Плоские модули и поведение стандартного базиса при расширении основного кольца

Е. С. ГОЛОД
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: golod@mech.math.msu.su

УДК 512.552

Ключевые слова: полиномиальный идеал, базис Грёбнера, плоское расширение, плоский модуль, фильтрованный модуль, стандартный базис.

Аннотация

Свойство системы порождающих полиномиального идеала или идеала в свободной ассоциативной алгебре над коммутативным кольцом быть его базисом Грёбнера сохраняется при плоском (но не при произвольном) расширении основного кольца. В более широком контексте стандартных базисов для фильтрованных модулей доказывается справедливость и обратного утверждения.

Abstract

E. S. Golod, Flat modules and the behavior of a standard basis relative to an extension of the ground ring, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 69—72.

The property of a generating set of a polynomial ideal or of an ideal of a free associative algebra over a commutative ring to be its Gröbner basis is kept by a flat (but not any) extension of the ground ring. The converse is proved in the broader context of standard bases for filtered modules.

Пусть $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ — кольцо многочленов над полем k и $k \subset K$ — расширение полей. Хорошо известно (и очевидно), что базис Грёбнера идеала I в R остаётся базисом Грёбнера расширенного идеала KI в $S = K[x_1, \ldots, x_n]$. Естественный вопрос: в какой мере это верно, если вместо колец многочленов над полями рассматриваются базисы Грёбнера идеалов в кольцах многочленов над произвольными коммутативными кольцами. Следующий простой пример показывает, что утверждение верно не для любых расширений колец.

Пусть $K = F[x, y]$ — кольцо многочленов от двух переменных x, y над полем F, $k = F[u, v]$ — подкольцо в K, порождённое над F алгебраически независимыми элементами $u = x^2$ и $v = xy$, и $I = (f_1, f_2)$ — идеал в $R = k[X_1, X_2]$, порождённый многочленами $f_1 = uX_1 + 1$ и $f_2 = vX_2 + 1$. Тогда f_1, f_2 образуют базис Грёбнера идеала I (относительно любого мономиального порядка), так как между их старшими членами uX_1, vX_2 нет нетривиальных соотношений.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 8, с. 69—72.

Но $\{f_1, f_2\}$ не является базисом Грёбнера расширенного идеала KI, так как $yX_2f_1 - xX_1f_2 = yX_2 - xX_1$ и старший член (yX_2 или $-xX_1$ в зависимости от мономиального порядка) не содержится в мономиальном идеале, порождённом x^2X_1 и xyX_2.

Однако имеет место следующее утверждение.

Предложение 1. *Если $k \subset K$ — плоское расширение коммутативных колец, то базис Грёбнера любого идеала I в R остаётся базисом Грёбнера расширенного идеала KI в S (относительно того же мономиального порядка).*

Доказательство. Пусть I порождается многочленами f_α, $\alpha \in A$. Условие, что $\{f_\alpha\}$ — базис Грёбнера для I (соответственно для KI), равносильно тому, что все однородные (в смысле мономиальной градуировки) соотношения над R (соответственно над S) между старшими членами $w(f_\alpha) = r_\alpha m_\alpha$, где m_α — мономы, $r_\alpha \in k$ (или, достаточно, соотношения из некоторой системы однородных порождающих модуля соотношений), поднимаются до соотношений между f_α [2]. Эти соотношения сводятся к соотношениям над k (соответственно над K) между коэффициентами r_α. Так как расширение $k \subset K$ плоское, то модуль соотношений между r_α над K порождается соотношениями над k. Согласно сказанному выше, из этого следует, что если $\{f_\alpha\}$ — базис Грёбнера в R, то это множество остаётся базисом Грёбнера и в S. $\square$

Является ли условие, что расширение $k \subset K$ плоское, необходимым в предложении 1? Ответ на этот вопрос автору не известен. Однако если рассматривать аналогичный вопрос в более широком контексте стандартных базисов для фильтрованных модулей [1], то ответ на него положительный, что будет показано ниже.

Далее все рассматриваемые кольца и алгебры предполагаются ассоциативными и имеющими единицу, а все модули левыми и унитарными. Как и в [1], рассматриваем упорядоченную полугруппу Γ (с единицей e) с условием минимальности, упорядоченный Γ-полигон δ с условием минимальности, Γ-фильтрованную алгебру R над коммутативным кольцом k и Δ-фильтрованный R-модуль M с исчерпывающими возрастающими фильтрациями $\{F_\gamma R,\ \gamma \in \Gamma\}$ и $\{F_\delta M,\ \delta \in \Delta\}$ соответственно, а также ассоциированные градуированные объекты: Γ-градуированную k-алгебру $\bar{R} = \bigoplus\limits_\gamma \bar{R}_\gamma$, где $\bar{R}_\gamma = F_\gamma R / \bigcup\limits_{\gamma' < \gamma} F_{\gamma'} R$ (предполагаем, что единица кольца R содержится в $F_e R$, так что $\bar{R}$ — кольцо с единицей), и Δ-градуированный $\bar{R}$-модуль $\bar{M} = \bigoplus\limits_\delta \bar{M}_\delta$. Система порождающих $\{f_\alpha,\ \alpha \in A\}$ R-модуля M называется стандартным базисом, если их старшие члены $w(f_\alpha)$ порождают $\bar{R}$-модуль $\bar{M}$. Если N — подмодуль в $\bar{M}$, то под его стандартным базисом понимается стандартный базис N как фильтрованного R-модуля с индуцированной фильтрацией $F_\delta N = N \cap F_\delta M$ (это, очевидно, согласуется с обычным определением стандартного базиса подмодуля).

Пусть теперь K — некоторая k-алгебра. Введём обозначения $\tilde{R} = K \otimes_k R$, $\tilde{M} = K \otimes_k M$ и будем рассматривать $\tilde{R}$ и $\tilde{M}$ как Γ-фильтрованную алгебру и Δ-фильтрованный $\tilde{R}$-модуль с фильтрациями $\{F_\gamma \tilde{R}\}$ и $\{F_\delta \tilde{M}\}$ соответственно, где $F_\gamma \tilde{R}$ — естественный образ $K \otimes_k F_\gamma R$ в $\tilde{R}$ и аналогично $F_\gamma \tilde{M}$ — образ $K \otimes_k F_\gamma M$ в $\tilde{M}$. Если N — подмодуль в M, то обозначим через $\tilde{N}$ естественный образ $K \otimes_k N$ в $\tilde{M}$. Будем говорить, что расширение $k \subset K$ сохраняет стандартный базис $\{f_\alpha,\ \alpha \in A\}$ подмодуля N, если образы элементов f_α при композиции отображений $N \to K \otimes_k N \to \tilde{N}$ образуют стандартный базис подмодуля $\tilde{N}$ в $\tilde{M}$. Ниже мы заметим, что это свойство не зависит от выбора стандартного базиса в N.

Предыдущую ситуацию можно несколько обобщить, рассматривая не k-алгебру K, а просто k-модуль K. В этом случае рассматриваем $\tilde{M} = K \otimes_k M$ как фильтрованный R-модуль и говорим, что стандартный базис $\{f_\alpha\}$ подмодуля N сохраняется в $\tilde{N}$, если образы в $\tilde{N}$ всех элементов $r \otimes f_\alpha$, $\alpha \in A$, $r \in K$, образуют стандартный базис для $\tilde{N}$ (в случае когда K — k-алгебра, это определение совпадает с прежним).

Предложение 2. *Пусть K — фиксированный k-модуль. Тогда для любых* Γ, Δ, *R, M и N как выше стандартный базис в N сохраняется в $\tilde{N}$, если и только если k-модуль K плоский.*

Для доказательства потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть S — произвольное кольцо и P — правый S-модуль. Для левого S-модуля Q и его подмодуля Q' через $\tilde{Q}'$ обозначаем образ естественного отображения $P \otimes Q' \to P \otimes Q = \tilde{Q}$. P является плоским S-модулем, если и только если для любого левого S-модуля Q и любых его подмодулей Q_1 и Q_2 выполняется равенство*

$$\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2 = \widetilde{Q_1 \cap Q_2}. \tag{1}$$

Доказательство. Утверждение «только если» хорошо известно. Покажем, что если (1) выполняется, то модуль P плоский. Допустим, что P не является плоским, так что имеются левый S-модуль A и его подмодуль B, для которых естественное отображение $P \otimes_S B \to P \otimes_S A$ имеет ненулевое ядро C. Положим

$$Q = B \oplus A, \quad Q_1 = \{(b,0) \in Q \mid b \in B\}, \quad Q_2 = \{(b,b) \in Q \mid b \in B\}.$$

Тогда

$$\tilde{Q} = P \otimes_S B \oplus P \otimes_S A,$$

$$\tilde{Q}_1 = \{(x,0) \in \tilde{Q} \mid x \in P \otimes_S B\}, \quad \tilde{Q}_2 = \{(x,\tilde{x}) \in \tilde{Q} \mid x \in P \otimes_S B\},$$

где $\tilde{x}$ — образ x при естественном отображении $P \otimes_S B \to P \otimes_S A$, и

$$\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2 = \{(x,0) \in \tilde{Q} \mid x \in C\} \neq \{0\}$$

хотя $Q_1 \cap Q_2 = \{0\}$. □

Доказательство предложения 2. Условие, что стандартный базис в N сохраняется в $\tilde{N}$, означает, что для всякого $\delta \in \Delta$ естественное отображение $K \otimes_k \bar{N}_\delta \to \tilde{N}_\delta$ сюръективно (в частности, оно не зависит от выбора стандартного базиса в N). Если модуль K плоский, то это верно, так как в этом случае образ $K \otimes_k (N \cap F_\delta M)$ в $\tilde{M}$ совпадает с $\tilde{N} \cap F_\delta \tilde{M} = F_\delta \tilde{N}$ (на самом деле в этом случае градуированные модули $K \otimes \bar{N}$ и $\bar{\tilde{N}}$ изоморфны).

Если же K не является плоским, то согласно лемме имеются k-модуль Q и подмодули Q_1, Q_2 в Q, такие что $\widetilde{Q_1 \cap Q_2} \subsetneq \tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$. Положим $\Gamma = \Delta = N_0$, $R = k$, $M = Q$, $F_i R = R$ для всех $i \in N_0$, $F_0 M = Q_1$, $F_i M = M$ для всех $i > 0$, $N = Q_2$. Образ $K \otimes_k \bar{N}_0 = K \otimes_k (Q_2 \cap Q_1)$ строго меньше, чем $\bar{\tilde{N}}_0 = \tilde{Q}_2 \cap \tilde{Q}_1$, так что стандартный базис не сохраняется. □

Работа выполнена при поддержке РФФИ.

Литература

[1] Голод Е. С. Дистрибутивность, бинарные соотношения и стандартные базисы // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 3. — С. 127—134.

[2] Golod E. S. Standard bases and homology // Algebra: Some Current Trends. Proc. of the 5th Nacional School in Algebra held in Varna, Bulgaria, Sept. 24 — Oct. 4, 1986 / Eds. L. L. Avramov, K. B. Tchakerian. — Berlin: Springer, 1988. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1352). — P. 105—110.