

Специальное представление графов и визуализация семантических сетей

В. В. БОРИСЕНКО

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики
e-mail: vladimir_borisen@mail.ru*

А. П. ЛАХНО

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики
e-mail: alakhno@gmail.com*

А. М. ЧЕПОВСКИЙ

*Национальный исследовательский университет
Высшая школа экономики
e-mail: achep@adde.math.msu.su*

УДК 519.17

Ключевые слова: геометрические представления графов, обзорное представление, визуализация семантических сетей, размещение графов.

Аннотация

Представление графов, при котором вершины изображаются горизонтальными отрезками, было предложено в 1980-х годах в контексте задачи построения сверхбольших интегральных схем. Приводится обзор известных на сегодняшний день результатов исследований данного представления, а также предлагается способ их использования в аналитических системах для визуализации семантических сетей.

Abstract

V. V. Borisenko, A. P. Lakhno, A. M. Chepovskiy, Special graph representation and visualization of semantic networks, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 27–35.

A visibility representation of graphs in which each vertex is mapped to a horizontal segment, was originally proposed in 1980s in the context of the VLSI layout construction problem. In this paper, we present an up-to-date survey on this representation and propose a way of its usage in visualization of semantic networks.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 8, с. 27–35.

© 2010 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

1. Специальное представление графов

Изображение графа допускает различные геометрические представления. В рассматриваемом классе представлений вершины графа изображаются горизонтальными отрезками, а рёбра — вертикальными (рис. 1). Горизонтальные отрезки называются *вершинными*, а вертикальные — *рёберными*. Представление Γ графа $G = (V, E)$ устроено таким образом, что

- никакие два вершинных отрезка не накладываются друг на друга;
- концы рёберного отрезка $\Gamma(u, v)$ должны лежать на вершинных отрезках $\Gamma(u)$ и $\Gamma(v)$ соответственно;
- рёберный отрезок $\Gamma(u, v)$ не может иметь общих точек ни с какими вершинными отрезками, кроме $\Gamma(u)$ и $\Gamma(v)$.

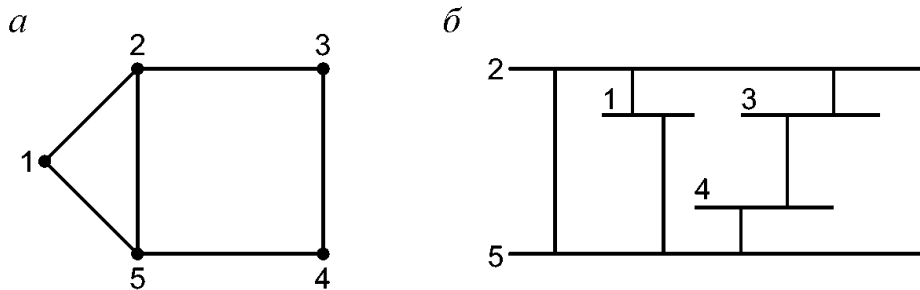


Рис. 1. Различные геометрические представления графа: *а* — вершины изображаются точками, рёбра — кривыми; *б* — вершины изображаются горизонтальными отрезками, рёбра — вертикальными отрезками

Такое представление было предложено в контексте задачи разводки печатных плат [27]. Вершины графа соответствовали компонентам схемы, а рёбра — соединениям между ними. По геометрическому представлению Γ легко может быть построена плоская укладка классического представления, при котором вершины графа изображаются точками, а рёбра — кривыми. Поэтому такое геометрическое представление может существовать только для планарных графов. В [27] был предложен линейный по времени работы алгоритм построения представления Γ для планарных двусвязных графов. Позже в [12] было показано, что представление Γ существует для произвольных планарных графов, а в [28, 30] был предложен линейный по времени работы алгоритм его построения.

В большинстве последующих работ геометрическое представление Γ вводится через понятие видимости. Пара горизонтальных отрезков заданного множества *видна*, если их можно соединить вертикальным отрезком, не пересекающим других горизонтальных отрезков. Пара горизонтальных отрезков заданного множества *ε -видна*, если их можно соединить вертикальной полосой ненулевой ширины, не пересекающей других горизонтальных отрезков. В представлении Γ

должны быть видны все пары вершинных отрезков, соответствующих смежным вершинам. В [1] представление Γ называется *обзорным* (от англ. «visibility representation»). Выделяют три основных типа обзорных представлений [30]: слабое обзорное представление, ε -обзорное представление и сильное обзорное представление (рис. 2).

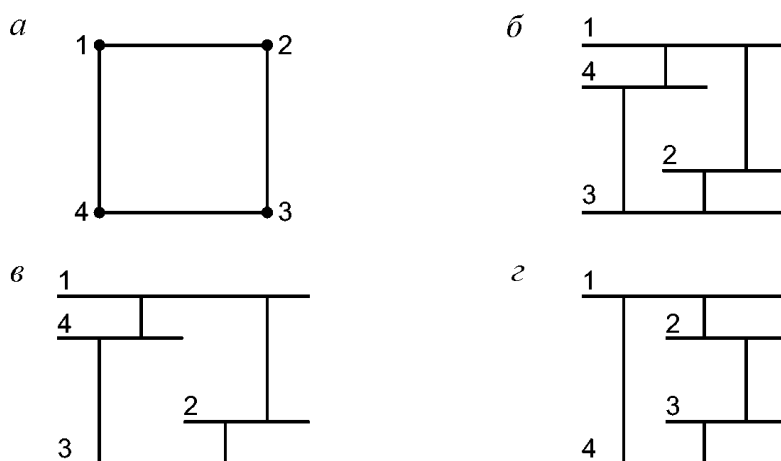


Рис. 2. Типы обзорного представления: a — классическое представление; b — слабое обзорное представление; v — ε -обзорное представление; g — сильное обзорное представление

Определение 1. *Слабым обзорным представлением* (w -обзорным представлением) графа $G = (V, E)$ называется такое отображение вершин графа G во множество непересекающихся горизонтальных отрезков и рёбер графа G во множество вертикальных отрезков, что для каждого ребра $(u, v) \in E$ концы соответствующего ему вертикального отрезка лежат на горизонтальных отрезках, соответствующих вершинам u и v , и этот рёберный отрезок не пересекается с другими вершинными отрезками.

Данное определение соответствует представлению, рассматриваемому в [27]. Вершинные отрезки, соответствующие смежным вершинам, должны быть видны друг из друга, но из того что два вершинных отрезка видны, не следует, что они соответствуют смежным вершинам.

Определение 2. ε -обзорным представлением графа G называется w -обзорное представление, в котором два вершинных отрезка ε -видны тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины G являются смежными.

Такое представление было предложено в начале 1990-х [24]. В [33] было показано, что ε -обзорное представление допускают все трёхсвязные планарные графы, а в [30] и [37] независимо было получено, что ε -обзорное представление графа G существует в том и только том случае, когда для G существует плоская укладка, при которой все точки сочленения графа принадлежат границе

одной грани. В тех же работах были предложены линейные по времени работы алгоритмы проверки выполнения этого условия и построения ε -обзорного представления.

Определение 3. *Сильным обзорным представлением (s -обзорным представлением) графа G называется w -обзорное представление, в котором два вершинных отрезка видны тогда и только тогда, когда соответствующие им вершины G являются смежными.*

Впервые s -обзорное представление было рассмотрено в [22]. В [23] приводится описание класса графов, допускающих s -обзорное представление, в котором координаты x концов всех вершинных отрезков различны. Позже в [30] было получено описание класса графов, допускающих s -обзорное представление общего вида, а также предложены эффективные алгоритмы построения такого представления для случаев четырёхсвязного планарного графа и максимального планарного графа. *Максимальным планарным графом* называют такой планарный граф, который при добавлении любого некрatного ребра между существующими вершинами перестаёт быть планарным. Как было показано в [3], задача проверки существования s -обзорного представления для графа общего вида является NP-полной.

Среди других работ, связанных с обзорным представлением графов, можно выделить несколько основных направлений:

- минимизация геометрических размеров обзорного представления графа [8, 13, 14, 18–21, 26, 35, 38];
- использование обзорного представления в качестве промежуточного шага при построении других геометрических представлений графов. В [4, 5] описываются алгоритмы построения полилинейных изображений графа, в которых вершины изображаются точками, а рёбра — ломаными. В [31] описывается алгоритм построения ортогонального изображения графа, в котором каждое ребро представляется ломаной, состоящей только из горизонтальных и вертикальных отрезков;
- исследование разновидностей обзорных представлений, в которых вершины представляются прямоугольниками [6, 29], отрезками единичной длины [11, 36] или дугами концентрических окружностей [15];
- обобщение понятия видимости [10]. Два горизонтальных отрезка заданного множества k -видимы, если их можно соединить вертикальным отрезком, пересекающим не более k других горизонтальных отрезков. Предельным случаем является *интервальный граф*, в котором вершины представляются горизонтальными отрезками и являются смежными в том и только том случае, когда проекции соответствующих им отрезков на ось Ox пересекаются;
- построение обзорного представления в случае ориентированных графов [34];
- изучение обзорных представлений графов на различных поверхностях [7, 9, 25, 32].

2. Визуализация семантических сетей

Семантические сети являются естественным способом представления информации о взаимосвязях между объектами. С математической точки зрения семантическая сеть представляет собой граф с помеченными вершинами и рёбрами. Вершины графа соответствуют объектам, а рёбра — связям между этими объектами. Пометки задают описания объектов и связей. Рассматривается задача визуализации подсетей, индуцированных заданным множеством объектов [2]. Входными данными рассматриваемой задачи являются

- граф $G = (V_0, E_0)$, где V_0 — множество вершин, E_0 — множество рёбер. Граф G не содержит петель, но может иметь кратные рёбра. Наличие ориентации рёбер несущественно;
- пометки на вершинах и рёбрах, задаваемые размерами объемлющих прямоугольников: $w(v)$, $h(v)$ для $v \in V_0$ и $w(e)$, $h(e)$ для $e \in E_0$, где w — ширина прямоугольников, h — высота;
- выделенное множество вершин $V' \subseteq V_0$.

Объектом визуализации является подграф $G = (V, E)$ графа G_0 , индуцированный множеством рёбер, инцидентных вершинам выделенного множества V' :

$$E = \{e \in E_0 \mid \text{ребро } e \text{ инцидентно некоторой вершине } u \in V'\},$$

$$V = \{v \in V_0 \mid \text{вершина } v \text{ инцидентна некоторому ребру } e \in E\}.$$

Граф G содержит вершины выделенного множества, а также вершины, непосредственно с ними связанные. Будем называть вершины множества $V \setminus V'$ вторичными. В графе G не может быть рёбер между вторичными вершинами, поскольку каждое ребро $e \in E$ инцидентно некоторой вершине $u \in V'$. Таким образом, каждое ребро графа G соединяет либо пару вершин u_1, u_2 выделенного множества V' , либо вершину выделенного множества $u \in V'$ и вторичную вершину $v \in V \setminus V'$.

В [2] для визуализации графа G было предложено использовать *многополосное размещение*, при котором вершины выделенного множества представляются в виде горизонтальных отрезков, а для размещения пометок вторичных вершин и рёбер используется пространство между этими отрезками (рис. 3). Горизонтальные отрезки, соответствующие вершинам выделенного множества, размещаются один под другим, что в ряде случаев приводит к трудночитаемым изображениям (рис. 4, а). Существует две конфигурации, приводящие к ухудшению читаемости изображения из-за появления дополнительных пересечений линий связей и горизонтальных отрезков, представляющих вершины выделенного множества:

- наличие ребра между выделенными вершинами, для которых соответствующие им горизонтальные отрезки не являются соседними;
- наличие вторичной вершины, смежной выделенным вершинам, для которых соответствующие им отрезки не являются соседними.

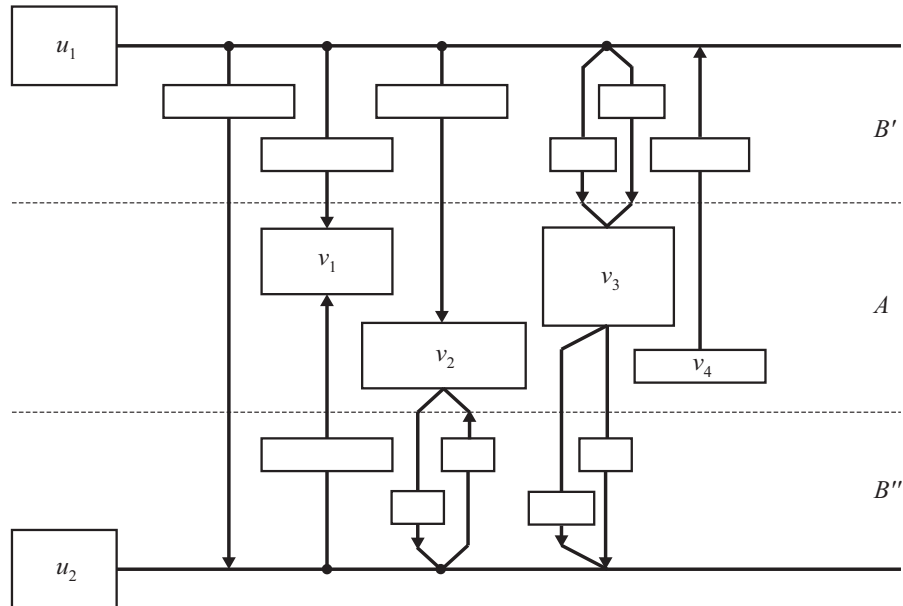


Рис. 3. Фрагмент многополосного размещения: u_1, u_2 — выделенные вершины, v_1, v_2, v_3, v_4 — вторичные вершины

Для решения проблемы предлагается производить построение каркаса изображения при помощи w-обзорного представления графа G , что при условии планарности графа G полностью исключает появление пересечений между линиями связей и вершинными отрезками (рис. 4, б, в). В случае если граф G не является планарным, следует произвести его предварительную планаризацию [16, 17].

Литература

- [1] Касьянов В. Н., Евстигнеев В. А. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение. — СПб.: БХВ-Петербург, 2003. — С. 335—448.
- [2] Лахно А. П., Чеповский А. М., Чернобай В. Б. Визуализация связей выделенного множества объектов семантической сети // Прикл. информатика. — 2010. — № 6 (30). — С. 55—61.
- [3] Andreae T. Some results on visibility graphs // Discrete Appl. Math. — 1992. — Vol. 40, no. 1. — P. 5—17.
- [4] Di Battista G., Tamassia R. Algorithms for plane representations of acyclic digraphs // Theor. Comput. Sci. — 1988. — Vol. 61. — P. 175—198.
- [5] Di Battista G., Tamassia R., Tollis I. G. Constrained visibility representations of graphs // Inform. Process. Lett. — 1992. — Vol. 41. — P. 1—7.

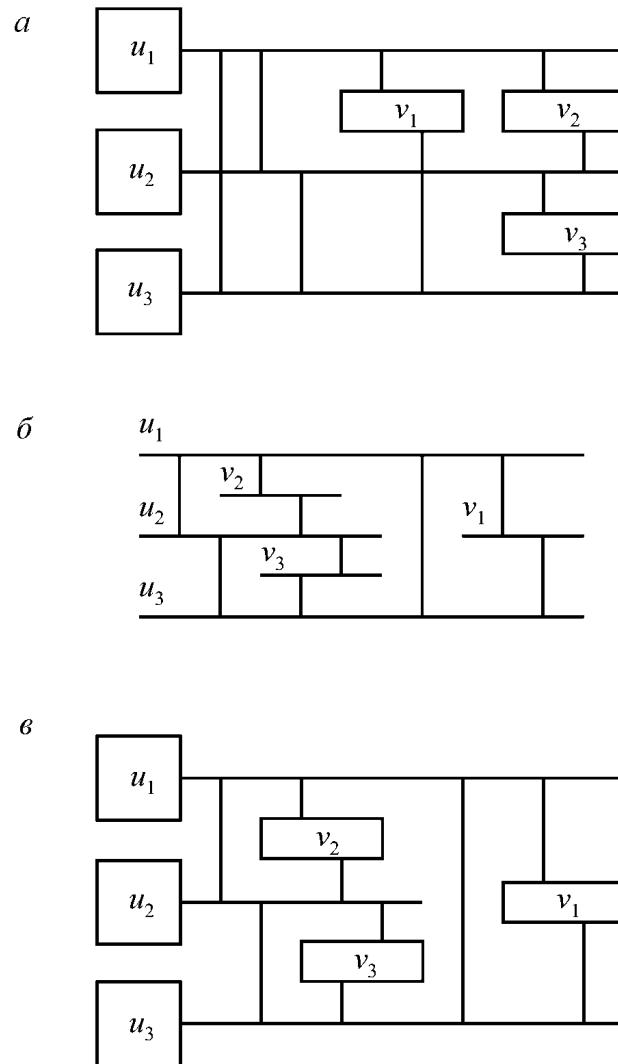


Рис. 4. Использование w-обзорного представления для построения изображения семантической сети: *a* — конфигурации, приводящие к ухудшению читаемости изображения; *б* — w-обзорное представление графа; *в* — изображение, построенное на основе w-обзорного представления

- [6] Bose P., Dean A. M., Hutchinson J. P., Shermer T. C. On rectangle visibility graphs // Symp. on Graph Drawing GD'96, Berkeley, California, USA, September 18–20, 1996. Proceedings / S. North, ed. — Berlin: Springer, 1997. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 1190). — P. 25–44.
- [7] Botebol M. C., Cobos F. J., Dana J. C., Márquez A., Mateos F. Visibility Drawings of Graphs on Surfaces.

- [8] Chen C. Y., Hung Y. F., Lu H. I. Visibility representations of four connected plane graphs with near optimal heights // 16th Int. Symp., GD 2008, Heraklion, Crete, Greece, September 21–24, 2008. Revised Papers / I. G. Tollis, M. Patrignani, eds. — Berlin: Springer, 2009. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 5417). — P. 67–77.
- [9] Dean A. M. A layout algorithm for bar-visibility graphs on the Mobius band // Graph Drawing. 8th Int. Symp., GD 2000, Colonial Williamsburg, VA, USA, September 20–23, 2000. Proceedings / J. Marks, ed. — Berlin: Springer, 2001. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 1984). — P. 350–359.
- [10] Dean A. M., Evans W., Gethner E., Laison J. D., Safari M. A., Trotter W. T. Bar k -visibility graphs // J. Graph Alg. Appl. — 2007. — Vol. 11, no. 1. — P. 45–59.
- [11] Dean A. M., Veytsel N. Unit bar-visibility graphs // Congr. Numer. — 2003. — Vol. 160. — P. 161–175.
- [12] Duchet P., Hamidoune Y., Vergnas M. L., Meyniel H. Representing a planar graph by vertical lines joining different levels // Discrete Math. — 1983. — Vol. 46. — P. 319–321.
- [13] Fan J. H., Lin C. C., Lu H. I., Yen H. C. Width-optimal visibility representations of plane graphs // 18th Int. Symp., ISAAC 2007, Sendai, Japan, December 17–19, 2007. Proceedings / T. Tokuyama, ed. — Berlin: Springer, 2007. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 4835). — P. 160–171.
- [14] He X., Wang J. J., Zhang H. Compact visibility representation of 4-connected plane graphs // Combinatorial Optimization and Applications. 4th Int. Conf., COCOA 2010, Kailua-Kona, HI, USA, December 18–20, 2010. Proceedings, Part I / W. Wu, O. Daescu, eds. — Berlin: Springer, 2010. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 6508). — P. 339–353.
- [15] Hutchinson J. P. Arc- and circle-visibility graphs // Australas. J. Combin. — 2002. — Vol. 25. — P. 241–262.
- [16] Jayakumar R., Thulasiraman K., Swamy M. N. S. An optimal algorithm for maximal planarization of nonplanar graphs // Proc. IEEE Int. Sympos. on Circuits and Systems, 1986. — P. 1237–1240.
- [17] Jayakumar R., Thulasiraman K., Swamy M. N. S. $O(n^2)$ algorithms for graph planarization // IEEE Trans. Comp.-Aided Design. — 1989. — Vol. 8. — P. 257–267.
- [18] Kant G. A more compact visibility representation // Graph-Theoretic Concepts in Computer Science. 19th Int. Workshop, WG'93, Utrecht, the Netherlands, June 16–18, 1993. Proceedings / J. van Leeuwen, ed. — Berlin: Springer, 1994. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 790). — P. 411–424.
- [19] Kant G. A more compact visibility representation // Internat. J. Comput. Geom Appl. — 1997. — Vol. 7. — P. 197–210.
- [20] Kant G., Liotta G., Tamassia R., Tollis I. G. Area requirement of visibility representations of trees // Proc. 1993 Canadian Conf. on Comput. Geom., Waterloo, Ontario, 1993. — P. 192–197.
- [21] Lin C. C., Lu H. I., Sun I. F. Improved compact visibility representation of planar graph via Schnyder's realizer // SIAM J. Discrete Math. — 2004. — Vol. 18. — P. 19–29.
- [22] Luccio F., Mazzone S., Wong C. K. Visibility Graphs. — Univ. of Pisa. Prog. Naz. Teoria degli Algoritmi. Report 9. — Pisa, 1983.
- [23] Luccio F., Mazzone S., Wong C. K. A note on visibility graphs // Discrete Math. — 1987. — Vol. 64, no. 2-3. — P. 209–219.

- [24] Melnikov L. A. Problem at the sixth Hungarian colloquium on combinatorics. — Eger, 1981.
- [25] Mohar B., Rosenstiehl P. Tessellation and visibility representations of maps on the torus // *Discrete Comput. Geom.* — 1998. — Vol. 19. — P. 249–263.
- [26] Nummenmaa J. Constructing compact rectilinear planar layouts using canonical representation of planar graphs // *Theor. Comput. Sci.* — 1992. — Vol. 99, no. 2. — P. 213–230.
- [27] Otten R. H. J. M., Wijk J. G. Graph representations in interactive layout design // *Proc. IEEE Internat. Sympos. on Circuits and Systems*, New York, 1978. — P. 914–918.
- [28] Rosenstiehl P., Tarjan R. E. Rectilinear planar layouts and bipolar orientations of planar graphs // *Discrete Comput. Geom.* — 1986. — Vol. 1, no. 4. — P. 343–353.
- [29] Streinu I., Whitesides S. Rectangle visibility graphs: characterization, construction and compaction // 20th Ann. Symp. on Theor. Aspects of Comp. Sci., Berlin, Germany, February 27 — March 1, 2003. *Proceedings / H. Alt, M. Habib, eds.* — Berlin: Springer, 2003. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 2607). — P. 26–37.
- [30] Tamassia R., Tollis I. G. A unified approach to visibility representations of planar graphs // *Discrete Comput. Geom.* — 1986. — Vol. 1, no. 4. — P. 321–341.
- [31] Tamassia R., Tollis I. G. Tessellation representations of planar graphs // *Proc. 27th Allerton Conf. Commun. Control Comput.*, Univ. of Illinois at Urbana-Champaign, September 1989. — P. 48–57.
- [32] Tamassia R., Tollis I. G. Representations of graphs on a cylinder // *SIAM J. Discrete Math.* — 1991. — Vol. 4, no. 1. — P. 139–149.
- [33] Thomassen C. Plane representations of graphs // *Progress in Graph Theory / J. A. Bondy, U. S. R. Murty, eds.* — New York: Academic Press, 1984. — P. 43–69.
- [34] Tsiaras V., Tollis I. G. DAGmaps and ε -visibility representations of DAGs // 17th Int. Symp., GD 2009, Chicago, IL, USA, September 22–25, 2009. *Revised Papers / D. Eppstein, E. R. Gansner, eds.* — Berlin: Springer, 2010. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 5849). — P. 357–368.
- [35] Wang J. J., He X. Compact visibility representation of plane graphs // 28th Int. Symp. on Theor. Aspects of Comput. Sci. (STACS 2011) / T. Schwentick and C. Dürr, eds. — Dagstuhl: Schloss Dagstuhl—Leibniz-Zentrum für Informatik, 2011. — (Leibniz Int. Proc. in Informatics (LIPIcs); Vol. 9). — P. 141–152.
- [36] Wiglesworth L. W. A study of unit bar-visibility graphs: Dissertation. — Univ. of Louisville, 2008. — P. 7–13.
- [37] Wismath S. K. Characterizing bar line-of-sight graphs // *SCG'85. Proc. 1st Ann. ACM Sympos. Comput. Geom.* — New York: ACM, 1985. — P. 147–152.
- [38] Zhang H., He X. Nearly optimal visibility representations on plane graphs // *Automata, Languages and Programming. 33rd Int. Colloq., ICALP 2006, Venice, Italy, July 10–14, 2006. Proceedings, Part I / M. Bugliesi, B. Preneel, V. Sassone, I. Wegener, eds.* — Berlin: Springer, 2006. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 4051). — P. 407–418.

