации Левицкого первичного радикала кольца [9, предложение 26.5].

Предложение 2.7. *$P(M)$ состоит из строго E-нильпотентных элементов.*

Доказательство. Пусть $a \notin P(M)$. Тогда $a \notin P$ для некоторого E-первичного подмодуля P. Следовательно, $[\langle a \rangle, M] \nsubseteq P$, т. е. существует такой элемент $a_1 \in [\langle a \rangle, M]$, что $a_1 \notin P$. Если $a_n \notin P$, то $[\langle a_n \rangle, M] \nsubseteq P$. Значит, существует $a_{n+1} \in [\langle a_n \rangle, M]$ со свойством $a_{n+1} \notin P$. В частности, элемент a не является строго E-нильпотентным.

Обратно, пусть элемент a не является строго E-нильпотентным, и пусть $T = \{a_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ — такая последовательность элементов модуля M, что $a_0 = a$ и $0 \neq a_{n+1} \in [\langle a_n \rangle, M]$ для каждого n. Тогда $0 \notin T$ и по лемме Цорна существует коммутаторно инвариантный подмодуль P, максимальный среди коммутаторно инвариантных подмодулей, не пересекающихся с T. Пусть теперь A — такой подмодуль в M, что $A \nsubseteq P$. В силу выбора подмодуля P имеем $(\bar{A} + P) \cap T \neq \varnothing$. Если теперь $a_n \in \bar{A} + P$, то $a_{n+1} \in [\bar{A} + P, M] = [\bar{A}, M] + [P, M]$, где $[P, M] \subseteq P$. Тогда $[\bar{A}, M] \nsubseteq P$. Значит, $[A, M] \nsubseteq P$. Таким образом, P — E-полупервичный подмодуль и $a_0 = a \notin P$. Следовательно, $a \notin P(M)$. $\square$

Поскольку $Z(M) \subseteq P(M)$, то условие $P(M) = 0$ влечёт $Z(M) = 0$. Верно и обратное утверждение. Действительно, пусть $a_0 = a \neq 0$. По условию найдутся такие $\alpha_n, \beta_n \in E(M)$, что $a_{n+1} = [\alpha_n, \beta_n]a_n \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$, т. е. элемент a не является строго E-нильпотентным. Из предложения 2.7 следует также, что если $P(M) = 0$, то 0 — единственный среди подмодулей H модуля M со свойством $L_n(H) = 0$ для некоторого n, где $L_n(H) = [L_{n-1}(H), M]$ при $n \geqslant 2$ и $L_1(H) = H$. Отметим, что если $L_n(H) = 0$, то $L_n(\bar{H}) = 0$.

Коммутаторно инвариантные подгруппы абелевых групп изучались также в [23, 24].

Литература

[1] Белоногов В. А. Задачник по теории групп. — М.: Наука, 2000.

[2] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1976.

[3] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1977.

[4] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал, 2006.

[5] Крылов П. А., Туганбаев А. А., Чехлов А. Р. Упражнения по группам, кольцам и полям. — Томск: ТГУ, 2008.

[6] Крылов П. А., Чехлов А. Р. Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Тр. Института математики и механики. — 2001. — Т. 7, № 2. — С. 194—207.

[7] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[8] Пунинский Г. Е., Туганбаев А. А. Кольца и модули. — М.: Союз, 1998.

[9] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. — М.: Мир, 1979.

[10] Чехлов А. Р. О прямых произведениях и прямых суммах абелевых QCPI-групп без кручения // Изв. высш. учебн. завед. Математика.— 1990. — № 4. — С. 58—67.

[11] Чехлов А. Р. Об абелевых CS-группах без кручения // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1990. – № 3. — С. 84—87.

[12] Чехлов А. Р. О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 3. — С. 714—719.

[13] Чехлов А. Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, № 6. — С. 944—949.

[14] Чехлов А. Р. О квазиполных смешанных группах // Фундамент. и прикл. мат. — 2002. — Т. 8, вып. 4. — С. 1215—1224.

[15] Чехлов А. Р. О слабо квазисервантно инъективных группах // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 3. — С. 434—447.

[16] Чехлов А. Р. О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 6. — С. 211—218.

[17] Чехлов А. Р. О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2009. — Вып. 1 (5). — С. 31—36.

[18] Чехлов А. Р. О свойствах центрально и коммутаторно инвариантных подгрупп абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2009. — Вып. 2 (6). — С. 85—99.

[19] Чехлов А. Р. О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2009. — Вып. 2 (6). — С. 78—84.

[20] Чехлов А. Р. Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, № 4. — С. 520—539.

[21] Чехлов А. Р. Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. мат. журн. — 2009. — Т. 50, вып. 4. — С. 942—953.

[22] Чехлов А. Р. E-нильпотентные и E-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2010. — Вып. 1 (9). — С. 59—71.

[23] Чехлов А. Р. Некоторые примеры E-разрешимых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2010. — Вып. 3 (11). — С. 69—76.

[24] Чехлов А. Р. О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т. 51, № 5. — С. 1163—1174.