Элементарная эквивалентность колец инцидентности над полусовершенными кольцами

Е. И. БУНИНА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: helenbunina@gmail.com

А. С. ДОБРОХОТОВА-МАЙКОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: dobrokhotova@gmail.com

УДК 512.55+510.67

Ключевые слова: кольца инцидентности, полусовершенные кольца, элементарная эквивалентность.

Аннотация

В работе доказано, что если два кольца инцидентности, построенные по одному и тому же полусовершенному кольцу и квазиупорядоченным множествам, элементарно эквивалентны, то данные множества элементарно эквивалентны.

Abstract

E. I. Bunina, A. S. Dobrokhotova-Maykova, Elementary equivalence of incidence rings over semi-perfect rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 37—48.

In this paper, we prove that if two incidence rings constructed by the same semiperfect ring and some two quasi-ordered sets are elementarily equivalent, then the given sets are elementarily equivalent.

В [4] В. Д. Шматковым было введено понятие *обобщённого кольца инцидентности* (см. определение 5 ниже) и было доказано, что если два обобщённых кольца инцидентности $I(P_1, R_1)$ и $I(P_2, R_2)$ изоморфны, то изоморфны соответствующие множества (P_1, R_1) и (P_2, R_2). В [1] авторы доказали аналогичную теорему для элементарной эквивалентности данных колец (теорема 2). В [4] В. Д. Шматков также доказал для неразложимого полусовершенного кольца K и квазиупорядоченных множеств (P_1, R_1) и (P_2, R_2), что если $IK(P_1, R_1)$ и $IK(P_2, R_2)$ изоморфны, то (P_1, R_1) и (P_2, R_2) изоморфны (см. [4, следствие 1.6.1]). В этой статье мы докажем аналогичную теорему для элементарной эквивалентности.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 8, с. 37—48.

1. Определения и формулировки основных теорем

Определение 1. Пусть P — непустое множество, R — бинарное рефлексивное отношение на нём. Для любых $x, y \in P$ интервал $[x, y]$ — это множество $\{z \in P \mid x\ R\ z,\ z\ R\ y\}$. Мы будем называть отношение (P, R) *локально конечным*, если для любых $x, y \in P$ интервал $[x, y]$ конечен.

Определение 2. Пусть K — кольцо с единицей, (P, R) — локально конечное рефлексивное бинарное отношение. Назовём *кольцом инцидентности* множество I всех таких функций $f\colon P^2 \to K$, что

$$f(x, y) = f(x, y)\xi(x, y),$$

где

$$\xi(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x\ R\ y, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

На множестве I операции сложения и умножения заданы следующим образом: для любых $f, g \in I$, $x, y \in P$

$$\begin{aligned} (f+g)(x, y) &= f(x, y) + g(x, y); \\ (fg)(x, y) &= \sum_{z \in P,\ xRz,\ zRy} f(x, z) g(z, y) \xi(x, y). \end{aligned}$$

Обозначим его через $IK(P, R)$.

Пример 1. Пусть K — кольцо с единицей, $P = \{1, \ldots, n\}$, для всех $i, j \in P$ справедливо $i\ R\ j$. Тогда $IK(P, R)$ — кольцо всех матриц размера $n \times n$ над K.

Пример 2. Пусть K — кольцо с единицей, $P = \{1, \ldots, n\}$, для всех $i, j \in P$ справедливо $i\ R\ j$ тогда и только тогда, когда $i \leqslant j$. Тогда $IK(P, R)$ — кольцо верхнетреугольных матриц размера $n \times n$ над K.

Определение 3. Назовём множество попарно ортогональных идемпотентов E, принадлежащих кольцу I, *максимальным*, если $\mathrm{Ann}_{\mathrm{r}}(E) = \mathrm{Ann}_{\mathrm{l}}(E) = \{0\}$.

Пусть E — максимальное множество ортогональных идемпотентов. Рассмотрим взаимно-однозначное отображение α множества E на какое-нибудь множество P. Будем обозначать $e \in E$ через e_u, если $\alpha(e) = u$.

Пусть I — кольцо, $E = \{e_u \mid u \in P\}$ — максимальное множество ортогональных идемпотентов, $\{0\} \neq E$. Определим на P бинарное отношение R: для любых $u, v \in P$ $u\ R\ v$ равносильно $e_u I e_v \neq \{0\}$. Будем обозначать $I_{u,v} = e_u I e_v$, $I_{u,u} = I_u$.

Определение 4. Пусть K — кольцо с единицей. Тогда

$$J(K) = \{r \in K \mid \text{для всех } a \in K\ 1 + ra \text{ обратимый}\} \text{ —}$$

радикал Джекобсона кольца K.

Определение 5. Назовём кольцо с единицей I *обобщённым кольцом инцидентности*, если существует максимальное множество идемпотентов

$$E = \{e_u \mid u \in P,\ e_u \in I\},$$

такое что

1) каждый идемпотент $e \in E$ локален, т. е. фактор-кольцо $eIe/J(eIe)$ — тело;
2) бинарное отношение (P, R) локально конечно, т. е. для любых $u, v \in P$ множество $[u, v] = \{w \in P \mid u\mathrm{R}w,\ w\mathrm{R}v\}$ конечно;
3) операции умножения и сложения в I определены следующим образом: для любых $f, g \in I$, $x, y \in P$ если $(x, y) \notin R$, то $(fg)(x, y) = 0$, если $(x, y) \in R$, то

$$(fg)(x,y) = \sum_{z \in P} f(x,z)g(z,y),$$
$$(f+g)(x,y) = f(x,y) + g(x,y),$$

где $f(x, y) = e_x f e_y$, $g(x, y) = e_x g e_y$;
4) для любого локального идемпотента $f \in I$ существуют $x, y \in P$, такие что $f(x, y) \notin J(I)$;
5) для любого множества $\{c(u, v) \mid u, v \in P,\ c(u, v) \in I_{u,v}\}$ существует такая функция $f \in I$, что для любых $u, v \in P$ $f(u, v) = e_u f e_v = c(u, v)$.

Полученное кольцо мы будем обозначать через $I(P, R)$.

Определение 6. Пусть $I = IK(P, R)$ — кольцо инцидентности. Для каждого $u \in P$ определим $\varepsilon_u \in I$:

$$\varepsilon_u(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y = u, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предложение 1 [4, замечание 1]. *Пусть K — тело, $I = IK(P, R)$ — ассоциативное кольцо инцидентности. Тогда I — обобщённое кольцо инцидентности, а $E = \{\varepsilon_u \mid u \in P,\ \varepsilon_u \in I\}$ — его максимальное множество ортогональных идемпотентов.*

Теорема 1 [4, теорема 1.3.1]. *Пусть $I_1 = I(P_1, R_1)$, $I_2 = I(P_2, R_2)$ — обобщённые кольца инцидентности. Если $I_1 \cong I_2$, то $(P_1, R_1) \cong (P_2, R_2)$.*

Теорема 2 [1]. *Пусть $I_1 = I(P_1, R_1)$, $I_2 = I(P_2, R_2)$ — обобщённые кольца инцидентности. Если $I_1 \equiv I_2$, то $(P_1, R_1) \equiv (P_2, R_2)$.*

Определение 7. Назовём кольцо K *полусовершенным*, если существует множество $E(K) = \{e_i \mid e_i \in K,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ локальных попарно ортогональных идемпотентов, такое что $e_1 + \ldots + e_n = 1$.

Пример 3. Кольцо матриц над полусовершенным кольцом является полусовершенным.

Пример 4 [3, предложение 3.6.3]. Артиново справа (слева) кольцо является полусовершенным.

Предложение 2 [4]. *Полусовершенное кольцо является обобщённым кольцом инцидентности над бинарным отношением* $\big(E(K), R(K)\big)$, *где для любых* $e_i, e_j \in K$ $e_i R(K) e_j$ *равносильно* $e_i K e_j \neq \{0\}$.

Предложение 3 [4, предложение 1.5.2]. *Пусть* K — *кольцо,* (P, R) — *локально конечное рефлексивное отношение, такое что* $I = IK(P, R)$ — *ассоциативное кольцо инцидентности. Тогда*

$$J(I) = \{f \in I \mid f(x, y) \in J(K), \text{ если } x \sim y\}.$$

Теорема 3 [4, 1.6.1]. *Пусть* K_1, K_2 — *полусовершенные кольца,* (P_1, R_1), (P_2, R_2) — *такие рефлексивные бинарные отношения, что кольца* $I_1 = IK_1(P_1, R_1)$, $I_2 = IK_2(P_2, R_2)$ *ассоциативны. Если* $I_1 \cong I_2$, *то*

$$(P_1, R_1) \times \big(E(K_1), R(K_1)\big) \cong (P_2, R_2) \times \big(E(K_2), R(K_2)\big).$$

Нам потребуется аналогичная теорема для элементарной эквивалентности.

Теорема 4. *Пусть* K_1, K_2 — *полусовершенные кольца,* (P_1, R_1), (P_2, R_2) — *такие рефлексивные бинарные отношения, что кольца* $I_1 = IK_1(P_1, R_1)$, $I_2 = IK_2(P_2, R_2)$ *ассоциативны. Если* $I_1 \equiv I_2$, *то*

$$(P_1, R_1) \times \big(E(K_1), R(K_1)\big) \equiv (P_2, R_2) \times \big(E(K_2), R(K_2)\big).$$

Доказательство. Пусть K — полусовершенное кольцо, (P, R) — такое локально конечное рефлексивное бинарное отношение, что кольцо $I = IK(P, R)$ ассоциативно. Пусть $E(K) = \{e_i \mid e_i \in K,\ i = 1, 2, \dots, n\}$ — максимальное множество локальных идемпотентов кольца K. Для любых $u \in P$, $i = 1, 2, \dots, n$, рассмотрим $e_{u,i} \in I$:

$$e_{u,i}(x, y) = \begin{cases} e_i, & \text{если } x = y = u, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда множество $\{e_{u,i} \mid e_{u,i} \in I,\ i = 1, 2, \dots, n,\ u \in P\}$ является максимальным множеством локальных идемпотентов в кольце I. Учитывая предложение 3, можно увидеть, что I является обобщённым кольцом инцидентности. Для любых $e_{u,i}, e_{v,j} \in I$, $u, v \in P$, $i, j = 1, \dots, n$

$$e_{u,i} I e_{v,j} \neq \{0\} \text{ равносильно тому, что } u\mathrm{R}v,\ e_i K e_j \neq \{0\},$$

поэтому $IR(P, R)$ является обобщённым кольцом инцидентности над бинарным отношением (P_1, R_1), где $(P_1, R_1) \cong (P, R) \times \big(E(K), R(K)\big)$.

Тогда из теоремы 2 следует нужное утверждение. □

С помощью теорем 4 и 8 мы докажем следующую теорему — основную теорему этой работы.

Теорема 5. *Пусть* K — *полусовершенное, не разложимое в прямое произведение кольцо,* (P_1, R_1), (P_2, R_2) — *квазипорядки. Если* $IK(P_1, R_1) \equiv IK(P_2, R_2)$, *то* $(P_1, R_1) \equiv (P_2, R_2)$.

2. Ультрастепени и теорема о сокращении произведений

В этом разделе для доказательств нам понадобятся понятие ультрастепени и теорема Кейслера—Шелаха об изоморфизме.

Пусть I — некоторое непустое множество. Через $\mathcal{P}(I)$ обозначается множество всех подмножеств множества I. *Фильтр D над множеством I* определяется как множество $D \subset \mathcal{P}(I)$, для которого

1) $I \in D$;
2) если $X, Y \in D$, то $X \cap Y \in D$;
3) если $X \in D$ и $X \subset Z \subset I$, то $Z \in D$.

Фильтр D над множеством I называется *ультрафильтром* над I, если для всякого $X \in \mathcal{P}(I)$

$$X \in D \text{ тогда и только тогда, когда } (I \setminus X) \notin D.$$

Пусть I — непустое множество, D — собственный фильтр над I, а A_i при всяком $i \in I$ — непустое множество. Пусть

$$C = \prod_{i \in I} A_i \text{ —}$$

декартово произведение множеств A_i. Иными словами, C — множество всех отображений f, определённых на I и таких, что $f(i) \in A_i$ при всяком $i \in I$.

Функции $f, g \in C$ назовём *D-эквивалентными* (обозначение $f =_D g$), если

$$\{i \in I\colon f(i) = g(i)\} \in D.$$

Предложение 4. *Отношение $=_D$ является отношением эквивалентности на множестве $C = \prod\limits_{i \in I} A_i$.*

Пусть теперь f_D — класс эквивалентности, содержащий функцию f:

$$f_D = \{g \in C \mid f =_D g\}.$$

Определим *фильтрованное произведение множеств A_i по фильтру D* как совокупность всех классов эквивалентности отношения $=_D$. Оно обозначается через $\prod\limits_D A_i$. Итак,

$$\prod_D A_i = \left\{ f_D \mid f \in \prod_{i \in I} A_i \right\} = \left(\prod_{i \in I} A_i \right) / {=_D}.$$

Множество I будем называть *множеством индексов* для $\prod\limits_D A_i$. В том случае, когда D — ультрафильтр над множеством I, фильтрованное произведение $\prod\limits_D A_i$ называется *ультрапроизведением*. В том случае, когда все множества A_i совпадают, т. е. $A_i = A$, фильтрованное произведение обозначают через $\prod\limits_D A$

и называют *фильтрованной степенью множества* A *по фильтру* D. Если, в частности, D — ультрафильтр, то $\prod_D A$ называется *ультрастепенью множества* A *по ультрафильтру* D.

Дадим теперь определение фильтрованного произведения моделей.

Пусть I — непустое множество, D — собственный фильтр над I, и пусть $\mathcal{U}_i$ при каждом $i \in I$ является моделью языка $\mathcal{L}$. Пусть предикатные символы P интерпретируются в модели $\mathcal{U}_i$ как R_i, функциональные символы F — как G_i, а константные c — как a_i.

Определение 8. *Фильтрованным произведением* $\prod_D \mathcal{U}_i$ называется модель языка $\mathcal{L}$, описываемая следующим образом.

1. Её универсумом служит множество $\prod_D A_i$.
2. Пусть P — некоторый n-местный предикатный символ языка $\mathcal{L}$, интерпретацией символа P в модели $\prod_D \mathcal{U}_i$ служит такое отношение S, что
$$S(f^1_D, \ldots, f^n_D) \text{ равносильно тому, что } \bigl\{i \in I \mid R_i\bigl(f^1(i), \ldots, f^n(i)\bigr)\bigr\} \in D.$$
3. Пусть F — некоторый n-местный функциональный символ языка $\mathcal{L}$, символ F интерпретируется в $\prod_D \mathcal{U}_i$ посредством функции H:
$$H(f^1_D, \ldots, f^n_D) = \bigl(G_i\bigl(f^1(i), \ldots, f^n(i)\bigr) \mid i \in I\bigr)_D.$$
4. Пусть c — константный символ языка $\mathcal{L}$. Интерпретацией символа c служит элемент
$$b = (a_i \mid i \in I)_D$$
множества $\prod_D A_i$.

Предложение 5. *Пусть* $\prod_D \mathcal{U}$ *— ультрастепень модели* $\mathcal{U}$. *Тогда* $\prod_D \mathcal{U} \equiv \mathcal{U}$.

Теорема 6 (теорема об изоморфизме Кейслера—Шелаха [2]). *Пусть* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{B}$ *— модели языка* $\mathcal{L}$. *Тогда модели* $\mathcal{U}$ *и* $\mathcal{B}$ *элементарно эквивалентны, если и только если они имеют изоморфные ультрастепени.*

Определение 9. Множество X с отношением $\leqslant$ называется *квазиупорядоченным*, если $\leqslant$ рефлексивное и транзитивное, т. е.
$$\forall\, u\ u \leqslant u; \quad \forall\, u, v, w\ (u \leqslant v) \wedge (v \leqslant w) \to (u \leqslant w).$$

Определение 10. Пусть X — квазиупорядоченное множество. Введём на X отношение эквивалентности $\sim$: $x \sim y$ равносильно тому, что $x \leqslant y$ и $y \leqslant x$. $X/{\sim}$ обозначим через $\hat{X}$.

Определение 11. Квазиупорядоченное множество X называется *тривиально упорядоченным*, если $x \sim y$ для любых $x, y \in X$.

Определение 12. Квазиупорядоченное множество X называется *связным*, если для любых $x, y \in X$ найдётся такая конечная последовательность элементов из X $x = x_1, \ldots, x_n = y$, что x_i и x_{i+1} сравнимы для любых $i = 1, \ldots, n-1$.

В [5] была доказана следующая теорема.

Теорема 7 [5, теорема 4]. *Пусть X, Y, Z — локально конечные квазиупорядоченные множества, Z конечное и связное. Тогда из $X \times Z \simeq Y \times Z$ следует $X \simeq Y$.*

Нам потребуется передоказать эту теорему в случае, когда множества X и Y не обязательно являются локально конечными.

Лемма 1 [5, лемма 3.1]. *Пусть X, Y, U и V — квазиупорядоченные множества и X связно. Если $\theta\colon X \times U \to Y \times V$ — изоморфизм, то $\theta(X \times \gamma) = \theta(X \times \gamma)_1 \times \theta(X \times \gamma)_2$ для любого $\gamma \in \hat{U}$.*

Лемма 2 [5, лемма 3.2]. *Пусть X, Y и γ — квазиупорядоченные множества, γ конечное и тривиальное. Тогда из $X \times \gamma \cong Y \times \gamma$, следует, что $X \cong Y$.*

Определение 13. Квазиупорядоченное множество X называется *не разложимым в прямое произведение*, если оно не изоморфно произведению двух неодноэлементных квазиупорядоченных множеств.

Лемма 3 [5, лемма 3.3]. *Пусть α, Z, U и V — конечные квазиупорядоченные множества, α тривиально, а Z не разложимо в прямое произведение. Тогда из $\alpha \times Z \cong U \times V$ следует, что или U, или V тривиально.*

Лемма 4. *Пусть X и Z — квазиупорядоченные множества, Z конечно, а все классы эквивалентности X бесконечны. Тогда $X \times Z \cong X \times \hat{Z}$.*

Доказательство. Заметим, что $\alpha \times \gamma \cong \alpha$, если α, γ — тривиально упорядоченные множества, γ конечное, а α бесконечное. Значит, для любого конечного Z $\alpha \times Z \cong \alpha \times \hat{Z}$ (можно поставить в соответствие каждому $\alpha \times \gamma$ элемент $\alpha \times \hat{\gamma} \cong \alpha$).

Пусть у множества X все компоненты эквивалентности бесконечны. Тогда $X \cong X \times \alpha$, где α — счётное тривиально упорядоченное множество. Значит, $X \times Z \cong X \times \alpha \times Z \cong X \times \alpha \times \hat{Z} \cong X \times \hat{Z}$. □

Теорема 8 [5, теорема 4]. *Пусть X, Y и Z — квазиупорядоченные множества, Z — конечное и связное. Тогда из $X \times Z \simeq Y \times Z$ следует $X \simeq Y$.*

Доказательство. Сначала предположим, что X и Y связны, у X есть хотя бы один конечный класс эквивалентности, а Z не разложимо в прямое произведение. Если Z является тривиально упорядоченным, то можно применить лемму 2. Пусть Z нетривиально.

Пусть $\theta\colon X \times Z \to Y \times Z$ — изоморфизм. Выберем любые конечные $\alpha \in \hat{X}$ и $\gamma \in \hat{Z}$. Тогда найдутся единственные $\beta \in \hat{X}$ и $\delta \in \hat{Z}$, такие что $\theta(\alpha \times \gamma) = \beta \times \delta$ (так как при изоморфизме одни классы эквивалентности переходят в другие). Эти множества также конечны. По лемме 1

$$\theta(\alpha \times Z) = \theta(\alpha \times Z)_1 \times \theta(\alpha \times Z)_2.$$

Так как множество α конечно, а θ — изоморфизм, то по лемме 3 или $\theta(\alpha \times Z)_1$, или $\theta(\alpha \times Z)_2$ тривиально. Так как $\beta \subseteq \theta(\alpha \times Z)_1$ и $\delta \subseteq \theta(\alpha \times Z)_2$, то это означает, что $\beta = \theta(\alpha \times Z)_1$ или $\delta = \theta(\alpha \times Z)_2$.

Рассмотрим случай, когда $\beta = \theta(\alpha \times Z)_1$. Тогда

$$\theta(\alpha \times Z) = \beta \times \theta(\alpha \times Z)_2 \subseteq \beta \times Z. \tag{1}$$

По лемме 1

$$\theta^{-1}(\beta \times Z) = \theta^{-1}(\beta \times Z)_1 \times \theta^{-1}(\beta \times Z)_2.$$

Следовательно, по лемме 3 $\theta^{-1}(\beta \times Z)_1 = \alpha$ или $\theta^{-1}(\beta \times Z)_2 = \gamma$. Если верно второе, то

$$\beta \times \theta(\alpha \times Z)_2 \subseteq \beta \times Z \subseteq \theta(X \times \gamma).$$

Из (1) получаем, что $\beta \times \theta(\alpha \times Z)_2 = \theta(\alpha \times Z)$, а следовательно,

$$\beta \times \theta(\alpha \times Z)_2 \subseteq \theta(X \times \gamma) \cap \theta(\alpha \times Z) = \theta(\alpha \times \gamma) = \beta \times \delta.$$

Значит, $\theta(\alpha \times Z)_2 = \delta$, что противоречит (1), так как Z нетривиально.

Значит, $\theta^{-1}(\beta \times Z)_1 = \alpha$ и

$$\theta^{-1}(\beta \times Z) = \alpha \times \theta^{-1}(\beta \times Z)_2 \subseteq \alpha \times Z. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем, что

$$\theta(\alpha \times Z) = \beta \times Z. \tag{3}$$

Так как Z конечно, то $\operatorname{card}\alpha = \operatorname{card}\beta$. Следовательно, $\operatorname{card}\delta = \operatorname{card}\gamma$ и $\gamma \cong \delta$, так как α конечно и $\theta(\alpha \times \gamma) = \beta \times \delta$. По лемме 1

$$\theta(X \times \gamma) = \theta(X \times \gamma)_1 \times \theta(X \times \gamma)_2.$$

Тогда $\beta \times \theta(X \times \gamma)_2 \subseteq \theta(X \times \gamma)$, и из (3) следует, что

$$\beta \times \theta(X \times \gamma)_2 \subseteq \theta(X \times \gamma) \cap \theta(\alpha \times Z) = \theta(\alpha \times \gamma) = \beta \times \delta.$$

Следовательно, $\theta(X \times \gamma)_2 = \delta$ и

$$\theta(X \times \gamma) = \theta(X \times \gamma)_1 \times \delta \subseteq Y \times \delta. \tag{4}$$

Аналогично

$$\theta^{-1}(Y \times \delta) = \theta^{-1}(Y \times \delta)_1 \times \gamma \subseteq X \times \gamma. \tag{5}$$

Из (4) и (5) $\theta(X \times \gamma) = Y \times \delta$ и, так как $\gamma \cong \delta$, то $X \times \gamma \cong Y \times \gamma$. Отсюда по лемме 2 получаем, что $X \cong Y$.

Теперь рассмотрим случай $\theta(\alpha \times Z)_2 = \delta$. Тогда

$$\theta(\alpha \times Z) = \theta(\alpha \times Z)_1 \times \delta \subseteq Y \times \delta. \tag{6}$$

По лемме 1

$$\theta^{-1}(\beta \times Z) = \theta^{-1}(\beta \times Z)_1 \times \theta^{-1}(\beta \times Z)_2,$$

поэтому

$$\alpha \times \theta^{-1}(\beta \times Z)_2 \subseteq \theta^{-1}(\beta \times Z).$$

Из (6) следует, что

$$\alpha \times \theta^{-1}(\beta \times Z)_2 \subseteq \theta^{-1}(\beta \times Z) \cap \theta^{-1}(Y \times \delta) = \alpha \times \gamma.$$

Следовательно, $\theta^{-1}(\beta \times Z)_2 = \gamma$ и

$$\theta^{-1}(\beta \times Z) = \theta^{-1}(\beta \times Z)_1 \times \gamma \subseteq X \times \gamma. \tag{7}$$

Снова по лемме 1 получаем, что

$$\theta(X \times \gamma) = \theta(X \times \gamma)_1 \times \theta(X \times \gamma)_2.$$

Так как из (7) вытекает, что $\theta(X \times \gamma) \supseteq \beta \times Z$, то $\theta(X \times \gamma)_2 = Z$. Следовательно,

$$\theta(X \times \gamma) = \theta(X \times \gamma)_1 \times Z \tag{8}$$

и аналогично

$$\theta^{-1}(Y \times \delta) = \theta^{-1}(Y \times \delta)_1 \times Z. \tag{9}$$

Из (8) получаем

$$\theta^{-1}(\theta(X \times \gamma)_1 \times \delta) \subseteq \theta^{-1}(\theta(X \times \gamma)_1 \times Z) = X \times Z,$$

а из (9)

$$\theta^{-1}(\theta(X \times \gamma)_1 \times \delta) \subseteq \theta^{-1}(Y \times \delta) = \theta^{-1}(Y \times \delta)_1 \times Z.$$

Следовательно,

$$\theta^{-1}(\theta(X \times \gamma)_1 \times \delta) \subseteq \theta^{-1}(Y \times \delta)_1 \times \gamma. \tag{10}$$

Также из (9) и (8) получаем, что

$$\theta(\theta^{-1}(Y \times \delta)_1 \times \gamma) \subseteq \theta(X \times \gamma)_1 \times \delta. \tag{11}$$

Тогда в (10) и (11) должны быть равенства. Из (8) следует, что

$$X \times \gamma \times \delta \cong \theta(X \times \gamma)_1 \times \delta \times Z,$$

а из (9) — что

$$Y \times \delta \times \gamma \cong \theta^{-1}(Y \times \delta)_1 \times \gamma \times Z.$$

Так как из (10) или (11) вытекает, что

$$\theta(X \times \gamma)_1 \times \delta \cong \theta^{-1}(Y \times \delta)_1 \times \gamma,$$

то $X \times \gamma \times \delta \cong Y \times \delta \times \gamma$. Можно применить лемму 2, так как $\gamma \times \delta \cong \delta \times \gamma$. Значит, $X \cong Y$.

Пусть теперь Z разложимо в прямое произведение $Z \cong Z_1 \times \ldots \times Z_r$, где $Z_1, \ldots, Z_r$ — связные конечные неразложимые квазиупорядоченные множества. Тогда из $X \times Z_1 \times \ldots \times Z_r \cong Y \times Z_1 \times \ldots \times Z_r$ следует, что $X \times Z_1 \times \ldots \times Z_{r-1} \cong$ $\cong Y \times Z_1 \times \ldots \times Z_{r-1}$. По индукции получаем, что $X \cong Y$.

Если в X все классы эквивалентности бесконечны, то и у $X \times Z$, а значит, и у $Y \times Z$ все классы эквивалентности бесконечны. Так как Z конечно, то у Y тоже не может быть конечных классов эквивалентности. Значит, по лемме 4

$$X \times \hat{Z} \cong X \times Z \cong Y \times Z \cong Y \times \hat{Z}.$$

Отсюда видно, что достаточно доказать утверждение только для $Z = \hat{Z}$. Докажем его для неразложимого $\hat{Z}$ (его можно также продолжить по индукции для произвольного конечного связного Z).

Выберем любые $\alpha \in \hat{X}$ и $z_1 \in Z$. Тогда найдутся единственные $\beta \in \hat{X}$ и $z_2 \in Z$, такие что $\theta(\alpha \times z_1) = \beta \times z_2$. По лемме 1

$$\theta(\alpha \times Z) = \theta(\alpha \times Z)_1 \times \theta(\alpha \times Z)_2.$$

Докажем, что $\theta(\alpha \times Z)_2$ — это или Z, или одноэлементное множество. Пусть это не так: $\theta(\alpha \times Z) = U \times V$. Тогда $\widehat{\alpha \times Z} \cong \widehat{U \times V}$, а значит, $Z = \hat{Z} \cong \hat{U} \times \hat{V}$. Так как Z неразложимо, то или $\hat{U} \cong Z$, а V тривиально, или $\hat{V} \cong Z$, а U тривиально. $V = \theta(\alpha \times Z)_2 \subseteq Z = \hat{Z}$, значит, $V = \hat{V}$, то есть в первом случае V одноэлементное, а во втором изоморфно Z.

Случай $\theta(\alpha \times Z)_2 = z_2$ рассматривается аналогично второму случаю для конечного α.

Во втором случае $\theta(\alpha \times Z) = \theta(\alpha \times Z)_1 \times Z$ и $\theta(\alpha \times Z)_1$ тривиальны. Применим лемму 1 к $\theta^{-1}(\beta \times Z)$ и аналогичными рассуждениями получим, что $\theta^{-1}(\beta \times Z) = \theta^{-1}(\beta \times Z)_1 \times Z$ и $\theta^{-1}(\beta \times Z)_1$ тривиально, или $\theta^{-1}(\beta \times Z) = \theta^{-1}(\beta \times Z)_1 \times z_1$. Далее рассуждаем, как в случае конечного α.

Теперь пусть X и Y — произвольные квазиупорядоченные множества. *Компонентой связности* X назовём максимальное связное подмножество X. Любой элемент X принадлежит одной компоненте связности. Очевидно, что при изоморфизме компоненты связности взаимно-однозначно переходят друг в друга. Пусть $\{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$ и $\{Y_\beta \mid \beta \in B\}$ — компоненты связности X и Y соответственно. Тогда $\{X_\alpha \times Z \mid \alpha \in A\}$ и $\{Y_\beta \times Z \mid \beta \in B\}$ — компоненты связности $X \times Z$ и $Y \times Z$ и существует биекция $\sigma\colon A \to B$, такая что $X_\alpha \times Z \cong Y_{\sigma(\alpha)} \times Z$ для любого $\alpha \in A$. Значит, по доказанному выше $X_\alpha \cong Y_{\sigma(\alpha)}$ для любого $\alpha \in A$. Так как ни один элемент X_α не сравним ни с одним элементом $X_{\alpha'}$, мы можем получить изоморфизм $X \cong Y$. □

Лемма 5. *Пусть X, Z — квазиупорядоченные множества, F — ультрафильтр. Тогда*

$$\prod_F (X \times Z) \cong \Big(\prod_F X\Big) \times \Big(\prod_F Z\Big).$$

Доказательство. Пусть π_X — проекция на X, π_Z — проекция на Z в $X \times Z$. Построим изоморфизм следующим образом: любой функции $f\colon I \to X \times Z$ поставим в соответствие пару функций $(\pi_X f, \pi_Z f)$. Проверим корректность:

$$\begin{aligned}
&f_1 \sim f_2 \Longleftrightarrow \{i \in I \mid f_1(i) = f_2(i)\} \in F \Longleftrightarrow \\
&\qquad \Longleftrightarrow \{i \in I \mid \pi_X f_1(i) = \pi_X f_2(i),\ \pi_Z f_1(i) = \pi_Z f_2(i)\} \in F; \\
&(\pi_X f_1, \pi_Z f_1) \sim (\pi_X f_2, \pi_Z f_2) \Longleftrightarrow \pi_X f_1 \sim \pi_X f_2 \text{ и } \pi_Z f_1 \sim \pi_Z f_2 \Longleftrightarrow \\
&\qquad \Longleftrightarrow \{i \in I \mid \pi_X f_1(i) = \pi_X f_2(i)\},\ \{i \in I \mid \pi_Z f_1(i) = \pi_Z f_2(i)\} \in F.
\end{aligned}$$

Так как F — фильтр, то для любых $A, B \in \mathcal{P}(I)$ $A, B \in F$ равносильно тому, что $A \cap B \in F$. Значит, отображение корректно. Аналогично доказывается, что оно сохраняет отношение $\leqslant$. □

Теорема 9 [5, теорема 4]. *Пусть X, Y и Z — локально конечные квазиупорядоченные множества, Z конечное и связное. Тогда из $X \times Z \equiv Y \times Z$ следует, что $X \equiv Y$.*

Доказательство. По теорема об изоморфизме Кейслера—Шелаха (теорема 6) из $X \times Z \equiv Y \times Z$ следует, что

$$\prod_F (X \times Z) \cong \prod_F (Y \times Z).$$

По предыдущей лемме

$$\Big(\prod_F X\Big) \times \Big(\prod_F Z\Big) \cong \Big(\prod_F Y\Big) \times \Big(\prod_F Z\Big).$$

По предложению 5 $\prod\limits_F Z \equiv Z$, оно конечно, значит, $\prod\limits_F Z \cong Z$. Следовательно, $\prod\limits_F Z$ — конечное связное квазиупорядоченное множество. Элементарная эквивалентность сохраняет рефлексивность и транзитивность, поэтому $\prod\limits_F X$ и $\prod\limits_F Y$ — квазиупорядоченные множества.

Применим теорему 8 и получим

$$\Big(\prod_F X\Big) \cong \Big(\prod_F Y\Big).$$

Множества X и Y имеют изоморфные ультрастепени, поэтому они элементарно эквивалентны. □

3. Доказательство основной теоремы

В этом разделе мы докажем основную теорему.

Теорема 5. *Пусть K — полусовершенное, не разложимое в прямое произведение кольцо, (P_1, R_1), (P_2, R_2) — квазипорядки. Если $IK(P_1, R_1) \equiv IK(P_2, R_2)$, то $(P_1, R_1) \equiv (P_2, R_2)$.*

Лемма 6 [5, лемма 4.1]. *Пусть K — не разложимое в прямое произведение полусовершенное кольцо. Тогда транзитивное замыкание $\big(E(K), R(K)\big)$ — связное квазиупорядоченное множество.*

Докажем основную теорему.

Возьмём в условии теоремы 4 $K_1 = K_2 = K$:

$$(P_1, R_1) \times \big(E(K), R(K)\big) \equiv (P_2, R_2) \times \big(E(K), R(K)\big).$$

Пусть $\big(E(K), R'(K)\big)$ — транзитивное замыкание $\big(E(K), R(K)\big)$. Рассмотрим транзитивное замыкание обеих частей равенства

$$(P_1, R_1) \times \big(E(K), R'(K)\big) \equiv (P_2, R_2) \times \big(E(K), R'(K)\big).$$

Так как $\bigl(E(K), R'(K)\bigr)$ — связное конечное квазиупорядоченное множество, то по теореме 8 на него можно сократить. Получим

$$(P_1, R_1) \equiv (P_2, R_2).$$

Теорема доказана. □

Авторы выражают благодарность профессору А. В. Михалёву за постановку задачи, внимание и поддержку.

Литература

[1] Бунина Е. И., Доброхотова-Майкова А. С. Элементарная эквивалентность обобщённых колец инцидентности // Фундамент. прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 37—42.

[2] Кейслер Г., Чен Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[3] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[4] Шматков В. Д. Изоморфизмы и автоморфизмы колец и алгебр инцидентности: Дис.... канд. физ.-мат. наук. — М., 1994.

[5] Voss E. R. On the isomorphism problem for incidence rings // Illinois J. Math. — 1980. — Vol. 24. — P. 624—638.