Топологический радикал Джекобсона колец. I

С. Т. ГЛАВАЦКИЙ, А. В. МИХАЛЁВ, В. В. ТЕНЗИНА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: serge@cnit.msu.ru

УДК 512.556+512.552.12

Ключевые слова: топологические кольца, топологические модули, радикал Джекобсона.

Аннотация

В статье определяется топологический радикал Джекобсона колец. Рассматриваются некоторые свойства этого радикала. Изучается топологический радикал Джекобсона для некоторых конструкций топологических колец, а именно для присоединения единицы, пополнения, прямого произведения с тихоновской топологией, кольца непрерывных функций, кольца многочленов.

Abstract

S. T. Glavatsky, A. V. Mikhalev, V. V. Tenzina, The topological Jacobson radical of rings. I, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 49—68.

In this paper, a topological Jacobson radical of rings is introduced. Several properties of this radical are considered. We investigate the topological Jacobson radical for some constructions of topological rings such as adjunction of the unitary element, completion, direct product with respect to the Tychonoff topology, rings of continuous functions, and polynomial rings.

1. Введение

В этой работе мы будем пользоваться следующими обозначениями и соглашениями.

Если M — левый модуль над кольцом R, то через $\mathrm{Ann}_R(M)$ обозначим множество $\{r \in R \mid rM = \{0\}\}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, R — кольцо и $A, B \subseteq R$. Пусть M — левый R-module, а C — подмножество либо в M, либо в R. Положим

$$A \cdot C = \{a \cdot c \mid a \in A,\ c \in C\},$$

$$AC = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot c_i \;\middle|\; a_i \in A,\ c_i \in C,\ 1 \leqslant i \leqslant k,\ k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$A^{(1)} = A \quad \text{и} \quad A^{(n)} = A \cdot A^{(n-1)}, \quad \text{где} \quad n > 1,$$

$$A^1 = A \quad \text{и} \quad A^n = AA^{n-1}, \quad \text{где} \quad n > 1.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 8, с. 49—68.

Если элемент a принадлежит кольцу R, то под $(a)_R$ будем подразумевать минимальный двусторонний идеал R, содержащий a.

Если B — подмножество в топологическом пространстве A, то $[B]_A$ (или просто $[B]$, если нет неопределённости) — замыкание B в A.

Будем рассматривать только отделимые топологические кольца и топологические модули.

Далее везде под R-модулем будем подразумевать левый R-модуль.

Если I — идеал топологического кольца R, то топология на I индуцируется топологией кольца R. Если к тому же идеал I замкнут, то фактор-кольцо R/I рассматривается как топологическое кольцо с фактор-топологией. Если ρ — замкнутый левый идеал в топологическом кольце R, то под топологическим R-модулем R/ρ будем понимать фактор-модуль с фактор-топологией.

Под *классом топологических колец* будем подразумевать класс колец $\mathcal{K}$, в котором выполнены следующие условия: если R — кольцо из класса $\mathcal{K}$, а I — двусторонний идеал R, то I — кольцо из класса $\mathcal{K}$, если при этом идеал I замкнут, то кольцо R/I с фактор-топологией — кольцо из класса $\mathcal{K}$.

В [3] даётся следующее определение топологического радикала.

Определение 1. В классе топологических колец $\mathcal{K}$ *определён радикал* ζ, если свойство топологического кольца быть ζ-кольцом удовлетворяет следующим условиям:

1) непрерывный гомоморфный образ топологического ζ-кольца является ζ-кольцом;
2) в любом топологическом кольце $R \in \mathcal{K}$ существует такой замкнутый идеал $\zeta(R)$, что топологическое кольцо $\zeta(R)$ является ζ-кольцом и содержит всякий идеал I топологического кольца R, являющийся ζ-кольцом;
3) для любого топологического кольца $R \in \mathcal{K}$ фактор-кольцо $R/\zeta(R)$ не содержит ненулевых идеалов, являющихся ζ-кольцами.

Известно, что в классе дискретных колец свойство кольца быть квазирегулярным кольцом (когда каждый элемент кольца имеет квазиобратный) является радикальным свойством. Этот радикал называется радикалом Джекобсона и обозначается через J.

Естественно поставить вопрос о топологическом аналоге радикала Джекобсона.

В некоторых классах топологических колец (но не в классе всех топологических колец) свойство кольца быть радикальным в смысле радикала Джекобсона является радикальным свойством. Это справедливо, в частности, для классов колец, в которых

а) в каждом топологическом кольце множество всех квазирегулярных элементов открыто (Q-кольца, определённые в [8]);
б) каждое топологическое кольцо является идеалом локально компактного кольца;

в) каждое топологическое кольцо является идеалом некоторого ограниченного полного топологического кольца;
г) в каждом топологическом кольце множество всех квазирегулярных элементов замкнуто;
д) каждое топологическое кольцо является подкольцом коммутативного монокомпактного ограниченного кольца (см. [6]);
е) каждое топологическое кольцо является идеалом линейно компактного кольца (см. [9]).

Известно, что существуют топологические кольца с незамкнутым радикалом Джекобсона (см. [8]), поэтому радикал Джекобсона не будет радикалом в классе всех топологических колец.

Напомним, что элемент t кольца называется *топологически квазирегулярным справа*, если для любой окрестности V нуля кольца существует такой элемент s, что

$$t + s + ts \in V.$$

В [10] Э. Вайс для каждого ограниченного слева кольца R рассматривал сумму всех топологически квазирегулярных справа правых идеалов $N(R)$ (эта сумма в данном классе колец является замкнутым двусторонним идеалом).

В [11] Б. Юд определил топологически примитивный идеал кольца R как максимальный двусторонний идеал, лежащий в некотором максимально замкнутом регулярном справа правом идеале этого кольца, а затем рассматривал пересечение всех таких идеалов, обозначая его через $\operatorname{top}\operatorname{rad} R$ и называя такой идеал топологическим радикалом.

В данной статье для всякого топологического кольца R топологический радикал Джекобсона (обозначающийся через $\operatorname{top} J(R)$) определяется как множество всех элементов кольца, аннулирующих каждый топологически неприводимый R-модуль. Доказывается, что $\operatorname{top} J(R)$ действительно является радикалом в классе всех топологических колец (теорема 1). Даётся несколько эквивалентных определений этого радикала (следствие 1 и теорема 3). В третьем разделе статьи показывается, что топологический радикал Джекобсона топологического кольца R содержит топологический радикал Бэра (теорема 4) и идеал $\mathfrak{M}(R)$, определённые в работах В. И. Арнаутова (теорема 5). В четвёртом разделе рассматривается топологический радикал Джекобсона для некоторых конструкций топологических колец, а именно для присоединения единицы, пополнения, прямого произведения с тихоновской топологией. Показано, как связаны топологический радикал Джекобсона топологического кольца R и топологический радикал Джекобсона кольца непрерывных функций из некоторого топологического пространства X в R с топологией поточечной сходимости. Также затрагивается вопрос о кольце непрерывных функций для топологического радикала Бэра. В конце статьи рассматриваются топологически наднильпотентные радикалы кольца многочленов (теорема 10) и их связи с топологическим радикалом Джекобсона.

2. Новое определение топологического радикала Джекобсона

Топологический R-модуль M, не содержащий замкнутых собственных подмодулей и такой, что $RM \neq \{0\}$, будем называть *топологически неприводимым модулем*.

Определение 2. Пусть R — топологическое кольцо. Определим множество $\operatorname{top} J(R)$ как множество всех элементов кольца, которые аннулируют все топологически неприводимые левые R-модули.

Если обозначить через $\mathbb{M}$ семейство всех топологически неприводимых левых R-модулей, то

$$\operatorname{top} J(R) = \bigcap_{M \in \mathbb{M}} \operatorname{Ann}_R(M).$$

Заметим, что если кольцо R не обладает топологически неприводимыми R-модулями, то $\operatorname{top} J(R) = R$.

Ясно, что множество $\operatorname{top} J(R)$ является замкнутым двусторонним идеалом. В дискретном кольце R идеал $\operatorname{top} J(R)$ лежит в радикале Джекобсона, так как всякий модуль над дискретным кольцом является топологическим в дискретной топологии.

Предложение 1. *Пусть R — такое топологическое кольцо, что $\operatorname{top} J(R) = \{0\}$. Тогда для любого двустороннего идеала A в R, не обязательно замкнутого, выполняется*

$$\operatorname{top} J(A) = \{0\}.$$

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть M — топологически неприводимый R-модуль, а A — такой идеал в R, что $AM \neq \{0\}$. Рассмотрим M как левый топологический модуль над A. Тогда M является топологически неприводимым A-модулем.*

Доказательство. Очевидно, что M является топологическим A-модулем.

Пусть N — некоторый собственный замкнутый A-подмодуль в M. Так как $R(AN) \subseteq AN$, то AN является R-подмодулем в M, а следовательно, $[AN]$ также подмодуль в M. Если бы было справедливо $AN \neq \{0\}$, то $M = [AN]$. Из того что выполнено $AN \subseteq N$ и подмодуль N замкнут, получаем, что $[AN] \subseteq N$. Поэтому $M = [AN] \subseteq N$, но это противоречит собственности подмодуля N. Итак, $AN = \{0\}$. В таком случае

$$N \subseteq B = \bigl\{m \in M \colon Am = \{0\}\bigr\}.$$

Заметим, что B — ненулевой замкнутый R-подмодуль. Поэтому $B = M$. В итоге получаем, что $AM = \{0\}$, что противоречит условию леммы. Таким образом, M топологически неприводим как A-модуль. □

Доказательство предложения 1. Пусть x — ненулевой элемент из идеала A. Так как $\operatorname{top} J(R) = \{0\}$, то существует топологически неприводимый модуль $_RM$, такой что $xM \neq \{0\}$. По лемме 1 модуль $_AM$ будет топологически неприводимым. Следовательно, $x \notin \operatorname{top} J(A)$. Таким образом, $\operatorname{top} J(A) = \{0\}$. $\square$

Предложение 2. *Пусть R — топологическое кольцо. Тогда*

$$\operatorname{top} J\big(R/\operatorname{top} J(R)\big) = \{0\}.$$

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть M — топологически неприводимый R-модуль, и пусть замкнутый идеал B кольца R таков, что $BM = \{0\}$. Тогда M, рассматриваемый естественным образом как R/B-модуль, является топологически неприводимым R/B-модулем.*

Доказательство. Предположим, что в M существует замкнутый R/B-подмодуль N. Но тогда N является R-подмодулем, что противоречит условию. $\square$

Доказательство предложения 2. Предположим, что существует ненулевой элемент $\bar{x}$ из $\operatorname{top} J(R/\operatorname{top} J(R))$. Тогда для любого топологически неприводимого R-модуля M получаем $\bar{x}M = \{0\}$, так как по лемме 2 модуль M можно рассмотреть как топологически неприводимый $R/\operatorname{top} J(R)$-модуль. Пусть элемент x из $R \setminus \operatorname{top} J(R)$ таков, что $\bar{x} = x + \operatorname{top} J(R)$. В таком случае $\big(x + \operatorname{top} J(R)\big)M = \{0\}$, т. е. $xM = \{0\}$ для любого неприводимого R-модуля M. Поэтому $x \in \operatorname{top} J(R)$, что противоречит выбору x. $\square$

Предложение 3. *Пусть $\varphi\colon R \to R'$ — непрерывный эпиморфизм. Тогда*

$$\varphi\big(\operatorname{top} J(R)\big) \subseteq \operatorname{top} J(R').$$

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть $\varphi\colon R \to R'$ — непрерывный эпиморфизм топологических колец, а M — топологический R'-модуль. Если для всех элементов $x \in R$ и $m \in M$ определить умножение как $x \cdot m = \varphi(x)m$, то M будет топологическим R-модулем. При этом модуль $_RM$ топологически неприводим тогда и только тогда, когда $_{R'}M$ топологически неприводим.*

Доказательство. Из непрерывности отображения φ легко следует, что $_RM$ является топологическим R-модулем.

Заметим, что множество N является подмодулем в $_RM$ тогда и только тогда, когда N — подмодуль в $_{R'}M$. Поэтому модуль $_RM$ топологически неприводим тогда и только тогда, когда модуль $_{R'}M$ топологически неприводим. $\square$

Доказательство предложения 3. Докажем от противного. Предположим, что найдётся такой элемент r из $\operatorname{top} J(R)$, что $\varphi(r) \notin \operatorname{top} J(R')$. Следовательно, существует топологически неприводимый R'-модуль M, такой что $\varphi(r)M \neq \{0\}$. Но по лемме 3 модуль M будет топологически неприводимым R-модулем. Поэтому $r \cdot M \neq \{0\}$, но это противоречит нашему предположению. $\square$

Теорема 1. *В классе всех топологических колец свойство кольца R аннулировать все топологически неприводимые R-модули является радикальным свойством.*

Доказательство. Из предложения 2 следует, что $\operatorname{top} J\big(R/\operatorname{top} J(R)\big) = \{0\}$. Но тогда по предложению 1 фактор-кольцо $R/\operatorname{top} J(R)$ не содержит таких ненулевых идеалов $\bar{A}$, что $\operatorname{top} J(\bar{A}) = \{0\}$, т. е. выполняется условие 3) в определении топологического радикала Джекобсона.

Докажем выполнение условия 1). Пусть кольцо R радикально и $\varphi\colon R \to R'$ — непрерывный кольцевой гомоморфизм. Применяя предложение 3, получаем, что $\varphi(R) = \varphi\big(\operatorname{top} J(R)\big) \subseteq \operatorname{top} J\big(\varphi(R)\big)$. Следовательно, кольцо $\varphi(R)$ также радикально.

Докажем выполнение условия 2). Пусть идеал I таков, что $\operatorname{top} J(I) = I$. Тогда, применяя 1), получаем, что в фактор-кольце $\bar{R} = R/\operatorname{top} J(R)$ выполняется $\bar{I} = \operatorname{top} J(\bar{I})$. Но по доказанному условию 3) $\bar{I} = \{0\}$. Следовательно, $I \subseteq \operatorname{top} J(R)$. □

Определение 3. В дальнейшем под *топологическим радикалом Джекобсона* топологического кольца R будем подразумевать замкнутый идеал $\operatorname{top} J(R)$, содержащий элементы кольца, аннулирующие все топологически неприводимые левые R-модули.

Рассмотрим некоторые свойства топологически неприводимых модулей.

Предложение 4. *Пусть M — топологически неприводимый R-модуль. Тогда подмодуль $M' \neq \{0\}$ модуля M, рассмотренный в индуцированной топологии, также топологически неприводим.*

Доказательство. Предположим, что существует замкнутый в M' собственный подмодуль N. Пусть x — некоторый элемент из M', не лежащий в N. Тогда найдётся окрестность W' точки x, не пересекающаяся с N. По определению топологии в M' найдётся окрестность W из M, такая что $W' = W \cap M'$. Заметим, что

$$W \cap N = (W \cap M') \cap N = W' \cap N = \varnothing.$$

Следовательно, $x \notin [N]_M$. Таким образом, $[N]_M$ является собственным замкнутым подмодулем модуля M. Получили противоречие. □

Предложение 5. *Пусть M — топологически неприводимый R-модуль. Тогда если m — ненулевой элемент из M, то $[Rm] = M$.*

Доказательство. Рассмотрим замкнутый подмодуль

$$B = \big\{x \in M\colon Rx = \{0\}\big\}.$$

Так как $RM \neq \{0\}$, то из топологической неприводимости модуля M следует, что $B = \{0\}$. Итак, $Rm \neq \{0\}$. Поэтому $[Rm] = M$. □

Теорема 2. *Пусть R — топологическое кольцо. Обозначим через U_1 пересечение ядер всех непрерывных модульных гомоморфизмов $\varphi\colon {}_RR \to M$, где M —*

топологически неприводимый R-модуль, а через U_2 — пересечение всех замкнутых левых идеалов ρ, для которых фактор-модуль R/ρ является топологически неприводимым R-модулем в некоторой топологии $\tau' \leqslant \tau$, где τ — фактор-топология на R/ρ. Тогда

$$\operatorname{top} J(R) \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \operatorname{top} J(R)R.$$

Доказательство. Докажем, что $\operatorname{top} J(R) \supseteq U_1$. Это утверждение очевидно для радикального кольца R. Пусть M — топологически неприводимый R-модуль. Пусть m — некоторый ненулевой элемент из M. Рассмотрим топологический R-модуль $M_m = Rm$ с индуцированной топологией. Тогда из предложения 5 следует, что $M_m \neq \{0\}$. Затем, применяя предложение 4, получаем, что модуль M_m топологически неприводим.

Теперь определим непрерывный модульный гомоморфизм $f_m\colon {}_RR \to Rm$ следующим образом: если $r \in R$, то $f_m(r) = rm$. Но тогда

$$\operatorname{Ann}_R(M) = \bigcap_{m \in M} \{r \in R\colon rm = 0\} = \bigcap_{m \in M} \ker(f_m).$$

Отсюда следует, что $\operatorname{top} J(R) \supseteq U_1$.

Обозначим через $\mathcal{P}_l(R)$ множество всех замкнутых левых идеалов ρ, для которых фактор-модуль R/ρ является топологически неприводимым R-модулем в некоторой топологии $\tau' \leqslant \tau$, где τ — фактор-топология на R/ρ.

Докажем, что $U_1 \supseteq U_2$. Пусть $\varphi\colon {}_RR \to M$ — ненулевой непрерывный гомоморфизм. Тогда из предложения 4 получаем, что $\varphi(R)$ также топологически неприводим. Пусть $\mathcal{B}$ — базис окрестностей нуля в $\varphi(R)$. Тогда фактор-кольцо $R/\ker\varphi$ можно рассматривать как топологически неприводимый R-модуль, для которого топология определяется базисом окрестностей нуля $\{\varphi^{-1}(B)\}_{B \in \mathcal{B}}$. Следовательно, $\ker\varphi \in \mathcal{P}_l(R)$.

Докажем, что $U_2 \supseteq \operatorname{top} J(R)R$. Пусть $\rho \in \mathcal{P}_l(R)$. По определению фактор-модуль R/ρ является топологически неприводимым R-модулем в некоторой топологии $\tau' \leqslant \tau$, где топология τ индуцирована в фактор-модуле R/ρ топологией из R. Тогда $\operatorname{Ann}_R(R/\rho)(R/\rho) = \{\bar{0}\}$. Поэтому $\operatorname{Ann}_R(R/\rho)R \subseteq \rho$. Таким образом,

$$\operatorname{top} J(R)R \subseteq \bigcap_{\rho \in \mathcal{P}_l(R)} \rho. \qquad \square$$

Следствие 1. *Пусть R — топологическое кольцо с единицей. Тогда следующие идеалы кольца R совпадают*:

а) *топологический радикал Джекобсона*;

б) *пересечение ядер всех непрерывных модульных гомоморфизмов $\varphi\colon {}_RR \to M$, где M — топологически неприводимый R-модуль*;

в) *пересечение всех замкнутых левых идеалов ρ, для которых фактор-модуль R/ρ является топологически неприводимым R-модулем в некоторой топологии $\tau' \leqslant \tau$, где τ — фактор-топология на R/ρ.*

Доказательство. Так как кольцо R содержит единицу, то $\operatorname{top} J(R) = \operatorname{top} J(R)R$. Применяя теорему 2, получаем требуемое. $\square$

Определение 4. Пусть R — топологическое кольцо, а ρ — замкнутый левый идеал кольца R. Пусть фактор-модуль R/ρ является топологическим R-модулем относительно некоторой топологии τ на R/ρ. Пусть ε — естественный гомоморфизм из R в R/ρ. Назовём левый идеал ρ *топологически регулярным слева относительно топологии τ левым идеалом*, если для любой окрестности U нуля в R/ρ, τ и любого элемента кольца r найдётся такой элемент $a \in R$, что $\varepsilon(r - ra) \in U$.

Теорема 3. *Пусть R — топологическое кольцо. Тогда топологический радикал Джекобсона этого кольца совпадает с пересечением всех замкнутых левых идеалов ρ, таких что фактор-модуль R/ρ является топологически неприводимым R-модулем в некоторой топологии $\tau' \leqslant \tau$, где τ — фактор-топология на R/ρ, и левый идеал ρ топологически регулярен слева относительно топологии τ'.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 4. *Пусть M — топологически неприводимый R-модуль, и пусть m — произвольный элемент из M. Тогда левый идеал*

$$\rho_m := \{r \in R\colon rm = 0\}$$

является топологически регулярным слева относительно топологии τ', порождённой прообразами окрестностей нуля из модуля при непрерывном отображении $f_m\colon R/\rho_m \to Rm$, определяемом соотношением $f_m(r + \rho_m) = rm$, где $r \in R$. При этом модуль $(R/\rho_m, \tau')$ топологически изоморфен модулю Rm, рассмотренному в индуцированной из M топологии.

Доказательство. Для любой окрестности W нуля из модуля M множество

$$V'_W = \{\bar{r} \in R/\rho_m\colon f_m(\bar{r}) \in W\}$$

открыто в R/ρ_m с фактор-топологией.

Выполняется

$$\{\bar{0}\} = \bigcap_{W \in \tau(M)} V'_W.$$

Семейство V'_W образует базис окрестностей нуля R-модуля R/ρ_m с топологией, слабее или совпадающей с фактор-топологией. Отображение f_m не только непрерывно, но и открыто (образом V'_W является $W \cap Rm$). Поэтому модуль R/ρ_m с такой топологией топологически изоморфен модулю Rm.

Пусть W — окрестность нуля в M. Фиксируем $r \in R$. Найдётся такая окрестность нуля W_1 из M, что $r \cdot W_1 \subset W$. Так как $m \in [Rm]_M$, то существует элемент $a_v \in R$, такой что $m - a_v m \in W_1$. Поэтому $(r - ra_v)m \in W$. Таким образом, $\varepsilon(r - ra_v) \in V'_W$, где ε — естественный гомоморфизм из R в R/ρ. $\square$

Лемма 5. *Пусть R — топологическое кольцо, а ρ — топологически регулярный слева относительно некоторой топологии τ в R/ρ левый идеал. Тогда*

$\mathrm{Ann}_R(R/\rho)$ *является максимальным двусторонним идеалом кольца* R, *лежащим в* ρ.

Доказательство. Пусть C — двусторонний идеал кольца R и C содержится в ρ. Тогда $CR \subseteq \rho$, т. е. $C \subseteq \mathrm{Ann}_R(R/\rho)$.

Пусть $r \in \mathrm{Ann}_R(R/\rho)$, $U \in \tau$. Тогда существует такой элемент a из R, что $\varepsilon(r - ra) \in U$, где ε — естественный гомоморфизм из R в R/ρ. Из того что $ra \in \mathrm{Ann}_R(R/\rho)R \subseteq \rho$, получаем, что $\varepsilon(r) \in U$. Так как окрестность U произвольная, то $r \in \rho$. Следовательно, $\mathrm{Ann}_R(R/\rho) \subseteq \rho$. □

Доказательство теоремы 3. Пусть Γ — множество всех замкнутых левых идеалов ρ, таких что фактор-модуль R/ρ является топологически неприводимым R-модулем в некоторой топологии $\tau' \leqslant \tau$, где τ — фактор-топология на R/ρ, и левый идеал ρ регулярен слева относительно топологии τ'.

Пусть M — топологически неприводимый R-модуль. Для каждого элемента m из M определим левый идеал

$$\rho_m := \{r \in R\colon rm = 0\}.$$

Из предложения 4 следует, что топологический R-модуль Rm топологически неприводим. Поэтому из леммы 4 получаем, что $\rho_m \in \Gamma$. Заметим, что

$$\mathrm{Ann}_R(M) = \bigcap_{m \in M} \rho_m.$$

Следовательно,

$$\operatorname{top} J(R) \supseteq \bigcap_{\rho \in \Gamma} \rho.$$

Пусть $\rho \in \Gamma$. Тогда из леммы 5 получаем, что $\mathrm{Ann}_R(R/\rho) \subseteq \rho$. Таким образом,

$$\operatorname{top} J(R) \subseteq \bigcap_{\rho \in \Gamma} \rho.$$ □

3. Свойства топологического радикала Джекобсона

Напомним, что идеал I топологического кольца называется Σ-*нильпотентным*, если для любой окрестности нуля V в R найдётся такое натуральное n, что $I^n \subset V$.

Определение 5 [1]. Для каждого ординала $\gamma \geqslant 0$ определяется замкнутое множество $\mathcal{R}_\gamma(R)$. Если $\gamma = 0$, то $\mathcal{R}_0(R) = \{0\}$. Если уже определены все $\mathcal{R}_\alpha(R)$ для каждого $\alpha < \beta$, то $\mathcal{R}_\beta(R)$ определяются следующим образом: если β предельное, то

$$\mathcal{R}_\beta(R) = \left[\bigcup_{\alpha<\beta} \mathcal{R}_\alpha(R)\right],$$

иначе существует ординал $\beta - 1$, в этом случае $\mathcal{R}_\beta(R)$ представляет собой замыкание суммы всех идеалов N, таких что фактор $N/\mathcal{R}_{\beta-1}(R)$ является Σ-нильпотентным. Существует такой ординал τ, что для любого ординального числа $\gamma > \delta$ справедливо $\mathcal{R}_\gamma(R) = \mathcal{R}_\tau(R)$. Идеал $\mathcal{L}(R) = \mathcal{R}_\tau(R)$ называется *топологическим радикалом Бэра*.

Теорема 4. *В топологическом кольце R топологический радикал Джекобсона $\operatorname{top} J(R)$ содержит топологический радикал Бэра $\mathcal{L}(R)$.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 6. *Пусть M — топологически неприводимый R-модуль, и пусть I — Σ-нильпотентный левый идеал кольца R. Тогда $IM = \{0\}$.*

Доказательство. Предположим, что $IM \neq \{0\}$. Следовательно, существует такой элемент m из M, что $Im \neq \{0\}$. Учитывая топологическую неприводимость модуля M, получаем, что $[Im] = M$. Пусть для данного натурального числа n выполняется $[I^{n-1}m] = M$. Докажем, что тогда $[I^n m] = M$. Пусть это не так. В таком случае $[I \cdot I^{n-1}m] = \{0\}$. Заметим, что если A — подмножество в R, а B — подмножество в M, то $[A] \cdot [B] \subseteq [AB]$ в силу непрерывности умножения $R \times M \to M$. Получаем, что $[I] \cdot [I^{n-1}m] \subseteq [I \cdot I^{n-1}m] = \{0\}$. Поэтому $I \cdot [I^{n-1}m] = \{0\}$, следовательно, $I \cdot M = \{0\}$. Получили противоречие. Итак, для любого натурального n справедливо $[I^n m] = M$.

Фиксируем произвольную окрестность нуля W в M. Тогда найдётся такая окрестность нуля W_1, что $W_1 + W_1 \subseteq W$. В кольце R выберем такую окрестность нуля V, что $V \cdot m \subseteq W_1$. Так как I — Σ-нильпотентный идеал, то найдётся такое натуральное число n, что $I^n \subseteq V$.

Итак,

$$M = [I^n m] \subseteq [V \cdot m] \subseteq [W_1] \subseteq W_1 + W_1 \subseteq W,$$

т. е.

$$M \subseteq \bigcap_{W \in \tau(M)} W = \{0\},$$

но это противоречит предположению $IM \neq 0$. □

Доказательство теоремы 4. Пусть M — топологически неприводимый R-модуль. По лемме 2 точный топологический модуль M над кольцом $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ топологически неприводим. Из леммы 6 следует, что фактор-кольцо $R/\operatorname{Ann}_R(M)$ не содержит Σ-нильпотентных идеалов. Поэтому $\mathcal{L}\big(R/\operatorname{Ann}_R(M)\big) = \{0\}$. Следовательно, идеал $\operatorname{Ann}_R(M)$ содержит топологический радикал Бэра. Поэтому $\operatorname{top} J(R) \supseteq \mathcal{L}(R)$. □

Предложение 6. *Если в топологическом кольце R все максимальные левые регулярные слева идеалы замкнуты, то топологический радикал Джекобсона этого кольца содержится в радикале Джекобсона.*

Для доказательства этого предложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7. *Если топологическое кольцо R таково, что в нём все максимальные левые регулярные слева идеалы замкнуты, то в любом неприводимом R-модуле M можно задать топологию так, чтобы модуль M стал топологическим R-модулем.*

Доказательство. Из теории дискретных колец известно, что всякий неприводимый модуль изоморфен фактор-кольцу R/ρ, где ρ — некоторый максимальный левый регулярный идеал. Так как идеал ρ замкнут, то с фактор-топологией R/ρ является топологическим левым R-модулем. Пусть φ — изоморфизм R/ρ в M. Определим топологию на M следующим образом: множество B открыто в M тогда и только тогда, когда $\varphi^{-1}(B)$ открыто в R/ρ. В итоге получаем топологический R-модуль M. $\square$

Доказательство предложения 6. Пусть M — неприводимый R-модуль. По лемме 7 можно построить топологию, относительно которой M будет топологическим R-модулем. Очевидно, что M топологически неприводим. Поэтому $\operatorname{top} J(R)M = \{0\}$. Но так как это верно для любого неприводимого модуля, то $\operatorname{top} J(R) \subseteq J(R)$. $\square$

В общем случае это утверждение неверно, иначе радикал Джекобсона содержал бы все Σ-нильпотентные идеалы. Но если рассмотреть кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ с p-адической топологией, то его радикал Джекобсона равен нулю, а топологический радикал Джекобсона, совпадающий с топологическим радикалом Бэра, равен $p\mathbb{Z}$.

Следствие 2. *Если в топологическом кольце R все максимальные левые регулярные идеалы замкнуты, то топологический радикал Бэра содержится в радикале Джекобсона.*

Заметим, что в банаховых алгебрах все максимальные регулярные левые идеалы замкнуты. Это верно в более широком классе колец, в $\mathrm{Q_l}$-кольцах с левой единицей [8, теорема 2].

Пусть R — топологическое кольцо. Последовательность $b_1, b_2, \ldots$ элементов кольца R называется *m'-последовательностью* (см. [1]), если для любого натурального i выполняется $b_{i+1} \in (b_i)_R^2$. Последовательность $b_1, b_2, \ldots$ называется *исчезающей*, если для любой окрестности V нуля из R существует такое натуральное число n, что $b_n \in V$.

Определение 6 [1]. Пусть R — топологическое кольцо. Обозначим через $\mathfrak{M}(R)$ множество всех таких элементов $b \in R$, что любая m'-последовательность, начинающаяся с b, является исчезающей.

Известно, что множество $\mathfrak{M}(R)$ является идеалом в R, не обязательно замкнутым. Лемма 17 работы [1] утверждает, что в полном кольце R с базисом окрестностей нуля из подгрупп выполняется включение $\mathfrak{M}(R) \subseteq J(R)$. Заметим, что для произвольного топологического кольца R топологический радикал Джекобсона этого кольца не всегда содержит $\mathfrak{M}(R)$. Например, рассмотрим свободно порождённое кольцо R с бесконечным числом образующих. Радикал Джекобсона этого кольца равен нулю. На R существует кольцевая топология с базисом окрестностей нуля из идеалов, относительно которой $\mathfrak{M}(R) = R$ (см. [1, пример 1]). Зато для всякого топологического кольца справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть R — топологическое кольцо. Тогда $\mathfrak{M}(R) \subseteq \operatorname{top} J(R)$.*

Доказательство. Пусть $b \notin \operatorname{top} J(R)$. Существует такой топологически неприводимый R-модуль M, что $bM \neq \{0\}$. Тогда найдётся такой элемент $m \in M$, что $bm \neq 0$. Так как модуль хаусдорфов, то существует окрестность W нуля в M, такая что $bm \notin W$ и $[W] \neq M$. Также найдётся окрестность V нуля в R, такая что $V \cdot m \subseteq W$.

Построим такую последовательность $b_1 = b, b_2, \ldots$ элементов из R, что $b_n \notin V$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Предположим, что мы уже определили элемент b_i, такой что $b_i m \notin W$, а значит, $b_i \notin V$. Поэтому $[(b_i)_R m] = M$. Тогда $(b_i)_R[(b_i)_R m] \neq \neq \{0\}$. Следовательно, $(b_i)_R^2 m \neq \{0\}$. Таким образом, $[(b_i)_R^2 m] = M$. Так как $[(b_i)_R^2 m] = M \nsubseteq [W]$, то найдётся элемент $b_{i+1} \in (b_i)_R^2$, такой что $b_{i+1} m \notin W$. В таком случае $b_{i+1} m \notin V \cdot m$, а следовательно, $b_{i+1} \notin V$.

Итак, мы построили m'-последовательность в R, начинающуюся с b, но не исчезающую. Поэтому $b \notin \mathfrak{M}(R)$. Таким образом, $\mathfrak{M}(R) \subseteq \operatorname{top} J(R)$. □

4. Топологический радикал Джекобсона для некоторых конструкций топологических колец

4.1. Добавление единицы

Определение 7 [7]. Пусть R и S — топологические кольца, причём S является как правым, так и левым топологическим R-модулем. Если Q — прямая сумма топологических аддитивных групп R и S, то Q превращается в топологическое кольцо, если в нём доопределить следующую операцию умножения:

$$(s_1, r_1)(s_2, r_2) := (s_1 s_2 + r_1 s_2 + s_1 r_2, r_1 r_2).$$

Такое топологическое кольцо называется *полупрямым произведением* и обозначается $S \leftthreetimes R$.

Предложение 7. *Любое топологическое кольцо R можно вложить как замкнутый идеал в кольцо $\hat{R}$ с единицей так, чтобы $\operatorname{top} J(R) = \operatorname{top} J(\hat{R})$.*

Доказательство. Рассмотрим полупрямое произведение $\hat{R} = R \leftthreetimes \mathbb{Z}$, где кольцо целых чисел наделено дискретной топологией.

Докажем, что $(\operatorname{top} J(R), 0) = \operatorname{top} J(\hat{R}) \cap (R, 0)$. Очевидно, что $(\operatorname{top} J(R), 0) \subseteq \subseteq \operatorname{top} J(\hat{R}) \cap (R, 0)$, так как $\operatorname{top} J(\hat{R}) \supseteq \operatorname{top} J\big((R, 0)\big) = (\operatorname{top} J(R), 0)$. Осталось доказать обратное включение.

Пусть M — топологически неприводимый R-модуль. Рассмотрим M как $\hat{R}$-модуль, определив для всех $x \in R$, $n \in \mathbb{Z}$ и $m \in M$ умножение $(r, n)m = = rm + nm$. Так как M является топологическим модулем над кольцом целых чисел с дискретной топологией, то M будет также топологическим модулем над $\hat{R} = R \leftthreetimes \mathbb{Z}$. Так как модуль ${}_R M$ топологически неприводим, модуль ${}_{\hat{R}} M$ также топологически неприводим. Поэтому $\big(\operatorname{top} J(\hat{R}) \cap (R, 0)\big) M = \{0\}$. Пусть элемент x из R таков, что $(x, 0) \in \operatorname{top} J(\hat{R}$. Тогда $xM = \{0\}$. Так как модуль M произволен, то $x \in \operatorname{top} J(R)$. Таким образом, $\operatorname{top} J(\hat{R}) \cap (R, 0) \subseteq (\operatorname{top} J(R), 0)$ $\square$

4.2. Всюду плотное подкольцо

Лемма 8. *Если подкольцо R всюду плотно в топологическом кольце $\hat{R}$, а M — топологически неприводимый $\hat{R}$-модуль, то M будет топологически неприводимым R-модулем.*

Доказательство. Докажем от противного. Пусть N — собственный замкнутый подмодуль модуля ${}_R M$. Для всякого $x \in N$ рассмотрим подмножество

$$B_x = \{r \in \hat{R} \colon rx \in N\}.$$

Так как умножение $\hat{R} \times M \to M$ непрерывно, а множество N замкнуто, то левый идеал B_x также замкнут. Следовательно, множество

$$B = \{r \in \hat{R} \colon rN \subseteq N\} = \bigcap_{x \in N} B_x$$

замкнуто. Заметим, что B содержит R. Получаем, что $B = \hat{R}$. Итак, N — собственный замкнутый подмодуль модуля ${}_{\hat{R}} M$, что противоречит топологической неприводимости модуля ${}_{\hat{R}} M$. $\square$

Теорема 6. *Если подкольцо R всюду плотно в $\hat{R}$, то $\operatorname{top} J(R) \subseteq \operatorname{top} J(\hat{R}) \cap R$.*

Доказательство. Пусть $x \in \operatorname{top} J(R)$. Предположим, что $x \notin \operatorname{top} J(\hat{R})$. Тогда найдётся топологически неприводимый $\hat{R}$-модуль M, такой что $xM \neq \{0\}$. Но по предыдущей лемме M является топологически неприводимым R-модулем. Таким образом, $xM = \{0\}$. Получили противоречие. Значит, $\operatorname{top} J(R) \subseteq \operatorname{top} J(\hat{R})$. $\square$

Следствие 3. *Если кольцо радикально в смысле топологического радикала Джекобсона, то его пополнение также радикально.*

Доказательство. Пусть $\hat{R}$ — пополнение радикального кольца R. Тогда из теоремы 6 следует, что $R \subseteq \operatorname{top} J(\hat{R})$. Так как радикал замкнут, то $\hat{R} = [R]_{\hat{R}} \subseteq \operatorname{top} J(\hat{R})$. Таким образом, $\hat{R} = \operatorname{top} J(\hat{R})$. $\square$

4.3. Прямое произведение

Лемма 9. *Пусть R — топологическое кольцо, и пусть A и B — такие замкнутые идеалы кольца R, что $\operatorname{top} J(R/A) = R/A$ и $\operatorname{top} J(R/B) = R/B$. Тогда $\operatorname{top} J\big(R/(A \cap B)\big) = R/(A \cap B)$.*

Доказательство. Пусть M — топологически неприводимый $R/(A \cap B)$-модуль. Рассмотрим M естественным образом как R-модуль. Тогда M — топологический R-модуль и не содержит замкнутых собственных R-подмодулей. Докажем, что $RM = \{0\}$.

Если $[AM] = \{0\}$, то $AM = \{0\}$, следовательно, M является топологическим R/A-модулем по лемме 2, к тому же топологически неприводимым. Но тогда $(R/A)M = \{0\}$. Поэтому $RM = \{0\}$.

Пусть теперь $[AM] = M$. Так как $BAM \subseteq (B \cap A)M = \{0\}$, то $BM = B[AM] = \{0\}$. Следовательно, по лемме 2 модуль M является топологическим R/B-модулем, к тому же топологически неприводимым. Но тогда $(R/B)M = \{0\}$. Поэтому $RM = \{0\}$. □

Лемма 10. *Пусть топологическое кольцо R таково, что для каждой окрестности V нуля в R найдётся такой замкнутый идеал I, лежащий в V, что $\operatorname{top} J(R/I) = R/I$. Тогда само кольцо R радикально.*

Доказательство. Предположим, что кольцо R не радикально. Тогда найдётся топологически неприводимый R-модуль M, такой что $RM \neq \{0\}$. Пусть W — окрестность нуля в M, не совпадающая с M. Фиксируем ненулевой элемент $m \in M$. Выберем окрестность V нуля в R так, чтобы $V \cdot m \subset W$. Пусть V_1 — такая окрестность нуля в R, что $V_1 + V_1 \subset V$. По условию существует замкнутый идеал I, лежащий в V_1, такой что $\operatorname{top} J(R/I) = R/I$. Если бы $IM = \{0\}$, то M был бы топологическим R/I-модулем, к тому же топологически неприводимым. Но тогда $RM = \{0\}$. Таким образом, получаем, что $IM \neq \{0\}$, и по лемме 1 модуль M является топологически неприводимым I-модулем. Из леммы 2 получаем, что $[Im] = M$. Итак,

$$M = [Im] \subseteq [V_1 \cdot m] \subset (V_1 + V_1) \cdot m \subset W.$$

Получили противоречие. □

Предложение 8. *Пусть в компактном кольце R существует семейство замкнутых идеалов $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$, таких что $\bigcap\limits_{\alpha \in A} I_\alpha = \{0\}$ и для любого $\alpha \in A$ выполняется $\operatorname{top} J(R/I_\alpha) = R/I_\alpha$. Тогда $\operatorname{top} J(R) = R$.*

Доказательство. Если множество A конечно и его мощность равна некоторому натуральному n, то, применяя $n-1$ раз лемму 9, получаем, что R радикально. Поэтому считаем, что множество A не является конечным.

Пусть V — окрестность нуля в R. Тогда найдётся открытая окрестность нуля V_1 в R, такая что $V_1 \subset V$. Подмножество $R \backslash V_1$ замкнуто, а потому компактно. Семейство открытых подмножеств $\{R \setminus I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ покрывает $R \setminus V_1$. Поэтому только конечное число идеалов I_α не лежит в V_1. Следовательно, найдётся такое $\beta \in A$, что $I_\beta \subseteq V_1 \subseteq V$.

Итак, условие леммы 10 выполнено, следовательно, $\operatorname{top} J(R) = R$. □

Определение 8 [7]. Пусть $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — некоторое множество топологических колец, где $\mathcal{B}(R_\alpha)$ — базис окрестностей нуля для кольца R_α. Прямое произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} R_\alpha$, наделённое топологией с базисом окрестностей нуля, состоящей из подмножеств вида $\prod\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, где $U_\alpha \in \mathcal{B}(R_\alpha)$ и $|\{\alpha \in A \mid U_\alpha \neq R_\alpha\}| < \aleph_0$, называется *тихоновским произведением* колец $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$ или произведением с *тихоновской топологией*.

Теорема 7. *Пусть $\{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — некоторое множество топологических колец. Тогда*
$$\operatorname{top} J\Big(\prod_{\alpha \in A} R_\alpha\Big) = \prod_{\alpha \in A} \operatorname{top} J(R_\alpha),$$
где кольцо $R = \prod\limits_{\alpha \in A} R_\alpha$ рассматривается с тихоновской топологией.

Доказательство. Так как канонические проекции $\pi_\alpha \colon R \to R_\alpha$ непрерывны и открыты [4, 2.1.2], то $\pi_\alpha\big(\operatorname{top} J(R)\big) \subseteq \operatorname{top} J(R_\alpha)$. Следовательно,
$$\operatorname{top} J\Big(\prod_{\alpha \in A} R_\alpha\Big) \subseteq \prod_{\alpha \in A} \operatorname{top} J(R_\alpha).$$
Докажем обратное включение.

Обозначим $S_\alpha := \operatorname{top} J(R_\alpha)$. Рассмотрим
$$S := \prod_{\alpha \in A} \operatorname{top} J(R_\alpha)$$
с тихоновской топологией, которая к тому же согласно [4, 2.1.40] совпадает с топологией, индуцируемой топологическим кольцом R. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$. Введём следующее обозначение для идеала:
$$I_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \{f \in S \mid \pi_{\alpha_1}(f) = 0, \ldots, \pi_{\alpha_n}(f) = 0\}.$$
Тогда
$$I_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = I_{\alpha_1} \cap I_{\alpha_2} \cap \ldots \cap I_{\alpha_n}.$$
Топологически изоморфные $\operatorname{top} J(R_\alpha)$ фактор-кольца S/I_α, где $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, радикальны в смысле топологического радикала Джекобсона. Применяя $n-1$ раз лемму 9, получаем, что фактор-кольцо $S/I_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ также радикально.

Заметим, что для любой окрестности U нуля в S найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ и окрестности $U_\alpha \in \mathcal{B}(S_\alpha)$, такие что $U \supseteq \prod\limits_{\alpha \in A} U_\alpha$, причём если $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, то $U_\alpha = S_\alpha$. Следовательно, $U \supseteq I_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$. Таким образом, применяя лемму 10, получаем, что кольцо S радикально. Следовательно, $S \subseteq \operatorname{top} J(R)$. □

4.4. Кольцо непрерывных функций

В [8] рассматривается кольцо непрерывных функций $C(X, A)$ из топологического пространства X в топологическое кольцо A. Теорема 23 этой работы утверждает, что если в кольце A квазиобратимость непрерывна, то

$$J\big(C(X,A)\big) = C\big(X, J(A)\big).$$

В кольце $C(X,A)$ можно рассматривать следующие топологии, относительно которых $C(X,A)$ будет топологическим кольцом:

1) множества вида
$$B_{x_1,\ldots,x_n,V} = \{f \in C(X,A) \mid \text{для всех } i=\overline{1,n} \text{ справедливо } f(x_i) \in V\},$$
где $x_1,\ldots,x_n \in X$, V — окрестность нуля в R, образуют базис окрестностей нуля, это так называемая *топология с поточечной сходимостью*, при этом само кольцо будем обозначать через $C(X,A,p)$;
2) множества вида $C(X,V)$, где V — окрестность нуля в R, образуют базис окрестностей нуля, это так называемая *равномерная топология*, при этом само кольцо будем обозначать через $C(X,A,u)$;
3) множества вида
$$\{f \in C(X,A) \mid \text{для всех } x \in B \text{ справедливо } f(x) \in V\},$$
где V — окрестность нуля в R, а B — предкомпактное подмножество в X, образуют базис окрестностей нуля, это так называемая *равномерная топология на предкомпактах*, при этом само кольцо будем обозначать через $C(X,A,k)$.

Для произвольного элемента $x \in X$ определим отображение $p_x\colon C(X,A) \to A$ следующим образом: пусть $f \in C(X,A)$, тогда $p_x(f) := f(x)$. Если в кольце $C(X,A)$ определена одна из вышеопределённых трёх топологий, то отображение p_x непрерывно и открыто.

Предложение 9. *Пусть ζ — радикал в классе всех топологических колец. Пусть A — топологическое кольцо, а X — топологическое пространство. Пусть в кольце непрерывных функций $C(X,A)$ определена топология поточечной сходимости или более сильная топология* (*например, равномерная на всём X или равномерная на предкомпактах из X*). *Тогда*

$$\zeta\big(C(X,A)\big) \subseteq C\big(X, \zeta(A)\big).$$

Доказательство. При данном $x \in X$ отображение $p_x\colon C(X,A) \to A$ непрерывно. Так как непрерывный образ радикального кольца радикален, то

$$p_x\Big(\zeta\big(C(X,A)\big)\Big) \subseteq \zeta\Big(p_x\big(C(X,A)\big)\Big) = \zeta(A).$$

Поэтому

$$\zeta\big(C(X,A)\big) \subseteq C\big(X, \zeta(A)\big). \qquad \square$$

Теорема 8. *Пусть R — топологическое кольцо, а X — топологическое пространство. Тогда*

$$\operatorname{top} J\big(C(X,R,p)\big) = C(X, \operatorname{top} J(R), p).$$

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 11. *Пусть ζ — радикал в классе всех топологических колец. Пусть A — ζ-радикальное кольцо, а X — топологическое пространство. Пусть в кольце $C(X, A)$ задана одна из вышеопределённых трёх топологий. Тогда если для $x \in X$ определить замкнутый идеал I_x как*

$$I_x = \{f \in C(X, A)\colon f(x) = 0\},$$

то фактор-кольцо $C(X, A)/I_x$ будет ζ-радикально.

Доказательство. Отображение p_x непрерывно и открыто. Заметим, что $\ker p_x = I_x$. Следовательно, $A = p_x\bigl(C(X, A)\bigr)$ топологически изоморфно $C(X, A)/I_x$. $\square$

Лемма 12. *Пусть A — такое топологическое кольцо, что $\operatorname{top} J(A) = A$, а X — топологическое пространство. Тогда*

$$\operatorname{top} J\bigl(C(X, A, p)\bigr) = C(X, A, p).$$

Доказательство. Обозначим $R = C(X, A, p)$. Пусть $x_1, \ldots, x_n \in X$. Введём следующее обозначение для идеала:

$$I_{x_1,\ldots,x_n} = \{f \in R \mid \text{для всех } i = \overline{1, n} \text{ справедливо } f(x_i) = 0\}.$$

Тогда

$$I_{x_1,\ldots,x_n} = I_{x_1} \cap I_{x_2} \cap \ldots \cap I_{x_n}.$$

По лемме 11 для любого $i = \overline{1, n}$ фактор-кольца R/I_{x_i} радикальны в смысле топологического радикала Джекобсона. Применяя $n-1$ раз лемму 9, получаем, что $R/I_{x_1,\ldots,x_n}$ также радикально.

Заметим, что $B_{x_1,\ldots,x_n,W} \supseteq I_{x_1,\ldots,x_n}$. Поэтому из леммы 10 получаем, что $\operatorname{top} J(R) = R$. $\square$

Доказательство теоремы 8. Утверждение теоремы следует из предложения 9 и леммы 12. $\square$

Лемма 13. *Пусть X — топологическое пространство. Если идеал I является Σ-нильпотентным идеалом кольца R, то идеал $C(X, I, u)$ кольца $C(X, R, u)$ также Σ-нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $V \in \tau(R)$. Тогда существует натуральное число n, такое что $I^n \subset V$. Но в таком случае $C(X, I)^n \subset C(X, V)$. $\square$

Теорема 9. *Пусть R — топологическое кольцо, а X — топологическое пространство. Тогда*

$$\mathcal{L}\bigl(C(X, R, u)\bigr) = C(X, \mathcal{L}(R), u).$$

Доказательство. При помощи трансфинитной индукции докажем, что для каждого ординального числа α справедливо включение

$$\mathcal{R}_\alpha\bigl(C(X, R, u)\bigr) \supseteq C(X, \mathcal{R}_\alpha(R), u). \tag{1}$$

Из леммы 13 получаем, что
$$\mathcal{R}_1\big(C(X,R,u)\big) \supseteq C(X,\mathcal{R}_1(R),u).$$
Предположим, что (1) выполняется для всех $\gamma < \alpha$. Если α предельно, то очевидно, что
$$\mathcal{R}_\alpha\big(C(X,R,u)\big) \supseteq C(X,\mathcal{R}_\alpha(R),u).$$
Предположим, что α не предельно. Тогда существует такое β, что $\alpha = \beta + 1$. В этом случае
$$\mathcal{R}_\beta\big(C(X,R,u)\big) \supseteq C(X,\mathcal{R}_\beta(R),u).$$
Пусть I — такой идеал в R, что идеал $I/\mathcal{R}_\beta(R)$ является Σ-нильпотентным в кольце $R/\mathcal{R}_\beta(R)$. Это значит, что для любой окрестности V нуля в R найдётся такое натуральное n, что $I^n \subset \mathcal{R}_\beta(R) + V$. Но тогда
$$\begin{gathered} C(X,I,u)^n \subset C(X,\mathcal{R}_\beta(R)+V,u) \subseteq \\ \subseteq C(X,\mathcal{R}_\beta(R),u) + C(X,V,u) \subseteq \mathcal{R}_\beta\big(C(X,R,u)\big) + C(X,V,u). \end{gathered}$$
Следовательно,
$$C(X,I,u) \subseteq \mathcal{R}_\alpha\big(C(X,R,u)\big).$$
Таким образом, имеем
$$C(X,\mathcal{R}_\alpha(R),u) \subseteq \mathcal{R}_\alpha\big(C(X,R,u)\big).$$
Итак, из (1) получаем, что
$$\mathcal{L}\big(C(X,R,u)\big) \supseteq C(X,\mathcal{L}(R),u).$$
Из предложения 9 следует обратное включение. □

4.5. Топологически наднильпотентные радикалы кольца многочленов

Определение 9 [5]. Пусть R — топологическое кольцо с единицей, X — вполне регулярное пространство. Пусть $\mathcal{T}_0$ — кольцевая топология в R, $\mathcal{B}_0(R)$ — базис окрестностей нуля топологического кольца $(R,\mathcal{T}_0)$, $\mathcal{T}_1$ — топология, в которой X — вполне регулярное топологическое пространство.

Пусть $R[X]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из кольца R от коммутирующих между собой переменных из множества X. Обозначим через Δ такое множество всех непрерывных действительнозначных функций на X, что для всякого замкнутого подмножества Y в X и всякого элемента $x \in X \setminus Y$ найдётся функция $\varphi \in \Delta$, для которой $\varphi(x) = 1$, $\varphi(y) = 0$ для всех $y \in Y$, и при этом $1 - \varphi \in \Delta$.

Пусть $\langle X\rangle$ — свободная коммутативная полугруппа с единицей, которую порождает множество X. Если $z = x_1^{k_1}\ldots x_n^{k_n} \in \langle X\rangle$, то $\deg z = k_1 + \ldots + k_n$ — степень элемента z.

Положим

$$\mathcal{P}_0(X \cup \{0\}) = \{\gamma\colon X \cup \{0\} \to X \cup \{0\} \mid \gamma(0) = 0\}.$$

Пусть Γ — группа эндоморфизмов полугруппы $\langle X \rangle \cup \{0\}$, где каждый эндоморфизм $\tilde{\gamma} \in \Gamma$ индуцирован элементом $\gamma \in \mathcal{P}_0(X \cup \{0\})$, т. е.

$$\tilde{\gamma}(x^{k_1} x^{k_2} \ldots x^{k_n}) = \gamma(x)^{k_1} \gamma(x)^{k_2} \ldots \gamma(x)^{k_n}.$$

Если $V \in \mathcal{B}_0(R)$, $\Phi = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ — конечное подмножество в Δ, $n \in \mathbb{N}$ и $0 < \varepsilon < 1$, то положим

$$U(V, \Phi, n, \varepsilon) = \left\{ f \in R[X] \;\Big|\; f = v_0 + \sum_{k=1}^{r} v_k z_k + \sum_{l=1}^{s} f_l (x_l - y_l) + g \right\},$$

где $r, s \in \mathbb{N}$, $v_0 \in V$, $z_k \in \langle X \rangle$ и $\deg z_k < n$; $\sum\limits_{\gamma(z_k)=z} v_k \in V$ для любых $\gamma \in \Gamma$ и $z \in \langle X \rangle$; $f_l \in R[X]$, $x_l, y_l \in X$ и $\sum\limits_{l=1}^{s} |\varphi(x_l) - \varphi(y_l)| < \varepsilon$ для любого $\varphi \in \Phi$; при этом элемент g равен нулю или сумме одночленов из $R[X]$ степени, большей или равной n.

В [5] показывается, что совокупность таким образом определённых множеств $U(V, \Phi, n, \varepsilon)$ образует базис окрестностей нуля для некоторой отделимой кольцевой топологией $\mathcal{T}$ кольца $R[X]$, такой что $\mathcal{T}|_R = \mathcal{T}_0$ и $\mathcal{T}|_X = \mathcal{T}_1$.

Определение 10 [2]. Радикал ζ, определённый в классе $\mathcal{K}$ топологических колец, называется *топологически наднильпотентным радикалом*, если все Σ-нильпотентные топологические кольца из $\mathcal{K}$ являются радикальными.

Теорема 10. *Пусть X — вполне регулярное топологическое пространство, ζ — топологически наднильпотентный радикал в классе топологических колец $\mathcal{K}$. Пусть топологические кольца R и $(R[X], \mathcal{T})$ принадлежат этому классу. Тогда $\zeta(R[X]) = \zeta(R) + S$, где $S = \{f \in R[X] \colon \deg f \geqslant 1\}$.*

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 14. *Для любого топологического кольца R и вполне регулярного топологического пространства X множество $S(R[X]) = \{f \in R[X] \colon \deg f \geqslant 1\}$ является замкнутым Σ-нильпотентным идеалом в $(R[X], \mathcal{T})$.*

Доказательство. Заметим, что если $f \in S^n$, то $\deg f \geqslant n$. Следовательно, для любых V, Φ, ε и $m \geqslant n$ имеем $S^n \subseteq U(V, \Phi, m, \varepsilon)$. □

Доказательство теоремы 10. Из леммы 14 следует, что $\zeta(R[X]) \supseteq S$. Так как $\mathcal{T}|_R = \mathcal{T}_0$, то $\zeta(R) \subseteq \zeta(R[X])$. Итак, $\zeta(R[X]) \supseteq \zeta(R) + S$.

Докажем обратное включение. Любой элемент f из $R[X]$ можно представить в виде суммы таких элементов f_0 и h из $R[X]$, что $\deg f_0 = 0$, $\deg h \geqslant 1$. Рассмотрим гомоморфизм φ из $R[X]$ в R, который каждому элементу f из $R[X]$ ставит в соответствие его свободный член f_0. Для любых допустимых V, Φ, ε и n выполняется $\varphi\bigl(U(V, \Phi, n, \varepsilon)\bigr) = V$. Поэтому гомоморфизм φ непрерывен. Таким образом, $\varphi\bigl(\zeta(R[X])\bigr) \subseteq \zeta\bigl(\varphi(R[X])\bigr)$, т. е. если $f \in \zeta(R[X])$, то $f_0 \in \zeta\bigl(\varphi(R[X])\bigr) = \zeta(R)$. Следовательно, $\zeta(R[X]) \subseteq \zeta(R) + S$. □

По теореме 4 топологический радикал Джекобсона является топологически наднильпотентным радикалом.

Следствие 4. *Если R — топологическое кольцо и X — некоторое вполне регулярное топологическое пространство, а $R[X]$ — соответствующее топологическое кольцо многочленов, то*

$$\operatorname{top} J(R[X]) = \operatorname{top} J(R) + \{f \in R[x] \colon \deg f \geqslant 1\}.$$

Литература

[1] Арнаутов В. И. Топологический радикал Бэра и разложение кольца // Сиб. мат. журн. — 1964. — Т. 5, № 6. — С. 1209—1227.

[2] Арнаутов В. И. Общая теория радикалов топологических колец // Изв. АН РМ. — 1996. — № 2 (21). — С. 5—45.

[3] Арнаутов В. И., Водинчар М. И. Радикалы топологических колец // Мат. исследования. — 1968. — Т. 3, вып. 2. — С. 31—61.

[4] Арнаутов В. И., Водинчар М. И., Главацкий С. Т., Михалёв А. В. Конструкции топологических колец. — Кишинёв: Штиинца, 1988.

[5] Арнаутов В. И., Михалёв А. В. Топологии кольца многочленов и топологический аналог теоремы Гильберта о базисе // Мат. сб. — 1981. — Т. 116 (158), № 4 (12). — С. 467—482.

[6] Урсул М. И. Веддербарновское разложение монокомпактных колец // Мат. исследования. — 1978. — Вып. 48. — С. 134—145.

[7] Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[8] Kaplansky I. Topological rings // Amer. J. Math. — 1947. — Vol. 69. — P. 153—183.

[9] Leptin H. Linear kompakte Moduln und Ringe // Math. Z. — 1955. — Bd. 62. — S. 241—267.

[10] Weiss E. Boundedness in topological rings // Pacific J. Math. — 1956. — No. 1. — P. 149—158.

[11] Yood B. Closed prime ideals in topological rings // Proc. London Math. Soc. — 1972. — Vol. 24. — P. 307—323.