Свойства конечных неуплотняемых цепочек кольцевых топологий

В. И. АРНАУТОВ
Институт математики и информатики
Академии наук Молдовы
e-mail: arnautov@math.md

УДК 512.56+512.556

Ключевые слова: топологические кольца, топологические группы, решётка групповых топологий, решётка кольцевых топологий, модулярная решётка, цепочка топологий, неуплотняемая цепочка.

Аннотация

Пусть $R(+,\cdot)$ — произвольное нильпотентное кольцо и $(\mathfrak{M},<)$ — решётка всех кольцевых топологий на кольце $R(+,\cdot)$ или решётка всех кольцевых топологий на кольце $R(+,\cdot)$, в каждой из которых кольцо обладает базисом окрестностей нуля, который состоит из подгрупп. Если τ и τ' — такие кольцевые топологии из $\mathfrak{M}$, что $\tau = \tau_0 \prec_{\mathfrak{M}} \tau_1 \prec_{\mathfrak{M}} \ldots \prec_{\mathfrak{M}} \tau_n = \tau'$, то $k \leqslant n$ для любой цепочки $\tau = \tau'_0 < \tau'_1 < \ldots < \tau'_k = \tau'$ топологий из $\mathfrak{M}$ и $k = n$ тогда и только тогда, когда $\tau'_i \prec_{\mathfrak{M}} \tau'_{i+1}$ для $0 \leqslant i < k$.

Abstract

V. I. Arnautov, Properties of finite unrefinable chains of ring topologies, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 5—16.

Let $R(+,\cdot)$ be a nilpotent ring and $(\mathfrak{M},<)$ be the lattice of all ring topologies on $R(+,\cdot)$ or the lattice of all such ring topologies on $R(+,\cdot)$ in each of which the ring R possesses a basis of neighborhoods of zero consisting of subgroups. Let τ and τ' be ring topologies from $\mathfrak{M}$ such that $\tau = \tau_0 \prec_{\mathfrak{M}} \tau_1 \prec_{\mathfrak{M}} \ldots \prec_{\mathfrak{M}} \tau_n = \tau'$. Then $k \leqslant n$ for every chain $\tau = \tau'_0 < \tau'_1 < \ldots < \tau'_k = \tau'$ of topologies from $\mathfrak{M}$, and also $n = k$ if and only if $\tau'_i \prec_{\mathfrak{M}} \tau'_{i+1}$ for all $0 \leqslant i < k$.

Введение. После того как была решена проблема о существовании недискретных хаусдорфовых топологий в бесконечных абелевых группах и некоторых бесконечных кольцах (см. [4, с. 351—390]) и было доказано существование большого числа групповых и кольцевых топологий в некоторых бесконечных группах и кольцах, возник интерес к изучению решётки всех групповых топологий и решётки всех кольцевых топологий и их подрешёток.

Так, в [6] было доказано, что решётка всех групповых топологий абелевой группы является модулярной.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 8, с. 5—16.

Так как известны свойства конечных неуплотняемых цепочек в модулярной решётке (см., например, теорему 8), то для любой абелевой группы в произвольной подрешётке решётки всех групповых топологий свойства неуплотняемых цепочек изучены достаточно хорошо.

Поскольку решётка всех кольцевых топологий не является модулярной даже для нильпотентного кольца (см. [5]), то естественно возникает интерес к свойствам конечных неуплотняемых цепочек кольцевых топологий. Настоящая работе и посвящена этому вопросу.

Основными результатами работы являются теорема 11, которая сводит неуплотняемость некоторых цепочек кольцевых топологий к их неуплотняемости в решётке групповых топологий, и теоремы 13—15 и следствие 16, в которых доказываются некоторые свойства неуплотняемых цепочек кольцевых топологий.

1. Обозначения. Если не оговорено другое, то в этой работе будем придерживаться следующих обозначений.

1.1. $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел.

1.2. $R(+,\cdot)$ (или просто R) — произвольное кольцо (рассматриваются не обязательно ассоциативные кольца).

1.3. Если R — кольцо, $A, B \subseteq R$, то положим $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

1.4. Если R — кольцо, то по индукции определим в кольце R идеалы R^k следующим образом:

$$R^1 = R, \quad R^k = \left\{ \sum_{i=1}^{s} c_i \mid c_i \in R^{t_i} \cdot R^{k-t_i},\ \text{где } s, t_i \in \mathbb{N} \right\}.$$

Легко проверяется, что $R^{k+1} \subseteq R^k$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

1.5. $R(+)$ — аддитивная группа кольца $R(+,\cdot)$.

1.6. Если τ_1 и τ_2 — топологии на множестве X, то считаем, что $\tau_1 \leqslant \tau_2$, если $\tau_1 \subseteq \tau_2$.

1.7. $(R(+,\cdot),\tau)$ (или просто (R,τ)) — топологическое кольцо.

1.8. $(R(+),\tau)$ — топологическая группа.

1.9. Пусть $R(+,\cdot)$ — некоторое кольцо и $R(+)$ — его аддитивная группа. Если I — некоторый идеал кольца $R(+,\cdot)$ или подгруппа группы $R(+)$, то

- через R/I будем обозначать фактор-кольцо кольца $R(+,\cdot)$ по идеалу I или фактор-группу группы $R(+)$ по подгруппе I;
- через $\xi_I : R \to R/I$ будем обозначать канонический гомоморфизм, т. е. такое отображение, что $\xi_I(x) = x + I$.

1.10. Если I — некоторая подгруппа группы $R(+)$, то легко заметить, что совокупность $\{I\}$ удовлетворяет условиям BN1—BN4 (см. [4, теорема 1.2.4]), и значит, она задаёт на группе $R(+)$ некоторую групповую топологию, для которой совокупность $\{I\}$ является базисом окрестностей нуля. Эту топологию будем обозначать через $\tau(I)$.

Если же I является идеалом кольца $R(+,\cdot)$, то легко заметить, что совокупность $\{I\}$ удовлетворяет условиям BN1—BN6 (см. [4, теорема 1.2.5]), и значит, $\tau(I)$ является кольцевой топологией.

1.11. Пусть $(R(+),\tau)$ — топологическая абелева группа и I — некоторая подгруппа группы $R(+)$. Если Ω — некоторый базис окрестностей нуля в топологической группе $(R(+),\tau)$, то легко заметить, что совокупность $\{V\cap I \mid V\in\Omega\}$ удовлетворяет условиям BN1—BN4 (см. [4, теорема 1.2.4]), и значит, она задаёт на группе $R(+)$ некоторую групповую топологию, для которой совокупность $\{V\cap I \mid V\in\Omega\}$ является базисом окрестностей нуля. Эту топологию будем обозначать через τ_I.

Легко заметить, что если $(R(+,\cdot),\tau)$ — топологическое кольцо и I — идеал кольца $R(+,\cdot)$, то τ_I является кольцевой топологией.

1.12. Если $(R(+),\tau)$ — топологическая группа, A — некоторая подгруппа группы $R(+)$ и $\tau|_A=\{V\cap A \mid V\in\tau\}$, то $\tau|_A$ будет групповой топологией на группе $A(+)$ (см. [4, замечание 1.4.2]).

Легко заметить, что если $(R(+,\cdot),\tau)$ — топологическое кольцо и A — подкольцо кольца $R(+,\cdot)$, то $\tau|_A$ является кольцевой топологией в кольце $A(+,\cdot)$.

1.13. Пусть $(R(+),\tau)$ — топологическая абелева группа и I — некоторая подгруппа группы $R(+)$. Если Ω — некоторый базис окрестностей нуля в топологической группе $(R(+),\tau)$, то через τ/I будем обозначать групповую топологию на группе $R(+)/I$, для которой совокупность $\{\xi_I(V) \mid V\in\Omega\}$ является базисом окрестностей нуля (см. [4, предложения 1.5.6 и 1.5.31]).

Легко заметить, что если I — идеал топологического кольца $(R(+,\cdot),\tau)$, то τ/I является кольцевой топологией в кольце $R(+,\cdot)/I$.

1.14. Пусть τ и τ' — произвольные групповые топологии на группе $R(+)$. Если Ω и Ω' — некоторые базисы окрестностей нуля в топологических группах $(R(+),\tau)$ и $(R(+),\tau')$ соответственно, то совокупность $\{V+U \mid V\in\Omega, U\in\Omega'\}$ удовлетворяет условиям BN1—BN4 (см. [4, теорема 1.2.4]), и значит, она задаёт на группе $R(+)$ некоторую групповую топологию, в которой эта совокупность является базисом окрестностей нуля. Эту топологию будем обозначать через $\tau+\tau'$.

Легко заметить, что если (R,τ) — топологическое кольцо и I — некоторый идеал кольца R, то $\tau+\tau(I)$ (см. 1.10) является кольцевой топологией на кольце R.

1.15. Через $\big(\mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big),<\big)$ будем обозначать решётку всех кольцевых топологий на кольце $R(+,\cdot)$, т. е. множество всех кольцевых топологий с обычной операцией сравнения топологий. Через $(\mathfrak{M},<)$ будем обозначать произвольную решётку кольцевых топологий на кольце $R(+,\cdot)$, т. е. $\mathfrak{M}$ — некоторое множество кольцевых топологий на кольце $R(+,\cdot)$, которое является решёткой относительно обычной операции сравнения топологий. Заметим, что $(\mathfrak{M},<)$ может не быть подрешёткой решётки $\big(\mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big),<\big)$. Так, если $(\mathfrak{M}, <)$ — решётка всех кольцевых топологий, в каждой из которых кольцо $R(+,\cdot)$ обладает базисом окрестностей нуля, состоящим из подгрупп, то эта решётка не является подрешёткой решётки $\big(\mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big), <\big)$.

1.16. Через $\big(\mathfrak{N}\big(R(+)\big), <\big)$ будем обозначать решётку всех групповых топологий на группе $R(+)$, т. е. множество всех групповых топологий на группе $R(+)$ с обычной операцией сравнения топологий. Через $\mathfrak{N}$ будем обозначать некоторую подрешётку решётки всех групповых топологий на группе $R(+)$.

1.17. Пусть $R(+,\cdot)$ — произвольное кольцо и I — некоторый идеал кольца $R(+,\cdot)$. Если $\mathfrak{M}$ — некоторая решётка кольцевых топологий на кольце $R(+,\cdot)$ или некоторая решётка групповых топологий на группе $R(+)$, то совокупность $\mathfrak{M}/I = \{\tau/I \mid \tau \in \mathfrak{M}\}$ (см. 1.13) относительно обычной операции сравнения топологий является некоторой решёткой кольцевых топологий на кольце $R(+,\cdot)/I$ или подрешёткой решётки всех групповых топологий на группе $R(+)/I$ соответственно.

1.18. Пусть $R(+,\cdot)$ — произвольное кольцо и I — некоторый идеал кольца $R(+,\cdot)$. Если $\mathfrak{M}$ — некоторая решётка кольцевых топологий на кольце $R(+,\cdot)$ или некоторая подрешётка решётки всех групповых топологий на группе $R(+)$, то совокупность $\mathfrak{M}|_I = \{\tau|_I \mid \tau \in \mathfrak{M}\}$ (см. 1.12) относительно обычного сравнения топологий является некоторой решёткой кольцевых топологий на кольце $I(+,\cdot)$ или $\mathfrak{M}|_I$ является некоторой подрешёткой решётки всех групповых топологий на группе $I(+)$ соответственно.

2. Замечание. Пусть $R(+,\cdot)$ — произвольное кольцо и τ и τ' — некоторые кольцевые или групповые топологии на кольце $R(+,\cdot)$ или на группе $R(+)$ соответственно.

Если Ω и Ω' — некоторые базисы окрестностей нуля в топологических кольцах $(R(+,\cdot),\tau)$ и $(R(+,\cdot),\tau')$ или топологических группах $(R(+),\tau)$ и $(R(+),\tau')$ соответственно, то совокупность $\{V \cap U \mid V \in \Omega,\ U \in \Omega'\}$ удовлетворяет соответственно условиям BN1—BN6 (см. [4, теорема 1.2.5]) и условиям BN1—BN4 (см. [4, теорема 1.2.4]), и значит, она задаёт соответственно на кольце $R(+,\cdot)$ некоторую кольцевую топологию и на группе $R(+)$ некоторую групповую топологию, в которой эта совокупность является базисом окрестностей нуля. Легко заметить, что указанная выше топология совпадает с топологией $\sup\{\tau,\tau'\}$ в решётке $\big(\mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big), <\big)$ и решётке $\big(\mathfrak{N}\big(R(+)\big), <\big)$ соответственно.

3. Замечание. Если $(R(+),\tau)$ — топологическая группа и I — некоторая подгруппа группы $R(+)$, то групповые топологии τ_I и $\tau|_I$ (см. 1.11 и 1.12) по своим свойствам очень близки. Так, для каждой из них совокупность $\{V \cap I \mid V \in \Omega\}$ является базисом окрестностей нуля (см. 1.11 и 1.12). Отличие этих топологий друг от друга состоит лишь в том, что τ_I является групповой топологией на группе $R(+)$, а $\tau|_I$ является групповой топологией на группе $I(+)$.

Так как групповая топология (кольцевая топология) определяется единственным образом базисом окрестностей нуля, то для групповых топологий (кольцевых топологий, если I — идеал кольца $R(+,\cdot)$) τ_1 и τ_2 верны следующие утверждения.

3.1. $\tau_{1,I} = \tau_{2,I}$ тогда и только тогда, когда $\tau_1|_I = \tau_2|_I$.
3.2. $\tau_{1,I} < \tau_{2,I}$ тогда и только тогда, когда $\tau_1|_I < \tau_2|_I$.

4. Замечание. Пусть τ и τ' — произвольные групповые топологии на группе $R(+)$. Легко заметить, что топология $\tau + \tau'$ (см. 1.14) совпадает с топологией $\inf\{\tau, \tau'\}$ в решётке $\mathfrak{N}\big(R(+)\big)$ всех групповых топологий.

5. Замечание. Если $(R(+), \tau)$ — топологическая абелева группа и I — некоторая подгруппа группы $R(+)$, то топологии τ/I (см. 1.13) и $\tau + \tau(I)$ (см. 1.10 и 1.14) по своим свойствам очень близки. Отличие этих топологий друг от друга состоит лишь в том, что τ/I является групповой топологией на группе $R(+)/I$, а топология $\tau + \tau(I)$ является групповой топологией на группе $R(+)$.

Легко заметить что для любых групповых топологий (кольцевых топологий) τ_1 и τ_2 верны следующие утверждения.

5.1. $\tau_1/I = \tau_2/I$ тогда и только тогда, когда $\tau_1 + \tau(I) = \tau_2 + \tau(I)$.
5.2. $\tau_1/I < \tau_2/I$ тогда и только тогда, когда $\tau_1 + \tau(I) < \tau_2 + \tau(I)$.

6. Определение. Пусть $(\mathfrak{M}, <)$ — произвольная решётка и $a, b \in \mathfrak{M}$. Если $a < b$ и между элементами a и b в решётке $(\mathfrak{M}, <)$ нет других элементов, то будем говорить, что элемент b покрывает элемент a в решётке $(\mathfrak{M}, <)$ (см. [1, с. 15]), и будем писать $a \prec_{\mathfrak{M}} b$ или просто $a \prec b$, если ясно, о какой решётке идёт речь.

7. Определение. Как обычно (см. [1, 3]), решётка $(\mathfrak{M}, <)$ называется модулярной, если в ней выполняется следующее условие: если $a, b, c \in \mathfrak{M}$ и $a \leqslant c$, то $\sup\big\{a, \inf\{b, c\}\big\} = \inf\{\sup\{a, b\}, c\}$. Легко заметить, что подрешётка модулярной решётки сама является модулярной решёткой.

8. Теорема. *Пусть $(\mathfrak{M}, <)$ — произвольная модулярная решётка и $a, b \in \mathfrak{M}$. Тогда верны следующие утверждения.*

8.1. *Если $a = a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n = b$ и $a = b_1 < b_2 < \ldots < a_k = b$, то $k \leqslant n$ и $k = n$ тогда и только тогда, когда $a = b_1 \prec b_2 < \ldots \prec a_k = b$ (см. [3, с. 191, 192]).*
8.2. *Если $a, b, c \in \mathfrak{M}$ и $a \prec b$, то $\sup\{a,\ c\} \preceq \sup\{b,\ c\}$ и $\inf\{a,\ c\} \preceq \inf\{b,\ c\}$ (см. [2, с. 213, теорема 4]).*

9. Замечание. Пусть $R(+,\cdot)$ — произвольное кольцо, τ_1 и τ_2 — такие кольцевые топологии, что каждое из топологических колец $(R(+,\cdot), \tau_1)$ и $(R(+,\cdot), \tau_2)$ является ограниченным слева (ограниченным справа) кольцом (см. [4, определение 1.6.2]).

Если $\Omega_1 = \{V_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ и $\Omega_2 = \{U_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ — базисы окрестностей нуля в топологических кольцах $(R(+,\cdot), \tau_1)$ и $(R(+,\cdot), \tau_2)$ соответственно, то совокупность $\Omega_3 = \{V_\gamma + U_\delta \mid \gamma \in \Gamma,\ \delta \in \Delta\}$ удовлетворяет условиям BN1—BN6 (см. [4, теорема 1.2.5]), и значит, $\inf\limits_{\mathfrak{N}(R(+))}\{\tau_1, \tau_2\}$ является кольцевой топологией.

Так как (см. замечание 2) совокупность $\Omega_4 = \{V_\gamma \cap U_\delta \mid \gamma \in \Gamma,\ \delta \in \Delta\}$ является базисом окрестностей нуля в топологическом кольце

$$\Big(R(+,\cdot), \sup_{\mathfrak{M}(R(+,\cdot))} \{\tau, \tau'\}\Big)$$

и в топологической группе

$$\Big(R(+), \sup_{\mathfrak{N}(R(+))} \{\tau, \tau'\}\Big),$$

то

$$\sup_{\mathfrak{M}(R(+,\cdot))} \{\tau, \tau'\} = \sup_{\mathfrak{N}(R(+))} \{\tau, \tau'\}.$$

Значит, решётка $(\mathfrak{M}, <)$ является подрешёткой решётки $\big(\mathfrak{N}\big(R(+)\big), <\big)$ в каждом из следующих случаев:

— $\mathfrak{M}$ — множество всех кольцевых топологий, в каждой из которых кольцо $R(+,\cdot)$ является ограниченным кольцом;
— $\mathfrak{M}$ — множество всех кольцевых топологий, в каждой из которых кольцо $R(+,\cdot)$ является ограниченным слева кольцом;
— $\mathfrak{M}$ — множество всех кольцевых топологий, в каждой из которых кольцо $R(+,\cdot)$ является ограниченным справа кольцом;
— $\mathfrak{M}$ — множеством всех кольцевых топологий, в каждой из которых кольцо $R(+,\cdot)$ обладает базисом окрестностей нуля, который состоит из левых идеалов;
— $\mathfrak{M}$ — множество всех кольцевых топологий, в каждой из которых кольцо $R(+,\cdot)$ обладает базисом окрестностей нуля, который состоит из правых идеалов;
— $\mathfrak{M}$ — множество всех кольцевых топологий, в каждой из которых кольцо $R(+,\cdot)$ обладает базисом окрестностей нуля, который состоит из двусторонних идеалов.

Следовательно, в каждом из указанных выше случаев решётка $(\mathfrak{M}, <)$ является модулярной решёткой.

10. Теорема. *Пусть I — подгруппа группы $R(+)$ и τ_0 и τ_1 — такие групповые топологии на группе $R(+)$, что $\tau_0 \leqslant \tau_1$. Если $\tau_{0,I} = \tau_{1,I}$* (см. 1.11) *и $\tau_0 + \tau(I) = \tau_1 + \tau(I)$* (см. 1.10 *и* 1.14), *то $\tau_0 = \tau_1$.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. что $\tau_0 < \tau_1$. Тогда существует такая окрестность U нуля в топологической группе $(R(+), \tau_1)$, которая не является окрестностью нуля в топологической группе $(R(+), \tau_0)$, и существует такая окрестность U_0 нуля в топологической группе $(R(+), \tau_1)$, что $U_0 + U_0 \subseteq U$.

Так как $\tau_{0,I} = \tau_{1,I}$, то существует такая окрестность V_0 нуля в топологической группе $(R(+), \tau_0)$, что $V_0 \cap I \subseteq U_0 \cap I$.

Если V_1 — такая окрестность нуля в топологической группе $(R(+), \tau_0)$, что $V_1 - V_1 \subseteq V_0$, то $V_1 \cap U_0$ будет окрестностью нуля в топологической группе $(R(+), \tau_1)$ (так как по условию теоремы $\tau_0 \leqslant \tau_1$).

Так как $\tau_0 + \tau(I) = \tau_1 + \tau(I)$, то существует такая окрестность V_2 нуля в топологической группе $(R(+), \tau_0)$, что $V_2 \subseteq V_1$ и $V_2 + I \subseteq (V_1 \cap U_0) + I$.

Если теперь v — произвольный элемент из V_2, то существуют такие элементы $g \in I$ и $u \in V_1 \cap U_0$, что $v = u + g$. Тогда $g = -u + v \in V_1 - V_2 \subseteq V_1 - V_1 \subseteq V_0$, и значит, $g \in I \cap V_0 \subseteq I \cap U_0 \subseteq U_0$. Тогда $v = u + g \in U_0 + U_0 \subseteq U$.

Из произвольности элемента $v \in V_2$ следует, что $V_2 \subseteq U$, и значит, U является окрестностью нуля в топологической группе $(R(+), \tau_0)$. Получили противоречие с выбором U. Этим теорема полностью доказана. $\square$

11. Теорема. *Пусть $R(+,\cdot)$ — произвольное кольцо, $(\mathfrak{M}, <)$ — такая решётка кольцевых топологий на кольце $R(+,\cdot)$, что $\tau(R^s) \in \mathfrak{M}$ для любого $s \in \mathbb{N}$, τ_0 и τ_1 — такие кольцевые топологии из $\mathfrak{M}$, что $\tau_0 \prec_{\mathfrak{M}} \tau_1$ и $\tau_{0,R^k} = \tau_{1,R^k}$ для некоторого натурального числа k. Если $(\mathfrak{N}, <)$ — такая подрешётка решётки $\big(\mathfrak{N}(R(+)), <\big)$, что $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big) = \mathfrak{M}$, то $\tau_0 \prec_{\mathfrak{N}} \tau_1$.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. что в решётке $(\mathfrak{N}, <)$ существует такая топология τ', что $\tau_0 < \tau' < \tau_1$, и пусть $\Omega_0 = \{V_\alpha \mid \alpha \in \Delta\}$, $\Omega' = \{V'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ и $\Omega_1 = \{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ — совокупности всех окрестностей нуля в топологическом кольце $(R(+,\cdot), \tau_0)$, топологической группе $(R(+), \tau')$ и топологическом кольце $(R(+,\cdot), \tau_1)$ соответственно. Так как $\tau_0 < \tau' < \tau_1$, то $\{V_\alpha \mid \alpha \in \Delta\} \subset \{V'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\} \subset \{U_\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$.

Дальнейшее доказательство теоремы проведём в несколько этапов.

11.1. Построение вспомогательной топологии τ'_1.

Если $n = \min\{s \mid \tau_{0,R^s} = \tau_{1,R^s}\}$, то $1 < n \leqslant k$, поскольку $\tau_{0,R^1} = \tau_0 < \tau_1 = \tau_{1,R^1}$.

Рассмотрим совокупность $\Omega = \{U_\gamma + (V'_\lambda \cap R^{n-1}) \mid \gamma \in \Gamma,\ \lambda \in \Lambda\}$ и проверим, что эта совокупность является базисом окрестностей нуля для некоторой кольцевой топологии τ'_1 в кольце $R(+,\cdot)$, т. е. проверим, что она удовлетворяет условиям BN1—BN6 (см. [4, теорема 1.2.5]).

Так как совокупность $\Omega = \{U_\gamma + (V'_\lambda \cap R^{n-1}) \mid \gamma \in \Gamma,\ \lambda \in \Lambda\}$ является базисом окрестностей нуля для групповой топологии $\tau'_1 = \tau_1 + \sup_{\mathfrak{N}}\{\tau', \tau(R^{n-1})\}$ (см. замечания 2 и 4), то условия BN1—BN4 выполняются (см. [4, предложение 1.2.1]).

Пусть теперь $\lambda_0 \in \Lambda$ и $\gamma_0 \in \Gamma$. Так как (R, τ_1) является топологическим кольцом, то существуют такие $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, что $U_{\gamma_1} + U_{\gamma_1} + U_{\gamma_1} + U_{\gamma_1} \subseteq U_{\gamma_0}$ и $U_{\gamma_2} \cdot U_{\gamma_2} \subseteq U_{\gamma_1}$. Так как $\tau_{0,R^n} = \tau_{1,R^n}$, то существует такое $\alpha_0 \in \Delta$, что $V_{\alpha_0} \cap R^n \subseteq U_{\gamma_1} \cap R^n$. Поскольку (R, τ_0) является топологическим кольцом, то существует такое $\alpha_1 \in \Delta$, что $V_{\alpha_1} \cdot V_{\alpha_1} \subseteq V_{\alpha_0}$.

Так как $\tau_0 < \tau' < \tau_1$, то $V_{\alpha_1} \in \Omega'$ и $U_{\gamma_2} \cap V_{\alpha_1} \in \Omega_1$, т. е. $V_{\alpha_1} = V'_{\lambda_1}$ и $U_{\gamma_2} \cap V_{\alpha_1} = U_{\gamma_3}$ для некоторых $\lambda_1 \in \Lambda$ и $\gamma_3 \in \Gamma$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\big(U_{\gamma_3} + (V'_{\lambda_1} \cap R^{n-1})\big) \cdot \big(U_{\gamma_3} + (V'_{\lambda_1} \cap R^{n-1})\big) = \\
&\quad = U_{\gamma_3} \cdot U_{\gamma_3} + U_{\gamma_3} \cdot (V'_{\lambda_1} \cap R^{n-1}) + (V'_{\lambda_1} \cap R^{n-1}) \cdot U_{\gamma_3} + \\
&\quad + (V'_{\lambda_1} \cap R^{n-1}) \cdot (V'_{\lambda_1} \cap R^{n-1}) \subseteq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\subseteq U_{\gamma_2}\cdot U_{\gamma_2}+V_{\alpha_1}\cdot(V_{\alpha_1}\cap R^{n-1})+(V_{\alpha_1}\cap R^{n-1})\cdot V_{\alpha_1}+\\
&+(V_{\alpha_1}\cap R^{n-1})\cdot(V_{\alpha_1}\cap R^{n-1})\subseteq\\
&\subseteq U_{\gamma_1}+\big((V_{\alpha_1}\cdot V_{\alpha_1})\cap R^n\big)+\big((V_{\alpha_1}\cdot V_{\alpha_1})\cap R^n\big)+\big((V_{\alpha_1}\cdot V_{\alpha_1})\cap R^n\big)\subseteq\\
&\subseteq U_{\gamma_1}+(V_{\alpha_0}\cap R^n)+(V_{\alpha_0}\cap R^n)+(V_{\alpha_0}\cap R^n)\subseteq\\
&\subseteq U_{\gamma_1}+(U_{\gamma_1}+U_{\gamma_1}+U_{\gamma_1})\cap R^n\\
&\subseteq U_{\gamma_1}+U_{\gamma_1}+U_{\gamma_1}+U_{\gamma_1}\subseteq U_{\gamma_0}\subseteq U_{\gamma_0}+(V'_{\lambda_0}\cap R^{n-1}).
\end{aligned}$$

Этим мы проверили, что выполняется условие BN5.

Пусть теперь $\lambda_0\in\Lambda$, $\gamma_0\in\Gamma$ и $r\in R$. Так как $(R(+,\cdot),\tau_1)$ — топологическое кольцо, то существуют $\gamma_1\in\Gamma$ и $\gamma_2\in\Gamma$, такие что $U_{\gamma_1}+U_{\gamma_1}\subseteq U_{\gamma_0}$ и $r\cdot U_{\gamma_2}\subseteq U_{\gamma_1}$ и $U_{\gamma_2}\cdot r\subseteq U_{\gamma_1}$. Так как $\tau_{0,R^n}=\tau_{1,R^n}$, то существует такое $\alpha_0\in\Delta$, что $V_{\alpha_0}\cap R^n\subseteq$ $\subseteq U_{\gamma_1}\cap R^n$, и поскольку (R,τ_0) — топологическое кольцо, то существуют такие $\alpha_1\in\Delta$ и $\alpha_2\in\Delta$, что $V_{\alpha_1}+V_{\alpha_1}\subseteq V_{\alpha_0}$ и $r\cdot V_{\alpha_2}\subseteq V_{\alpha_1}$ и $V_{\alpha_2}\cdot r\subseteq V_{\alpha_1}$.

Так как $\tau_0<\tau'$, то $V_{\alpha_2}\in\Omega'$, и значит, $V_{\alpha_2}=V'_{\lambda_1}$ для некоторого $\lambda_1\in\Lambda$. Тогда

$$\begin{aligned}
r\cdot\big(U_{\gamma_2}&+(V'_{\lambda_1}\cap R^{n-1})\big)=r\cdot U_{\gamma_2}+r\cdot(V'_{\lambda_1}\cap R^{n-1})\\
&=r\cdot U_{\gamma_2}+\big((r\cdot V'_{\lambda_1})\cap R^n\big)\subseteq U_{\gamma_1}+\big((r\cdot V_{\alpha_2})\cap R^n\big)\subseteq U_{\gamma_1}+(V_{\alpha_1}\cap R^n)\\
&\subseteq U_{\gamma_1}+(V_{\alpha_0}\cap R^n)\subseteq U_{\gamma_1}+(U_{\gamma_1}\cap R^n)\subseteq U_{\gamma_1}+U_{\gamma_1}\subseteq\\
&\subseteq U_{\gamma_0}\subseteq U_{\gamma_0}+(V'_{\lambda_0}\cap R^{n-1}).
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\big(U_{\gamma_2}&+(V'_{\lambda_1}\cap R^{n-1})\big)\cdot r=U_{\gamma_2}\cdot r+(V'_{\lambda_1}\cap R^{n-1})\cdot r\\
&=U_{\gamma_2}\cdot r+\big((V'_{\lambda_1}\cdot r)\cap R^n\big)\subseteq U_{\gamma_1}+\big((V_{\alpha_2}\cdot r)\cap R^n\big)\subseteq U_{\gamma_1}+(V_{\alpha_1}\cap R^n)\\
&\subseteq U_{\gamma_1}+(V_{\alpha_0}\cap R^n)\subseteq U_{\gamma_1}+(U_{\gamma_1}\cap R^n)\subseteq U_{\gamma_1}+U_{\gamma_1}\subseteq\\
&\subseteq U_{\gamma_0}\subseteq U_{\gamma_0}+(V'_{\lambda_0}\cap R^{n-1}).
\end{aligned}$$

Этим мы проверили, что выполняется условие BN6.

Согласно теореме 1.2.5 из [4] совокупность Ω задаёт на кольце $R(+,\cdot)$ некоторую кольцевую топологию, являясь в ней базисом окрестностей нуля, и значит, τ'_1 является кольцевой топологией в $R(+,\cdot)$, т. е. $\tau'_1\in\mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big)$.

11.2. Свойства топологии τ'_1.

Так как $U_\gamma\subseteq U_\gamma+(V'_\lambda\cap R^{n-1})$ для любых $\gamma\in\Gamma$ и $\lambda\in\Lambda$ и кольцевая топология единственным образом определяется базисом окрестностей нуля, то $\tau'_1\leqslant\tau_1$.

Проверим теперь, что $\tau'\leqslant\tau'_1$. Пусть $V'_{\lambda_0}\in\Omega'$. Так как $(R(+),\tau')$ — топологическая группа, то существует $V'_{\lambda_1}\in\Omega'$, такое что $V'_{\lambda_1}+V'_{\lambda_1}\subseteq V'_{\lambda_0}$. Поскольку $\tau'<\tau_1$, то $V'_{\lambda_1}\in\Omega_1$, и значит, $V'_{\lambda_1}=U_\gamma$ для некоторого $\gamma\in\Gamma$. Тогда $U_\gamma+(V'_{\lambda_1}\cap R^{n-1})\in\Omega'_1$ и $U_\gamma+(V'_{\lambda_1}\cap R^{n-1})\subseteq V'_{\lambda_1}+V'_{\lambda_1}\subseteq V'_{\lambda_0}$. Значит, V'_{λ_0} является окрестностью нуля в $(R(+),\tau'_1)$. Из произвольности V'_{λ_0} следует, что $\tau'\leqslant\tau'_1$. Тогда $\tau_0<\tau'\leqslant\tau'_1\leqslant\tau_1$.

Так как τ_1 и $\tau(R^{n-1}) \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$ и $\tau' \in \mathfrak{N}$, то (см. замечания 2 и 4)

$$\tau_1' = \tau_1 + \tau'_{R^{n-1}} = \inf_{\mathfrak{N}}\Big\{\tau_1, \sup_{\mathfrak{N}}\{\tau', \tau(R^{n-1})\}\Big\} \in \mathfrak{N}.$$

Кроме того, выше было доказано, что $\tau_1' \in \mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big)$, и значит, $\tau_1' \in \mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big) \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{M}$. Так как $\tau_0 \prec_{\mathfrak{M}} \tau_1$, то $\tau_1' = \tau_1$.

Если теперь $\gamma_0 \in \Gamma$, то существуют $\gamma_1 \in \Gamma$ и $\lambda_1 \in \Lambda$, такие что $U_{\gamma_1} + (V'_{\lambda_1} \cap R^{n-1}) \subseteq U_{\gamma_0}$ (поскольку $\tau_1' = \tau_1$). Тогда

$$V'_{\lambda_1} \cap R^{n-1} \subseteq \big(U_{\gamma_1} + (V'_{\lambda_1} \cap R^{n-1})\big) \cap R^{n-1} \subseteq U_{\gamma_0} \cap R^{n-1},$$

и значит, $\tau'_{R^{n-1}} \geqslant \tau_{1,R^{n-1}}$.

Так как $\tau' < \tau_1$, то $\tau'_{R^{n-1}} \leqslant \tau_{1,R^{n-1}}$, и значит, $\tau'_{R^{n-1}} = \tau_{1,R^{n-1}}$.

11.3 Построение вспомогательной топологии τ_2'.

Рассмотрим совокупность

$$\{U_\gamma + (V_\alpha \cap R^{n-1}) \mid \gamma \in \Gamma,\ \alpha \in \Delta\}.$$

Поскольку (R, τ_0) и (R, τ_1) — топологические кольца, то легко проверяется, что эта совокупность удовлетворяет условиям BN1—BN4 и BN5 (см. [4, теорема 1.2.5]).

Пусть теперь $\gamma_1 \in \Gamma$ и $\alpha_1 \in \Delta$. Так как (R, τ_0) и (R, τ_1) — топологические кольца, то существуют $\alpha_2 \in \Delta$ и $\gamma_2 \in \Gamma$, такие что $V_{\alpha_2} \cdot V_{\alpha_2} + V_{\alpha_2} \cdot V_{\alpha_2} + V_{\alpha_2} \cdot V_{\alpha_2} \subseteq V_{\alpha_1}$ и $U_{\gamma_2} \cdot U_{\gamma_2} \subseteq U_{\gamma_1}$.

Так как $\tau_0 < \tau_1$, то $U_{\gamma_2} \cap V_{\alpha_2} \in \Omega_1$, т. е. $U_{\gamma_2} \cap V_{\alpha_2} = U_{\gamma_3}$ для некоторого $\gamma_3 \in \Gamma$, причём

$$\begin{aligned}
&\big(U_{\gamma_3} + (V_{\alpha_2} \cap R^{n-1})\big) \cdot \big(U_{\gamma_3} + (V_{\alpha_2} \cap R^{n-1})\big) = \\
&\quad = U_{\gamma_3} \cdot U_{\gamma_3} + U_{\gamma_3} \cdot (V_{\alpha_2} \cap R^{n-1}) + (V_{\alpha_2} \cap R^{n-1}) \cdot U_{\gamma_3} + \\
&\quad + (V_{\alpha_2} \cap R^{n-1}) \cdot (V_{\alpha_2} \cap R^{n-1}) \subseteq \\
&\quad \subseteq U_{\gamma_2} \cdot U_{\gamma_2} + \big((V_{\alpha_2} \cdot V_{\alpha_2} + V_{\alpha_2} \cdot V_{\alpha_2} + V_{\alpha_2} \cdot V_{\alpha_2}\big) \cap R^{n-1}\big) \subseteq \\
&\quad \subseteq U_{\gamma_1} + (V_{\alpha_2} \cap R^{n-1}).
\end{aligned}$$

Значит, условие BN6 выполняется. Поэтому совокупность $\{U_\gamma + (V_\alpha \cap R^{n-1}) \mid \gamma \in \Gamma,\ \alpha \in \Delta\}$ задаёт на кольце R некоторую кольцевую топологию τ_2', в которой она является базисом окрестностей нуля.

Поскольку $\tau_0, \tau_1, \tau(R^{n-1}) \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, то $\tau_2' = \inf_{\mathfrak{N}}\Big\{\tau_1, \sup_{\mathfrak{N}}\{\tau_0, \tau(R^{n-1})\}\Big\} \in \mathfrak{N}$, и так как $\tau_2' \in \mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big)$, то $\tau_2' \in \mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big) \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

11.4. Свойства топологии τ_2'.

Так как $U_\gamma \subseteq U_\gamma + (V_\alpha \cap R^{n-1})$ для любых $\gamma \in \Gamma$ и $\alpha \in \Delta$, то $\tau_2' \leqslant \tau_1$.

Из определения числа n следует, что $\tau_{0,R^{n-1}} < \tau_{1,R^{n-1}}$. Так как $V_\alpha \cap R^{n-1} \subseteq \big(U_\gamma + (V_\alpha \cap R^{n-1})\big) \cap R^{n-1}$ для любых $\alpha \in \Delta$ и $\gamma \in \Gamma$, то $\tau'_{2,R^{n-1}} \leqslant \tau_{0,R^{n-1}} < \tau_{1,R^{n-1}}$, и значит, $\tau_2' < \tau_1$ (так как в противном случае было бы $\tau'_{2,R^{n-1}} = \tau_{1,R^{n-1}}$).

Если теперь $\alpha_0 \in \Delta$, то существует $\alpha_1 \in \Delta$, такое что $V_{\alpha_1} + V_{\alpha_1} \subseteq V_{\alpha_0}$. Так как $\tau_0 < \tau_1$, то $V_{\alpha_1} \in \Omega_1$, и значит, $V_{\alpha_1} = U_{\gamma_1}$ для некоторого $\gamma_1 \in \Gamma$. Тогда $U_{\gamma_1} + (V_{\alpha_1} \cap R^{n-1}) \subseteq V_{\alpha_1} + V_{\alpha_1} \subseteq V_{\alpha_0}$. Из произвольности $\alpha_0 \in \Delta$ следует, что $\tau_0 \leqslant \tau_2'$.

Итак, мы получили, что $\tau_0 \leqslant \tau_2' < \tau_1$ и $\tau_2' \in \mathfrak{M}$.

Так как $\tau_0 \prec_{\mathfrak{M}} \tau_1$, то $\tau_2' = \tau_0$. Тогда для любых $\gamma_1 \in \Gamma$ и $\alpha_1 \in \Delta$ существует $\alpha_2 \in \Delta$, такое что $V_{\alpha_2} \subseteq U_{\gamma_1} + (V_{\alpha_1} \cap R^{n-1})$, и значит,

$$V_{\alpha_2} + R^{n-1} \subseteq U_{\gamma_1} + (V_{\alpha_1} \cap R^{n-1}) + R^{n-1} = U_{\gamma_1} + R^{n-1}.$$

Из произвольности $\gamma_1 \in \Gamma$ следует, что $\tau_0 + \tau(R^{n-1}) \geqslant \tau_1 + \tau(R^{n-1})$.

Так как $\tau_0 < \tau' < \tau_1$, то

$$\tau_0 + \tau(R^{n-1}) \leqslant \tau' + \tau(R^{n-1}) \leqslant \tau_1 + \tau(R^{n-1}) \leqslant \tau_0 + \tau(R^{n-1}),$$

и значит, $\tau_0 + \tau(R^{n-1}) = \tau' + \tau(R^{n-1}) = \tau_1 + \tau(R^{n-1})$.

Итак, мы показали, что $\tau' + \tau(R^{n-1}) = \tau_1 + \tau(R^{n-1})$. Поскольку выше было доказано (см. 11.2), что $\tau'_{R^{n-1}} = \tau_{1,R^{n-1}}$, то согласно теореме 10 имеем, что $\tau' = \tau_1$. Получили противоречие с выбором топологии τ'. Этим теорема полностью доказана. $\square$

12. Следствие. *Пусть $R(+,\cdot)$ — произвольное нильпотентное кольцо и $(\mathfrak{M}, <)$ — такая решётка кольцевых топологий на кольце $R(+,\cdot)$, что $\tau(R^s) \in \mathfrak{M}$ для любого $s \in \mathbb{N}$. Если $(\mathfrak{N}, <)$ — такая подрешётка решётки $\big(\mathfrak{N}\big(R(+)\big), <\big)$, что $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big) = \mathfrak{M}$, то всякая кольцевая топология τ, которая является коатомом в решётке $\mathfrak{M}$, будет коатомом и в решётке $\mathfrak{N}$.*

В самом деле, из нильпотентности кольца $R(+,\cdot)$ следует, что $R^m = \{0\}$ для некоторого натурального числа m. Так как $\tau(\{0\}) = \tau(R^m) \in \mathfrak{M}$, то $\tau(\{0\})$ является наибольшим элементом в решётке $(\mathfrak{M}, <)$, и значит, $\tau \prec_{\mathfrak{M}} \tau(\{0\})$. Так как $\tau_{R^m} = \tau(\{0\}) = \tau(\{0\})_{R^m}$, то согласно теореме 11 $\tau \prec_{\mathfrak{N}} \tau(\{0\})$. Тогда $\tau(0)$, как дискретная топология, является наибольшей топологией в решётке $(\mathfrak{N}, <)$, и значит, τ является коатомом в решётке $(\mathfrak{N}, <)$.

13. Теорема. *Пусть $R(+,\cdot)$ — произвольное нильпотентное кольцо, $(\mathfrak{M}, <)$ — такая решётка кольцевых топологий на $R(+,\cdot)$, что $\tau(R^t) \in \mathfrak{M}$ для любого $t \in \mathbb{N}$, τ и τ' — такие топологии из $\mathfrak{M}$, что $\tau = \tau_0 \prec_{\mathfrak{M}} \tau_1 \prec_{\mathfrak{M}} \ldots \prec_{\mathfrak{M}} \tau_n = \tau'$. Если существует такая подрешётка $(\mathfrak{N}, <)$ решётки $\big(\mathfrak{N}\big(R(+)\big), <\big)$, что $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big) = \mathfrak{M}$, то $k \leqslant n$ для любой цепочки $\tau = \tau_0' < \tau_1' < \ldots < \tau_k' = \tau'$ топологий $\tau_i' \in \mathfrak{M}$ и $n = k$ тогда и только тогда, когда $\tau_i' \prec_{\mathfrak{M}} \tau_{i+1}'$ для $0 \leqslant i < k$.*

Доказательство. Из нильпотентности кольца $R(+,\cdot)$ следует, что $R^m = \{0\}$ для некоторого натурального числа m. Так как $\tau(\{0\}) = \tau(R^m) \in \mathfrak{M}$, то $\tau_{i-1,R^m} = \tau(\{0\}) = \tau_{i,R^m}$ для любого $0 < i \leqslant n$. Тогда согласно теореме 11 $\tau_{i-1} \prec_{(\mathfrak{N},<)} \tau_i$ для $0 < i \leqslant n$ и, так как решётка $(\mathfrak{N}, <)$ является модулярной (см. [6]), согласно теореме 8 $k \leqslant n$ и $n = k$ тогда и только тогда, когда $\tau_i' \prec_{\mathfrak{M}} \tau_{i+1}'$ для $0 \leqslant i < k$. $\square$

14. Теорема. *Пусть* $R(+,\cdot)$ — *произвольное нильпотентное кольцо,* A — *некоторое подкольцо кольца* $R(+,\cdot)$, $(\mathfrak{M},<)$ — *такая решётка кольцевых топологий на кольце* $R(+,\cdot)$, *что* $\tau(R^k)\in\mathfrak{M}$ *для любого* $k\in\mathbb{N}$, τ *и* τ' — *такие топологии из* $\mathfrak{M}$, *что* $\tau=\tau_0\prec_{\mathfrak{M}}\tau_1\prec_{\mathfrak{M}}\ldots\prec_{\mathfrak{M}}\tau_n=\tau'$. *Если существует такая подрешётка* $(\mathfrak{N},<)$ *решётки* $\big(\mathfrak{N}\big(R(+)\big),<\big)$, *что* $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}(R(+,\cdot)=\mathfrak{M}$ *и* $\tau(A)\in\mathfrak{N}$, *то* $\tau|_A=\tau_0|_A\preceq_{\mathfrak{M}|_A}\tau_1|_A\preceq_{\mathfrak{M}|_A}\ldots\preceq_{\mathfrak{M}|_A}\tau_n|_A=\tau'|_A$.

Доказательство. Так как $\tau_i\in\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}$ и $\tau(A)\in\mathfrak{N}$, то $\tau_{i,A}=\sup\limits_{\mathfrak{N}}\{\tau(A),\tau_i\}$ для любого $0\leqslant i<n$. Из нильпотентности кольца $R(+,\cdot)$ следует (см. теорему 11), что $\tau_i\prec_{\mathfrak{N}}\tau_{i+1}$ для любого $0\leqslant i<n$. Так как решётка $(\mathfrak{N},<)$ является модулярной, то согласно теореме 8

$$\tau_{i,A}=\sup_{\mathfrak{N}}\{\tau(A),\tau_i\}\preceq_{\mathfrak{N}}\sup_{\mathfrak{N}}\{\tau(A),\tau_{i+1}\}=\tau_{i+1,A}$$

для любого $0\leqslant i<n$. Поскольку $(\mathfrak{N}_A,<)$ является подрешёткой решётки $(\mathfrak{N},<)$, то $\tau_{i,A}\preceq_{\mathfrak{N}_A}\tau_{i+1,A}$ для любого $0\leqslant i<n$. Тогда согласно замечанию 3 $\tau_i|_A\preceq_{\mathfrak{N}|_A}\tau_{i+1}|_A$ для любого $0\leqslant i<n$. Этим теорема полностью доказана. □

15. Теорема. *Пусть* $R(+,\cdot)$ — *произвольное нильпотентное кольцо,* I — *некоторый идеал кольца* $R(+,\cdot)$, $(\mathfrak{M},<)$ — *такая решётка кольцевых топологий на* $R(+,\cdot)$, *что* $\tau(R^k)\in\mathfrak{M}$ *для любого* $k\in\mathbb{N}$, τ *и* τ' — *такие топологии из* $\mathfrak{M}$, *что* $\tau=\tau_0\prec_{\mathfrak{M}}\tau_1\prec_{\mathfrak{M}}\ldots\prec_{\mathfrak{M}}\tau_n=\tau'$. *Если существует такая подрешётка* $(\mathfrak{N},<)$ *решётки* $\big(\mathfrak{N}\big(R(+)\big),<\big)$, *что* $\tau(I)\in\mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{N}\cap\mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big)=\mathfrak{M}$, *то*

$$\tau/I=\tau_0/I\preceq_{\mathfrak{M}/I}\tau_1/I\preceq_{\mathfrak{M}/I}\ldots\preceq_{\mathfrak{M}/I}\tau_n/I=\tau'/I.$$

Доказательство. Из нильпотентности кольца $R(+,\cdot)$ следует (см. теорему 11), что $\tau_i\prec_{\mathfrak{N}}\tau_{i+1}$ для любого $0\leqslant i<n$. Так как $\tau_i\in\mathfrak{M}\subseteq\mathfrak{N}$ и $\tau(I)\in\mathfrak{N}$, то $\tau_i+\tau(I)=\inf\limits_{\mathfrak{N}}\{\tau(I),\tau_i\}\in\mathfrak{N}$ для любого $0\leqslant i<n$. Поскольку решётка $(\mathfrak{N},<)$ является модулярной, то согласно теореме 8

$$\tau_i+\tau(I)=\inf_{\mathfrak{N}}\{\tau(I),\tau_i\}\preceq_{\mathfrak{N}}\inf_{\mathfrak{N}}\{\tau(I),\tau_{i+1}\}=\tau_{i+1}+\tau(I)$$

для любого $0\leqslant i<n$. Тогда согласно замечанию 5 $\tau_i/I\preceq_{\mathfrak{N}/I}\tau_{i+1}/I$. Поскольку $\mathfrak{M}/I\subseteq\mathfrak{N}/I$, то $\tau_i/I\preceq_{\mathfrak{M}/I}\tau_{i+1}/I$ для любого $0\leqslant i<n$. Этим теорема полностью доказана. □

16. Следствие. *Пусть* $R(+,\cdot)$ — *произвольное нильпотентное кольцо и* $(\mathfrak{M},<)$ — *решётка всех кольцевых топологий на кольце* $R(+,\cdot)$ *или решётка всех кольцевых топологий на кольце* $R(+,\cdot)$, *в каждой из которых кольцо* $R(+,\cdot)$ *обладает базисом окрестностей нуля, который состоит из подгрупп группы* $R(+)$. *Если* $\tau=\tau_0\prec_{\mathfrak{M}}\tau_1\prec_{\mathfrak{M}}\ldots\prec_{\mathfrak{M}}\tau_n=\tau'$, *то верны следующие утверждения.*

16.1. $k\leqslant n$ *для любой цепочки* $\tau=\tau'_0<\tau'_1<\ldots<\tau'_k=\tau'$ *топологий* $\tau'_i\in\mathfrak{M}$, *и* $n=k$ *тогда и только тогда, когда* $\tau'_i\prec_{\mathfrak{M}}\tau'_{i+1}$ *для всех* $0\leqslant i<k$.

16.2. *Если* A — *подкольцо кольца* $R(+,\cdot)$, *то*

$$\tau|_A=\tau_0|_A\preceq_{\mathfrak{M}|_A}\tau_1|_A\preceq_{\mathfrak{M}|_A}\ldots\preceq_{\mathfrak{M}|_A}\tau_n|_A=\tau'|_A.$$

16.3. *Если I — идеал кольца $R(+,\cdot)$, то*

$$\tau/I = \tau_0/I \preceq_{\mathfrak{M}/I} \tau_1/I \preceq_{\mathfrak{M}/I} \ldots \preceq_{\mathfrak{M}/I} \tau_n/I = \tau'/I.$$

Действительно, если $\mathfrak{N}$ — множество всех групповых топологий на группе $R(+)$ или множество всех групповых топологий на группе $R(+)$, в каждой из которых группа $R(+)$ обладает базисом окрестностей нуля, который состоит из подгрупп группы $R(+)$, то $(\mathfrak{N},<)$ — подрешётка решётки $\big(\mathfrak{N}\big(R(+)\big),<\big)$, причём $\mathfrak{M} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}\big(R(+,\cdot)\big)$. Так как в каждом из рассматриваемых случаев $\tau(I) \in \mathfrak{M}$ и $\tau(A) \in \mathfrak{N}$, то утверждения следствия следуют из теорем 13, 14 и 15 соответственно.

Литература

[1] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[2] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.

[3] Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. — М., 2007.

[4] Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. — New York: Marsel Dekker, 1996.

[5] Arnautov V. I., Topala A. G. An example of ring with nonmodular lattice of ring topologies // Bul. Acad. Şti. Rep. Moldova, Mat. — 1998. — No. 2 (27). — P. 130—131.

[6] Smarda B. The lattice of topologies of topological l-group // Czech. Math. J. — 1976. — Vol. 26 (101). — P. 128—136.