

Барьеры Гибсона для проблемы Поля*

Г. ДОЛИНАР

Университет Любляны, Словения
e-mail: gregor.dolinar@fe.uni-lj.si

А. Э. ГУТЕРМАН

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: guterman@list.ru

Б. КУЗЬМА

Приморский университет, Копер,
Институт математики, физики и механики, Любляна, Словения
e-mail: bojan.kuzma@pef.upr.si

УДК 512.643

Ключевые слова: перманент, определитель, отображения матриц.

Аннотация

Мы исследуем нижнюю границу для числа ненулевых элементов $(0, 1)$ -матриц, перманент которых конвертируется в определитель посредством дописывания знаков $\pm$ к элементам матрицы.

Abstract

G. Dolinar, A. E. Guterman, B. Kuzma, On the Gibson barrier for the Pólya problem, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 73–86.

We study lower bounds on the number of nonzero entries in $(0, 1)$ matrices such that the permanent is always convertible to the determinant by placing $\pm$ signs on matrix entries.

*Александр Васильевичу Михалёву
с восхищением и благодарностью*

1. Введение

Перманент и определитель $(n \times n)$ -матрицы $A = (a_{ij})$ с вещественными элементами a_{ij} определяются следующим образом:

$$\text{per } A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}, \quad \det A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}.$$

*Работа частично поддержана совместным российско-словенским грантом BI-RU/10-11-010. Работа второго автора поддержана грантами МД-2535.2009.1 и РФФИ 09-01-00303.

Здесь $\mathfrak{S}_n$ обозначает симметрическую группу на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Величина $\text{sgn}(\sigma) \in \{-1, 1\}$ задаёт знак перестановки σ : $\text{sgn}(\sigma) = 1$, если σ является чётной перестановкой, и $\text{sgn}(\sigma) = -1$, если σ является нечётной перестановкой.

Отметим, что формула, определяющая перманент, похожа на формулу, определяющую детерминант, и даже выглядит несколько проще. Однако известно, что существует полиномиальный алгоритм вычисления определителя, в то время как вычисление перманента является $\#P$ -полной задачей (см. известную работу Л. Г. Вэлианта [12]). Этот парадокс можно объяснить существованием целого ряда преобразований из алгоритма Гаусса, которые не меняют значение определителя и могут быть использованы для его вычисления, в то время как существует сравнительно мало преобразований, сохраняющих перманент (см. [7]). Сравнивая определения детерминанта и перманента, Д. Поля [10] в 1913 году поставил следующий вопрос: возможно ли заменить вычисление перманента вычислением детерминанта. В частности, можно ли изменить знаки при некоторых элементах заданной матрицы $A = (a_{ij})$, чтобы получить новую матрицу $B = (b_{ij})$, так, что все соответствующие слагаемые $\text{per } A$ и $\det B$ будут совпадать, т. е.

$$\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} = \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n b_{i\sigma(i)}$$

для всех $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Если такое совпадение возможно, то получаем, что $\text{per } A = \det B$.

Например, рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \text{per } A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ &+ a_{13}a_{21}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31} = 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 4, \end{aligned}$$

и для матрицы

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

получаем, что

$$\begin{aligned} \det B &= b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{12}b_{23}b_{31} + \\ &+ b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{22}b_{31} = 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 = 4, \end{aligned}$$

т. е. $\text{per } A = \det B$.

Для $n = 2$ Д. Поля предложил рассмотреть матрицу

$$B = B(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

которая всегда отвечает на поставленный вопрос, так как $\text{per } A = \det B$. Как было доказано Г. Сегё [11], для произвольного $n \geq 3$ всегда существуют $(n \times n)$ -матрицы, для которых подход, предложенный Д. Полия, не работает. Таким образом, возникает естественный вопрос: когда метод Полия может быть использован для вычисления перманента данной матрицы? Этот вопрос известен как проблема Полия о перманенте (см. [8, 13]).

Выясняется, что проблема Полия о перманенте алгоритмически эквивалентна целому ряду известных алгебраических проблем. Приведём формулировки нескольких наиболее важных проблем, относящихся к комбинаторной теории матриц.

Знаково-невырожденные матрицы. Матрица A называется *знаково-невырожденной*, если любая матрица с таким же, как в матрице A , расположением положительных, отрицательных и нулевых элементов является невырожденной. Согласно [8] проблема проверки того, что заданная матрица является знаково-невырожденной, алгоритмически эквивалентна решению вопроса о применимости подхода Полия для вычисления перманента.

Знаково-разрешимые матрицы. Пусть S — $(n \times n)$ -матрица и t — некоторый вектор длины n , элементы которых принадлежат множеству $\{+, -, 0\}$. Знаковая система $Sx = t$ — это множество всех матричных уравнений $Ax = b$, где матрица A имеет вещественные коэффициенты, причём её положительные элементы находятся на тех же позициях, что и элементы «+» в матрице S , а отрицательные и нулевые элементы матрицы A находятся на тех же позициях, что и соответственно элементы «-» и 0 в матрице S . Пусть аналогичное утверждение справедливо для векторов b и t . Система $Sx = t$ называется *знаково-разрешимой*, если все соответствующие матричные уравнения $Ax = b$ обладают единственным решением и решения каждой из этих систем имеют единую знаковую схему, т. е. их положительные, отрицательные и нулевые элементы находятся на одинаковых позициях. Как было установлено, для характеристики знаково-разрешимых знаковых систем необходима характеристика знаково-невырожденных матриц (см. [1, 5]). Как следствие, проблема проверки факта, что данная система является знаково-разрешимой, также оказалась эквивалентной проблеме Полия о перманенте.

Пфаффиановая ориентация. Ориентация графа G называется *пфаффиановой*, если G обладает по крайней мере одним совершенным паросочетанием и в каждый альтернированный цикл C в G входит нечётное число рёбер, ориентированных в одном направлении в C , и нечётное число рёбер, ориентированных в противоположную сторону. В [6] Ч. Литтл доказал, что двудольный граф допускает пфаффианову ориентацию тогда и только тогда, когда он не содержит граф $K_{3,3}$. Проблема определения того, допускает ли данный двудольный граф пфаффианову ориентацию (т. е. содержит ли он граф $K_{3,3}$), также алгоритмически эквивалентна проблеме Полия о перманенте (см. [13]).

Существование чётного цикла. Завершим перечисление известной *проблемой существования чётного цикла*, которая состоит в определении того, отсутствуют ли в данном ориентированном графе ориентированные циклы чётной

длины. Данная проблема широко известна в теории графов и тоже алгоритмически эквивалентна проблеме Поля (см. [8]).

Отметим, что имеется более двадцати известных проблем, которые алгоритмически эквивалентны проблеме Поля о перманенте. Подробный обзор по этому вопросу можно найти в работе [8] (см. также её библиографию).

Данная работа посвящена случаю, когда проблема Поля имеет положительное решение. Простые проверки для матриц малых порядков непосредственно демонстрируют, что если для некоторой матрицы A эта проблема допускает положительное решение, то матрица A должна содержать достаточно много нулей. Первый результат, наглядно демонстрирующий, что существует количественный барьер для конвертации, формулируемый в терминах числа нулевых элементов, принадлежит П. М. Гибсону [4]. Для того чтобы сформулировать этот результат, мы введём следующие обозначения.

Пусть $M_n = M_n(\{0, 1\})$ — множество всех $(n \times n)$ -матриц, элементы которых принадлежат множеству $\{0, 1\} \subseteq \mathcal{R}$, где $\mathcal{R}$ — произвольное кольцо характеристики 0. Если $A \in M_n$, то будем говорить, что задана $(0, 1)$ -матрица, и обозначать через $v(A)$ число её ненулевых элементов. Заметим, что $v(A)$ совпадает с суммой всех элементов $(0, 1)$ -матрицы A . Пусть $X \circ A$ обозначает поэлементное произведение матриц X и A .

Определение 1.1. Будем говорить, что матрица $A \in M_n$ *конвертируема*, если существует матрица $X \in M_n(\{-1, 1\})$, такая что $\text{per } A = \det(X \circ A)$.

Следующая матрица, введённая П. М. Гибсоном в [4], потребуется для наших дальнейших рассуждений.

Определение 1.2 (матрица Гибсона). Матрица $T_n = (t_{ij}) \in M_n$ определяется следующим образом:

$$t_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leq i < j < n, \\ 1, & \text{если } i \geq j \text{ или } j = n. \end{cases}$$

Например,

$$T_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема Гибсона о барьере для конвертации имеет следующую формулировку.

Теорема 1.3 [4, с. 474]. Пусть $A \in M_n$ — конвертируемая матрица, у которой $\text{per } A > 0$. Тогда $v(A) \leq \Omega_n := (n^2 + 3n - 2)/2$ и равенство имеет место тогда и только тогда, когда существуют матрицы перестановок $P, Q \in M_n$, такие что $A = PT_nQ$.

Приведённая выше теорема утверждает, что число $\Omega_n = (n^2 + 3n - 2)/2$ является верхним барьером для конвертации, т. е. если $v(A) > \Omega_n$, то матрица A не

является конвертируемой. В экстремальном случае, когда $v(A) = \Omega_n$, конвертируемая матрица единственна с точностью до перестановочной эквивалентности. Позднее много внимания уделялось исследованию вопроса о том, когда конвертируемые $(0, 1)$ -матрицы с не более чем Ω_n единицами являются максимально конвертируемыми, т. е. при замене любого одного элемента 0 на 1 свойство конвертируемости у этих матриц утрачивается (см., например, работу [1] и библиографию в ней). По итогам теоремы Гибсона и последующих исследований естественно возникают следующие вопросы.

Проблема 1. Найти нижний барьер для конвертируемости, т. е. максимальное целое число ω_n , такое что произвольная матрица $A \in M_n$, у которой $v(A) < \omega_n$, заведомо является конвертируемой.

Проблема 2. Пусть $\omega_n \leq v(A) \leq \Omega_n$. Что можно утверждать о конвертируемости матрицы A ?

Относительно нижнего барьера для конвертируемости (проблема 1) ответ $\omega_n = n + 5$, следует из результатов Ч. Литтла [6] (см. также теорему 2.1 настоящей работы). А именно, как уже было упомянуто ранее, Ч. Литтл доказал, что граф допускает пфаффианову ориентацию тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа $K_{3,3}$. Однако пфаффиановая ориентация графа — это в точности конвертируемость соответствующей $(0, 1)$ -матрицы. Если $v(A) \leq n + 5$, то соответствующий граф не может содержать $K_{3,3}$. Более того, если $v(A) = n + 6$, то граф содержит $K_{3,3}$ только в случае $A = P(J_3 \oplus I_{n-3})Q$, где P и Q — перестановочные матрицы, а J_3 — (3×3) -матрица, состоящая из всех единиц (см. также теорему 2.3 настоящей работы). Однако отметим, что теорема Литтла имеет длинное трудное доказательство, основанное на теории графов. Кроме того, факт эквивалентности существования пфаффиановой ориентации и существования конвертации является глубокой теоремой комбинаторики (см. [2, гл. 6.4]). В настоящей заметке получено короткое доказательство этой теоремы о нижнем барьере. Отметим также, что приведённое здесь доказательство не использует связей с теорией графов, и, таким образом, нам удалось найти чисто матричное доказательство этих матричных результатов.

Раздел 2 настоящей работы посвящён проблеме 1 для пространства M_n . В ней также охарактеризованы все неконвертируемые матрицы с наименьшим возможным числом ненулевых элементов, т. е. $n + 6$. В разделе 3 мы решаем проблему 2.

2. О проблеме 1

Теорема 2.1. Пусть $n \geq 2$, $A \in M_n(\{0, 1\})$ и $v(A) \leq n + 5$. Тогда матрица A конвертируема.

Доказательство. Докажем этот результат по индукции. Пусть $n > 5$. Тогда условие $v(A) \leq n + 5$ позволяет заключить, что A содержит строку и столбец с не более чем одним элементом, равным 1. Заметим, что если A содержит нулевую строку или нулевой столбец, то $\text{per}(A) = \det(A) = 0$. Иначе утверждение

получается по индукции с применением разложения Лапласа, что будет сделано в конце доказательства. Однако если $n \leq 5$, нам потребуется рассмотреть несколько дополнительных случаев. Таким образом, база индукции соответствует случаям $n = 2, 3, 4, 5$, с разбора которых мы и начнём наше доказательство.

Случай $n = 2$. Произвольная матрица из $M_2(\{0, 1\})$ является конвертируемой в силу результата Полия.

Случай $n = 3$. Имеем $v(A) \leq 8$. В этом случае после подходящей перестановки строк и столбцов можно считать, что матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

где $a_{ij} \in \{0, 1\}$. Тогда для матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

получим $\text{per}(A) = \det(X \circ A)$.

Случай $n = 4$. Если матрица A содержит нулевую строку или нулевой столбец, то $\text{per}(A) = \det(A) = 0$. Если существует строка или столбец в матрице A , содержащие только один элемент, равный 1, скажем на (k, l) -м месте, то, используя разложение Лапласа по этой строке или столбцу, получаем равенства $\text{per}(A) = \text{per}(A')$ и $\det(X \circ A) = \det(X' \circ A')$ для произвольной матрицы $X = (x_{ij})$, $x_{kl} = (-1)^{k+l}$. Здесь X' обозначает (3×3) -подматрицу (4×4) -матрицы X , полученную из X удалением k -й строки и l -го столбца. Так как $v(A') \leq v(A) - 1 \leq 8$, по доказанному в случае $n = 3$ матрица A' является конвертируемой. Таким образом, матрица A конвертируема.

Остаётся рассмотреть случай, когда каждая строка и каждый столбец матрицы A содержат в точности два ненулевых элемента, и случай, когда некоторые строка и столбец содержат три ненулевых элемента, а все остальные содержат по два ненулевых элемента.

Начнём с первого случая. Так как первая строка содержит два ненулевых элемента, то мы можем переставить столбцы матрицы A таким образом, что $a_{11} = a_{12} = 1$ и $a_{13} = a_{14} = 0$. Заметим, что в первом столбце содержится также некоторый другой ненулевой элемент. Переставляя, если это потребуется, строки, без ограничения общности можно предполагать, что $a_{21} = 1$. Кроме того, если $a_{22} = 1$, то $a_{31} = a_{41} = a_{32} = a_{42} = 0$ и $a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = 0$, а значит, матрица A является блочно-диагональной и поэтому конвертируема как прямая сумма конвертируемых матриц. Если $a_{22} = 0$ то с точностью до перестановки третьего и четвёртого столбцов мы можем предполагать, что $a_{23} = 1$. Аналогично, переставляя, если потребуется, третью и четвёртую строки, мы можем предполагать, что $a_{32} = 1$. Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и, если рассмотреть матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем, что матрица A является конвертируемой.

Следовательно, при $n = 4$ достаточно рассмотреть случай, когда A содержит три ненулевых элемента в одной строке и не содержит строк и столбцов с менее чем двумя ненулевыми элементами. Заметим, что в этом случае существует также столбец с тремя ненулевыми элементами. Непосредственно проверяется, что с точностью до перестановки строк и столбцов матрица A имеет один из следующих видов:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для этих матриц рассмотрим

$$X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\text{per}(A_i) = \det(X_i \circ A_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Случай $n = 5$. Как и в предыдущем случае, если матрица A содержит нулевую строку или столбец, то $\text{per}(A) = \det(A)$, и утверждение доказано. Если матрица A содержит строку или столбец с одним ненулевым элементом, то утверждение следует из случая $n = 4$ с использованием разложения Лапласа по соответствующей строке или столбцу. Если каждая строка или столбец матрицы A содержит по крайней мере два ненулевых элемента, то, так как $v(A) \leq 5 + 5 = 10$, каждая строка и столбец матрицы A содержат в точности два ненулевых элемента. С точностью до перестановки столбцов можно предполагать, что $a_{11} = a_{12} = 1$. Тогда с точностью до перестановки строк $a_{21} = 1$. Если $a_{22} = 1$, то, так как больше не остаётся ненулевых элементов в первых двух строках и столбцах, матрица A является блочно-диагональной, и утверждение следует из предыдущих случаев. Если $a_{22} = 0$, то с точностью до перестановки последних трёх столбцов $a_{23} = 1$. Переставляя, если это необходимо, последние три строки, можно предполагать, что $a_{32} = 1$. Кроме

того, с точностью до перестановки последних двух строк мы можем предположить, что $a_{43} = 1$. Следовательно, для матрицы A возможна лишь следующая ситуация:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этом случае мы возьмём матрицу

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

для которой $\text{per}(A) = \det(X \circ A)$.

Случай $n > 5$. Используя индукцию, предположим, что для всех матриц порядка меньше n утверждение является справедливым. Если матрица A содержит нулевую строку или нулевой столбец, то утверждение тривиально. Предположим, что матрица A не содержит ни нулевой строки, ни нулевого столбца. Так как $v(A) \leq n + 5$ и $n > 5$, то существует строка матрицы A , скажем i -я, в которой есть только один ненулевой элемент. Применим разложение Лапласа по этой строке. Тогда мы получим матрицу размера $n - 1$, содержащую на один ненулевой элемент меньше, чем матрица A . Для такой матрицы справедливо предположение индукции, что завершает наше доказательство. $\square$

Пример 2.2. Для каждого $n \geq 3$ существуют неконвертируемые матрицы, для которых $v(A) = n + 6$. Рассмотрим матрицу $I_{n-3} \oplus J_3$, где J_3 — (3×3) -матрица, состоящая из одних единиц. Матрица J_3 не является конвертируемой по теореме Гибсона (см. теорему 1.3), так как $v(J_3) = 9 > (3^2 + 3 \cdot 3 - 2)/2$.

Следующая теорема даёт характеристику множества неконвертируемых матриц с наименьшим возможным числом $(n + 6)$ ненулевых элементов.

Теорема 2.3. Пусть $n \geq 3$. Предположим также, что матрица $A \in M_n$ удовлетворяет условию $v(A) = n + 6$. Тогда матрица A не является конвертируемой в том и только том случае, когда существуют такие матрицы перестановок P и Q , что $PAQ = I_{n-3} \oplus J_3$.

Доказательство. Перечислим все $(n \times n)$ -матрицы для $3 \leq n \leq 6$, имеющие по крайней мере два ненулевых коэффициента в каждой строке и каждом столбце. Для матриц, которые не являются блочно-диагональными и отличаются от J_3 , мы покажем их конвертируемость. Заметим, что матрица J_3 не является конвертируемой по теореме Гибсона (см. теорему 1.3).

Случай $n = 3$. (3×3) -матрицы с $n + 6$ единицами исчерпываются матрицей J_3 .

Случай $n = 4$. Имеем $v(A) = 10$. Предположим вначале, что A содержит строку с четырьмя единицами. Тогда с точностью до перестановки строк можно

предположить, что это первая строка. Поэтому любая другая строка содержит ровно две единицы. С точностью до перестановки столбцов мы можем предположить, что $a_{21} = 1$ и $a_{22} = 1$. Тогда $a_{23} = a_{34} = 0$. Непосредственная проверка показывает, что с точностью до перестановки столбцов и строк возможны следующие варианты:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для реализации конвертации в этих случаях необходимы следующие матрицы X :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь нужно рассмотреть случай, когда две строки матрицы A содержат по три единицы и две её строки содержат по две единицы. Учитывая возможную перестановку строк и столбцов и исключая случаи, которые можно получить из предыдущих посредством транспонирования, приходим к следующим возможностям для матрицы A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перманент в каждом из этих случаев конвертируем в определитель посредством приписывания знаков $\pm$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 5$. Имеем $v(A) = 11$ и можем предположить, что имеются три единицы в первой строке и по две единицы в каждой из следующих строк.

Каждая из таких (5×5) -матриц эквивалентна, с точностью до перестановок, блочно-диагональной матрице или одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Каждая из этих матриц конвертируется добавлением знаков $\pm$ следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Случай $n = 6$. Имеем $v(A) = 12$, т. е. матрица A содержит в точности по два ненулевых элемента в каждой строке и каждом столбце. Поскольку мы ищем матрицу A , не являющуюся блочно-диагональной, мы легко находим, что с точностью до перестановок строк и столбцов существует единственная возможность:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, например, можно рассмотреть

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если матрица A содержит нулевую строку, то $\det A = \text{per } A = 0$ и матрица A конвертируема. Если в каждой строке матрицы A содержатся по крайней мере два ненулевых элемента, то $2n \leq v(A) = n + 6$ влечёт $n \leq 6$. Если $n = 3$, то $A = J_3$, и утверждение доказано. Рассмотрим случаи $4 \leq n \leq 6$. Тогда матрица A перестановочно-эквивалентна либо одной из матриц, рассмотренных выше, либо блочно-диагональной матрице. Так как по предположению каждая строка матрицы A содержит по крайней мере два ненулевых элемента и $v(A) = n + 6$, получаем, что у A нет блоков, равных J_3 . Применение свойства мультипликативности перманента и определителя для рассматриваемых блочно-диагональных матриц позволяет завершить доказательство.

Продолжим доказательство по индукции.

Допустим, теорема справедлива для всех $(k \times k)$ -матриц, у которых $v(A) = k + 6$, $k = 3, \dots, n - 1$. Тогда A является $(n \times n)$ -матрицей, у которой $v(A) = n + 6$. Если у этой матрицы есть нулевая строка или имеется по крайней мере две единицы в каждой строке, то доказываемое утверждение сводится к установленным ранее фактам. Остаётся рассмотреть случай, когда матрица A содержит строку с ровно одним ненулевым элементом, скажем на месте (ij) . Тогда, используя разложение Лапласа по i -й строке, мы получаем, что для $((n-1) \times (n-1))$ -матрицы A' справедливо $v(A') \leq n - 6 - 1 = (n-1) - 6$. Если $v(A') < (n-1) - 6$, то по теореме 2.1 матрица A' является конвертируемой. Однако если $v(A') = (n-1) - 6$, то (ij) -й элемент является единственным ненулевым элементом в j -м столбце. Поэтому с точностью до перестановки $A = A' \oplus E_{11}$, и утверждение верно по предположению индукции. $\square$

3. О проблеме 2

Покажем, что для всех достаточно больших n и произвольного значения параметра r , находящегося между нижним и верхним барьерами, всегда существует пара $(n \times n)$ -матриц A и B , такая что $v(A) = v(B) = r$, однако матрица A конвертируема, а матрица B не является конвертируемой. Отметим в дополнение, что матрицы A и B , обладающие указанными свойствами, можно выбрать симметрическими.

Теорема 3.1. Пусть $n \geq 26$. Тогда для произвольного целого числа r , такого что $\omega_n \leq r \leq \Omega_n$, существуют конвертируемая матрица $A \in M_n$ с ненулевым перманентом и матрица $B \in M_n$, которая не является конвертируемой и

для которой $v(A) = r = v(B)$. Более того, матрицы A и B можно выбрать симметрическими.

Доказательство. Докажем существование матрицы A с указанными свойствами. Рассмотрим матрицу Гибсона T_n . По теореме 1.3 существует такая матрица $X \in M_n(\{-1, 1\})$, что $\text{per } T_n = \det(X \circ T_n)$. Выпишем $T_n = (t_{ij})$ и $X \circ T_n = (\hat{t}_{ij})$, $\hat{t}_{ij} = \pm t_{ij}$ для произвольной пары индексов (ij) . По определению

$$\det(X \circ T_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \prod_i \text{sgn}(\sigma) \hat{t}_{i\sigma(i)}.$$

Так как $\hat{t}_{i\sigma(i)}$ принадлежит множеству $\{-1, 0, 1\}$, получаем, что

$$\prod_i \text{sgn}(\sigma) \hat{t}_{i\sigma(i)} \in \{-1, 0, 1\}.$$

С другой стороны, $\text{per } T_n$ равен числу всех обобщённых диагоналей, не содержащих нулевых элементов. Так как $\text{per } T_n = \det(X \circ T_n)$, получаем, что

$$\prod_i t_{i\sigma(i)} = \prod_i \text{sgn}(\sigma) \hat{t}_{i\sigma(i)}$$

для произвольной перестановки σ . Таким образом, если матрица A получается из матрицы T_n заменой некоторых её ненулевых внедиагональных элементов нулями (т. е. если положить $t_{ij} = 0 = \hat{t}_{ij}$ для некоторой пары индексов (ij)), то $\text{per } A = \det(X \circ A)$. Таким образом мы получаем матрицу A , у которой $v(A) = r$, $\text{per } A > 0$ и $\text{per } A = \det(X \circ A)$.

Теперь для произвольного r , такого что $\omega_n \leq r \leq \Omega_n$, построим неконвертируемую матрицу B , для которой $v(B) = r$. Если $r = n+6$ или $r = (n^2 + 3n - 2)/2$, то, как уже показано, существует матрица B , для которой $v(B) = r$, а значит, B не является конвертируемой (см. теоремы 1.3 и 2.3). Предположим, что $n+7 \leq r \leq (n^2 + 3n - 2)/2 - 1$.

Будем искать матрицу B в виде $\hat{J}_{k_0} \oplus J_{n-k_0}$, где матрица $\hat{J}_{k_0}$ получена из J_{k_0} симметричной заменой некоторых её ненулевых элементов нулями.

1. Рассмотрим отображение $f: k \mapsto (n-k)^2 + k$. Заметим, что f — строго убывающая функция при $k \in [1, n-1]$.

2. Поскольку $n \geq 26 > 6$, получаем $(n-1)^2 + 1 > (n^2 + 3n - 2)/2 - 1$. Таким образом, в силу выбора числа r имеем $(n-1)^2 + 1 > r$.

3. Так как $n+7 > (n-(n-1))^2 + (n-1)$, имеем $r > (n-(n-1))^2 + (n-1)$.

4. Согласно пунктам 2 и 3 существует наименьшее целое число $k = k_0 \in [2, \dots, n-1]$, такое что $(n-k_0)^2 + k_0 \leq r$. Нетрудно убедиться, что предшествующее ему значение k_0-1 удовлетворяет неравенству $r < (n-(k_0-1))^2 + (k_0-1)$.

5. Покажем, что при нашем выборе k_0

$$(n-k_0)^2 + k_0 \leq r < (n-k_0)^2 + k_0^2. \quad (1)$$

Иначе в силу минимальности k_0 получаем, что

$$(n-k_0)^2 + k_0^2 \leq r < (n-(k_0-1))^2 + (k_0-1). \quad (2)$$

Решая соответствующее квадратичное неравенство и учитывая ограничение $k_0 \in [2, \dots, n-1]$, получаем, что (2) эквивалентно

$$2 \leq k_0 \leq \alpha := \frac{1}{2} (\sqrt{8n+1} - 1).$$

Заметим, что $n \geq 26$, т. е. $n > 12$, и следовательно, $\alpha < n-1$.

Так как $n \geq 26$, получаем, что

$$n^2 - n\sqrt{8n+1} + 3n \geq \frac{n^2 + 3n - 2}{2}.$$

Следовательно,

$$(n - k_0)^2 + k_0 \geq (n - \alpha)^2 + \alpha = n^2 - n\sqrt{8n+1} + 3n \geq \frac{n^2 + 3n - 2}{2} > r,$$

где первое неравенство вытекает из пункта 1. Получили противоречие с выбором k_0 .

6. В силу условия (1) существует l , $k_0 \leq l < k_0^2$, такое что $r = (n - k_0)^2 + l$.

7. Определим $B = \hat{J}_{k_0} \oplus J_{n-k_0}$, где матрица $\hat{J}_{k_0}$ получается из J_{k_0} заменой некоторых её ненулевых элементов нулями, при этом элементы побочной диагонали остаются неизменными и $v(\hat{J}_{k_0}) = l$. Указанное возможно, так как $k_0 \leq l < k_0^2$ согласно пункту 6.

8. Заметим, что $v(B) = r$. Также $n - k_0 \geq 3$, иначе $k_0 \geq n - 2$, откуда получаем, что

$$(n - (n - 2))^2 + (n - 2) < (n - (n - 3))^2 + (n - 3) = n + 6 < r.$$

Последнее противоречит минимальности k_0 .

9. Так как матрица B блочно-диагональная, получаем, что

$$\text{per } B = (\text{per } \hat{J}_{k_0})(\text{per } J_{n-k_0}),$$

а также

$$\det(X \circ B) = \det(X_1 \circ \hat{J}_{k_0}) \det(X_2 \circ J_{n-k_0}),$$

где матрицы X_i являются диагональными блоками матрицы X подходящего размера. Так как $n - k_0 \geq 3$, то матрица J_{n-k_0} не является конвертируемой, следовательно, $|\det(X_2 \circ J_{n-k_0})| < \text{per } J_{n-k_0}$. Так как $X_1 \circ \hat{J}_{k_0} \in M_n(\{-1, 0, 1\})$, из определений перманента и детерминанта получаем, что $|\det(X_1 \circ \hat{J}_{k_0})| \leq \text{per } \hat{J}_{k_0}$. Однако $|\det(X \circ B)| < \text{per } B$, значит, матрица B не является конвертируемой. $\square$

Проблема 3. Справедлив ли результат теоремы 3.1 для $n < 26$?

Литература

- [1] Brualdi R. A., Shader B. L. On sign-nonsingular matrices and the conversion of the permanent into the determinant // Applied Geometry and Discrete Mathematics. The

- Victor Klee Festschrift on the Occasion of Professor Klee's 65th Birthday. — Providence: Amer. Math. Soc.; New York: Assoc. Comp. Mach., 1991. — (DIMACS, Ser. Discret. Math. Theor. Comput. Sci.; Vol. 4). — P. 117–134.
- [2] Brualdi R. A., Shader B. L. Matrices of Sign-Solvable Linear Systems. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. — (Cambridge Tracts Math.; Vol. 116).
 - [3] Gibson P. M. An identity between permanents and determinants // Amer. Math. Mon. — 1969. — Vol. 76. — P. 270–271.
 - [4] Gibson P. M. Conversion of the permanent into the determinant // Proc. Amer. Math. Soc. — 1971. — Vol. 27. — P. 471–476.
 - [5] Klee V., Ladner R., Manber R. Signsolvability revisited // Linear Algebra Appl. — 1984. — Vol. 59. — P. 132–157.
 - [6] Little C. H. C. A characterization of convertible $(0, 1)$ -matrices // J. Combin. Theory Ser. B. — 1975. — Vol. 18. — P. 187–208.
 - [7] Marcus M., Minc H. On the relation between the determinant and the permanent // Illinois J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 376–381.
 - [8] McCuaig W. Pólya's permanent problem // Electron. J. Combin. — 2004. — Vol. 11. — R79.
 - [9] Minc H. Permanents. — Addison-Wesley, 1978.
 - [10] Pólya G. Aufgabe 424 // Arch. Math. Phys. Ser. 3. — 1913. — Vol. 20. — P. 271.
 - [11] Szegő G. Lösung zu Aufgabe 424 // Arch. Math. Phys. — 1913. — Vol. 21. — P. 291–292.
 - [12] Valiant L. G. The complexity of computing the permanent // Theor. Comput. Sci. — 1979. — Vol. 8. — P. 189–201.
 - [13] Vazirani V. V., Yannakakis M. Pfaffian orientations, 0-1 permanents, and even cycles in directed graphs // Discrete Appl. Math. — 1989. — Vol. 25. — P. 179–190.