Описание радоновских интегралов как линейных функционалов*

В. К. ЗАХАРОВ, А. В. МИХАЛЁВ, Т. В. РОДИОНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ttwrr@yandex.ru

УДК 517.987.1+517.518.1+517.982.3

Ключевые слова: радоновская мера, радоновский интеграл, радоновская бимера, симметризуемые функции, узкие функционалы, проблема Рисса—Радона.

Аннотация

В статье рассматривается задача характеризации интегралов как линейных функционалов. Она восходит к известному результату Ф. Рисса (1909 г.) об интегральном представлении ограниченных линейных функционалов интегралами Римана—Стилтьеса на отрезке и напрямую связана со знаменитой теоремой И. Радона (1913 г.) об интегральном представлении ограниченных линейных функционалов интегралами Лебега на компакте в $\mathbb{R}^n$. После работ И. Радона, М. Фреше и Ф. Хаусдорфа задача характеризации интегралов как линейных функционалов стала конкретизироваться как задача распространения теоремы Радона с $\mathbb{R}^n$ на более общие топологические пространства с радоновскими мерами. Эта задача оказалась трудной, её решение имеет долгую и богатую историю, поэтому естественно называть её проблемой Рисса—Радона—Фреше характеризации интегралов. Важные этапы решения этой задачи связаны с именами С. Банаха (1937—1938 гг.), С. Сакса (1937—1938 гг.), С. Какутани (1941 г.), П. Халмоша (1950 г.), Э. Хьюитта (1952 г.), Р. Эдвардса (1953 г.), Ю. В. Прохорова (1956 г.), Н. Бурбаки (1969 г.), Х. Кёнига (1995 г.), В. К. Захарова и А. В. Михалёва (1997 г.) и др. Существенные идейные и технические средства были разработаны А. Д. Александровым (1940—1943 гг.), М. Стоуном (1948—1949 гг.), Д. Фремлином (1974 г.) и др. Статья посвящена современному этапу решения этой проблемы, связанному с работами авторов (1997—2009 гг.). Решение проблемы изложено в виде параметрических теорем о характеризации интегралов, из которых непосредственно следуют характеризационные теоремы указанных выше авторов.

Abstract

V. K. Zakharov, A. V. Mikhalev, T. V. Rodionov, Characterization of Radon integrals as linear functionals, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 87—161.

The problem of characterization of integrals as linear functionals is considered in the paper. It takes the origin in the well-known result of F. Riesz (1909) on integral representation of bounded linear functionals by Riemann—Stiltjes integrals on a segment and is directly connected with the famous theorem of J. Radon (1913) on integral representation of bounded linear functionals by Lebesgue integrals on a compact in $\mathbb{R}^n$. After works of J. Radon, M. Fréchet, and F. Hausdorff, the problem of characterization of integrals

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00321) и гранта Президента РФ НШ-3252.2010.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 8, с. 87—161.

as linear functionals has been concretized as the problem of extension of Radon's theorem from $\mathbb{R}^n$ to more general topological spaces with Radon measures. This problem turned out difficult, and its solution has a long and abundant history. Therefore, it may be naturally called the Riesz—Radon—Fréchet problem of characterization of integrals. The important stages of its solving are connected with such eminent mathematicians as S. Banach (1937—38), S. Saks (1937—38), S. Kakutani (1941), P. Halmos (1950), E. Hewitt (1952), R. E. Edwards (1953), Yu. V. Prokhorov (1956), N. Bourbaki (1969), H. König (1995), V. K. Zakharov and A. V. Mikhalev (1997), et al. Essential ideas and technical tools were worked out by A. D. Alexandrov (1940—43), M. N. Stone (1948—49), D. H. Fremlin (1974), et al. The article is devoted to the modern stage of solving this problem connected with the works of the authors (1997—2009). The solution of the problem is presented in the form of the parametric theorems on characterization of integrals. These theorems immediately imply characterization theorems of above-mentioned authors.

Содержание

Введение

Задача характеризации интегралов возникла вместе с появлением интегралов Римана—Стилтьеса (1894 г.).

Пусть v — функция ограниченной вариации на $[a, b]$. Тогда интеграл Римана—Стилтьеса

$$i_v(f) \equiv \int\limits_{[a,b]} f\,dv$$

задаёт линейный функционал i_v на линейном пространстве $C[a, b]$ всех непрерывных функций на $[a, b]$. Таким образом, мы имеем семейство

$$I(C[a, b], \mathrm{BV}[a, b]) \equiv \{i_v|C[a, b] \mid v \in \mathrm{BV}[a, b]\}$$

всех интегралов Римана—Стилтьеса на $C[a, b]$, где $\mathrm{BV}[a, b]$ — линейное пространство функций ограниченной вариации. Данное семейство является собственным линейным подпространством линейного пространства $(C[a, b])^\times$ всех линейных функционалов на $C[a, b]$, т. е.

$$I(C[a, b], \mathrm{BV}[a, b]) \subsetneqq (C[a, b])^\times.$$

Ж. Адамар (1903 г.) [34] и М. Фреше (1904 г.) [30] поставили и решали следующую естественную задачу: охарактеризовать интегралы Римана—Стилтьеса среди всех линейных функционалов на $C[a, b]$ [2, с. 383].

Хорошо известное решение этой задачи было дано Ф. Риссом (1909 г.) [47]:

$$I(C[a, b], \mathrm{BV}[a, b]) = (C[a, b])^\sim,$$

т. е. пространство всех интегралов Римана—Стилтьеса на $C[a, b]$ совпадает с пространством всех линейных ограниченных функционалов на $C[a, b]$.

В [46] И. Радон (1913 г.), комбинируя идеи А. Лебега и Ф. Рисса, ввёл понятие *вполне аддитивных функций множества* $\mu\colon \mathcal{M}_{\lambda^n}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, определённых на σ-алгебре всех множеств из $\mathbb{R}^n$, измеримых относительно меры Лебега λ^n. Обозначим семейство таких функций множеств через $\mathfrak{RF}(\mathbb{R}^n)$.

Для ограниченного множества T из $\mathbb{R}^n$ И. Радон рассмотрел *вполне аддитивные функции множества* $\mu|T$, полученные сужением функций μ на T. Пользуясь конструкцией Лебега интеграла для $\mathbb{R}^n$, он определил интеграл

$$i_{\mu|T} f \equiv \int\limits_T f\,d(\mu|T),$$

задающий линейный функционал на пространстве $C(T)$ всех непрерывных функций на T (см. [2, с. 383]). Семейство

$$I\big(C(T), \mathfrak{RF}(T)\big) \equiv \{i_{\mu|T}|C(T) \mid \mu \in \mathfrak{RF}(\mathbb{R}^n)\}$$

всех интегралов Лебега—Радона на $C(T)$ является, как и ранее, собственным подпространством линейного пространства $C(T)^{\times}$.

В [46] И. Радон доказал следующую теорему:

$$I\big(C(T), \mathfrak{RF}(T)\big) = C(T)^{\sim} \subsetneqq C(T)^{\times}$$

для любого замкнутого ограниченного (компактного) подпространства T в $\mathbb{R}^n$.

«Почти сразу же после выхода в свет мемуара Радона Фреше замечает, что почти все результаты этой работы могут быть распространены на случай, когда «вполне аддитивная функция множества», вместо того чтобы быть определённой для измеримых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$, определена для некоторых подмножеств произвольного множества E (эти подмножества таковы, что операции счётного объединения и разности снова дают множества, для которых функция определена)» [2, с. 383]. «. . . в 1915 г. Фреше определил в (IIa) (см. [31]. — *Авт.*) «абстрактные» меры на множестве, с выделенной в нём σ-алгеброй подмножеств, и интегралы относительно этих мер» [3, с. 581].

В 1914 г. вышла книга Ф. Хаусдорфа «Теория множеств» (см. [24,36]), где были заложены основы теории топологических пространств. И. Радон существенно использовал следующее топологическое свойство вполне аддитивной функции множества $\mu|T$: для каждого $M \in \mathcal{M}|T$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое множество F и открытое множество G, такие что $F \subset M \subset G$ и $\big|\mu|T\big|(G \setminus F) < \varepsilon$. В дальнейшем это свойство было названо свойством *регулярности*, а σ-аддитивные функции множеств (т. е. меры) с этим свойством получили название *радоновских* (см. [1, 7.1; 50, 18.2.1]).

После упомянутых работ И. Радона и М. Фреше задача характеризации интегралов как линейных функционалов стала конкретизироваться как задача распространения теоремы Радона с $\mathbb{R}^n$ на более общие топологические пространства. Эта задача оказалась трудной, её решение имеет долгую и богатую историю, поэтому её естественно называть проблемой Рисса—Радона—Фреше характеризации интегралов.

Первое существенное продвижение в решении этой проблемы связано с именем С. Банаха (1937 г.). Используя введённые М. Фреше вполне аддитивные функции множества (абстрактные меры) и топологическое свойство регулярности, С. Банах обобщил теорему Радона на случай компактного метрического пространства (см. [48, приложение II]); тот же результат получен и С. Саксом [49] (см. [5, гл. IV, п. 16]). В 1941 г. С. Какутани [42] обобщил результат С. Банаха и С. Сакса на произвольное компактное пространство.

Пусть T — компактное топологическое пространство с ансамблями $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{B}$ открытых, замкнутых и борелевских подмножеств соответственно. Ограниченная мера $\mu\colon \mathcal{B} \to [a, b]$ называется *радоновской*, если для каждого $B \in \mathcal{B}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $F \in \mathcal{F}$ и $G \in \mathcal{G}$, что $F \subset B \subset G$ и $|\mu|(G \setminus F) < \varepsilon$

[50, 18.2.1]. Множество всех таких мер обозначим через $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T)$. Заметим, что С. Банах и С. Сакс ограничились метрическим пространством, поскольку на нём всякая борелевская мера оказывается радоновской [1, 7.1.7]. Приведём формулировку теоремы Какутани:

$$I\big(C(T), \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T)\big) = C(T)^{\sim}$$

для любого компактного топологического пространства T.

К сожалению, теорема Какутани не затрагивала самый знаменитый интегральный функционал

$$i_\lambda(f) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}} f\,d\lambda$$

по лебеговой мере λ на всей вещественной оси $\mathbb{R}$. Пространство $\mathbb{R}$ не является компактным, и мера Лебега $\lambda\colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \bar{\mathbb{R}}_+ \equiv [0,\infty]$ не является ограниченной.

Свойства меры Лебега λ послужили отправным пунктом при определении положительной не обязательно ограниченной радоновской меры $\mu\colon \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}(T) \to \bar{\mathbb{R}}_+$ на топологическом пространстве T. Положительная мера $\mu\colon \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ называется *радоновской*, если она конечна на компактных подмножествах T и обладает свойством *компактной регулярности*, т. е.

$$\mu B = \sup\{\mu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset B\}$$

для любого $B \in \mathcal{B}$ (см. [3, гл. X, § 3, п. 2; 32, 73A; 33, 411B, 411H (b)]).

В отличие от $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T)$, семейство $\mathfrak{RM}(T)_0$ всех положительных радоновских мер на T не является линейным пространством, а является только *конусом*, т. е. для любых $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{RM}(T)_0$ и любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ справедливо $r_1\mu_1 + r_2\mu_2 \in \mathfrak{RM}(T)_0$.

Использование только положительных мер даёт возможность рассматривать интегралы не как ограниченные, а как положительные функционалы (функционал φ на семействе функций $X(T)$ называется *положительным*, если из $f \in X(T)$ и $f \geqslant 0$ следует, что $\varphi f \geqslant 0$). Ясно, что любой положительный функционал является ограниченным. Более того, по теореме Рисса—Канторовича любой ограниченный функционал φ является разностью $\varphi_+ - (-\varphi_-)$ двух положительных функционалов $\varphi_+ \equiv \varphi \vee \mathbf{0}$ и $-\varphi_- \equiv (-\varphi) \vee \mathbf{0}$ (см. [4, VIII.2.1; 50, 3.6.5]).

В 1950—1953 гг. П. Халмош [35], Э. Хьюитт [38] и Р. Эдвардс [29] получили следующий результат:

$$I(C_{\mathrm{c}}(T), \mathfrak{RM}(T)_0) = (C_{\mathrm{c}}(T)^{\sim})_+,$$

т. е. конус всех интегралов i_μ по положительным (не обязательно ограниченным) радоновским мерам μ на локально компактном пространстве T совпадает с конусом всех положительных линейных функционалов на пространстве $A(T) = C_{\mathrm{c}}(T)$ всех непрерывных функций на T с компактными носителями. Эта теорема в некоторых изданиях стала называться теоремой Рисса о представлении [39, 12.36].

Отметим, что доказательство этой теоремы не отличалось ничем принципиальным от доказательства теоремы Какутани. Именно по этой причине авторы ограничились случаем локально компактного пространства и положительных мер на нём, а их доказательства оказались непригодными для более общих пространств и более общих мер.

Несущественность продвижения на локально компактные пространства и положительные неограниченные меры породила естественный интерес к обобщению теорем Рисса, Радона, Банаха—Сакса—Какутани, Халмоша—Хьюитта—Эдвардса на более широкий класс топологических пространств и на более широкий класс «радоновских» мер.

Если T — тихоновское (вполне регулярное) пространство, то пространство $C_{\mathrm{c}}(T)$ нельзя использовать, поскольку возможно равенство $C_{\mathrm{c}}(T) = \{\mathbf{0}\}$, при котором $C_{\mathrm{c}}(T)$ не будет разделять радоновские меры (т. е. всем радоновским мерам будет соответствовать один тривиальный нулевой интегральный функционал). В связи с этим можно за основу $A(T)$ взять пространство $C_{\mathrm{b}}(T)$ всех ограниченных непрерывных функций. Но для такого пространства имеет смысл рассматривать только линейное пространство $I\big(C_{\mathrm{b}}(T), \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T)\big)$ интегралов по всем ограниченным радоновским мерам. В этом случае равенство Рисса—Радона уже несправедливо, поскольку

$$I\big(C_{\mathrm{b}}(T), \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T)\big) \subsetneqq C_{\mathrm{b}}(T)^{\sim}.$$

Поэтому нужно искать новое характеристическое свойство радоновских интегралов.

В 1969 г. Н. Бурбаки [3, гл. IX, § 5, п. 2; 27], опираясь на идеи Ю. В. Прохорова [23], возникшие при изучении слабой компактности семейств ограниченных радоновских мер, выделили новое свойство *узкости* и доказали следующую теорему:

$$I\big(C_{\mathrm{b}}(T), \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T)\big) = C_{\mathrm{b}}(T)^{\pi},$$

т. е. пространство всех интегралов по ограниченным радоновским мерам на тихоновском пространстве T совпадает с пространством всех узких линейных ограниченных функционалов на пространстве $C_{\mathrm{b}}(T)$ всех ограниченных непрерывных функций на T. В [32, 73G (e)] эта теорема названа теоремой Прохорова. Отметим, что для компактного пространства T справедливо равенство $C_{\mathrm{b}}(T)^{\pi} = C_{\mathrm{b}}(T)^{\sim}$. Поэтому теорема Н. Бурбаки является естественным обобщением теоремы С. Какутани.

Эта теорема полностью закрыла линию Рисса—Радона—Банаха—Сакса—Какутани по описанию ограниченных радоновских интегралов в виде функционалов на пространстве $C_{\mathrm{b}}(T)$. Однако для неограниченных интегралов на тихоновском пространстве, для ограниченных интегралов на произвольном хаусдорфовом пространстве и тем более для неограниченных интегралов на произвольном хаусдорфовом пространстве описание оставалось неизвестным.

Во-первых, не было ясно, какие неограниченные «радоновские» меры надо рассматривать. Во-вторых, не было ясно, на каком линейном пространстве функций $A(T)$ следует рассматривать все «радоновские» интегралы i_μ. Если пространство T нетихоновское, то пространство $C_\mathrm{b}(T)$ не подходит, поскольку оно может состоять только из постоянных функций и, соответственно, не разделяет радоновские меры. Если же T тихоновское, но меры неограниченные, то $C_\mathrm{b}(T)$ не подходит, поскольку $i_\mu(\mathbf{1}) = \infty$, а пространство $C_\mathrm{c}(T)$ не подходит, поскольку оно может состоять только из нулевой функции. Таким образом, нужно было найти, во-первых, подходящее определение общей радоновской меры, во-вторых, подходящее пространство не обязательно непрерывных функций $X(T)$, заменяющее пространство непрерывных функций $C(T)$, и в-третьих, новое характеристическое свойство радоновских интегралов i_μ на этом пространстве.

В 1970 г. Ф. Топсо [53] и в 1974 г. Д. Фремлин [32, 72E] продвинулись в интегральном представлении линейных поточечно σ-непрерывных положительных функционалов на абстрактных функциональных пространствах $A(T)$.

В [54] Ф. Топсо использовал конус $\mathrm{SC}^\mathrm{u}(T)_0$ положительных полунепрерывных сверху функций. На этом пути Х. Кёниг [43—45] получил конусную версию теоремы Рисса—Радона, т. е. доказал равенство

$$I(\mathrm{SC}^\mathrm{u}_\mathrm{c}(T)_0, \mathfrak{RM}(T)_0) = \big((\mathrm{SC}^\mathrm{u}_\mathrm{c}(T)_0)^\varkappa\big)_+,$$

где $\varkappa$ означает взятие всех конусно-линейных функционалов на конусе $\mathrm{SC}^\mathrm{u}_\mathrm{c}(T)_0$, удовлетворяющих нескольким трудно формулируемым чисто техническим условиям (см. [45, теорема 3.7]). Недостатком такого описания радоновских интегралов является отказ от свойства линейности семейства $A(T)$, присутствовавшего в описаниях Ф. Рисса, И. Радона, С. Банаха, С. Сакса, С. Какутани, П. Халмоша, Э. Хьюитта, Р. Эдвардса, Н. Бурбаки.

Поскольку семейство $\mathrm{SC}^\mathrm{u}(T)$ всех полунепрерывных сверху функций является лишь конусом, а не линейным пространством, В. К. Захаров [6,55], опираясь на работы Ф. Хаусдорфа [37] и В. Серпинского [51], ввёл линейное пространство $\mathrm{S}(T)$ *симметризуемых функций* и доказал, что оно является естественной линейной равномерно полной оболочкой конуса $\mathrm{SC}^\mathrm{u}_\mathrm{b}(T)$ (а значит, и конуса $\mathrm{SC}^\mathrm{l}_\mathrm{b}(T)$ всех ограниченных полунепрерывных снизу функций).

Как было сказано выше, если T — произвольное хаусдорфово пространство, то возможна тривиализация $C_\mathrm{c}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Однако пространство $\mathrm{S}_\mathrm{c}(T)$ всегда нетривиально, поскольку оно разделяет точки из T. Более того, пространство $\mathrm{S}_\mathrm{c}(T)$ *разделяет меры* в том смысле, что разным радоновским мерам μ и ν соответствуют разные интегральные функционалы $i_\mu \equiv \int\limits_T \cdot\, d\mu$ и $i_\nu \equiv \int\limits_T \cdot\, d\nu$ на $\mathrm{S}_\mathrm{c}(T)$. Это означает, что решёточное линейное пространство $\mathrm{S}(T)$ является подходящим для решения общей проблемы Рисса—Радона—Фреше. По-видимому, пространство $\mathrm{S}(T)$ является наиболее узким из всех пространств $X(T)$, подходящих для решения этой проблемы.

После обретения подходящего пространства $\mathrm{S}(T)$ и класса подпространств $A(T) \subset \mathrm{S}(T)$ возникла задача выделения характеристических свойств интегралов $i_\mu|A(T)$. С этой целью в 1997 г. В. К. Захаров и А. В. Михалёв в [12, 13] ввели понятие тонкого функционала. Линейный функционал φ на решёточном линейном пространстве $A(T)$, содержащем $\mathrm{S_c}(T)$, называется *внутренне компактным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой убывающей последовательности множеств $(A_n \in \mathcal{A} \mid n \in \mathbb{N})$, такой что

$$\{\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \mathbb{N},\ C \in \mathcal{C}\} \subset A(T),$$

найдутся $n_0 \in \mathbb{N}$ и $C \in \mathcal{C}$, такие что $C \subset \bigcap(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ и $\varphi\chi(A_{n_0} \setminus C) < \varepsilon$. Поточечно σ-непрерывный и внутренне компактный функционал называется *тонким*. Семейство всех тонких функционалов на $A(T)$ обозначим через $A(T)^\zeta$.

Появление этих новых семейств функций и функционалов позволило получить для произвольного хаусдорфова пространства следующие характеризации радоновских интегралов (В. К. Захаров, А. В. Михалёв [12—15,56]): для любого хаусдорфова пространства T

1) $I(\mathrm{S_c}(T), \mathfrak{RM}(T)_0) = (\mathrm{S_c}(T)^\zeta)_+$,
2) $I\big(\mathrm{S}(T), \mathfrak{RM}_\mathrm{b}(T)\big) = \mathrm{S}(T)^\zeta$,

а возникающие здесь соответствия между мерами и функционалами являются изоморфизмами соответствующих решёточных конусов или пространств.

Таким образом, было найдено решение проблемы Рисса—Радона—Фреше для положительных мер на произвольном хаусдорфовом пространстве. В работах В. К. Захарова и А. В. Михалёва [14, 16, 17] из этих описаний были выведены как следствия предыдущие описания Радона, Банаха—Сакса—Какутани, Халмоша—Хьюитта—Эдвардса и Бурбаки, что продемонстрировало силу и общность этого результата.

Описания, данные Ф. Риссом, И. Радоном, С. Банахом, С. Саксом, С. Какутани, П. Халмошем, Э. Хьюиттом, Р. Эдвардсом и Н. Бурбаки с использованием пространства $C(T)$ непрерывных функций, и описания, данные В. К. Захаровым и А. В. Михалёвым с использованием пространства $\mathrm{S}(T)$ симметризуемых функций, отличаются и по форме и по доказательству. В связи с этим желательно было получить объединяющую параметрическую теорему с функциональным пространством $A(T) \subset \mathrm{S}(T)$ в качестве параметра, из которой все вышеприведённые результаты о линейном радоновском представлении получались бы как непосредственные следствия (частные случаи).

Поскольку пространства $C(T)$ непрерывных функций и $\mathrm{S}(T)$ симметризуемых функций весьма различны, было необходимо выделить некоторые абстрактные свойства параметра $A(T)$, существенные для характеризации семейств интегралов $I\big(A(T), \mathfrak{RM}_\mathrm{b}(T)\big)$ и $I(A(T), \mathfrak{RM}(T)_0)$. Эти свойства огибания (E) и (E_σ) и Дини (D) были выделены в работах [9, 10].

Кроме того, в [9, 10] было введено новое понятие точного функционала, а также общее понятие радоновской меры. Там же приведено краткое (с изложением идей и техники) доказательство следующей параметрической теоремы в положительной биективной версии (см. теорему 5.4).

Теорема А. *Пусть T — хаусдорфово пространство и $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное подпространство универсально интегрируемых функ-*

ций в $\mathrm{S}(T)$, *обладающее свойством* (E_σ) *или свойством* $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. *Тогда* $I(A(T), \mathfrak{RM}(T)_0) = (A(T)^\vartriangle)_+$, *т. е. конус всех интегралов по положительным радоновским мерам совпадает с конусом всех положительных точных линейных функционалов на пространстве* $A(T)$. *Более того, биективное отображение* $L_0\colon \mu \mapsto i_\mu|A(T)$ *из* $\mathfrak{RM}(T)_0$ *на* $(A(T)^\vartriangle)_+$ *сохраняет все линейные и решёточные структуры.*

Поскольку $A(T)^\vartriangle$ является решёточным линейным пространством, возникает задача продолжения биекции $\varphi \mapsto \mu$ из конуса $(A(T)^\vartriangle)_+$ на конус $\mathfrak{RM}(T)_0$ до изоморфизма из пространства $A(T)^\vartriangle$ на некоторое неизвестное решёточное линейное пространство X при сохранении интегрального представления $\varphi f = \int f\,d\mu$.

Для получения изоморфной версии параметрической теоремы были использованы понятия радоновской бимеры $\mathfrak{m}$ и интеграла $i_\mathfrak{m}$ по радоновской бимере $\mathfrak{m}$, введённые в [12, 15]. Совокупность всех радоновских бимер на хаусдорфовом пространстве T обозначим через $\mathfrak{RB}(T)$. В [9,10] была приведена параметрическая теорема в изоморфной версии (см. теорему 5.7).

Теорема B. *В условиях теоремы* A *имеет место равенство* $A(T)^\vartriangle = I\big(A(T), \mathfrak{RB}(T)\big)$. *Более того, биективное отображение* $M\colon \mathfrak{m} \mapsto i_\mathfrak{m}|A(T)$ *из* $\mathfrak{RB}(T)$ *на* $A(T)^\vartriangle$ *является изоморфизмом решёточных линейных пространств.*

Из теорем A и B вытекают как частные случаи все упомянутые выше теоремы о линейном радоновском представлении (см. следствия теорем 5.4 и 5.7).

Связь между теоремами A и B устанавливает следующая теорема (см. теорему 5.6).

Теорема C. *В условиях теоремы* A

1) *решёточное линейное пространство* $\mathfrak{RB}(T)$ *всех радоновских бимер является естественной решёточной линейной оболочкой множества* $\mathfrak{RM}(T)$ *всех радоновских мер в том смысле, что существует инъективное отображение* $E\colon \mathfrak{RM}(T) \rightarrowtail \mathfrak{RB}(T)$, *сохраняющее все линейные и решёточные структуры и такое, что* $E[\mathfrak{RM}(T)_0] = \mathfrak{RB}(T)_+$;
2) *изоморфизм* M *является естественным «продолжением» отображения* L_0 *в том смысле, что* $M \circ E = L_0$.

Эта теорема анонсирована в [20].

Настоящая работа посвящена подробному доказательству теорем A—C.

Отметим, что более полный обзор истории решения задачи характеризации интегралов дан в [19] (см. также [18]).

1. Предварительные сведения

В работе используются понятия и обозначения, принятые в современной теории классов и множеств (см., например, [41]). Отметим, что изложение ведётся в аксиоматике Неймана—Бернайса—Гёделя. Для удобства читателя приведём некоторые необходимые определения.

Переобозначение символа σ как τ обозначается через $\sigma \equiv \tau$ или $\tau \equiv \sigma$. Через $\{t \mid \varphi(t)\}$ обозначается класс, состоящий из таких элементов x, что $\exists\, y\ (x \in y) \wedge \varphi(x)$, т. е. состоящий из множеств, обладающих свойством φ. Наряду с $\{t \mid t \in X \wedge \varphi(t)\}$ пишем также $\{t \in X \mid \varphi(t)\}$. Через $\{t \mid \varphi(t)\}$ определяются следующие теоретико-множественные понятия: $\varnothing \equiv \{t \mid t \neq t\}$, $\{x\} \equiv \{t \mid t = x\}$, $\{x, y\} \equiv \{t \mid t = x \vee t = y\}$, $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ — упорядоченная пара, $\mathcal{P}(X) \equiv \{t \mid t \subset X\}$ — *полный ансамбль на* X, т. е. семейство всех подмножеств X. Любое непустое подмножество $\mathcal{E}$ множества $\mathcal{P}(X)$ будем называть *ансамблем на* X.

Натуральные числа определяются как следующие множества:

$$0 \equiv \varnothing, \quad 1 \equiv 0 \cup \{0\}, \quad 2 \equiv 1 \cup \{1\}, \ldots, \quad n+1 \equiv n \cup \{n\}, \ldots .$$

При таком определении одновременно имеют место два свойства: $m \subset n+1$ и $m \in n+1$ для всех $m \leqslant n$ (т. е. $m \subset n$). Множество всех натуральных чисел обозначается через ω, а всех ненулевых натуральных чисел — через $\mathbb{N}$.

Мы строго отличаем отображение $u \colon X \to Y$ из множества X в множество Y от его значения $y_x \equiv u(x) \in Y$ на элементе $x \in X$. Для отображения $u \colon X \to Y$ используется также индексное обозначение $u \equiv (y_x \in Y \mid x \in X)$, которое понимается как *коллекция* (семейство) элементов множества Y, индексированных элементами множества X. Множество членов $\{t \mid \exists\, x \in X\ (t = y_x)\}$ коллекции u обозначается через $\{y_x \in Y \mid x \in X\}$. Например, для трёхчленной коллекции $u \equiv (a_i \in \mathbb{N} \mid i \in 3)$, такой что $a_0 = 5$, $a_1 = 4$ и $a_2 = 5$, её множество членов является двухэлементным множеством $\{a_i \mid i \in 3\} = \{4, 5\}$. Для коллекции подмножеств $u \equiv (A_i \in \mathcal{P}(A) \mid i \in I)$ множества A определены операции объединения

$$\bigcup(A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid \exists\, i \in I\ (t \in A_i)\}$$

и пересечения

$$\bigcap(A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid \forall\, i \in I\ (t \in A_i)\}.$$

Если на множестве A определён порядок $\leqslant$, то на A определяются частичные бинарные операции *супремума*

$$a \vee b \in \bigl\{t \in A \mid (t \geqslant a) \wedge (t \geqslant b) \wedge \forall\, c \in A\ \bigl((c \geqslant a) \wedge (c \geqslant b) \Rightarrow c \geqslant t\bigr)\bigr\}$$

и *инфимума*

$$a \wedge b \in \bigl\{t \in A \mid (t \leqslant a) \wedge (t \leqslant b) \wedge \forall\, c \in A\ \bigl((c \leqslant a) \wedge (c \leqslant b) \Rightarrow c \leqslant t\bigr)\bigr\}.$$

Если A является решёточным линейным пространством, то $a \vee b$ и $a \wedge b$ существуют для любых $a, b \in A$. В этом случае $a = a_+ + a_-$ и $|a| = a_+ - a_-$, где $a_+ \equiv a \vee 0$, $a_- \equiv a \wedge 0$. Поэтому в A определены подмножества $A_+ \equiv \{a_+ \mid a \in A\}$ и $A_- \equiv \{a_- \mid a \in A\}$.

Пусть $(A, \leqslant)$ и $(B, \leqslant)$ — упорядоченные множества. Отображение $u \colon A \to B$ называется *монотонным* [*изотонным*], если выполнено $a \leqslant a' \Rightarrow ua \leqslant ua'$ $[a \leqslant a' \Leftrightarrow ua \leqslant ua']$. Ясно, что всякое изотонное отображение инъективно.

Пусть $(A, \leqslant)$ и $(B, \leqslant)$ — упорядоченные множества. Говорят, что отображение $u\colon A \to B$ *сохраняет порядковые границы*, если равенство $a = \sup(a_m \in A \mid m \in M)$ влечёт $ua = \sup(ua_m \in B \mid m \in M)$, а равенство $a' = \inf(a'_n \in A \mid n \in N)$ влечёт $ua' = \inf(ua'_n \in B \mid n \in N)$. Легко убедиться, что всякая изотонная биекция сохраняет порядковые границы.

Пусть $(A, \mathbb{R}; +, *)$ — математическая система с операцией $+\colon A \times A \to A$ и с композицией $*\colon \mathbb{R} \times A \to A$. Далее вместо $r * a$ будем писать просто ra. Подмножество K в A называется *конусом*, если для любых $a_1, a_2 \in K$ и любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ справедливо $r_1 a_1 + r_2 a_2 \in K$.

1.1. Оценивания и меры

Пусть T — множество, $\mathcal{E}$ — некоторый ансамбль на T. Через $\mathcal{E}_\sigma$, $\mathcal{E}_\delta$ и $\mathcal{E}_\eta$ обозначим ансамбли, состоящие из всех счётных объединений, всех счётных пересечений и всех конечных пересечений элементов ансамбля $\mathcal{E}$ соответственно. Всякое отображение $\varepsilon\colon \mathcal{E} \to \bar{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, \infty]$ будем называть *оцениванием на* $\mathcal{E}$ [12].

Оценивание ε назовём *положительным*, если $\operatorname{rng}\varepsilon \equiv \{\varepsilon E \mid E \in \mathcal{E}\} \subset \bar{\mathbb{R}}_+ \equiv [0, \infty]$, *конечным*, если $\operatorname{rng}\varepsilon \subset \mathbb{R}$, *ограниченным*, если $\operatorname{rng}\varepsilon \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$. Оценивание ε назовём *натуральным*, если $\varnothing \in \mathcal{E}$, $\varepsilon(\varnothing) = 0$ и $\operatorname{rng}\varepsilon$ лежит либо в $[-\infty, \infty[$, либо в $]-\infty, \infty]$.

С каждым оцениванием $\varepsilon\colon \operatorname{dom}\varepsilon \equiv \mathcal{E} \to \bar{\mathbb{R}}$ свяжем два подансамбля:

$$\mathcal{E}^0(\varepsilon) \equiv \{E \in \mathcal{E} \mid \varepsilon E = 0\}$$

и

$$\mathcal{E}^f(\varepsilon) \equiv \operatorname{dom}_f \varepsilon \equiv \{E \in \mathcal{E} \mid \varepsilon E \in \mathbb{R}\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{N}_0(T, \mathcal{E}, \varepsilon) \equiv \bigl\{N_0 \in \mathcal{P}(T) \mid \forall\, E \in \mathcal{E}\ \bigl(N_0 \cap E \in \mathcal{E}^0(\varepsilon)\bigr)\bigr\}.$$

Будем называть оценивание ε *полным*, если

$$\{N \in \mathcal{P}(T) \mid \exists\, N_0 \in \mathcal{N}_0\ (N \subset N_0)\} \subset \mathcal{E}$$

(см. [28, 5.2]).

Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{E}$. Ансамбль $\mathcal{E}$ называется $\mathcal{R}$-*насыщенным*, если

$$\{U \in \mathcal{P}(T) \mid \forall\, R \in \mathcal{R}\ (U \cap R \in \mathcal{E})\} \subset \mathcal{E}.$$

Оценивание $\varepsilon\colon \mathcal{E} \to \bar{\mathbb{R}}$ называется

— $\mathcal{R}$-*σ-непрерывным сверху*, если $(\varepsilon R_n \mid n \in \omega) \downarrow \varepsilon R$ для каждого множества $R \in \mathcal{R}$ и любой последовательности $(R_n \in \mathcal{R} \mid n \in \omega) \downarrow R$;

— *внутренне* $\mathcal{R}$-*регулярным*, если $\varepsilon E = \sup\bigl\{\varepsilon R \mid \bigl(R \in \mathcal{R} \cap \mathcal{E}^f(\varepsilon)\bigr) \wedge (R \subset E)\bigr\}$ для всех $E \in \mathcal{E}$ (см. [32, 73G (i); 40, V.1.1]);

— $\mathcal{R}$-*насыщенным*, если $\mathcal{E}$ является $\mathcal{R}$-насыщенным (см. [28, 1.6; 32, 71A (B)]).

$\mathcal{E}^f(\varepsilon)$-насыщенное оценивание назовём *сильно насыщенным* (оно называется насыщенным в [1, 1.12.121] и локально определённым в [32, 64G (c)]).

Оценивание ε назовём *аддитивным* [*супераддитивным*], если $\varepsilon(E \cup D) = \varepsilon E + \varepsilon D$ [$\varepsilon(E \cup D) \geqslant \varepsilon E + \varepsilon D$] для любых $E, D \in \mathcal{E}$, таких что $E \cup D \in \mathcal{E}$ и $E \cap D = \varnothing$. Если ε натуральное и $(\varepsilon E_n \mid n \in \omega) \downarrow 0$ для каждой последовательности $(E_n \in \mathcal{E} \mid n \in \omega) \downarrow \varnothing$, то оценивание ε называется *σ-непрерывным в нуле*.

Натуральное оценивание ε называется *σ-аддитивным*, если

$$\varepsilon E = \lim\Big(\sum(\varepsilon E_n \mid n \in \{u(i) \in N \mid i \in k+1\}) \mid k \in \mathbb{N}\Big)$$

для любого бесконечного подмножества $N \subset \omega$ и любой такой последовательности $(E_n \in \mathcal{E} \mid n \in N)$ попарно непересекающихся элементов, что $E \equiv \bigcup(E_n \mid n \in N) \in \mathcal{E}$, где $u\colon \mathbb{N} \rightarrowtail\!\!\!\!\!\rightarrow N$ — единственная изотонная биекция из множества $\mathbb{N}$ на множество N. Для положительных оцениваний это определение равносильно привычному.

Напомним, что аддитивный и мультипликативный ансамбль на T, замкнутый относительно разности, называется *кольцом*, а кольцо, содержащее T, — *алгеброй*. Кольцо $\mathcal{N}$ называется *δ-кольцом*, если $\mathcal{N}_\delta = \mathcal{N}$; алгебра $\mathcal{M}$ называется *σ-алгеброй*, если $\mathcal{M}_\sigma = \mathcal{M}$.

Натуральное σ-аддитивное оценивание, определённое на некотором кольце, δ-кольце или σ-алгебре будем называть *мерой*, *узкой мерой* или *широкой мерой* соответственно. Полную сильно насыщенную широкую меру будем называть *расширенной*.

Семейство всех мер $\mu\colon \mathcal{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ на кольце $\mathcal{R}$ обозначим через $\mathrm{Meas}(T, \mathcal{R})$. Его подсемейства всех положительных мер, всех конечных мер и всех ограниченных мер обозначим через $\mathrm{Meas}(T, \mathcal{R})_0$, $\mathrm{Meas}_{\mathrm{f}}(T, \mathcal{R})$ и $\mathrm{Meas}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{R})$ соответственно. Мы используем здесь нижний индекс 0, поскольку индекс $+$ зарезервирован для конусов положительных элементов решёточных линейных пространств, а $\mathrm{Meas}(T, \mathcal{R})$ не является таковым.

Пусть $\mathcal{E}$ — произвольный ансамбль на T. Через $M(T, \mathcal{E})$ обозначим семейство всех *$\mathcal{E}$-измеримых* функций на T, т. е. таких функций на T, что $f^{-1}\big[]x, y[\big] \in \mathcal{E}$ для любого $]x, y[\subset \mathbb{R}$.

Для любой функции $f\colon T \to \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty[$ и любой положительной широкой меры $\mu\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ *интегралом Лебега от функции f относительно меры μ* называется число

$$i_\mu(f) \equiv \int f\, d\mu \equiv \sup\Big\{\sum(\inf(f[M_i])\mu M_i \mid i \in I)\Big\} \in [0, \infty],$$

где супремум берётся по всем конечным разбиениям $(M_i \in \mathcal{M} \mid i \in I)$ множества T (см. [39, 12.2]).

Решёточное линейное пространство всех таких функций $f \in M(T, \mathcal{M})$, что $\int f_+\, d\mu < \infty$ и $\int(-f_-)\, d\mu < \infty$, где $f_+ \equiv f \vee 0$ и $f_- \equiv f \wedge 0$, обозначим через $\mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$. Для функции $f \in \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ *интегралом от f относительно μ*

называется число

$$i_\mu(f) \equiv \int f\,d\mu \equiv \int f_+\,d\mu - \int (-f_-)\,d\mu.$$

Для произвольной широкой меры μ рассмотрим *разложение Хана* (T_+, T_-) *множества* T [5, III.4.10]. Оно порождает *вариации* $v_+(\mu)\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ и $v_-(\mu)\colon \mathcal{M} \to [-\infty, 0]$ *меры* μ, такие что $v_+(\mu)M = \mu(M \cap T_+)$ и $v_-(\mu)M = \mu(M \cap T_-)$ для любого $M \in \mathcal{M}$. Они являются широкими мерами, и по крайней мере одна из них конечна. Для μ имеет место *разложение Жордана* $\mu = v_+(\mu) + v_-(\mu)$ [5, III.4.11]. Для ограниченной меры μ справедливы также равенства $\mu_+ \equiv \mu \vee \mathbf{0} = v_+(\mu)$ и $\mu_- \equiv \mu \wedge \mathbf{0} = v_-(\mu)$ [40, VIII.2.3].

Для всякой широкой меры μ и любой функции

$$f \in \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu) \equiv \mathrm{MI}\big(T, \mathcal{M}, v_+(\mu)\big) \cap \mathrm{MI}\big(T, \mathcal{M}, -v_-(\mu)\big)$$

интегралом от f *относительно* μ называется число

$$i_\mu(f) \equiv \int f\,d\mu \equiv \int f\,d\big(v_+(\mu)\big) - \int f\,d\big(-v_-(\mu)\big).$$

Функционал

$$i_\mu\colon f \mapsto i_\mu f \equiv \int f\,d\mu$$

на $\mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ называется *интегральным функционалом*, он является линейным (см. [39, 19.17]).

1.2. Решёточные линейные пространства функций и линейные функционалы на них

Обозначим через $F(T)$ семейство всех функций $f\colon T \to \mathbb{R}$. Пусть $A(T) \subset F(T)$ — некоторое функциональное решёточное линейное пространство на T. Через $A(T)_+$ и $A_{\mathrm{b}}(T)$ будем обозначать его подмножества неотрицательных и ограниченных функций соответственно.

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово топологическое пространство с ансамблями $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}$ открытых, замкнутых, компактных и борелевских подмножеств соответственно. Через $A_{\mathrm{c}}(T)$ будем обозначать подпространство $A(T)$, состоящее из функций с компактными носителями.

Функциональное семейство $A(T)$ называется *усекаемым* (или *со свойством Стоуна*), если условие $f \in A(T)$ влечёт $f \wedge \mathbf{1} \in A(T)$ (см. [32, 71D; 40, I.7.2]). Например, пространство $C(T, \mathcal{G}) = M(T, \mathcal{G})$ всех непрерывных функций и его подпространства $C_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$, $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$ являются таковыми.

Будем говорить, что семейство $A(T)$ *огибает* [*σ-огибает*] *сверху* функцию $h \in F(T)$, если существует сеть $(f_m \in A(T) \mid m \in M)$ [последовательность $(f_m \in A(T) \mid m \in M \subset \omega)$], такая что $(f_m(t) \mid m \in M) \downarrow h(t)$ для любого $t \in T$. Будем говорить, что $A(T)$ *огибает* [*σ-огибает*] *снизу* функцию $g \in F(T)$, если $(f_m(t) \mid m \in M) \uparrow g(t)$ для любого $t \in T$.

Функционал $\varphi\colon A(T) \to \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если

$$\sup\{|\varphi f| \mid f \in A(T) \wedge |f| \leqslant g\} < \infty$$

для каждого $g \in A(T)_+$. Множество всех ограниченных линейных функционалов на $A(T)$ обозначается через $A(T)^\sim$.

Функционал φ будем называть *равномерно ограниченным*, если он ограниченный и

$$\sup\{|\varphi f| \mid f \in A(T) \wedge |f| \leqslant \mathbf{1}\} < \infty.$$

Множество всех равномерно ограниченных линейных функционалов обозначим через $A(T)^{\circleddash}$. Множества $A(T)^\sim$ и $A(T)^{\circleddash}$ являются решёточными линейными пространствами.

Лемма 1.1 (Ф. Рисс, Л. Канторович). *Для любого ограниченного линейного функционала φ на $A(T)$ имеет место разложение $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, где*

1) $\varphi_+, -\varphi_- \in A(T)^\sim_+$;
2) $\varphi_+ f \equiv \sup\{\varphi g \mid g \in A(T)_+ \wedge g \leqslant f\}$ *и* $\varphi_- f \equiv \inf\{\varphi h \mid h \in A(T)_+ \wedge h \leqslant f\}$ *для любого* $f \in A(T)_+$;
3) $\varphi_+ f \equiv \varphi_+(f_+) - \varphi_+(-f_-)$ *и* $\varphi_- f \equiv \varphi_-(f_+) - \varphi_-(-f_-)$ *для любого* $f \in A(T)$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [4, теорема VIII.2.1; 50, 3.6.5].

Функционал φ на $A(T)$ называется *поточечно непрерывным* [*поточечно σ-непрерывным*], если для каждой монотонной сети $(f_m \in A(T) \mid m \in M)$ [соответственно последовательности $(f_m \in A(T) \mid m \in M \subset \omega)$] и каждой функции $f \in A(T)$ выполнение условия $(f_m(t) \mid m \in M) \to f(t)$ для каждого $t \in T$ влечёт выполнение $(\varphi f_m \mid m \in M) \to \varphi f$ (см. [40, гл. I, 8.1]). В [1, 7.9.2] линейные функционалы на $C_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ с такими свойствами называются τ-гладкими [σ-гладкими]. Если φ является поточечно σ-непрерывным, то φ является ограниченным (см. [32, 16H]). Подробнее о поточечно непрерывных и σ-непрерывных функционалах мы говорим в разделе 3.

Функционал φ на $A(T)$ называется *узким* [32, 73G (e)] или *со свойством Прохорова*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество $C \subset T$, что условия $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(T \setminus C)$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon$. Множество всех ограниченных узких линейных функционалов на $A(T)$ обозначим через $A(T)^\pi$, а его подмножество равномерно ограниченных функционалов обозначим через $A(T)^{\textcircled{\pi}}$.

Функционал φ на $A(T)$ назовём *локально узким* или *с локальным свойством Прохорова* [9], если для любых $G \in \mathcal{G}$, $u \in A(T)_+$ и $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество $C \subset G$, что условия $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(G \backslash C) \wedge u$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon$. Функционал φ назовём *вполне локально узким*, если для любых $G \in \mathcal{G}$, $u \in A(T)_+$ и $\varepsilon > 0$ существуют компактное множество $C \subset G$ и число $\delta > 0$, такие что условия $f \in A(T)$, $|f| \leqslant \chi(G) \wedge u$ и $\sup(|f(t)| \mid t \in C) \leqslant \delta$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon$.

Функционал φ на $A(T)$ назовём *точным* [*σ-точным*], если он является поточечно непрерывным [σ-непрерывным] и вполне локально узким. Как и все поточечно [σ-]непрерывные функционалы, [σ-]точные функционалы являются ограниченными. Множество всех точных [σ-точных] линейных функционалов на $A(T)$ будем обозначать через $A(T)^{\triangledown}$ $[A(T)^{\vartriangle}]$, а его подмножество равномерно ограниченных функционалов через $A(T)^{\circledtriangledown}$ $[A(T)^{\circledvartriangle}]$. Ясно, что эти пространства функционалов линейны и решёточны.

Лемма 1.2. *Пусть φ — ограниченный линейный функционал на $A(T)$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *φ является вполне локально узким*;
2) *φ_+ и $-\varphi_-$ являются положительными вполне локально узкими*;
3) *$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для некоторых положительных вполне локально узких линейных функционалов φ_1 и φ_2 на $A(T)$.*

Доказательство. Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). По предположению $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ для некоторых положительных вполне локально узких линейных функционалов φ_1 и φ_2. Тогда для всякого открытого множества G, каждой функции $u \in A(T)_+$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют компактные множества $C_1 \subset G$ и $C_2 \subset G$ и числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, такие что из условий $f \in A(T)$, $|f| \leqslant \chi(G) \wedge u$ и $\sup(|f(t)| \mid t \in C_i) \leqslant \delta_i$ вытекает оценка $|\varphi_i f| < \varepsilon$. Возьмём $C \equiv C_1 \cup C_2$ и $\delta \equiv \delta_1 \wedge \delta_2$. Если $|f| \leqslant \chi(G) \wedge u$ и $\sup(|f(t)| \mid t \in C) \leqslant \delta$, то $|\varphi f| \leqslant |\varphi_1 f| + |\varphi_2 f| < \varepsilon$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Возьмём произвольные $G \in \mathcal{G}$, $u \in A(T)_+$ и $\varepsilon > 0$. По предположению существуют такие $C \subset G$ и $\delta > 0$, что условия $f \in A(T)$, $|f| \leqslant \chi(G) \wedge u$ и $\sup(|f(t)| \mid t \in C) \leqslant \delta$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon$. Для любой функции $g \in A(T)_+$ из $0 \leqslant g \leqslant |f|$ вытекает $g \leqslant \chi(G) \wedge u$ и $\sup(|g(t)| \mid t \in C) \leqslant \delta$. Поэтому $\varphi g < \varepsilon$ и, следовательно,

$$|\varphi_+ f| \leqslant \varphi_+ |f| \equiv \sup\{\varphi g \mid g \in A(T)_+ \wedge g \leqslant |f|\} \leqslant \varepsilon.$$

Аналогично $|\varphi_- f| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, φ_+ и $-\varphi_-$ являются вполне локально узкими.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Согласно лемме 1.1 $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$. $\square$

Замечание. Аналогичные леммы справедливы для ограниченных, равномерно ограниченных, узких, локально узких, поточечно непрерывных, поточечно σ-непрерывных, точных и σ-точных функционалов.

1.3. Теорема Александрова—Стоуна

Пусть $\mathcal{R}$ — мультипликативный и σ-аддитивный ансамбль на T. Обозначим через $\mathfrak{L}(T, \mathcal{R})$ множество всех возрастающих супераддитивных σ-непрерывных в нуле оцениваний $\lambda\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенству

$$\lambda L \leqslant \lambda H + \sup\{\lambda R \mid R \in \mathcal{R} \wedge R \subset L \setminus H\}$$

для каждых $H, L \in \mathcal{R}$, таких что $H \subset L$.

Определим оценивание $\nu\colon \mathcal{P}(T) \to \bar{\mathbb{R}}_+$, полагая

$$\nu E \equiv \sup\{\lambda R \mid R \in \mathcal{R} \wedge R \subset E\}.$$

Рассмотрим ансамбль

$$\mathcal{M} \equiv \bigl\{M \in \mathcal{P}(T) \mid \forall\, L \in \mathcal{R}\ \bigl(\lambda L \leqslant \nu(L \cap M) + \nu(L \setminus M)\bigr)\bigr\}$$

и оценивание $\mu \equiv e\lambda \equiv \nu|\mathcal{M}$.

Следующий результат о продолжении оцениваний до мер является ключевым для интегрального представления функционалов [32, 71A].

Предложение 1.1. *Пусть $\mathcal{R}$ — мультипликативный и σ-аддитивный ансамбль на T. Тогда для каждого оценивания $\lambda \in \mathfrak{L}(T, \mathcal{R})$ ансамбль $\mathcal{M}$ является σ-алгеброй, а $\mu \equiv e\lambda\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ — положительной, (широкой), полной, сильно насыщенной, внутренне $\mathcal{R}$-регулярной и $\mathcal{R}$-насыщенной мерой, продолжающей λ.*

Пусть $A(T)$ — линейное пространство функций на T и φ — линейный функционал на $A(T)$. Пусть $\mathcal{M}$ — σ-алгебра на T и μ — (широкая) мера на $\mathcal{M}$. Функционал φ называется *представимым интегралом Лебега над измеримым пространством* $(T, \mathcal{M}, \mu)$ или *интегрально представимым относительно меры* μ, если $A(T) \subset \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ и $\varphi f = i_\mu f$ для всех $f \in A(T)$.

Рассмотрим ансамбль $\mathcal{I}^\sigma\bigl(A(T)\bigr)$ всех таких множеств $R \subset T$, что семейство $A(T)$ σ-огибает сверху функцию $\chi(R)$. Для любого положительного функционала φ на $A(T)$ можно определить на $\mathcal{I}^\sigma\bigl(A(T)\bigr)$ положительное конечное оценивание $\lambda \equiv \Lambda\varphi$, полагая $\lambda R \equiv \inf\{\varphi f \mid f \in A(T)_+ \wedge f \geqslant \chi(R)\}$ для любого $R \in \mathcal{I}^\sigma\bigl(A(T)\bigr)$.

Следующий важный результат может быть назван теоремой Александрова—Стоуна об интегральном представлении, так как он восходит к работам [26] и [52]. М. Стоун показал важность поточечной σ-непрерывности функционала для существования меры, а А. Д. Александров показал важность внутренней регулярности меры для её единственности.

Теорема 1.1 (А. Д. Александров, М. Стоун). *Пусть $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное пространство функций на T, φ — положительный поточечно σ-непрерывный линейный функционал на $A(T)$. Тогда*

1) $\lambda \in \mathfrak{L}(T, \mathcal{R})$, *где* $\mathcal{R} \equiv \mathcal{I}^\sigma\bigl(A(T)\bigr)$;
2) *мера $\mu \equiv e\lambda\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ является положительной, широкой, полной, сильно насыщенной, внутренне $\mathcal{R}$-регулярной, $\mathcal{R}$-насыщенной и $\mathcal{R}$-σ-непрерывной сверху;*
3) *функционал φ представи́м интегралом Лебега над $(T, \mathcal{M}, \mu)$;*
4) *мера μ единственна в следующем смысле: если существует другая положительная, полная, сильно насыщенная, внутренне $\mathcal{R}$-регулярная мера $\nu\colon \mathcal{N} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, такая что φ представи́м интегралом Лебега над $(T, \mathcal{N}, \nu)$, то $\mathcal{N} = \mathcal{M}$ и $\nu = \mu$;*
5) *если $A(T) \subset F_{\mathrm{b}}(T)$ и функционал φ является равномерно ограниченным, то мера μ ограниченная.*

Доказательства первых трёх утверждений можно найти в [32, 71G], утверждения 4) — в [32, 72F]. Утверждение 5) следует непосредственно из определения λ.

Таким образом, для всякого усекаемого решёточного линейного пространства $A(T)$ определено отображение $R \equiv e \circ \Lambda \colon \varphi \mapsto \mu$, ставящее в соответствие каждому положительному поточечно σ-непрерывному функционалу на $A(T)$ меру с указанными выше свойствами.

1.4. Радоновские меры на хаусдорфовом пространстве

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство. Широкую меру $\mu \colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}$ будем называть (*широкой*) *радоновской мерой на* $(T, \mathcal{G})$, если выполнены следующие условия:

1) $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$;
2) $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}^f(\mu)$, т. е. $\mu C \in \mathbb{R}$ для любого $C \in \mathcal{C}$;
3) для любого $M \in \mathcal{M}$, такого что $\mu M \in \mathbb{R}$, и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset M$ и $|\mu M - \mu C| < \varepsilon$;
4) для любого $M \in \mathcal{M}$, такого что $\mu M = \infty$ $[\mu M = -\infty]$ и любого $a \in \mathbb{R}$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset M$ и $\mu C > a$ [соответственно $\mu C < a$].

В силу первого условия σ-алгебра $\mathcal{M}$ содержит борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}$. Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}$, то назовём μ *борелевско-радоновской мерой*. Для случая положительных мер совокупное свойство 3) & 4) равносильно свойству внутренней $\mathcal{C}$-регулярности (*компактной регулярности*) из раздела 1.1, которое ранее использовалось при определении положительных радоновских мер (см., например, [32, 73A]).

Семейство всех (широких) радоновских мер $\mu \colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}$ обозначим через $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$. Подсемейство всех расширенных (т. е. полных и сильно насыщенных) радоновских мер $\mu \colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}$ обозначим через $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$. Семейства всех радоновских мер и расширенных радоновских мер на пространстве $(T, \mathcal{G})$, определённых на всех возможных σ-алгебрах $\mathcal{M}$, обозначим через $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G})$ и $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}(T, \mathcal{G})$ соответственно. Через $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G}) \equiv \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{B})$ обозначим семейство всех борелевско-радоновских мер. Для обозначения соответствующих подсемейств положительных и ограниченных мер (см. раздел 1.1) будем использовать нижние индексы 0 и $\mathfrak{b}$.

Если $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G})$, то интегральный функционал i_μ называется *радоновским интегралом*.

Лемма 1.3. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство с широкой мерой* $\mu \colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}$. *Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) μ — *радоновская мера*;
2) *вариации* $v_+(\mu)$ *и* $-v_-(\mu)$ *меры* μ (см. раздел 1.1) *являются положительными радоновскими мерами*;
3) $\mu = \mu_1 - \mu_2$ *для некоторых мер* $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G})_0$, *по крайней мере одна из которых конечна*;

4) *мера μ конечна на компактных множествах и обладает следующими свойствами*:

   а) *для любого множества $M \in \mathcal{M}$, такого что $\mu M = \infty$ $[\mu M = -\infty]$, и любого числа $\delta > 0$ найдётся такое компактное множество $C \subset M$, что $\mu C' > \delta$ $[\mu C' < -\delta]$ для любого компактного множества C', удовлетворяющего условию $C \subset C' \subset M$*;

   б) *для любого множества $M \in \mathcal{M}$, такого что $\mu M \in \mathbb{R}$, и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое компактное множество $C \subset M$, что $|\mu M - \mu C'| < \varepsilon$ для любого компактного множества C', удовлетворяющего условию $C \subset C' \subset M$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $M \in \mathcal{M}$. В соответствии с разложением Хана множества T и разложением Жордана меры μ существуют такие множества T_+ и T_- и положительные широкие меры $v_+(\mu)$ и $-v_-(\mu)$ (вариации), что $v_+(\mu)M = \mu(M \cap T_+)$ и $v_-(\mu)M = \mu(M \cap T_-)$.

Возьмём произвольное компактное множество C. Тогда $\mu C = v_+(\mu)C + v_-(\mu)C$ и по меньшей мере одна из этих вариаций конечна. Так как $\mu C \in \mathbb{R}$, можно заключить, что $v_+(\mu)C$ и $v_-(\mu)C$ конечны. Таким образом, эти вариации меры μ конечны на компактных множествах.

Если $v_+(\mu)M = \mu(M \cap T_+) = \infty$, то по определению радоновской меры для любого $a > 0$ найдётся такое компактное множество $C \subset M \cap T_+$, что $v_+(\mu)C = \mu(C \cap T_+) = \mu C > a$.

Если $v_+(\mu)M < \infty$, то по определению для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое компактное множество $C \subset M \cap T_+$, что

$$0 \leqslant v_+(\mu)M - v_+(\mu)C = |\mu(M \cap T_+) - \mu C| < \varepsilon.$$

Это означает, что $v_+(\mu)$ — положительная радоновская мера. Для $-v_-(\mu)$ рассуждения полностью аналогичны.

Справедливость импликации 2) $\Longrightarrow$ 3) следует из того, что согласно разложению Жордана $\mu = v_+(\mu) - \big(-v_-(\mu)\big)$ и по крайней мере одна из этих вариаций конечна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 4). Ясно, что мера μ конечна на компактных множествах. Возьмём произвольное $M \in \mathcal{M}$. Пусть $x \equiv \mu M = \infty$. Тогда $y \equiv \mu_1 M = \infty$ и $z \equiv \mu_2 M < \infty$. Для каждого $\delta > 0$ найдётся такое компактное множество $C \subset M$, что $\mu_1 C > \delta + z$. Если $C' \in \mathcal{C}$ и $C \subset C' \subset M$, то $\mu C' = \mu_1 C' - \mu_2 C' > \mu_1 C - z > \delta + z - z = \delta$. В случае $x = -\infty$ рассуждения такие же.

Пусть $x \in \mathbb{R}$. Тогда $y, z \in \mathbb{R}_+$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. По условию существуют такие компактные множества $C_1, C_2 \subset M$, что $0 \leqslant y - \mu_1 C_1 < \varepsilon/2$ и $0 \leqslant z - \mu_2 C_2 < \varepsilon/2$. Тогда для $C \equiv C_1 \cup C_2$ и любого $C' \in \mathcal{C}$, такого что $C \subset C' \subset M$, имеем

$$|x - \mu C'| \leqslant (y - \mu_1 C') + (z - \mu_2 C') \leqslant y - \mu_1 C_1 + z - \mu_2 C_2 < \varepsilon.$$

Импликация 4) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. $\square$

С помощью этой леммы легко доказывается следующее предложение.

Предложение 1.2. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство,* $\mathcal{M}$ — σ*-алгебра на нём.*

1. *Если* $\mu, \nu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$ *и* $x, y \in \mathbb{R}_+$, *то* $x\mu + y\nu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$.
2. $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$ *является решёточным линейным подпространством в решёточном линейном пространстве* $\mathrm{Meas_b}(T, \mathcal{M})$.
3. $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0 = \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_+$.

Из пункта 1 этого предложения следует, что семейство $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$ является конусом.

Для конечных мер можно дать другое, эквивалентное, определение радоновской меры.

Как отмечалось в конце раздела 1.1, для произвольной широкой меры μ имеет место разложение Жордана $\mu = v_+(\mu) + v_-(\mu)$, где хотя бы одна из вариаций конечна. Для конечной меры μ конечны обе вариации, поэтому можно определить её *полную вариацию* $|\mu| \equiv v_+(\mu) - v_-(\mu)$.

Предложение 1.3. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство,* $\mathcal{M}$ — σ*-алгебра, содержащая* $\mathcal{G}$, μ — *конечная мера на* $\mathcal{M}$. *Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$;
2) *для каждого* $M \in \mathcal{M}$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдутся такие* $C \in \mathcal{C}$ *и* $G \in \mathcal{G}$, *что* $C \subset M \subset G$ *и* $|\mu|(G \setminus C) < \varepsilon$.

Доказательство. Обозначим $\mu_1 \equiv v_+(\mu)$, $\mu_2 \equiv -v_-(\mu)$. Меры μ_1 и μ_2 конечны, как и сама мера μ, поэтому $\mu_1 M, \mu_2 M \in \mathbb{R}$ для всех $M \in \mathcal{M}$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). По лемме 1.3 $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})_0$. Пусть $M \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$. По определению радоновской меры существуют такие $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, что $C_1 \subset M$, $C_2 \subset M$, $0 \leqslant \mu_1(M) < \mu_1(C_1) + \varepsilon/4$ и $0 \leqslant \mu_2(M) < \mu_2(C_2) + \varepsilon/4$. Поскольку $T \setminus M \in \mathcal{M}$, то $\mu_1(T \setminus M), \mu_2(T \setminus M) \in \mathbb{R}$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие $D_1, D_2 \in \mathcal{C}$, что $D_1 \subset T \setminus M$, $D_2 \subset T \setminus M$, $0 \leqslant \mu_1(T \setminus M) < \mu_1(D_1) + \varepsilon/4$ и $0 \leqslant \mu_2(T \setminus M) < \mu_2(D_2) + \varepsilon/4$.

Положим $C \equiv C_1 \cup C_2 \in \mathcal{C}$, $G \equiv T \setminus (D_1 \cup D_2) \in \mathcal{G}$. Тогда $C \subset M \subset G$ и

$$\begin{aligned}
&\mu_1(G \setminus C) \leqslant \mu_1\big((T \setminus D_1) \setminus C_1\big) = \\
&\quad = \mu_1\Big(\big((T \setminus D_1) \setminus C_1\big) \cap M\Big) + \mu_1\Big(\big((T \setminus D_1) \setminus C_1\big) \cap (T \setminus M)\Big) = \\
&\quad = \mu_1(M \setminus C_1) + \mu_1\big((T \setminus M) \setminus (T \setminus D_1)\big) < \frac{\varepsilon}{4} + \mu_1\big((T \setminus M) \setminus D_1\big) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Аналогично $\mu_2(G \setminus C) < \varepsilon/2$. Поэтому $|\mu|(G \setminus C) = \mu_1(G \setminus C) + \mu_2(G \setminus C) < \varepsilon$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $M \in \mathcal{M}$ и $\varepsilon > 0$. Возьмём $C \in \mathcal{C}$ и $G \in \mathcal{G}$, такие что $C \subset M \subset G$ и $|\mu|(G \setminus C) < \varepsilon$. Тогда

$$0 \leqslant \mu_1(M) - \mu_1(C) = \mu_1(M \setminus C) < \mu_1(G \setminus C) \leqslant |\mu|(G \setminus C) < \varepsilon,$$
$$0 \leqslant \mu_2(M) - \mu_2(C) = \mu_2(M \setminus C) < \mu_2(G \setminus C) \leqslant |\mu|(G \setminus C) < \varepsilon.$$

Таким образом, μ_1 и μ_2 — положительные радоновские меры. По лемме 1.3 из этого следует, что и $\mu = \mu_1 - \mu_2$ является радоновской. $\square$

Следствие. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — компактное пространство, $\mathcal{M}$ — σ-алгебра, содержащая $\mathcal{G}$, μ — конечная мера на $\mathcal{M}$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$;
2) *для каждого $M \in \mathcal{M}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $F \in \mathcal{F}$ и $G \in \mathcal{G}$, что $F \subset M \subset G$ и $|\mu|(G \setminus F) < \varepsilon$.*

Доказательство. Достаточно отметить, что в компактном пространстве любое замкнутое множество компактно. $\square$

Именно свойство 2) лежало в основе определения конечной радоновской меры на компактном пространстве, которым пользовались И. Радон, С. Банах, С. Сакс и С. Какутани (см. [50, 18.2.1]). При обобщении их определения на случай конечной меры на некомпактном пространстве естественно было заменить аппроксимацию замкнутыми подмножествами аппроксимацией компактными подмножествами, что и отражено в предложении 1.3. Понятие же произвольной, т. е. необязательно конечной и необязательно положительной, радоновской меры было введено в [9, 10]. Семейство $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$ конечных (а значит, ограниченных) радоновских мер $\mu\colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, задействованное указанными выше авторами, является линейным пространством. Однако для неконечных радоновских мер $\mu\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}$ отсутствие в $\bar{\mathbb{R}}$ операции $\infty - \infty$ приводит к тому, что семейство $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}}(T, \mathcal{G}, \mathcal{M})$ не является линейным пространством.

2. Равномерные функции

Как было сказано во введении, пространства $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$ и $C_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$, использовавшиеся ранее для характеризации интегральных функционалов на локально компактных и тихоновских пространствах, не работают в общей ситуации хаусдорфова пространства, поскольку возможны случаи $C_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}) = \{r\mathbf{1} \mid r \in \mathbb{R}\}$ и $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G}) = \{\mathbf{0}\}$. Поэтому нужно было найти класс функциональных пространств $A(T)$, подходящих для работы с интегральными функционалами в общем случае. В классе линейных пространств $M(T, \mathcal{S})$ измеримых функций такой подходящий подкласс до сих пор не был найден.

В [7, 8] был выделен новый класс функций, отличный от класса измеримых функций, подходящий для работы с радоновскими интегралами.

2.1. Функции, равномерные относительно семейств покрытий

Семейство $\mathfrak{C}$ конечных покрытий множества T назовём *мультипликативным*, если для каждой конечной коллекции $(\pi_\alpha \in \mathfrak{C} \mid \alpha \in A)$ покрытий $\pi_\alpha \equiv (C_{\alpha i} \in \mathcal{P}(T) \mid i \in I_\alpha)$ множества T мы имеем $\bigwedge(\pi_\alpha \mid \alpha \in A) \in \mathfrak{C}$, где $\bigwedge(\pi_\alpha \mid \alpha \in A)$ обозначает такое покрытие $(D_j \mid j \in J)$, что $J \equiv \prod(I_\alpha \mid \alpha \in A)$ и

$D_j \equiv \bigcap(C_{\alpha j(\alpha)} \mid \alpha \in A)$ для каждого $j \in J$. Ясно, что это свойство достаточно проверять для случая двух покрытий $\pi_1 \equiv (C_{1i} \mid i \in I_1)$ и $\pi_2 \equiv (C_{2i} \mid i \in I_2)$ из $\mathfrak{C}$. Тогда должно быть выполнено $\pi_1 \wedge \pi_2 \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, где $J \equiv I_1 \times I_2$ и $D_j \equiv C_{1j(1)} \cap C_{2j(2)}$ для каждого $j \in J$. Отметим, что для того чтобы не увеличивать этажи индексации, мы здесь и далее считаем, что предшествующие индексы задают область изменения последующих.

Для семейства $\mathfrak{C}$ покрытий множества T рассмотрим его *η-оболочку* $\mathfrak{C}_\eta$, состоящую из всех конечных коллекций $\pi \equiv (P_u \in \mathcal{P}(T) \mid u \in U)$, таких что для π существует конечная коллекция $(\gamma_i \in \mathfrak{C} \mid i \in I)$ конечных покрытий $\gamma_i \equiv (C_{im} \mid m \in M_i)$ множества T, такая что $U = \prod(M_i \mid i \in I)$ и $P_u = \bigcap(C_{iu(i)} \mid i \in I)$ для каждого $u \in U$.

Лемма 2.1. *Пусть T — множество и $\mathfrak{C}$ — семейство конечных покрытий множества T. Тогда каждая коллекция $\pi \in \mathfrak{C}_\eta$ является конечным покрытием T.*

Доказательство. В силу общей дистрибутивности объединения относительно пересечения имеем

$$\bigcup(P_u \mid u \in U) = \bigcup\Big(\bigcap(C_{iu(i)} \mid i \in I) \mid u \in U\Big) = \\ = \bigcap\Big(\bigcup(C_{im} \mid m \in M_i) \mid i \in I\Big) = \bigcap(T \mid i \in I) = T.$$

Так как каждое множество M_i является конечным, их произведение $U \equiv \equiv \prod(M_i \mid i \in I)$ тоже конечно. □

Лемма 2.2. *Пусть T — множество и $\mathfrak{C}$ — семейство конечных покрытий множества T. Тогда семейство $\mathfrak{C}_\eta$ конечных покрытий T мультипликативно.*

Доказательство. Пусть $(\pi_\alpha \in \mathfrak{C}_\eta \mid \alpha \in A)$ — конечная коллекция. По определению $\pi_\alpha \equiv (P_{\alpha u} \subset T \mid u \in U_\alpha)$ для $\alpha \in A$, и для каждого π_α существует конечная коллекция $(\gamma_{\alpha i} \in \mathfrak{C} \mid i \in I_\alpha)$ покрытий, такая что $U_\alpha = \prod(M_{\alpha i} \mid i \in I_\alpha)$ и $P_{\alpha u} = \bigcap(C_{\alpha i u(i)} \mid i \in I_\alpha)$ для каждого $u \in U_\alpha$.

Рассмотрим конечное множество $J \equiv \bigcup(I_\alpha \times \{\alpha\} \mid \alpha \in A)$. По свойству общей ассоциативности произведения имеют место следующие биекции:

$$W \equiv \prod(U_\alpha \mid \alpha \in A) \rightarrowtail \\ \rightarrowtail \prod\Big(\prod(M_{\alpha i} \mid (i,\alpha) \in I_\alpha \times \{\alpha\}) \mid \alpha \in A\Big) \rightarrowtail \prod(M_j \mid j \in J) \equiv V,$$

где $M_j \equiv M_{\alpha i}$ для $j \equiv (i, \alpha) \in J_\alpha \equiv I_\alpha \times \{\alpha\}$.

Рассмотрим конечную коллекцию $(\delta_j \mid j \in J)$ конечных коллекций $\delta_j \equiv \equiv (D_{jm} \mid m \in M_j)$, таких что $D_{jm} \equiv C_{\alpha i m}$ для $j \equiv (i, \alpha) \in J_\alpha$ и $m \in M_j \equiv M_{\alpha i}$. Так как $\delta_{(i,\alpha)} = (C_{\alpha i m} \mid m \in M_{\alpha i})$, мы заключаем, что $\delta_j \in \mathfrak{C}$ для каждого $j \in J$.

Рассмотрим множества $Q_v \equiv \bigcap(D_{jv(j)} \mid j \in J)$ и коллекцию $\varkappa \equiv \equiv (Q_v \mid v \in V) \in \mathfrak{C}_\eta$. Если $v \in V$ получается в результате биекций из $w \in W$, то

$$\bigcap(P_{\alpha w(\alpha)} \mid \alpha \in A) = \bigcap\Big(\bigcap(C_{\alpha i w(\alpha)(i)} \mid i \in I_\alpha) \mid \alpha \in A\Big) =$$
$$= \bigcap\Big(\bigcap(D_{jv(j)} \mid j \in J_\alpha) \mid \alpha \in A\Big) = \bigcap(D_{jv(j)} \mid j \in J) = Q_v.$$

Отсюда вытекает, что $\bigwedge(\pi_\alpha \mid \alpha \in A) = \varkappa$. Следовательно, $\bigwedge(\pi_\alpha \mid \alpha \in A) \in \mathfrak{C}_\eta$. □

Для функции $f\colon T \to \mathbb{R}$, множества $P \subset T$ и коллекции множеств $\pi \equiv \equiv (P_i \subset T \mid i \in I)$ рассмотрим числа $\omega(f, P) \equiv \sup\{|f(s) - f(t)| \mid s, t \in P\}$ и $\omega(f, \pi) \equiv \sup\{\omega(f, P_i) \mid i \in I\}$, называемые *колебаниями функции f на множестве P и на коллекции π* соответственно.

Пусть $\mathfrak{C}$ — некоторое семейство конечных покрытий множества T. Функцию f назовём *равномерной относительно семейства* $\mathfrak{C}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое покрытие $(C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f, C_i) < \varepsilon$ для любого $i \in I$ (см. [7, 1.2.2; 8, 1.2.2; 11]). Легко убедиться, что любая равномерная функция является ограниченной. Семейство всех $\mathfrak{C}$-равномерных функций обозначим через $\mathrm{U}(T, \mathfrak{C})$.

Если $\mathcal{S}$ — ансамбль на T, то он порождает семейство $\operatorname{Cov}\mathcal{S}$ конечных покрытий $(S_i \in \mathcal{S} \mid i \in I)$ множества T. Ансамбль $\mathcal{S}$ на T называется *основой* [11, 22], если он мультипликативен и содержит множества $\varnothing$ и T. Основа называется *σ-основой*, если она σ-аддитивна. Если $\mathcal{S}$ является основой, то соответствующее семейство покрытий $\operatorname{Cov}\mathcal{S}$ является мультипликативным и содержит *одноэлементное покрытие* $(T_i \equiv T \mid i \in \{i\})$.

Функция f называется *равномерной относительно ансамбля* $\mathcal{S}$, если она является равномерной относительно семейства $\operatorname{Cov}\mathcal{S}$. Эти функции были введены в [55]. Далее вместо $\mathrm{U}(T, \operatorname{Cov}\mathcal{S})$ будем писать просто $\mathrm{U}(T, \mathcal{S})$.

Лемма 2.3. *Пусть $\mathcal{S}$ — ансамбль на T. Тогда* $\mathrm{M_b}(T, \mathcal{S}) \subset \mathrm{U}(T, \mathcal{S}) \subset \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S}_\sigma)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S})$. Тогда $f[T] \subset \,]{-a}, a[$ для некоторого $a > 0$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и положительное натуральное число n, такие что $2a/n < \varepsilon$. Рассмотрим множества $C_i \equiv f^{-1}\big[\,]a(i-1)/n, a(i+1)/n[\,\big] \in \mathcal{S}$, $|i| \in n$. Ясно, что $\bigcup(C_i \mid i \in n) = T$ и $\omega(f, C_i) \leqslant 2a/n < \varepsilon$. Таким образом, $f \in \mathrm{U}(T, \mathcal{S})$.

Теперь пусть $f \in \mathrm{U}(T, \mathcal{S})$. Это означает, что для каждого $\varepsilon_n \equiv 1/n$ найдётся конечное покрытие $\pi_n \equiv (C_{ni} \in \mathcal{S} \mid i \in I_n)$ множества T, такое что $\omega(f, \pi_n) < \varepsilon_n$. Отсюда видно, что f ограниченная. Возьмём произвольные действительные числа $x < y$ и рассмотрим множества $E \equiv f^{-1}\big[\,]x, y[\,\big]$, $E_n \equiv f^{-1}\big[[x + \varepsilon_n, y - \varepsilon_n]\big]$, $J_n \equiv \{i \in I_n \mid C_{ni} \cap E_n \neq \varnothing\}$ и $\tilde{E}_n \equiv \bigcup(C_{ni} \mid i \in J_n)$. Если $t \in \tilde{E}_n$, то $t \in C_{ni}$ для некоторого $i \in J_n$. Следовательно, существует $s \in C_{ni} \cap E_n$. Имеем $f(t) < f(s) + \varepsilon_n < y$ и $f(t) > f(s) - \varepsilon_n > x$, т. е. $t \in E$. Таким образом, $\tilde{E}_n \subset E$. Отсюда следует, что $E \subset \bigcup(E_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset \bigcup(\tilde{E}_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset E$, т. е. $E = \bigcup(\tilde{E}_n \mid n \in \mathbb{N})$. В итоге, поскольку $\tilde{E}_n \in \mathcal{S}_\sigma$, получаем, что $E \in \mathcal{S}_\sigma$. Следовательно, $f \in \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S}_\sigma)$. □

Следствие. *Пусть* $\mathcal{S}$ — σ*-аддитивный ансамбль на множестве* T. *Тогда* $\mathrm{U}(T, \mathcal{S}) = \mathrm{M_b}(T, \mathcal{S})$.

Класс семейств $\mathrm{U}(T, \mathcal{S})$ функций, равномерных относительно семейства покрытий $\mathfrak{C}$, оказался полезным при решении ряда классических задач в теории функций и теории меры.

Согласно [24, § 37, п. 1] и [21] функциональное семейство $A(T)$ называется *нормальным* [*ограниченно нормальным*], если

1) $A(T)$ содержит единичную функцию $\mathbf{1}$;
2) $A(T)$ замкнуто относительно умножения на вещественные числа;
3) $A(T)$ замкнуто относительно поточечного сложения, умножения, супремума и инфимума;
4) $A(T)$ замкнуто относительно равномерной сходимости последовательностей;
5) $A(T)$ замкнуто относительно *разрешённого деления* [*ограниченного разрешённого деления*], т. е. справедливо

$$\forall\, f \in A(T)\ \forall\, g \in F(T)\ (g = \mathbf{1}/f \Rightarrow g \in A(T)$$
$$[\forall\, f \in A(T)\ \forall\, g \in F_{\mathrm{b}}(T)\ (g = \mathbf{1}/f \Rightarrow g \in A(T)].$$

Для функции $f\colon T \to \mathbb{R}$ множество $\operatorname{coz} f \equiv \{t \in T \mid f(t) \neq 0\}$ называется *конульмножеством функции* f. Для семейства $A(T)$ функций на множестве T ансамбль $\operatorname{Coz} A(T) \equiv \{\operatorname{coz} f \mid f \in A(T)\}$ называется *ансамблем конульмножеств семейства* $A(T)$. Имеет место следующая теорема Хаусдорфа (см. [21; 24, § 37, п. 1]).

Теорема 2.1. *Пусть* T — *множество и* $A(T)$ — *подсемейство в* $F(T)$. *Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *семейство* $A(T)$ *является нормальным*;
2) $A(T) = M(T, \mathcal{S})$ *для некоторой* σ*-основы* $\mathcal{S}$;
3) $A(T) = M\big(T, \{\varnothing, T\} \cup \big(\operatorname{Coz} A(T)\big)_{\eta\sigma}\big)$.

Если последовательность $(f_n \mid n \in \omega)$ сходится к $f \in F(T)$ равномерно на T, то будем писать $f = \text{u-}\lim(f_n \mid n \in \omega)$.

Предложение 2.1. *Если семейство конечных покрытий* $\mathfrak{C}$ *мультипликативно и содержит одноэлементное покрытие, то семейство функций* $\mathrm{U}(T, \mathfrak{C})$ *является ограниченно нормальным.*

Доказательство. Ясно, что $\mathbf{1} \in A(T) \equiv \mathrm{U}(T, \mathfrak{C})$. Зафиксируем функции $f, g \in A(T)$ и число $\varepsilon > 0$. Пусть $|f| \leqslant a\,\mathbf{1}$ и $|g| \leqslant b\,\mathbf{1}$ для некоторых чисел a и b.

Пусть $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Для числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/|r|$ существует такое покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f, \pi) < \varepsilon_1$. Если $s, t \in C_i$, то $|(rf)(s) - (rf)(t)| = |r|\,|f(s) - f(t)| \leqslant |r|\,\omega(f, \pi)$. Следовательно, $\omega(rf, \pi) \leqslant |r|\,\omega(f, \pi) < \varepsilon$. Поэтому $rf \in A(T)$.

Для чисел $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2$ существуют такие покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \in \mathfrak{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f,\pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g,\varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s,t \in C_i \cap D_j$, то

$$|(f+g)(s) - (f+g)(t)| \leqslant |f(s) - f(t)| + |g(s) - g(t)| \leqslant \omega(f,\pi) + \omega(g,\varkappa).$$

Следовательно,

$$\omega(f+g, \pi \wedge \varkappa) \leqslant \omega(f,\pi) + \omega(g,\varkappa) < \varepsilon.$$

Так как $\mathfrak{C}$ мультипликативно, то $\pi \wedge \varkappa \in \mathfrak{C}$. Значит, $f+g \in A(T)$.

Аналогичным образом по неравенству Биркгофа имеем

$$|(f \vee g)(s) - (f \vee g)(t)| \leqslant |f(s) \vee g(s) - f(s) \vee g(t)| + |f(s) \vee g(t) - f(t) \vee g(t)| \leqslant \\ \leqslant |g(s) - g(t)| + |f(s) - f(t)| \leqslant \omega(g,\varkappa) + \omega(f,\pi).$$

Следовательно, $\omega(f \vee g, \pi \wedge \varkappa) \leqslant \omega(g,\varkappa) + \omega(f,\pi) < \varepsilon$. Значит, $f \vee g \in A(T)$.

Точно так же проверяется, что $f \wedge g \in A(T)$.

Рассмотрим числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/2b$ и $\varepsilon_2 \equiv \varepsilon/2a$. Для них существуют такие покрытия $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$ и $\varkappa \equiv (D_j \mid j \in J) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f,\pi) < \varepsilon_1$ и $\omega(g,\varkappa) < \varepsilon_2$. Если $s,t \in C_i \cap D_j$, то

$$|(fg)(s) - (fg)(t)| = |(f(s)\,g(s) - f(t)\,g(s)| + |(f(t)\,g(s) - f(t)\,g(t)| \leqslant \\ \leqslant |g(s)|\,|f(s) - f(t)| + |f(t)|\,|g(s) - g(t)| \leqslant b\omega(f,\pi) + a\omega(g,\varkappa).$$

Следовательно, $\omega(fg, \pi \wedge \varkappa) \leqslant b\omega(f,\pi) + a\omega(g,\varkappa) < \varepsilon$. Значит, $fg \in A(T)$.

Предположим, что $f(t) \neq 0$ для любого $t \in T$ и $\mathbf{1}/|f| \leqslant c\mathbf{1}$ для некоторого числа c. Для числа $\varepsilon_1 \equiv \varepsilon/c^2$ существует такое покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f,\pi) < \varepsilon_1$. Если $s,t \in C_i$, то

$$|(\mathbf{1}/f)(s) - (\mathbf{1}/f)(t)| = \frac{|f(s) - f(t)|}{|f(s)|\,|f(t)|} \leqslant c^2\omega(f,\pi).$$

Следовательно, $\omega(\mathbf{1}/f,\pi) \leqslant c^2\omega(f,\pi) < \varepsilon$. Поэтому $\mathbf{1}/f \in A(T)$.

Теперь предположим, что $f = \text{u-lim}(f_n \mid n \in \omega)$ для некоторой последовательности $(f_n \mid n \in \omega)$ $\mathfrak{C}$-равномерных функций. Для всякого $\varepsilon > 0$ определим такое число $m \in \omega$, что $|f(t) - f_n(t)| < \varepsilon/3$ для всех $n \geqslant m$. Рассмотрим такое покрытие $\pi \equiv (C_i \mid i \in I) \in \mathfrak{C}$, что $\omega(f_m,\pi) < \varepsilon/3$. Тогда

$$|f(s) - f(t)| = |f(s) - f_m(s) + f_m(s) - f_m(t) + f_m(t) - f(t)| \leqslant \\ \leqslant |f(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_m(t)| + |f_m(t) - f(t)| < \varepsilon$$

для всех $s,t \in C_i$. Следовательно, $\omega(f,\pi) < \varepsilon$. Таким образом, функция f также лежит в $\mathrm{U}(T,\mathfrak{C})$. □

Следствие. *Если $\mathcal{S}$ — основа на T, то семейство $\mathcal{S}$-равномерных функций $\mathrm{U}(T,\mathcal{S})$ является ограниченно нормальным.*

2.2. Различие между классами равномерных и измеримых функций

В этом разделе мы доказываем, что класс равномерных функций действительно является отличным от класса измеримых функций.

Пусть T — множество. Определим класс

$$\mathfrak{M}_{\mathrm{b}}(T) \equiv \bigl\{x \mid \exists\, \mathcal{S}\ \bigl(\mathcal{S} - \sigma\text{-основа} \wedge x = \mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{S})\bigr)\bigr\}$$

всех семейств ограниченных функций, измеримых относительно некоторой σ-основы $\mathcal{S}$ на множестве T. С этим классом связан новый класс

$$\mathfrak{U}(T) \equiv \bigl\{x \mid \exists\, \mathfrak{C}\ \bigl(\mathfrak{C} - \text{мультипликативное семейство покрытий,} \\ \text{содержащее одноэлементное покрытие} \wedge x = \mathrm{U}(T, \mathfrak{C})\bigr)\bigr\}$$

всех семейств функций, равномерных относительно некоторого мультипликативного семейства $\mathfrak{C}$ покрытий множества T. Его естественным подклассом является класс

$$\mathfrak{U}_{en}(T) \equiv \bigl\{x \mid \exists\, \mathcal{S}\ \bigl(\mathcal{S} - \text{основа} \wedge x = \mathrm{U}(T, \mathcal{S})\bigr)\bigr\}$$

всех семейств функций, равномерных относительно некоторой основы $\mathcal{S}$ на T.

Для произвольного ансамбля $\mathcal{S}$ на T рассмотрим *коансамбль* co-$\mathcal{S}$, состоящий из всех таких элементов $R \in \mathcal{P}(T)$, что $R = T \setminus S$ для некоторого $S \in \mathcal{S}$.

Теорема 2.2. *Для $T \equiv [0,1]$ справедливо строгое вложение $\mathfrak{M}_{\mathrm{b}}(T) \subsetneqq \mathfrak{U}_{en}(T)$, т. е. класс семейств равномерных функций строго шире класса семейств ограниченных измеримых функций.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}$ — алгебра на T. Предположим, что существует такая σ-основа $\mathcal{Q}$, что $\mathrm{U}(T, \mathcal{H}) = \mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{Q})$. По теореме Хаусдорфа 2.1 семейство $M(T, \mathcal{Q})$ нормально и имеет место равенство $M(T, \mathcal{Q}) = M\bigl(T, \bigl(\operatorname{Coz} M(T, \mathcal{Q})\bigr)_{\eta\sigma}\bigr)$. Далее,

$$\mathrm{U}(T, \mathcal{H}) = \mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{Q}) = \mathrm{M}_{\mathrm{b}}\bigl(T, \bigl(\operatorname{Coz} M(T, \mathcal{Q})\bigr)_{\eta\sigma}\bigr) = \\ = \mathrm{M}_{\mathrm{b}}\bigl(T, \bigl(\operatorname{Coz} \mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{Q})\bigr)_{\eta\sigma}\bigr) = \mathrm{M}_{\mathrm{b}}\bigl(T, \bigl(\operatorname{Coz} \mathrm{U}(T, \mathcal{H})\bigr)_{\eta\sigma}\bigr).$$

Так как $\mathcal{H}$ — алгебра, легко убедиться, что $\mathcal{H} \subset \operatorname{Coz} \mathrm{U}(T, \mathcal{H})$. Для этого достаточно взять произвольное множество $H \in \mathcal{H}$ и определить функцию f на T, положив $f(t) \equiv 1$ при $t \in H$ и $f(t) \equiv 0$ при $t \in T \setminus H$. Следовательно, $\mathcal{H}_\sigma \subset \subset \bigl(\operatorname{Coz} \mathrm{U}(T, \mathcal{H})\bigr)_{\eta\sigma}$ и

$$\mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{H}_\sigma) \subset \mathrm{M}_{\mathrm{b}}\bigl(T, \bigl(\operatorname{Coz} \mathrm{U}(T, \mathcal{H})\bigr)_{\eta\sigma}\bigr) = \mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{Q}) = \mathrm{U}(T, \mathcal{H}).$$

Но $\mathrm{U}(T, \mathcal{H}) \subset \mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{H}_\sigma)$ по лемме 2.3. Значит, $\mathrm{U}(T, \mathcal{H}) = \mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{H}_\sigma)$.

Теперь докажем, что это равенство, вообще говоря, неверно. Для этого предъявим алгебру $\mathcal{H}$, для которой $\mathrm{U}(T, \mathcal{H}) \neq \mathrm{M}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{H}_\sigma)$.

Определим ансамбль $\mathcal{R}_0$ на $T \equiv [0,1]$, состоящий из всех собственных замкнутых интервалов $[x, y] \subset T$, $0 \leqslant x < y \leqslant 1$. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{S}_0 \equiv$ co-$\mathcal{R}_0$, состоящий из всех интервалов $[0,x[$, $0<x<1$, всех интервалов $]y,1]$, $0<y<1$, и всех множеств вида $[0,x[\cup]y,1]$, $0<x<y<1$.

Возьмём канторово совершенное множество $D\subset T$ и его дополнение $C\equiv\equiv T\setminus D$ и положим $\mathcal{R}\equiv\mathcal{R}_0\cup\{D\}$. Тогда $\mathcal{S}\equiv\text{co-}\mathcal{R}=\mathcal{S}_0\cup\{C\}$. Легко убедиться, что $(\mathcal{R}_0)_\eta=\mathcal{R}_0\cup\{[x,x]\mid 0<x<1\}$ и $\mathcal{S}_1\equiv(\mathcal{S}_0)_\eta$ состоит из всех таких S_1, что $S_1=\bigcup(I_m\mid m\in M)$ для некоторых конечных коллекций $(I_m\mid m\in M)$ непересекающихся интервалов I_m одного из следующих типов: $I_m=[0,x[$, $0<x<1$, $I_m=]x,y[$, $0<x<y<1$, $I_m=]y,1]$, $0<y<1$. Следовательно, $\mathcal{R}_\eta=\mathcal{R}_0\cup\cup\{[x,x]\mid 0<x<1\}\cup\{R\cap D\mid R\in\mathcal{R}_0\}$ и $\mathcal{S}_\eta=\mathcal{S}_1\cup\{S_1\cap C\mid S_1\in\mathcal{S}_1\}$.

Рассмотрим ансамбль

$$\mathcal{K}\equiv\{\tilde S\cap\tilde R\mid \tilde S\in\mathcal{S}_\eta\wedge\tilde R\in\mathcal{R}_\eta\}=\mathcal{K}'\cup\mathcal{K}''\cup\mathcal{K}'''.$$

Опишем ансамбли $\mathcal{K}'$, $\mathcal{K}''$ и $\mathcal{K}'''$: $\mathcal{K}'\equiv\{S\cap R\mid S\in\mathcal{S}_1\wedge R\in(\mathcal{R}_0)_\eta\}$, т. е. $\mathcal{K}'$ состоит из замкнутых интервалов $[x,y]$, $0\leqslant x<y\leqslant 1$, $[x,x]$, $0<x<1$, и всех конечных объединений следующих четырёх видов:

$$\begin{aligned}
&[x_1,y_1[\cup]x_2,y_2[\cup\ldots\cup]x_m,y_m], &&0\leqslant x_1<y_1<\ldots<x_m<y_m\leqslant 1,\\
&[x_1,y_1[\cup]x_2,y_2[\cup\ldots\cup]x_m,y_m[, &&0\leqslant x_1<y_1<\ldots<x_m<y_m<1,\\
&]x_1,y_1[\cup]x_2,y_2[\cup\ldots\cup]x_m,y_m], &&0<x_1<y_1<\ldots<x_m<y_m\leqslant 1,\\
&]x_1,y_1[\cup]x_2,y_2[\cup\ldots\cup]x_m,y_m[, &&0<x_1<y_1<\ldots<x_m<y_m<1;
\end{aligned}$$

$\mathcal{K}''\equiv\{K\cap D\mid K\in\mathcal{K}'\}$; $\mathcal{K}'''\equiv\{K\cap C\mid K\in\mathcal{K}'\}$.

Построим функцию ξ на T, такую что $\xi\in\mathrm{M_b}(T,\mathcal{K}_\sigma)$, но $\xi\notin\mathrm{U}(T,\mathcal{K})$.

Рассмотрим множество $\mathcal{J}$ всех интервалов $[0,x|$, $|x,y|$ и $|y,1]$ для всех $0<x<y<1$, где $|$ обозначает одну из скобок $]$, $[$. Ясно, что $\mathcal{J}\subset\mathcal{K}$.

Опишем алгоритм построения интервалов, составляющих множество C; это необходимо для корректного задания функций на C.

Рассмотрим множества A и B всех индексов α и β, состоящих из цифр 1 и 2 и определяемых по индукции следующим образом:

1) $1\in B$;
2) если $\beta\in B$, то $\beta 1,\beta 2\in A$;
3) если $\alpha\in A$, то $\alpha 1,\alpha 2\in B$.

Элементы множества $A\cup B$ будем называть *лексемами*.

Так как лексема $\gamma\in A\cup B$ имеет вид $i_1\ldots i_n$ для единственной последовательности $(i_1,\ldots,i_n)$ чисел $i_k\in\{1,2\}$, то число n является функцией от лексемы γ. Этот факт будем записывать в виде $n=n(\gamma)$.

Опишем теперь алгоритм построения двух коллекций интервалов

$$(I^n_\alpha\mid\alpha\in A\wedge n=n(\alpha)),\quad (J^n_\beta\mid\beta\in B\wedge n=n(\beta)).$$

Положим

$$J^1_1\equiv\left]\frac{x^1_1}{3},\frac{y^1_1}{3}\right[,$$

где $x^1_1\equiv 1$, $y^1_1\equiv 2$.

Пусть все интервалы

$$J^n_\beta \equiv \left]\frac{x^n_\beta}{3^n}, \frac{y^n_\beta}{3^n}\right[$$

определены для $n \in \mathbb{N}$. Определим все интервалы для $n + 1$. Для каждого интервала J^n_β определим интервалы

$$I^{n+1}_{\beta 1} \equiv \left]\frac{u^{n+1}_{\beta 1}}{3^{n+1}}, \frac{v^{n+1}_{\beta 1}}{3^{n+1}}\right[, \quad I^{n+1}_{\beta 2} \equiv \left]\frac{u^{n+1}_{\beta 2}}{3^{n+1}}, \frac{v^{n+1}_{\beta 2}}{3^{n+1}}\right[,$$

полагая

$$u^{n+1}_{\beta 1} \equiv 3x^n_\beta - 2, \quad v^{n+1}_{\beta 1} \equiv 3x^n_\beta - 1, \quad u^{n+1}_{\beta 2} \equiv 3y^n_\beta + 1, \quad v^{n+1}_{\beta 2} \equiv 3y^n_\beta + 2.$$

Для каждого интервала

$$I^{n+1}_\alpha \equiv \left]\frac{u^{n+1}_\alpha}{3^{n+1}}, \frac{v^{n+1}_\alpha}{3^{n+1}}\right[$$

определим интервалы

$$J^{n+1}_{\alpha 1} \equiv \left]\frac{x^{n+1}_{\alpha 1}}{3^{n+1}}, \frac{y^{n+1}_{\alpha 1}}{3^{n+1}}\right[, \quad J^{n+1}_{\alpha 2} \equiv \left]\frac{x^{n+1}_{\alpha 2}}{3^{n+1}}, \frac{y^{n+1}_{\alpha 2}}{3^{n+1}}\right[,$$

полагая

$$x^{n+1}_{\alpha 1} \equiv 3u^{n+1}_\alpha - 2, \quad y^{n+1}_{\alpha 1} \equiv 3u^{n+1}_\alpha - 1, \quad x^{n+1}_{\alpha 2} \equiv 3v^{n+1}_\alpha + 1, \quad y^{n+1}_{\alpha 2} \equiv 3v^{n+1}_\alpha + 2.$$

Теперь определим функцию $\xi\colon T \to [0,1]$, полагая

$$\begin{aligned}
&\xi(x) \equiv \frac{1}{2} && \text{для всех} \quad x \in J^1_1,\\
&\xi(x) \equiv \frac{1}{2^n} && \text{для всех} \quad x \in I^n_\alpha,\\
&\xi(x) \equiv 1 - \frac{1}{2^n} && \text{для всех} \quad x \in J^n_\beta,\\
&\xi(x) \equiv 0 && \text{для всех} \quad x \in D.
\end{aligned}$$

Для всякого открытого интервала $]a,b[\subset \mathbb{R}$ рассмотрим его прообраз $X \equiv \equiv \xi^{-1}\big[\,]a,b[\,\big]$. Он либо пуст, либо является счётным объединением открытых интервалов $]x,y[$ из $\mathcal{J}$, либо является их объединением с множеством D. Так как $D \in \mathcal{K}$ и $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$, то $X \in \mathcal{K}_\sigma$. Поэтому $\xi \in \mathrm{M_b}(T, \mathcal{K}_\sigma)$.

Докажем, что $\xi \notin \mathrm{U}(T,\mathcal{K})$. Рассмотрим последовательность интервалов $I_n \equiv \equiv [1/3^n, 2/3^n]$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Возьмём их середины $z_n \equiv (3/2)\cdot 3^{-n}$. Положим $Z \equiv \{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Рассмотрим произвольное конечное покрытие $\varkappa \equiv (K_p \in \mathcal{K} \mid p \in P)$ множества T. Предположим, что все множества $Z \cap K_p$ конечны. Тогда и множество $Z = \bigcup(Z \cap K_p \mid p \in P)$ конечно, что неверно. Следовательно, множество $Z \cap K_{p_0}$ бесконечно для некоторого $p_0 \in P$. Теперь можно определить числа $n_m \equiv \min\{n \mid n \geqslant m \wedge z_n \in K_{p_0}\}$. Возьмём бесконечную подпоследовательность $y_m \equiv z_{n_m} \equiv 3^{-n_m+1}/2$, лежащую в K_{p_0}.

Из $y_m \notin D$ следует, что $K_{p_0} \notin \mathcal{K}''$. Тогда $K_{p_0} \in \mathcal{K}' \cup \mathcal{K}'''$. Следовательно, существует конечный набор непересекающихся интервалов $(I_l \in \mathcal{J} \mid l \in L)$, таких что $K_{p_0} = \bigcup(I_l \mid l \in L)$ или $K_{p_0} = \bigcup(I_l \setminus D \mid l \in L)$.

Поскольку $I_l = |x_l, y_l|$ и L конечно, найдётся такое $l_0 \in L$, что $x_{l_0} = \min(x_l \mid l \in L)$. Предположим, что $x_{l_0} > 0$. Из $y_m \to 0$ вытекает существование такого m_0, что $y_m < x_{l_0}$ для всех $m \geqslant m_0$. Тогда $y_m \notin K_{p_0}$, что неверно. Таким образом, $x_{l_0} = 0$, т. е. $I_{l_0} = [0, y_{l_0}|$ для некоторого $y_{l_0} > 0$ и существует такое m_1, что $y_m \in [0, y_{l_0}| \setminus D$ для всех $m \geqslant m_1$. Отсюда последовательно получаем, что $\omega(\xi, K_{p_0}) = 1$, $\omega(\xi, \varkappa) = 1$ и, наконец, $\xi \notin \mathrm{U}(T, \mathcal{K})$.

Из определения равномерной функции следует, что $\mathrm{U}(T, \mathcal{K}_\varphi) = \mathrm{U}(T, \mathcal{K})$ для произвольного ансамбля $\mathcal{K}$. Таким образом, нами доказано, что $\mathrm{U}(T, \mathcal{K}_\varphi) = \mathrm{U}(T, \mathcal{K}) \neq \mathrm{M_b}(T, \mathcal{K}_\sigma)$.

Докажем, что $\mathcal{H} \equiv \mathcal{K}_\varphi$ — алгебра. Действительно, мультипликативность $\mathcal{K}$ влечёт аддитивность и мультипликативность $\mathcal{H}$. Из равенства co-$\mathcal{K} = \{R \cup S \mid R \in \mathcal{R}_\varphi \wedge S \in \mathcal{S}_\varphi\}$ следует, что co-$\mathcal{K} \subset \mathcal{R}_\varphi \cup \mathcal{S}_\varphi \subset \mathcal{K}_\varphi \equiv \mathcal{H}$ и co-$\mathcal{H} = (\text{co-}\mathcal{K})_\eta \subset \mathcal{H}$.

Итак, предъявлена алгебра $\mathcal{H}$ на T, такая что $\mathrm{U}(T, \mathcal{H}) \neq \mathrm{M_b}(T, \mathcal{H}_\sigma)$, что завершает доказательство теоремы. $\square$

2.3. Нумерация канторовских интервалов

К сожалению, индексация канторовских интервалов является цифровой лексической, а не числовой. Используя упрощённую гёделевскую нумерацию, можно эту индексацию сделать числовой.

Обозначим через $p_1 \equiv 2, p_2 \equiv 3, \ldots, p_n, \ldots$ возрастающую последовательность всех простых чисел, отличных от единицы.

Рассмотрим лексему $\gamma \equiv i_1 i_2 \ldots i_n$, такую что $i_1 = 1$ и $i_k \in \{1, 2\}$ для всех $k = 2, \ldots, n$. Если n чётно, то $\gamma \in A$; если n нечётно, то $\gamma \in B$. Поставим в соответствие лексеме γ натуральное число $\nu(\gamma) \equiv p_1^{i_1} \ldots p_n^{i_n}$.

В силу единственности представления числа $a \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ в виде произведения $a = p_l^{k_l} \ldots p_m^{k_m}$ для $k_l, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$ отображение $\nu\colon A \cup B \to 2\mathbb{N}$ является инъективным.

Рассмотрим множество

$$\mathbb{S} \equiv \{s \in 2\mathbb{N} \mid \exists n \in \mathbb{N}\ \exists i_2\ \ldots\ \exists i_n \in \{1, 2\}\ (s = 2p_2^{i_2} \ldots p_n^{i_n})\}.$$

Ясно, что оно является образом отображения ν. Следовательно, отображение $\nu\colon A \cup B \to \mathbb{S}$ биективно.

Опишем алгоритм построения по числу $s \in \mathbb{S}$ соответствующего канторовского интервала. Для этого опишем обратное отображение к отображению ν. По определению $s = 2^{i_1} p_2^{i_2} \ldots p_n^{i_n}$, где числа $n, i_1, \ldots, i_n$ определяются по s однозначно. Если число n чётно, то получаем лексему $\alpha = i_1 i_2 \ldots i_n \in A$ и соответствующий канторовский интервал $I_\alpha^{n(\alpha)}$. Если число n нечётно, то получаем $\beta = i_1 i_2 \ldots i_n \in B$ и соответствующий интервал $J_\beta^{n(\beta)}$. Поскольку лексемы α и β определяются по числу s однозначно, мы можем обозначить получившиеся интервалы через K_s.

Таким образом, гёделевская нумерация позволяет записать двойную систему всех канторовских интервалов $\big(I^n_\alpha \mid \alpha \in A \wedge n = n(\alpha)\big)$ и $\big(J^n_\beta \mid \beta \in B \wedge n = n(\beta)\big)$, индексированных лексемами α и β, в виде простой последовательности $(K_s \mid s \in \mathbb{S} \subset \mathbb{N})$, индексированной *натуральным множеством* $\mathbb{S} \subset \mathbb{N}$.

2.4. Симметризуемые функции

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — топологическое пространство. Рассмотрим мультипликативный ансамбль $\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\}$ всех симметризуемых множеств $K \equiv G \cap F$ (см. [22, 55]).

Функции, равномерные относительно ансамбля $\mathcal{K}$, естественно называть *симметризуемыми* (см. [12, 55], в [10] такие функции названы *симметризованными*).

Согласно предложению 2.1 пространство $\mathrm{S}(T, \mathcal{G}) \equiv \mathrm{U}(T, \mathcal{K})$ всех симметризуемых функций на $(T, \mathcal{G})$ содержит единицу $\mathbf{1}$ и является усекаемым, линейным, решёточным и замкнутым относительно равномерной сходимости. Ясно, что $\mathrm{S_b}(T, \mathcal{G}) = \mathrm{S}(T, \mathcal{G})$.

На хаусдорфовом пространстве $(T, \mathcal{G})$ рассмотрим также семейство $\mathrm{SC^l_b}(T, \mathcal{G})$ всех ограниченных полунепрерывных снизу функций f, т. е. функций, для которых $f^{-1}\big[\,]x, \infty[\,\big] \in \mathcal{G}$ для каждого $x \in \mathbb{R}$. Так как это семейство не является линейным пространством, Ф. Хаусдорф [24, 38.1] рассмотрел решёточное линейное пространство $\mathrm{SC_b}(T, \mathcal{G}) \equiv \{f - g \mid f, g \in \mathrm{SC^l_b}(T, \mathcal{G})\}$. Элементы из $\mathrm{SC_b}(T, \mathcal{G})$ естественно назвать *ограниченными полунепрерывными функциями*. Отметим, что $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ совпадает с равномерным замыканием пространства $\mathrm{SC_b}(T, \mathcal{G})$ (см. [12, 55]).

Очевидным следствием леммы 2.3 является следующая лемма.

Лемма 2.4. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — топологическое пространство. Тогда*

$$C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G}) \equiv \mathrm{M_b}(T, \mathcal{G}) \subset \mathrm{M_b}(T, \mathcal{K}) \subset \mathrm{S}(T, \mathcal{G}) \subset \mathrm{M_b}(T, \mathcal{K}_\sigma).$$

С ансамблем $\mathcal{K}$ свяжем булеву алгебру $\mathcal{A}$ всех *александровских множеств*, т. е. множеств, которые являются конечными объединениями симметризуемых множеств. Эта алгебра широко использовалась А. Д. Александровым в [26].

Пусть $\mathcal{E}$ — ансамбль на T. Функция $f \in F(T)$ называется *$\mathcal{E}$-ступенчатой функцией* или *функцией, ступенчатой относительно ансамбля* $\mathcal{E}$, если существуют конечные коллекции $(x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I)$ и $(E_i \in \mathcal{E} \mid i \in I)$, такие что $f = \sum(x_i \chi(E_i) \mid i \in I)$. Семейство всех $\mathcal{E}$-ступенчатых функций на T будем обозначать через $\mathrm{St}(T, \mathcal{E})$.

Легко убедиться, что $\mathrm{St}(T, \mathcal{A}) \subset \mathrm{S}(T, \mathcal{G})$.

Лемма 2.5. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — топологическое пространство и $f \in \mathrm{S}(T, \mathcal{G})$. Тогда существует неубывающая последовательность $(f_n \mid n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A}$-ступенчатых функций, такая что $f = \text{u-}\lim(f_n \mid n \in \mathbb{N})$.*

Доказательство. По определению симметризуемой функции для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует конечное покрытие $(K_{in} \in \mathcal{K} \mid i \in I)$ множества T, такое что $\omega(f, K_{in}) < 1/n$ для всех $i \in I$. Так как $\mathcal{A}$ — алгебра, отсюда вытекает, что найдётся такая конечная коллекция $(A_{jn} \in \mathcal{A} \mid j \in J)$ непересекающихся множеств, покрывающих T, что $\omega(f, A_{jn}) < 1/n$ для всех $j \in J$.

Положим $g_n(t) \equiv \inf(f(t) \mid t \in A_{jn})$ для $t \in A_{jn}$, $j \in J$, $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что все функции g_n принадлежат $\mathrm{St}(T, \mathcal{A})$. Определим неубывающую последовательность $(f_n \in F(T) \mid n \in \mathbb{N})$, полагая $f_n \equiv \sup(g_k \mid k \in n+1)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Так как $\mathcal{A}$ — алгебра, все функции f_n также являются $\mathcal{A}$-ступенчатыми.

Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и такое $N \in \mathbb{N}$, что $1/N < \varepsilon$. Для каждого $n > N$ имеем, что $0 \leqslant f(t) - f_n(t) \leqslant f(t) - f_N(t) \leqslant f(t) - g_N(t) \leqslant 1/N < \varepsilon$ для всех $t \in T$. □

Множество $P \subset T$ назовём *мажорируемым* функцией $u \in F(T)$, если $\chi(P) \leqslant u$. Функцию $f \in F(T)$ назовём *мажорируемой* функцией $u \in F(T)$, если $|f| \leqslant u$.

Пусть $A(T)$ — фиксированное функциональное решёточное линейное пространство на T.

С каждым функциональным семейством $E(T)$ на T свяжем его подсемейство $E_{\mathrm{m}}\big(T, A(T)\big) \equiv \{f \in E(T) \mid \exists\, u \in A(T)\ (|f| \leqslant u)\}$ всех функций $f \in E(T)$, мажорируемых некоторыми функциями из $A(T)$. Если $E(T)$ является решёточным линейным пространством, то таким же является и $E_{\mathrm{m}}\big(T, A(T)\big)$.

Аналогичным образом с каждым ансамблем $\mathcal{E}$ на T свяжем его подансамбль $\mathcal{E}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big) \equiv \{E \in \mathcal{E} \mid \exists\, u \in A(T)\ (\chi(E) \leqslant u)\}$ всех множеств $E \in \mathcal{E}$, мажорируемых некоторыми функциями из $A(T)$.

Лемма 2.6. *Пусть $A(T)$ и $E(T)$ — функциональные семейства на T, $\mathcal{E}$ — ансамбль на T. Тогда*

$$E_{\mathrm{m}}\big(T, A(T)\big) = E_{\mathrm{m}}\Big(T, E_{\mathrm{m}}\big(T, A(T)\big)\Big), \quad \mathcal{E}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big) = \mathcal{E}_{\mathrm{m}}\Big(E_{\mathrm{m}}\big(T, A(T)\big)\Big).$$

Доказательство. Положим $B(T) \equiv E_{\mathrm{m}}\big(T, A(T)\big)$ и $D(T) \equiv E_{\mathrm{m}}\big(T, B(T)\big)$. Если $f \in B(T)$, то из $|f| \leqslant u \in A(T) \subset B(T)$ вытекает, что $f \in D(T)$. Обратно, если $g \in D(T)$, то $|g| \leqslant v \in B(T)$, но $v \leqslant w$ для некоторой функции $w \in A(T)$. Следовательно, $|g| \leqslant w$ и $g \in B(T)$. Таким образом, $B(T) = D(T)$.

Применяя доказанное к семейству $E(T) \equiv \{\chi(E) \mid E \in \mathcal{E}\}$, устанавливаем, что $\mathcal{E}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big) = \mathcal{E}_{\mathrm{m}}\big(B(T)\big)$. □

Рассмотрим, в частности, ансамбли $\mathcal{K}_{\mathrm{m}} \equiv \mathcal{K}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big) \equiv \mathcal{K}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ и $\mathcal{A}_{\mathrm{m}} \equiv \mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big) \equiv \mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$. Ясно, что $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}$ тогда и только тогда, когда $A = \bigcup(K_i \mid i \in I)$ для некоторой конечной коллекции $(K_i \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}} \mid i \in I)$. Также рассмотрим подсемейства $\mathrm{St}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{A}(T, \mathcal{G}), A(T)\big)$ и $\mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ ступенчатых и симметризуемых соответственно функций, мажорируемых функциями семейства $A(T)$. Они являются, очевидно, решёточными линейными пространствами.

Лемма 2.7. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — решёточное линейное подпространство в $F(T)$. Тогда* $\mathrm{St}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{A}, A(T)\big) = \mathrm{St}\Big(T, \mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big)\Big)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{St_m}$, т. е. $|f| \leqslant u$ для некоторой $u \in A(T)$ и $f = \sum(x_i\chi(A_i) \mid i \in I)$ для некоторых конечных коллекций $(x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I)$ и $(A_i \in \mathcal{A} \mid i \in I)$. Так как $\mathcal{A}$ — алгебра, можно считать, что множества A_i попарно не пересекаются и $x_i \neq 0$ для всех $i \in I$. Следовательно, из $|f| = \sum(|x_i|\chi(A_i) \mid i \in I) \leqslant u$ вытекает, что $\chi(A_i) \leqslant (1/|x_i|)u \in A(T)$, поэтому $A_i \in \mathcal{A}_\mathrm{m}$ и $f \in \mathrm{St}(T, \mathcal{A}_\mathrm{m})$.

Обратно, пусть $f \in \mathrm{St}(T, \mathcal{A}_\mathrm{m})$, т. е. $f = \sum(x_i\chi(A_i) \mid i \in I)$ для некоторых конечных коллекций $(x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I)$ и $(A_i \in \mathcal{A}_\mathrm{m} \mid i \in I)$. По определению $\chi(A_i) \leqslant u_i \in A(T)$, следовательно,

$$|f| \leqslant \sum(|x_i|\chi(A_i) \mid i \in I) \leqslant \sum(|x_i|u_i \mid i \in I) \in A(T).$$

Таким образом, $f \in \mathrm{St_m}$. □

3. Поточечно σ-непрерывные функционалы и их продолжение

3.1. Характеризации σ-непрерывных функционалов

Лемма 3.1. *Пусть $A(T)$ — решёточное линейное пространство, а φ — положительный линейный функционал на $A(T)$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *функционал φ поточечно непрерывен* [*σ-непрерывен*];
2) *для каждой сети $(f_m \in A(T)_+ \mid m \in M)$* [*последовательности $(f_m \in A(T)_+ \mid m \in M \subset \omega)$*] *свойство $(f_m \mid m \in M) \downarrow 0$ в $F(T)$ влечёт свойство $(\varphi f_m \mid m \in M) \downarrow 0$*;
3) *для каждой сети $(f_m \in A(T)_+ \mid m \in M)$* [*последовательности $(f_m \in A(T)_+ \mid m \in M \subset \omega)$*] *и функции $f \in A(T)$ свойство $(f_m \mid m \in M) \uparrow f$ в $F(T)$ влечёт свойство $(\varphi f_m \mid m \in M) \uparrow \varphi f$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $f_m \downarrow 0$. Тогда $\varphi f_m \downarrow$ и $\lim \varphi f_m = 0$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $(f_m \in A(T) \mid m \in M) \uparrow f \in A(T)$. Тогда $(f - f_m) \downarrow 0$ влечёт $(\varphi f - \varphi f_m) \downarrow 0$, т. е. $\varphi f_m \uparrow \varphi f$.

Если $f_m \downarrow f$, то из $(f_m - f) \downarrow 0$ вытекает, что $(\varphi f_m - \varphi f) \downarrow 0$, т. е. $\varphi f_m \downarrow \varphi f$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Пусть $f_m \uparrow f$. Тогда $f - f_m \downarrow 0$, откуда следует, что $(\varphi f - \varphi f_m) \downarrow 0$, и поэтому $\varphi f_m \uparrow \varphi f$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $f_m \downarrow 0$. Выберем некоторое $n \in M$. Тогда $(f_n - f_m \mid m \in M) \uparrow f_n$. Рассмотрим множество $L \equiv \{l \in M \mid l \geqslant n\}$. Для каждого $m \in M$ существует такое $l \in L$, что $l \geqslant m$. Следовательно, $f_l \leqslant f_m$, откуда следует, что $f_n \geqslant f_n - f_l \geqslant f_n - f_m$, и поэтому $\big((f_n - f_l) \in A(T)_+ \mid l \in L\big) \uparrow f_n$ в $F(T)$. Согласно условию имеем $(\varphi f_n - \varphi f_l \mid l \in L) \uparrow \varphi f_n$. Это влечёт $(\varphi f_l \mid l \in L) \downarrow 0$, и окончательно имеем $(\varphi f_m \mid m \in M) \downarrow 0$. □

Мы будем использовать следующее *свойство Дини* семейства $A(T)$:

(D) если сеть $(f_m \in A(T) \mid m \in M)$ сходится поточечно к функции $f \in A(T)$, то эта сходимость является равномерной на каждом компактном множестве $C \in \mathcal{C}$.

По теореме Дини (см., например, [25, 3.2.18; 50, 19.3.5]) если $A(T)$ содержится в решёточном линейном пространстве $C(T, \mathcal{G})$ всех непрерывных функций на хаусдорфовом пространстве $(T, \mathcal{G})$, то $A(T)$ обладает свойством (D).

Лемма 3.2. *Пусть $A(T)$ — решёточное линейное подпространство в $\mathrm{F_b}(T)$ со свойством* (D) *и φ — ограниченный вполне локально узкий линейный функционал на $A(T)$. Тогда функционал φ является поточечно непрерывным.*

Доказательство. Сначала предположим, что функционал φ положителен. Пусть $(f_m \in A(T)_+ \mid m \in M) \downarrow 0$ в $F(T)$. Возьмём произвольные $\varepsilon > 0$ и $m_0 \in M$. Тогда для $u \equiv f_{m_0}/\|f_{m_0}\|_u$, $G \equiv T$ и $\beta \equiv \varepsilon/\|f_{m_0}\|_u$ найдутся компактное множество $C \subset G$ и число $\delta > 0$, такие что выполнение условий $f \in A(T)$, $|f| \leqslant \chi(G) \wedge u$ и $|f(t)| \leqslant \delta$ для всех $t \in C$ влечёт неравенство $\varphi f < \beta$.

Положим $\gamma \equiv \delta\|f_{m_0}\|_u$. По свойству Дини существует такое $n_0 \in M$, что $f_m(t) < \gamma$ для всех $t \in C$ и $m \geqslant n_0$. Возьмём такое $l \in M$, что $l \geqslant m_0$ и $l \geqslant n_0$. Если $m \geqslant l$, то, поскольку $f_m \leqslant f_{m_0}$, имеем $g_m \equiv f_m/\|f_{m_0}\|_u \leqslant u \leqslant \chi(G)$. Следовательно, так как $g_m \in A(T)_+$, $g_m \leqslant \chi(G) \wedge u$ и $g_m(t) \leqslant f_m(t)/\|f_{m_0}\|_u < \gamma/\|f_{m_0}\|_u = \delta$ для всех $t \in C$, получаем $\varphi g_m < \beta$. Отсюда следует, что $\varphi f_m < \beta\|f_{m_0}\|_u = \varepsilon$. С учётом леммы 3.1 это означает, что функционал φ поточечно непрерывен.

Если φ — ограниченный вполне локально узкий функционал, то по лемме 1.2 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — положительные ограниченные вполне локально узкие функционалы. По вышедоказанному они поточечно непрерывны, а потому и φ будет таковым. □

Следствие. *Пусть $A(T)$ — решёточное линейное подпространство в $\mathrm{F_b}(T)$ со свойством* (D). *Тогда $A(T)^{\vartriangle} = A(T)^{\triangledown}$.*

3.2. Даниэлевские и σ-даниэлевские функции

Зафиксируем некоторое усекаемое решёточное линейное функциональное пространство $A(T)$ и положительный поточечно σ-непрерывный линейный функционал $\varphi\colon A(T) \to \mathbb{R}_+$. Будем строить продолжения функционала φ некоторым упрощённым вариантом метода Даниэля, описанного в [40, III] и использованного в [16, 17].

Рассмотрим семейство $\mathrm{S}^\tau\bigl(T, A(T)\bigr)$ всех функций $g \in F(T)$, таких что $g = \sup(f_m \mid m \in M)$ в $F(T)$ для некоторой неубывающей сети $(f_m \in A(T) \mid m \in M)$ и $g \leqslant f$ для некоторой функции $f \in A(T)$. Такие функции будем называть *супремальными для* $A(T)$. Также рассмотрим семейство $\mathrm{I}^\tau\bigl(T, A(T)\bigr)$ всех функций $h \in F(T)$, таких что $h = \inf(f_m \mid m \in M)$ в $F(T)$ для некоторой невозрастающей сети $(f_m \in A(T) \mid m \in M)$ и $h \geqslant f$ для некоторой функции $f \in A(T)$. Такие функции будем называть *инфимальными для* $A(T)$.

Если вместо произвольных сетей используются только последовательности $(f_m \in A(T) \mid m \in M \subset \omega)$, то рассмотрим соответственно семейство $\mathrm{S}^\sigma\big(T, A(T)\big)$ всех *σ-супремальных функций для* $A(T)$ и семейство $\mathrm{I}^\sigma\big(T, A(T)\big)$ всех *σ-инфимальных функций для* $A(T)$. Легко убедиться, что

$$A(T) \subset \mathrm{S}^\sigma\big(T, A(T)\big) \subset \mathrm{S}^\tau\big(T, A(T)\big) \subset \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big),$$
$$A(T) \subset \mathrm{I}^\sigma\big(T, A(T)\big) \subset \mathrm{I}^\tau\big(T, A(T)\big) \subset \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big).$$

В следующей лемме мы собрали необходимые нам свойства этих семейств из [40, III.1]. Для краткости здесь Y обозначает $\mathrm{S}^\tau\big(T, A(T)\big)$ или $\mathrm{S}^\sigma\big(T, A(T)\big)$, а Z обозначает $\mathrm{I}^\tau\big(T, A(T)\big)$ или $\mathrm{I}^\sigma\big(T, A(T)\big)$.

Лемма 3.3. *Семейства Y и Z относительно операций в $F(T)$ обладают следующими свойствами*:

1) $\sum(a_i g_i \mid i \in I) \in Y$ *и* $\sum(a_i h_i \mid i \in I) \in Z$ *для любых конечных коллекций* $(a_i \in \mathbb{R}_+ \mid i \in I)$, $(g_i \in Y \mid i \in I)$ *и* $(h_i \in Z \mid i \in I)$, *т. е.* Y *и* Z *являются конусами*;
2) $g_1 \wedge g_2 \in Y$ *для любых* $g_1, g_2 \in Y$ *и* $h_1 \vee h_2 \in Z$ *для любых* $h_1, h_2 \in Z$;
3) $g_1 \vee g_2 \in Y$ *для любых* $g_1, g_2 \in Y$, *таких что* $g_1, g_2 \leqslant g \in Y$, *и* $h_1 \wedge h_2 \in Z$ *для любых* $h_1, h_2 \in Z$, *таких что* $h_1, h_2 \geqslant h \in Z$;
4) $g \wedge \mathbf{1} \in Y$, $g \vee (-\mathbf{1}) \in Y$, $h \wedge \mathbf{1} \in Z$ *и* $h \vee (-\mathbf{1}) \in Z$ *для любых функций* $g \in Y$ *и* $h \in Z$;
5) $-g \in Z$ *и* $-h \in Y$ *для любых* $g \in Y$ *и* $h \in Z$.

Определим на $\mathrm{S}^\tau\big(T, A(T)\big)$ вещественный функционал $\overline{\varphi}$, полагая

$$\overline{\varphi} g \equiv \sup\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \leqslant g\}$$

для каждого $g \in \mathrm{S}^\tau\big(T, A(T)\big)$. Аналогичным образом определим на $\mathrm{I}^\tau\big(T, A(T)\big)$ вещественный функционал $\underline{\varphi}$, полагая

$$\underline{\varphi} h \equiv \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant h\}$$

для каждого $h \in \mathrm{I}^\tau\big(T, A(T)\big)$. Ясно, что $\overline{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ являются продолжениями функционала φ.

Лемма 3.4. *Функционал $\overline{\varphi}$ на множестве $Y \equiv \mathrm{S}^\tau\big(T, A(T)\big)$ и функционал $\underline{\varphi}$ на множестве $Z \equiv \mathrm{I}^\tau\big(T, A(T)\big)$ обладают следующими свойствами*:

1) $\overline{\varphi}\big(\sum(a_i g_i \mid i \in I)\big) = \sum(a_i \overline{\varphi} g_i \mid i \in I)$ *и* $\underline{\varphi}\big(\sum(a_i h_i \mid i \in I)\big) = \sum(a_i \underline{\varphi} h_i \mid i \in I)$ *для любых конечных коллекций* $(a_i \in \mathbb{R}_+ \mid i \in I)$, $(g_i \in Y \mid i \in I)$ *и* $(h_i \in Z \mid i \in I)$;
2) $\overline{\varphi}$ *и* $\underline{\varphi}$ *возрастают*;
3) $\underline{\varphi} v \leqslant \overline{\varphi} u \leqslant \underline{\varphi} w$ *для любых функций* $u \in Y$ *и* $v, w \in Z$, *таких что* $v \leqslant u \leqslant w$;
4) $\underline{\varphi}(-g) = -\overline{\varphi}(g)$ *и* $\overline{\varphi}(-h) = -\underline{\varphi}(h)$ *для любых функций* $g \in Y$ *и* $h \in Z$;

5) $(\overline{\varphi}g_m \mid m \in M) \uparrow \overline{\varphi}g$ *для любой сети* $(g_m \in Y \mid m \in M)$ *и функции* $g \in Y$, *такой что* $(g_m \mid m \in M) \uparrow g$ *в* $F(T)$.

Эта лемма, как и следующее предложение, доказаны в [40, III.2].

Определим на $\mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$ вещественные функционалы $\varphi^\vee$ и $\varphi_\vee$, полагая

$$\varphi^\vee f \equiv \inf\big\{\overline{\varphi}g \mid g \in \mathrm{S}^\tau\big(T, A(T)\big) \wedge g \geqslant f\big\},$$
$$\varphi_\vee f \equiv \sup\big\{\underline{\varphi}h \mid h \in \mathrm{I}^\tau\big(T, A(T)\big) \wedge h \leqslant f\big\}$$

для каждой функции $f \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$. Разумеется, $\varphi^\vee$ и $\varphi_\vee$ являются продолжениями функционалов $\overline{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$ соответственно.

Предложение 3.1. *Функционалы* $\varphi^\vee$ *и* $\varphi_\vee$ *на* $\mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$ *обладают следующими свойствами*:

1) $\varphi^\vee(af) = a\varphi^\vee f$ *и* $\varphi_\vee(af) = a\varphi_\vee f$ *для любых* $a \in \mathbb{R}_+$ *и* $f \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$;
2) $\varphi^\vee(g+h) \leqslant \varphi^\vee g + \varphi^\vee h$ *и* $\varphi_\vee(g+h) \geqslant \varphi_\vee g + \varphi_\vee h$ *для любых* $g, h \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$;
3) $\varphi^\vee$ *и* $\varphi_\vee$ *возрастают*;
4) $\varphi_\vee f \leqslant \varphi^\vee f$ *для любого* $f \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$;
5) $\varphi^\vee(-f) = -\varphi_\vee f$ *и* $\varphi_\vee(-f) = -\varphi^\vee f$ *для любого* $f \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$;
6) $(\varphi^\vee f_n \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow \varphi^\vee f$ *для любых функции* $f \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$ *и последовательности* $\big(f_n \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big) \mid n \in \mathbb{N}\big)$, *таких что* $(f_n \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow f$ *в* $F(T)$.

Кроме того, определим на $\mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$ вещественные функционалы $\varphi^\wedge$ и $\varphi_\wedge$, полагая

$$\varphi^\wedge f \equiv \inf\big\{\overline{\varphi}g \mid g \in \mathrm{S}^\sigma\big(T, A(T)\big) \wedge g \geqslant f\big\},$$
$$\varphi_\wedge f \equiv \sup\big\{\underline{\varphi}h \mid h \in \mathrm{I}^\sigma\big(T, A(T)\big) \wedge h \leqslant f\big\}$$

для $f \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$. Функционалы $\varphi^\wedge$ и $\varphi_\wedge$ также являются продолжениями функционалов $\overline{\varphi}$ и $\underline{\varphi}$, и для них справедливы все утверждения предложения 3.1.

Функцию $f \in \mathrm{F}(T)$ назовём *даниэлевской*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $g \in \mathrm{S}^\tau\big(T, A(T)\big)$ и $h \in \mathrm{I}^\tau\big(T, A(T)\big)$, такие что $h \leqslant f \leqslant g$ и $\overline{\varphi}g - \underline{\varphi}h < \varepsilon$. Семейство всех таких функций обозначим через $\mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$. Ясно, что $\mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi) \subset \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$ и что $\mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi) = \big\{f \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big) \mid \varphi^\vee f = \varphi_\vee f\big\}$.

Аналогичным образом функцию $f \in \mathrm{F}(T)$ назовём *σ-даниэлевской*, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют функции $g \in \mathrm{S}^\sigma\big(T, A(T)\big)$ и $h \in \mathrm{I}^\sigma\big(T, A(T)\big)$, такие что $h \leqslant f \leqslant g$ и $\overline{\varphi}g - \underline{\varphi}h < \varepsilon$. Семейство всех таких функций обозначим через $\mathrm{D}^\sigma(T, A(T), \varphi)$. Ясно, что $\mathrm{D}^\sigma(T, A(T), \varphi) \subset \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$ и что $\mathrm{D}^\sigma(T, A(T), \varphi) = \big\{f \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big) \mid \varphi^\wedge f = \varphi_\wedge f\big\}$.

Если функционал φ является поточечно непрерывным, то $\varphi^\vee f = \varphi_\vee f$ для каждого $f \in \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$. Поэтому мы можем определить вещественный функционал $\check{\varphi}$ на D^τ, полагая $\check{\varphi} f \equiv \varphi^\vee f = \varphi_\vee f$.

Если функционал φ является поточечно σ-непрерывным, то $\varphi^\wedge f = \varphi_\wedge f$ для каждого $f \in \mathrm{D}^\sigma(T, A(T), \varphi)$. Поэтому мы можем определить вещественный функционал $\hat{\varphi}$ на D^σ, положив $\hat{\varphi} f \equiv \varphi^\wedge f = \varphi_\wedge f$.

Теорема 3.1. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ *— хаусдорфово пространство,* $A(T)$ *— усекаемое решёточное линейное функциональное пространство на нём,* φ *— положительный поточечно непрерывный* [σ*-непрерывный*] *линейный функционал на* $A(T)$. *Тогда*

1) *семейство* $\mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$ [*соответственно* $\mathrm{D}^\sigma(T, A(T), \varphi)$] *является решёточным линейным пространством*;
2) *справедливо вложение* $\mathrm{S}^\tau\big(T, A(T)\big) \cup \mathrm{I}^\tau\big(T, A(T)\big) \subset \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$ [*соответственно* $\mathrm{S}^\sigma\big(T, A(T)\big) \cup \mathrm{I}^\sigma\big(T, A(T)\big) \subset \mathrm{D}^\sigma(T, A(T), \varphi)$];
3) *функционал* $\check{\varphi}$ [*соответственно* $\hat{\varphi}$] *является линейным положительным поточечно* σ*-непрерывным продолжением функционала* φ.

Доказательство можно найти в [40, III.3].

3.3. Свойства (E) и (E_σ) функциональных семейств

Для продолжения [σ-]непрерывных функционалов с некоторых подпространств $A(T) \subset \mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ на более широкие подпространства (см. раздел 3.4, теорема 3.2) нам потребуются два новых свойства функциональных семейств, введённых в [9].

Скажем, что семейство $A(T)$ *обладает свойством* (E) [(E_σ)], если выполнены следующие три условия:

(i) для любых $G \in \mathcal{G}$ и $u \in A(T)_+$ семейство $A(T)$ огибает (свойства огибания и σ-огибания определены в разделе 1.2) [σ-огибает] снизу функцию $\chi(G) \wedge u$;

(ii) для любых $F \in \mathcal{F}$, $C \in \mathcal{C}$ и $u \in A(T)_+$ семейство $A(T)$ огибает [σ-огибает] сверху функции $\chi(F) \wedge u$ и $\chi(C)$;

(iii) для любого $G \in \mathcal{G}$ и любого компактного подмножества $C \subset G$ найдётся такая функция $v \in A(T)$, что $\chi(C) \leqslant v \leqslant \chi(G)$.

Ясно, что свойство (E_σ) является более сильным, чем свойство (E). Покажем, что интересующие нас пространства $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$, $\mathrm{S_c}(T, \mathcal{G})$, $C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$ и $C_\mathrm{c}(T, \mathcal{G})$ обладают этими свойствами.

Лемма 3.5. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $(T, \mathcal{G})$ *— хаусдорфово пространство, то* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ *и* $\mathrm{S_c}(T, \mathcal{G})$ *обладают свойством* (E_σ);
2) *если* $(T, \mathcal{G})$ *— тихоновское пространство, то* $C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$ *обладает свойством* (E);
3) *если* $(T, \mathcal{G})$ *— локально компактное пространство, то* $C_\mathrm{c}(T, \mathcal{G})$ *обладает свойством* (E).

Доказательство. Докажем утверждение 1). Поскольку все открытые и замкнутые (т. е. и все компактные) множества являются симметризуемыми, то $\chi(G), \chi(F) \in \mathrm{S}(T, \mathcal{G})$, $\chi(C) \in \mathrm{S_c}(T, \mathcal{G})$ для всех $G \in \mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F}$, $C \in \mathcal{C}$. Тогда при любой $u \in \mathrm{S}(T, \mathcal{G})_+$ $[u \in \mathrm{S_c}(T, \mathcal{G})_+]$ и функции $\chi(G) \wedge u$, $\chi(F) \wedge u$, $\chi(C)$ будут принадлежать $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ [соответственно $\mathrm{S_c}(T, \mathcal{G})$].

Докажем утверждение 2). Пусть $G \in \mathcal{G}$, $u \in C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})_+$. Рассмотрим множества

$$\Phi \equiv \bigl\{f \in C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G}) \mid 0 \leqslant f \leqslant \mathbf{1} \wedge \exists\, t \in G\ (f(t) = 1) \wedge f[T \setminus G] = \{0\}\bigr\}$$

и $\Psi \equiv \{f \wedge u \mid f \in \Phi\}$. Ясно, что $f_\Psi \equiv \sup \Psi \leqslant \chi(G) \wedge u$. Возьмём произвольное $t_0 \in G$. По определению тихоновского пространства существует функция $f \in C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$, такая что $0 \leqslant f \leqslant \mathbf{1}$, $f(t_0) = 1$ и $f[T \setminus G] = \{0\}$. Тогда

$$(\chi(G) \wedge u)(t_0) = u(t_0) \wedge 1 = (f \wedge u)(t_0) \leqslant f_\Psi(t_0) \leqslant (\chi(G) \wedge u)(t_0).$$

Следовательно, $\chi(G) \wedge u = \sup \Psi$.

Положим

$$\Xi \equiv \{h \in C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G}) \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, g_0, g_1, \ldots, g_{n-1} \in \Psi\ (h = g_0 \vee g_1 \vee \ldots \vee g_{n-1})\}.$$

Тогда $(h \mid h \in \Xi)$ является неубывающей сетью, ибо для любых $h_1, h_2 \in \Xi$ и $h \equiv h_1 \vee h_2 \in \Xi$ имеем $h \geqslant h_1$, $h \geqslant h_2$. Таким образом, семейство $C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$ огибает снизу функцию $\chi(G) \wedge u$.

Теперь пусть $F \in \mathcal{F}$, $u \in C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})_+$. Обозначим $G \equiv T \setminus F$ и рассмотрим семейства

$$\begin{aligned}\Phi_1 \equiv \{f \in C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G}) \mid \exists\, g \in \Phi\ (f = 1 - g)\} &= \\ = \bigl\{f \in C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G}) \mid 0 \leqslant f \leqslant \mathbf{1} \wedge \exists\, t \in G\ &(f(t) = 0) \wedge f[F] = \{1\}\bigr\}\end{aligned}$$

и $\Psi_1 \equiv \{f \wedge u \mid f \in \Phi_1\}$. Ясно, что $f_{\Psi_1} \equiv \inf \Psi_1 \geqslant \chi(F) \wedge u$ и для любого $t \in F$ имеем $(\chi(F) \wedge u)(t) = u(t) \wedge 1 = f_{\Psi_1}(t)$. Возьмём произвольное $t_0 \in G$. По определению тихоновского пространства существует функция $f \in C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$, такая что $0 \leqslant f \leqslant \mathbf{1}$, $f(t_0) = 0$ и $f[F] = \{1\}$. Тогда

$$0 = (\chi(F) \wedge u)(t_0) = (f \wedge u)(t_0) \geqslant f_{\Psi_1}(t_0) \geqslant (\chi(F) \wedge u)(t_0) = 0.$$

Следовательно, $\chi(F) \wedge u = \inf \Psi_1$.

Теперь, положив

$$\Xi_1 \equiv \{h \in C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G}) \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, g_0, g_1, \ldots, g_{n-1} \in \Psi_1\ (h = g_0 \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge g_{n-1})\},$$

получим невозрастающую сеть $(h \mid h \in \Xi_1) \downarrow \chi(F) \wedge u$, т. е. семейство $C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$ огибает сверху функцию $\chi(F) \wedge u$.

В частности, мы увидели, что для любого $C \in \mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ семейство $C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$ огибает сверху функцию $\chi(C) \wedge \mathbf{1} = \chi(C)$.

Наконец, пусть $G \in \mathcal{G}$, $C \in \mathcal{C}$, $C \subset G$. По определению тихоновского пространства для всякой точки $s \in C$ существует функция $f \in C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$, такая что $0 \leqslant f \leqslant (3/2)\mathbf{1}$, $f(s) = 3/2$ и $f[T \setminus G] = \{0\}$. Рассмотрим открытую окрестность

$U \equiv f^{-1}\bigl[\,]1,2[\,\bigr]$ точки s. Из покрытия компактного множества C всеми такими окрестностями выберем конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_n$, а соответствующие им функции обозначим через $f_1, \ldots, f_n$. Функция $v \equiv (f_1 \vee \ldots \vee f_n) \wedge \mathbf{1} \in C_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ обладает свойством $\chi(C) \leqslant v \leqslant \chi(G)$.

Докажем утверждение 3). Заметим, что для любой функции $u \in C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})_+$ семейства Ψ, Ξ, Ψ_1 и Ξ_1, построенные в доказательстве утверждения 2), лежат в $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$. Поэтому здесь остаётся доказать только, что семейство $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$ огибает сверху функцию $\chi(C)$.

Возьмём произвольные $C \in \mathcal{C}$ и $s \notin C$. Согласно [25, 3.3.2] существует такое открытое множество U, что $C \subset U \subset \operatorname{cl} U \subset T \setminus \{s\}$ и $\operatorname{cl} U \in \mathcal{C}$.

Поскольку пространство $(T, \mathcal{G})$ локально компактно, у каждой точки $t \in C$ найдётся такая открытая окрестность G', что $\operatorname{cl} G' \in \mathcal{C}$. Из покрытия компактного множества C всеми такими окрестностями выберем конечное подпокрытие $G'_0, \ldots, G'_{n-1}$. Положим $G_i \equiv G'_i \cap U$, при этом $\operatorname{cl} G_i = \operatorname{cl} G'_i \cap \operatorname{cl} U \in \mathcal{C}$. Тогда $C \subset G \equiv G_1 \cup \ldots \cup G_{n-1}$ и $K \equiv \operatorname{cl} G = \bigcup(\operatorname{cl} G_i \mid i \in n) \in \mathcal{C}$. Обозначим $H \equiv T \setminus K$, $F \equiv K \setminus G$.

В силу [25, 3.1.9] подпространство $(K, \mathcal{G}|K)$ пространства $(T, \mathcal{G})$ нормально. Тогда по лемме Урысона [25, 1.5.10] существует непрерывная на K функция f, такая что $0 \leqslant f \leqslant \mathbf{1}$, $f[F] = \{0\}$ и $f[C] = \{1\}$. Продолжим f нулём на H и обозначим получившуюся функцию на T через $\tilde{f}$. Докажем её непрерывность на всём T. Для любого интервала $I \equiv\,]a,b[$ имеем $f^{-1}[I] \in \mathcal{G}|K$, т. е. $f^{-1}I = O \cap K$ для некоторого $O \in \mathcal{G}$. Если $a < b \leqslant 0$, то $\tilde{f}^{-1}[I] = \varnothing \in \mathcal{G}$. Если $0 \leqslant a < b$, то $\tilde{f}^{-1}[I] = G \cap f^{-1}[I] = G \cap (O \cap K) = G \cap O \in \mathcal{G}$. Если $a < 0 < b$, то

$$\tilde{f}^{-1}[I] = f^{-1}[I] \cup H = (O \cap K) \cup H = (O \cup H) \cap (K \cup H) = (O \cup H) \in \mathcal{G}.$$

Таким образом, $\tilde{f} \in C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$, поскольку носитель этой функции содержится в компакте K. Кроме того, $0 \leqslant \tilde{f} \leqslant \mathbf{1}$, $\tilde{f}[C] = \{1\}$ и $\tilde{f}(s) = 0$.

Рассмотрим

$$\Phi \equiv \{f \in C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G}) \mid f[C] = \{1\} \wedge f(s) = 0\}.$$

Ясно, что $f_\Phi \equiv \inf \Phi \geqslant \chi(C)$. Кроме того, $\chi(C)(s) = 0 = \tilde{f}(s) \geqslant f_\Phi(s) \geqslant \chi(C)(s)$. Следовательно, $\chi(C) = \inf \Phi$. Теперь, положив

$$\Xi \equiv \{h \in C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G}) \mid \exists\, n \in \mathbb{N}\ \exists\, g_0, g_1, \ldots, g_{n-1} \in \Phi\ (h = g_0 \wedge g_1 \wedge \ldots \wedge g_{n-1})\},$$

получим невозрастающую сеть $(h \mid h \in \Xi) \downarrow \chi(C)$, т. е. семейство $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$ огибает сверху функцию $\chi(C)$.

Наконец, пусть $G \in \mathcal{G}$, $C \in \mathcal{C}$, $C \subset G$. В качестве функции $v \in C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$, удовлетворяющей условию $\chi(C) \leqslant v \leqslant \chi(G)$, возьмём функцию $v \equiv \mathbf{1} - w$, где $w \in C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$, $0 \leqslant w \leqslant \mathbf{1}$, $w(t) = 0$ для каждого $t \in C$ и $w(t) = 1$ для каждого $t \in T \setminus G$. Такая функция w существует в силу [25, 3.3.3]. □

Замечание. Существуют неметризуемые компактные пространства $(T, \mathcal{G})$, в которых секвенциальное свойство (E_σ) для $C_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ не выполняется. То, что семейства $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$ и $C_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ могут не обладать свойством (E_σ), компенсируется наличием у них важного свойства (D) (см. следствие из леммы 3.2). Наличие же у семейства $A(T)$ свойства (E_σ) или свойства (E) & (D) является существенным для представления σ-точных функционалов на $A(T)$ радоновскими интегралами (см. раздел 5.1).

3.4. Продолжение σ-непрерывных функционалов методом Даниэля

Предложение 3.2. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное функциональное пространство на нём, φ — положительный линейный функционал на $A(T)$. Тогда*

1) *если $A(T)$ обладает свойством (E) и функционал φ поточечно непрерывен, то*
$$\mathrm{St}\Big(T, \mathcal{A}_\mathrm{m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)\Big) \subset \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi);$$
2) *если $A(T)$ обладает свойством (E_σ) и функционал φ поточечно σ-непрерывен, то*
$$\mathrm{St}\Big(T, \mathcal{A}_\mathrm{m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)\Big) \subset \mathrm{D}^\sigma(T, A(T), \varphi).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $K \equiv F \cap G \in \mathcal{K}_\mathrm{m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ для некоторых $F \in \mathcal{F}$ и $G \in \mathcal{G}$. По определению $\chi(K) \leqslant u \in A(T)$. По условию существует сеть $(h_n \in A(T) \mid n \in N) \downarrow$, такая что $h \equiv \chi(F) \wedge u = \inf(h_n \mid n \in N)$, поэтому $h \in \mathrm{I}^\tau\big(T, A(T)\big) \subset \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$. Также по условию существует сеть $(g_m \in A(T) \mid m \in M) \uparrow$, такая что
$$g \equiv \chi(G) \wedge u = \sup(g_m \mid m \in M) \in \mathrm{S}^\tau\big(T, A(T)\big) \subset \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi).$$
Тогда $\chi(K) = h \wedge g \in \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$.

Теперь пусть $A \in \mathcal{A}_\mathrm{m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$. Тогда из $A = \bigcup(K_i \in \mathcal{K}_\mathrm{m} \mid i \in I)$ вытекает соотношение $\chi(A) = \sup(\chi(K_i) \mid i \in I) \in \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$.

Наконец, если $f \in \mathrm{St}(T, \mathcal{A}_\mathrm{m})$, то $f = \sum(x_j \chi(A_j) \mid j \in J)$ для некоторых конечных коллекций $(x_j \in \mathbb{R} \mid j \in J)$ и $(A_j \in \mathcal{A}_\mathrm{m} \mid j \in J)$. Из доказанного выше свойства и линейности $\mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$ выводим, что $f \in \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$.

В σ-случае все рассуждения вполне аналогичны. □

Предложение 3.3. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное пространство на нём, φ — положительный линейный функционал на $A(T)$. Тогда*

1) *если $A(T)$ обладает свойством (E) и функционал φ является поточечно непрерывным, то*
$$\mathrm{S}_\mathrm{m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big) \subset \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi);$$
2) *если $A(T)$ обладает свойством (E_σ) и функционал φ является поточечно σ-непрерывным, то*
$$\mathrm{S}_\mathrm{m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big) \subset \mathrm{D}^\sigma(T, A(T), \varphi).$$

Доказательство. Докажем первое утверждение. Возьмём функцию $f \in \in (\mathrm{S_m})_+$ и число $n \in \mathbb{N}$. По определению существуют такая функция $u \in A(T)_+$, что $f \leqslant u$, и такое конечное покрытие $(A_i \in \mathcal{A} \mid i \in I)$ множества T, что $\omega(f, A_i) < 1/n$. Рассмотрим числа $y_i \equiv \inf\{f(t) \mid t \in A_i\}$ и $z_i \equiv \sup\{f(t) \mid t \in A_i\}$, множества $J \equiv \{i \in I \mid y_i > 0\}$ и $A \equiv \bigcup(A_j \mid j \in J) \in \mathcal{A}$.

Определим функции $g_{nj} \equiv y_j\chi(A_j)$ и функцию $g_n \equiv \sup(g_{nj} \mid j \in J) \leqslant f \leqslant u$. Тогда

$$g_n \in \mathrm{St_m}\big(T, \mathcal{A}, A(T)\big) = \mathrm{St}\Big(T, \mathcal{A}_\mathrm{m}\big(A(T)\big)\Big) \subset \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$$

согласно лемме 2.7 и предложению 3.2. Если $t \in A$, то $t \in A_j$ для некоторого $j \in J$. Тогда

$$f(t) - g_n(t) \leqslant f(t) - g_{nj}(t) = f(t) - y_j \leqslant \frac{1}{n}.$$

Если $t \notin A$, то $t \in A_i$ для некоторого i, такого что $y_i = 0$. Тогда

$$f(t) - g_n(t) = f(t) \leqslant z_i - y_i \leqslant \frac{1}{n}.$$

Следовательно, $0 \leqslant f - g_n \leqslant (1/n)\mathbf{1}$.

Таким образом, $(g_n \in \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi) \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow f$ и $f \leqslant u \in A(T)$. Следовательно, $f \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big)$, а поскольку

$$\mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi) = \big\{f \in \mathrm{F_m}\big(T, A(T)\big) \mid \varphi^\vee f = \varphi_\vee f\big\},$$

по предложению 3.1 можно заключить, что $f \in \mathrm{D}^\tau(T, A(T), \varphi)$.

Если f — произвольная функция из $\mathrm{S_m}$, то $f = f_1 - f_2$, где $f_1, f_2 \in (\mathrm{S_m})_+$. Это даёт нам желаемое включение $\mathrm{S_m} \subset \mathrm{D}^\tau$.

В σ-случае все рассуждения вполне аналогичны. □

Из этого предложения следует, что мы можем рассмотреть функционалы $\check{\varphi}_S \equiv \check{\varphi}|\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ и $\hat{\varphi}_S \equiv \hat{\varphi}|\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ на $\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$.

Теорема 3.2. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное подпространство в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ со свойством (E) $[(\mathrm{E}_\sigma)]$ и φ — положительный поточечно непрерывный [σ-непрерывный] линейный функционал на $A(T)$. Тогда функционал $\check{\varphi}_S$ $[\hat{\varphi}_S]$ является положительным поточечно σ-непрерывным продолжением функционала φ на семейство $\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$. Кроме того, если функционал φ равномерно ограниченный, то и функционал $\check{\varphi}_S$ $[\hat{\varphi}_S]$ равномерно ограниченный.*

Доказательство. Основное утверждение следует из теоремы 3.1 и предложения 3.3.

Обозначим $\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ через $B(T)$. Пусть функционал φ равномерно ограниченный, т. е. $x \equiv \sup\{|\varphi f| \mid f \in A(T) \wedge |f| \leqslant \mathbf{1}\} < \infty$. Возьмём произвольную функцию $g \in B(T)$, удовлетворяющую условию $|g| \leqslant \mathbf{1}$. По определению $|g| \leqslant u \in A(T)_+$. Поскольку семейство $A(T)$ является усекаемым, $f \equiv u \wedge \mathbf{1} \in A(T)_+$. Тогда $|\check{\varphi}g| \leqslant \check{\varphi}|g| \leqslant \check{\varphi}f = \varphi f \leqslant x$. Отсюда вытекает, что

$\sup\{|\check{\varphi}g| \mid g \in B(T) \wedge |g| \leqslant \mathbf{1}\} \leqslant x < \infty$, т. е. функционал $\check{\varphi}_S$ равномерно ограниченный на $B(T)$.

В σ-случае все рассуждения вполне аналогичны. $\square$

4. Точные и σ-точные функционалы и их продолжение

4.1. Характеризации σ-точных функционалов

Здесь мы получим несколько полезных характеризаций локально узких и вполне локально узких функционалов на некоторых решёточных линейных подпространствах пространства симметризуемых функций $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$.

Лемма 4.1. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — такое решёточное линейное подпространство в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$, что $A(T) = \mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ и $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\mathrm{m}\big(A(T)\big)$, и φ — ограниченный линейный функционал на $A(T)$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *функционал φ является локально узким*;
2) *функционал φ является вполне локально узким.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Возьмём произвольные $G \in \mathcal{G}$, $u \in A(T)_+$ и $\varepsilon > 0$. По условию существует такое компактное множество $C \subset G$, что из свойств $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(G \setminus C) \wedge u$ вытекает оценка $|\varphi f| < \varepsilon/2$. Положим $v \equiv \chi(G \setminus C)$ и $w \equiv \chi(C)$. Из $C \in \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{K}$ следует, что $w \in \mathrm{S}(T, \mathcal{G})$. С учётом условия $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\mathrm{m}\big(A(T)\big)$ получаем, что $w \in \mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big) = A(T)$. Поэтому можно определить число $\delta \equiv \varepsilon/\big(2(\varphi(w) + 1)\big)$.

Пусть $f \in A(T)$, $|f| \leqslant \chi(G) \wedge u$ и $|f(t)| \leqslant \delta$ для каждого $t \in C$. Рассмотрим функции $h \equiv |f| \wedge w \in A(T)$ и $g \equiv |f| \wedge v$. Поскольку $|f| = |f| \wedge \chi(G) = |f| \wedge (v + w) = g + h$, имеем $g \in A(T)$. Тогда неравенства $g \leqslant v \wedge u$ и $h \leqslant \delta w$ влекут

$$|\varphi f| \leqslant \varphi|f| = \varphi g + \varphi h < \frac{\varepsilon}{2} + \delta\varphi w < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что функционал φ является вполне локально узким.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) вытекает из определений. $\square$

Лемма 4.2. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — такое решёточное линейное подпространство в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$, что $A(T) = \mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$, и φ — положительный поточечно σ-непрерывный линейный функционал на $A(T)$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *функционал φ является локально узким*;
2) *для каждого $K \in \mathcal{K}_\mathrm{m}\big(A(T)\big)$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует $C \in \mathcal{C}$, такое что $C \subset K$ и $\varphi\chi(K \setminus C) < \varepsilon$*;
3) *для каждого $A \in \mathcal{A}_\mathrm{m}\big(A(T)\big)$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует $C \in \mathcal{C}$, такое что $C \subset A$ и $\varphi\chi(A \setminus C) < \varepsilon$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Возьмём произвольное $K \equiv F \cap G \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\chi(K) \leqslant u \in A(T)$. По определению для G, u и ε найдётся такое компактное множество $B \subset G$, что из $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(G \setminus B) \wedge u$ вытекает $|\varphi f| < \varepsilon$. Рассмотрим компактное множество $C \equiv F \cap B \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}}$. Тогда

$$\chi(K \setminus C) = |\chi(F) \wedge \chi(G) - \chi(F) \wedge \chi(B)| = \\ = |\chi(F) \wedge \chi(G) - \chi(F) \wedge \chi(B)| \wedge u \leqslant |\chi(G) - \chi(B)| \wedge u = \chi(G \setminus B) \wedge u.$$

По условию из $\chi(G \setminus B) \in S$ и $u \in A(T) \subset S$ следует, что $f \equiv \chi(G \setminus B) \wedge u \in \in \mathrm{S_m} \subset A(T)$. Кроме того, $\chi(K \setminus C) \in \mathrm{S_m} \subset A(T)$, поэтому $\varphi\chi(K \setminus C) \leqslant \varphi f < \varepsilon$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Возьмём любое $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $A = \bigcup(K_i \mid i \in I)$ для некоторой конечной коллекции $(K_i \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}} \mid i \in I)$. По условию для каждого K_i найдётся компактное множество $C_i \subset K_i$, такое что $\varphi\chi(K_i \setminus C_i) < \varepsilon/n$, где $n \equiv \operatorname{card} I$. Рассмотрим $C \equiv \bigcup(C_i \mid i \in I)$. Тогда из $A \setminus C \subset \bigcup(K_i \setminus C_i \mid i \in I)$ следует, что $\varphi\chi(A \setminus C) \leqslant \sum(\varphi\chi(K_i \setminus C_i) \mid i \in I) < \varepsilon$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Возьмём произвольные $G \in \mathcal{G}$, $u \in A(T)_+$ и $\varepsilon > 0$. По лемме 2.5 существует такая последовательность $(u_n \in \mathrm{St}(T, \mathcal{A})_+ \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow$, что $u = \text{u-lim}(u_n \mid n \in \mathbb{N})$. По определению $u_n = \sum(x_i\chi(A_i) \mid i \in I)$ для некоторых конечных коллекций $(x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I)$ и $(A_i \in \mathcal{A} \mid i \in I)$. Так как $\mathcal{A}$ — алгебра, мы можем считать, что $x_i > 0$ для всех $i \in I$ и множества A_i попарно не пересекаются. Теперь, учитывая, что $u_n \leqslant u$, заключаем, что $u_n \in \mathrm{S_m} = A(T)$. Также видим, что $\chi(A_i) \leqslant (1/x_i)u \in A(T)$, и поэтому $A_i \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}$. Поскольку $\varphi u = \lim(\varphi u_n \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow$, найдётся такое n, что $\varphi u - \varphi u_n < < \varepsilon/2$. Для каждого A_i по условию существует компактное множество $C_i \subset A_i$, такое что $\varphi\chi(A_i \setminus C_i) < \varepsilon/(2n)$, где $n \equiv \operatorname{card} I$. Рассмотрим $C \equiv \bigcup(C_i \mid i \in I)$ и $A \equiv \operatorname{coz} u_n = \bigcup(A_i \mid i \in I) \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}$. Тогда из того, что

$$\chi(A \setminus C) \leqslant \chi\Big(\bigcup(A_i \setminus C_i \mid i \in I)\Big) \leqslant \sum(\chi(A_i \setminus C_i) \mid i \in I),$$

получаем, что

$$\varphi\chi(A \setminus C) \leqslant \sum(\varphi\chi(A_i \setminus C_i) \mid i \in I) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $G \setminus C \in \mathcal{G} \subset \mathcal{K}$, то $\chi(G \setminus C) \in S$ и $\chi(G \setminus C) \wedge v \in \mathrm{S_m} \subset A(T)$ для всякой $v \in A(T)_+$, откуда следует, что

$$\varphi(\chi(G \setminus C) \wedge u) = \varphi\big(\chi(G \setminus C) \wedge (u - u_n + u_n)\big) \leqslant \\ \leqslant \varphi\big(\chi(G \setminus C) \wedge (u - u_n)\big) + \varphi(\chi(G \setminus C) \wedge u) \leqslant \\ \leqslant \varphi(u - u_n) + \varphi(\chi(A \setminus C) \wedge u_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \varphi\chi(A \setminus C) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Предложение 4.1. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — такое решёточное линейное подпространство в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$, что $A(T) = \mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$, и φ — поточечно σ-непрерывный линейный функционал. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *φ является локально узким*;

2) *для каждого множества* $K \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big)$ *и каждого* $\varepsilon > 0$ *существует компактное множество* $C \subset K$*, такое что соотношения* $f \in A(T)$ *и* $|f| \leqslant \chi(K \setminus C)$ *влекут* $|\varphi f| < \varepsilon$;
3) *для каждого множества* $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big)$ *и каждого* $\varepsilon > 0$ *существует компактное множество* $C \subset A$*, такое что соотношения* $f \in A(T)$ *и* $|f| \leqslant \chi(A \setminus C)$ *влекут* $|\varphi f| < \varepsilon$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Рассмотрим положительные локально узкие σ-непрерывные линейные функционалы φ_1 и φ_2, такие что $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ (см. замечание к лемме 1.2). Возьмём произвольные $K \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}}$ и $\varepsilon > 0$. По лемме 4.2 найдутся компактные множества C_1 и C_2, такие что $C_i \subset K$ и $\varphi_i\chi(K \setminus C_i) < \varepsilon/2$. Рассмотрим $C = C_1 \cup C_2$. Тогда $\varphi_i\chi(K \setminus C) < \varepsilon/2$. Следовательно, из соотношений $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(K \setminus C)$ вытекает, что

$$|\varphi f| \leqslant |\varphi_1 f| + |\varphi_2 f| \leqslant \varphi_1|f| + \varphi_2|f| \leqslant \varphi_1\chi(K \setminus C) + \varphi_2\chi(K \setminus C) < \varepsilon.$$

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Для любого множества $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}$ найдётся конечная коллекция $(K_i \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}} \mid i \in I)$, такая что $A = \bigcup(K_i \mid i \in I)$. Обозначим $\operatorname{card} I$ через n. Рассмотрим такие положительные поточечно σ-непрерывные линейные функционалы φ_1 и φ_2, что $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ (см. лемму 1.2). По условию для любого $\varepsilon > 0$ существуют компактные множества C_{1i} и C_{2i}, такие что $C_{ki} \subset K_i$ и из соотношений $f \in A(T)$ и $f \leqslant \chi(K_i \setminus C_{ki})$ следует, что $\varphi_k f < \varepsilon/2n$. Так как $C_{ki} \in \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{K}$, имеем $K_i \setminus C_{ki} \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}} \subset \mathcal{A}_{\mathrm{m}}$. С помощью леммы 2.7 убеждаемся, что $\chi(K_i \setminus C_{ki}) \in \mathrm{St}_{\mathrm{m}} \subset \mathrm{S}_{\mathrm{m}} = A$, откуда следует, что $\varphi_k\chi(K_i \setminus C_{ki}) < \varepsilon/2n$. Возьмём $C \equiv \bigcup(C_{1i} \cup C_{2i} \mid i \in I)$. Поскольку $A \setminus C \subset \bigcup(K_i \setminus C_{ki} \mid i \in I)$, мы получаем, что

$$\varphi_k\chi(A \setminus C) \leqslant \varphi_k\Big(\sum(\chi(K_i \setminus C_{ki}) \mid i \in I)\Big) = \sum(\varphi_k\chi(K_i \setminus C_{ki}) \mid i \in I) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, из соотношений $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(A \setminus C)$ вытекает, что

$$|\varphi f| \leqslant |\varphi_1 f| + |\varphi_2 f| \leqslant \varphi_1|f| + \varphi_2|f| \leqslant \varphi_1\chi(A \setminus C) + \varphi_2\chi(A \setminus C) < \varepsilon.$$

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). По условию существует такое компактное множество $C \subset A$, что из соотношений $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(A \setminus C)$ следует неравенство $|\varphi f| < \varepsilon$. Из $A \setminus C \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}$ по лемме 2.7 вытекает, что $\chi(A \setminus C) \in \mathrm{St}(T, \mathcal{A}_{\mathrm{m}}) = \mathrm{St}_{\mathrm{m}} \subset \mathrm{S}_{\mathrm{m}} = A(T)$. Согласно лемме 1.1 $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, где функционалы φ_+ и $-\varphi_-$ положительны и

$$\varphi_+\chi(A \setminus C) = \sup\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge 0 \leqslant f \leqslant \chi(A \setminus C)\} < \varepsilon$$

и

$$\varphi_-\chi(A \setminus C) = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge 0 \leqslant f \leqslant \chi(A \setminus C)\} \geqslant -\varepsilon.$$

Следовательно, $(-\varphi_-)\chi(A \setminus C) \leqslant \varepsilon$. Тогда в силу леммы 4.2 φ_+ и φ_- являются локально узкими, следовательно, таким будет и функционал φ. □

Предложение 4.2. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство,* $A(T)$ — *такое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$*, что* $A(T) = \mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$*, и*

φ — поточечно σ-непрерывный линейный функционал. Тогда следующие заключения равносильны:

1) *функционал φ является локально узким*;
2) *для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой убывающей последовательности множеств $\big(A_n \in \mathcal{A}_\mathrm{m}\big(A(T)\big) \mid n \in \mathbb{N}\big)$ существуют число $n_0 \in \mathbb{N}$ и компактное множество $C \subset \bigcap(A_n \mid n \in \mathbb{N})$, такие что соотношения $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(A_{n_0} \setminus C)$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Рассмотрим положительные локально узкие σ-непрерывные линейные функционалы φ_1 и φ_2, такие что $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ (см. замечание к лемме 1.2). По лемме 2.7 $\mathrm{St}_\mathrm{m}(T, \mathcal{A}_\mathrm{m}) = \mathrm{St}_\mathrm{m} \subset \mathrm{S}_\mathrm{m} = A(T)$. Согласно предложению 4.1 для любых $\varepsilon > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ найдутся компактные множества C_{1n} и C_{2n}, такие что $\varphi_i\chi(A_n \setminus C_{in}) < \varepsilon/2^{n+2}$. Рассмотрим компактные множества $C_n \equiv C_{1n} \cup C_{2n}$, $D_n \equiv \bigcap(C_k \mid k = 1, \ldots, n)$ и $C \equiv \bigcap(C_k \mid k \in \mathbb{N})$. Так как $(\chi(D_n) \mid n \in \mathbb{N}) \downarrow \chi(C)$ и функционалы φ_i поточечно σ-непрерывны, мы имеем $(\varphi_i\chi(D_n) \mid n \in \mathbb{N}) \downarrow \varphi_i\chi(C)$. Поэтому существуют такие числа m_1 и m_2, что $\varphi_1\chi(C)+\varepsilon/4 > \varphi_1\chi(D_{m_1})$ и $\varphi_2\chi(C)+\varepsilon/4 > \varphi_2\chi(D_{m_2})$. Положим $m \equiv m_1 \vee m_2$. Тогда $\varphi_i\chi(C) + \varepsilon/4 > \varphi_i\chi(D_m)$.

Поскольку

$$
\begin{aligned}
A_m \setminus C = \big((A_m \setminus D_m) \cup D_m\big) \setminus C = (A_m \setminus D_m) \cup (D_m \setminus C) = \\
= \Big(\bigcup(A_m \setminus C_k \mid k = 1, \ldots, m)\Big) \cup (D_m \setminus C) \subset \\
\subset \Big(\bigcup(A_k \setminus C_k \mid k = 1, \ldots, m)\Big) \cup (D_m \setminus C),
\end{aligned}
$$

заключаем, что

$$\chi(A_m \setminus C) \leqslant \sum(A_k \setminus C_k \mid k = 1, \ldots, m) + \chi(D_m) - \chi(C),$$

откуда следует, что

$$
\begin{aligned}
\varphi_i\chi(A_m \setminus C) \leqslant \sum(\chi(A_k \setminus C_k) \mid k = 1, \ldots, m) + \frac{\varepsilon}{4} < \\
< \sum\Big(\frac{\varepsilon}{2^{k+2}} \mid k = 1, \ldots, m\Big) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Следовательно, соотношения $f \in \mathrm{S}_\mathrm{m}$ и $|f| \leqslant \chi(A_m \setminus C)$ влекут неравенство

$$|\varphi f| \leqslant |\varphi_1 f| + |\varphi_2 f| \leqslant \varphi_1|f| + \varphi_2|f| \leqslant \varphi_1\chi(A_m \setminus C) + \varphi_2\chi(A_m \setminus C) < \varepsilon.$$

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) справедлива, поскольку по предложению 4.1 функционал φ локально узкий. □

4.2. О σ-точности радоновского интеграла

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $\mathcal{M}$ — σ-алгебра на нём, μ — радоновская мера, определённая на $\mathcal{M}$. Рассмотрим решёточное линейное пространство $\mathrm{SI}(T, \mathcal{M}, \mu) \equiv \mathrm{S}(T, \mathcal{G}) \cap \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ всех *симметризуемых интегрируемых функций*.

Лемма 4.3. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство,* $\mathcal{M}$ — σ*-алгебра на нём,* μ — *радоновская мера, определённая на* $\mathcal{M}$*. Тогда*

1) $\mathrm{S}(T, \mathcal{G}) \subset \mathrm{M}(T, \mathcal{M})$;
2) $\mathrm{S_c}(T, \mathcal{G}) \subset \mathrm{SI}(T, \mathcal{M}, \mu)$;
3) *если* μ — *ограниченная мера, то* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G}) = \mathrm{SI}(T, \mathcal{M}, \mu)$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Согласно лемме 2.4 $\mathrm{S}(T, \mathcal{G}) \subset \subset \mathrm{M_b}(T, \mathcal{K}_\sigma)$. По определению радоновской меры $\mathcal{G} \subset \mathcal{M}$, поэтому $\mathcal{K}_\sigma \subset \mathcal{M}$. Следовательно, $\mathrm{S}(T, \mathcal{G}) \subset \mathrm{M}(T, \mathcal{M})$.

Докажем утверждение 2). Пусть $f \in \mathrm{S_c}(T, \mathcal{G}) \subset \mathrm{M_c}(T, \mathcal{M})$. Тогда $|f| \leqslant x\chi(C)$ для некоторых $C \in \mathcal{C}$ и $x > 0$. Рассмотрим положительные радоновские меры μ_1 и μ_2 из леммы 1.3. По определению радоновской меры $\mu_1 C, \mu_2 C \in \mathbb{R}_+$. Следовательно, $\int f_+ \, d\mu_1 \leqslant x \int \chi(C) \, d\mu_1 = x\mu_1 C < \infty$. Аналогично $\int (-f_-) \, d\mu_1 \leqslant \leqslant x\mu_1 C < \infty$. Таким образом, $f \in \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu_1)$. Точно так же получаем, что $f \in \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu_2)$, и в итоге $f \in \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$.

Докажем утверждение 3). Пусть $f \in \mathrm{S}(T, \mathcal{G}) = \mathrm{S_b}(T, \mathcal{G})$. Тогда $|f| \leqslant x\mathbf{1}$. Следовательно, $\int f_+ \, d\mu_1 \leqslant x \int \mathbf{1} \, d\mu_1 = x\mu_1 T < \infty$. Аналогично для функции $-f_-$ и меры μ_2. Следовательно, $f \in \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$. □

Рассмотрим интегральный функционал (радоновский интеграл) i_μ, соответствующий радоновской мере μ (см. раздел 1).

Лемма 4.4. *Интегральный функционал* i_μ *является поточечно* σ*-непрерывным на* $\mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$*. Если мера* μ *ограниченная, то функционал* i_μ *является равномерно ограниченным.*

Доказательство. Сначала предположим, что мера μ положительная. Пусть $(f_n \in \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)_+ \mid n \in N \subset \omega) \downarrow 0$. По теореме Лебега о мажорируемой сходимости [1, 2.8.1] $(i_\mu f_n \mid n \in N) \downarrow 0$. Тогда по лемме 3.1 функционал i_μ поточечно σ-непрерывен.

Теперь пусть μ — произвольная радоновская мера. По лемме 1.3 $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 положительны. Как доказано выше, функционалы i_{μ_1} и i_{μ_2} поточечно σ-непрерывны. Следовательно, и функционал $i_\mu = i_{\mu_1} - i_{\mu_2}$ поточечно σ-непрерывен.

Рассмотрим случай ограниченной меры μ. Возьмём произвольную функцию $f \in \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu_1)$, такую что $|f| \leqslant \mathbf{1}$. Тогда $|i_{\mu_1} f| \leqslant i_{\mu_1}|f| \leqslant \int \mathbf{1} \, d\mu_1 = = \mu_1 T < \infty$. Таким образом, функционал i_{μ_1} равномерно ограниченный. То же верно и для i_{μ_2}. Так как $i_\mu = i_{\mu_1} - i_{\mu_2}$, мы заключаем, что i_μ обладает тем же свойством. □

Предложение 4.3. *Интегральный функционал* i_μ *является* σ*-точным на* $\mathrm{SI}(T, \mathcal{M}, \mu)$*.*

Доказательство. Обозначим $\mathrm{SI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ через $A(T)$. Сначала рассмотрим случай положительной меры μ. Ясно, что $A(T) = \mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$.

Заметим, что по лемме 4.4 функционал i_μ поточечно σ-непрерывен.

Возьмём произвольное $K \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из $v \equiv \chi(K) \leqslant u \in \in A(T)$ следует, что $v \in A(T)$. Поэтому $\mu K = \int v\, d\mu < \infty$. Следовательно, найдётся такое компактное множество $C \subset K$, что $\mu K - \varepsilon < \mu C$. Так как $w \equiv \chi(K \setminus C) \in A(T)$, можно заключить, что $i_\mu w = \int w\, d\mu = \mu(K \setminus C) < \varepsilon$, откуда согласно лемме 4.2 получаем, что функционал i_μ является локально узким.

Возьмём произвольные $G \in \mathcal{G}$, $u \in A(T)_+$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из вышедоказанного вытекает, что существует компактное множество $C \subset G$, такое что соотношения $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(G \setminus C) \wedge u$ влекут неравенство $i_\mu f < \varepsilon/2$. Положим $\delta \equiv \varepsilon/(2\mu C)$. Пусть $f \in A(T)$, $|f| \leqslant \chi(G) \wedge u$ и $|f(t)| \leqslant \delta$ для всех $t \in C$. Тогда $|f| \wedge \chi(C) \leqslant \delta\chi(C)$. Следовательно,

$$|i_\mu f| = \Big|\int f\, d\mu\Big| \leqslant \int |f|\, d\mu = \int |f| \wedge \chi(G)\, d\mu =$$
$$= \int |f| \wedge \big(\chi(G \setminus C) + \chi(C)\big)\, d\mu \leqslant \int |f| \wedge \chi(G \setminus C)\, d\mu + \int |f| \wedge \chi(C)\, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int \chi(G \setminus C) \wedge u\, d\mu + \int \delta\chi(C)\, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \delta\mu C = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, интегральный функционал i_μ является вполне локально узким.

Итак, i_μ является σ-точным.

Теперь рассмотрим случай произвольной радоновской меры μ. Имеет место разложение Жордана (лемма 1.3) $\mu = \mu_1 - \mu_2$, где μ_1 и μ_2 положительны. Как доказано выше, интегральные функционалы i_{μ_1} и i_{μ_2} σ-точны. Следовательно, функционал $i_\mu = i_{\mu_1} - i_{\mu_2}$ также является σ-точным. □

Итак, интегральный функционал (радоновский интеграл) i_μ на подпространствах в $\mathrm{SI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ обладает свойством σ-точности. Таким образом, это свойство является необходимым для интегрального представления функционалов. Далее мы покажем, что это свойство является также и достаточным.

Отметим, что если пространство $(T, \mathcal{G})$ является локально компактным, то классическим подпространством во всех $\mathrm{SI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ для всех радоновских мер μ является $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$. Если же пространство $(T, \mathcal{G})$ не локально компактно, то возможно, что $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G}) = \{0\}$. Поэтому, вообще говоря, оставалось неизвестным, на каком $A(T)$ в этом случае можно рассматривать все интегральные функционалы i_μ. Введённое В. К. Захаровым решёточное линейное пространство $\mathcal{K}$-равномерных функций $\mathrm{S}_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$ дало такую возможность.

В связи с тем, что класс $\mathfrak{U}(T)$ равномерных функций шире класса $\mathfrak{M}_{\mathrm{b}}(T)$ ограниченных измеримых функций, остаётся открытым вопрос, существует ли решёточное линейное пространство $A(T)$ ограниченных измеримых функций, на котором можно рассматривать все интегральные функционалы.

4.3. Продолжение точных и σ-точных функционалов

Рассмотрим продолжение $[\sigma$-$]$точных, т. е. вполне локально узких и поточечно $[\sigma$-$]$непрерывных, функционалов с некоторых подпространств $A(T)$ в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ на $\mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$.

Предложение 4.4. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное подпространство в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ со свойством* (E) $[(\mathrm{E}_\sigma)]$ *и φ — положительный поточечно непрерывный $[\sigma$-непрерывный$]$ линейный функционал на $A(T)$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *функционал φ является локально узким на $A(T)$;*
2) *для всякого множества $K \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset K$ и $\check{\varphi}_S \chi(K \setminus C) < \varepsilon$ $[\hat{\varphi}_S \chi(K \setminus C) < \varepsilon]$;*
3) *функционал $\check{\varphi}_S$ [соответственно $\hat{\varphi}_S$] является вполне локально узким на $\mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$;*
4) *функционал φ является вполне локально узким на $A(T)$.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Возьмём произвольные $K \equiv F \cap G \in \mathcal{K}_{\mathrm{m}}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\chi(K) \leqslant u \in A(T)$. В силу 1) для G, u и ε найдётся такое множество $B \in \mathcal{C}$, что $B \subset G$ и $|\varphi f| < \varepsilon/2$ для всех $f \in A(T)$, удовлетворяющих неравенству $|f| \leqslant \chi(G \setminus B) \wedge u$. Заметим, что $\chi(G \setminus B) \in \mathrm{S}^\tau\big(T, A(T)\big)$, так как $A(T)$ обладает свойством (E) и $G \setminus B \in \mathcal{G}$. Тогда

$$\overline{\varphi}(\chi(G \setminus B) \wedge u) \equiv \sup\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \leqslant \chi(G \setminus B) \wedge u\} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Рассмотрим компактное множество $C \equiv F \cap B \subset K$. Для него

$$\begin{aligned}\chi(K \setminus C) &= |\chi(F) \wedge \chi(G) - \chi(F) \wedge \chi(B)| = \\ &= |\chi(F) \wedge \chi(G) - \chi(F) \wedge \chi(B)| \wedge u \leqslant |\chi(G) - \chi(B)| \wedge u = \chi(G \setminus B) \wedge u,\end{aligned}$$

поэтому $\check{\varphi}_S \chi(K \setminus C) \leqslant \overline{\varphi}(\chi(G \setminus B) \wedge u) < \varepsilon$.

Убедимся в справедливости импликации 2) $\Longrightarrow$ 3). Из леммы 2.6 следует, что $B(T) \equiv \mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big) = \mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, B(T)\big)$ и $\mathcal{K}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big) = \mathcal{K}_{\mathrm{m}}\big(B(T)\big)$. В силу леммы 4.2 функционал $\check{\varphi}_S$ является локально узким на $B(T)$. Из свойства (E) семейства $A(T)$ следует, что оно огибает сверху функции $\chi(C)$ для любых $C \in \mathcal{C}$. Таким образом, $\chi(C) \in B(T)$ и, следовательно, $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{m}}\big(B(T)\big)$. Тогда по лемме 4.1 заключаем, что $\check{\varphi}_S$ является вполне локально узким на $B(T)$.

Для доказательства импликации 3) $\Longrightarrow$ 4) достаточно заметить, что $\varphi = \check{\varphi}_S | A(T)$.

Импликация 4) $\Longrightarrow$ 1) следует из определений. □

Лемма 4.5. *Пусть T — множество, $P \subset Q \subset T$, $u \in F(T)_+$. Тогда $\chi(Q \setminus P) \wedge u = \chi(Q) \wedge u - \chi(P) \wedge u$.*

Доказательство. Обозначим левую часть доказываемого равенства через f, а правую — через g. Обозначим $\chi(P)$, $\chi(Q)$ и $\chi(Q \setminus P)$ через p, q и r соответственно. Пусть $t \in P$. Тогда $p(t) = q(t)$ и $r(t) = 0$. Если $p(t) \leqslant u(t)$, то

$$f(t) = r(t) \wedge u(t) = 0 = 1 - 1 = q(t) - p(t) = q(t) \wedge u(t) - p(t) \wedge u(t) = g(t).$$

Если $p(t) > u(t) \geqslant 0$, то

$$f(t) = 0 = u(t) - u(t) = q(t) \wedge u(t) - p(t) \wedge u(t) = g(t).$$

Если $t \in Q \setminus P$, то

$$f(t) = 1 \wedge u(t) = 1 \wedge u(t) - 0 \wedge u(t) = q(t) \wedge u(t) - p(t) \wedge u(t) = g(t).$$

Наконец, если $t \notin Q$, то

$$f(t) = 0 = 0 - 0 = q(t) \wedge u(t) - p(t) \wedge u(t) = g(t). \qquad \square$$

Пусть $(A, \mathbb{R}; +, *)$ и $(B, \mathbb{R}; +, *)$ — две математические системы, в которых операции и композиции обозначены одинаковыми знаками. Пусть K и L — конусы в A и B соответственно. Отображение $u\colon K \to L$ назовём *конусно-линейным*, если для любых $a, a_1, a_2 \in K$ и любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ из равенства $a = r_1 a_1 + r_2 a_2$ следует равенство $ua = r_1 ua_1 + r_2 ua_2$.

Предложение 4.5. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $A(T)$ — *усекаемое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$. *Пусть* $A(T)$ *обладает свойством* (E_σ) *или свойством* $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. *Тогда*

1) *для каждого положительного* σ*-точного линейного функционала* φ *на* $A(T)$ *существует единственный положительный* σ*-точный линейный функционал* φ_S *на* $\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$, *продолжающий функционал* φ;
2) *если функционал* φ *равномерно ограниченный, то и* φ_S *равномерно ограниченный;*
3) *отображение* $P\colon \varphi \mapsto \varphi_S$ *является монотонной конусно-линейной биекцией между* $(A(T)^\vartriangle)_+$ *и* $\big(\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)^\vartriangle\big)_+$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Обозначим $B(T) \equiv \mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$. Пусть $A(T)$ обладает свойством (E_σ). Тогда для любого $\varphi \in (A(T)^\vartriangle)_+$ положим $\varphi_S \equiv \hat{\varphi}_S$. Если же $A(T)$ обладает свойством $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$, то, так как по следствию из леммы 3.2 $A(T)^\vartriangle = A(T)^\triangledown$, можно для любого $\varphi \in (A(T)^\vartriangle)_+$ положить $\varphi_S \equiv \check{\varphi}_S$. Согласно теореме 3.2 и предложению 4.4 $\varphi_S \in (B(T)^\vartriangle)_+$.

Пусть ψ — положительный σ-точный линейный функционал на $B(T)$ и ψ является продолжением φ. Заметим, что ψ является локально узким на $B(T)$ (см. определения в разделе 1.2). Докажем, что $\psi = \varphi_S$.

Сначала покажем, что $\psi(\chi(G) \wedge u) = \varphi_S(\chi(G) \wedge u)$ для любых открытых множеств G и функций $u \in A(T)_+$. Пусть $G \in \mathcal{G}$, $u \in A(T)_+$, $g \equiv \chi(G) \wedge u$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $\psi(\chi(G \setminus C) \wedge u) < \varepsilon$. Положим $h \equiv \chi(C) \wedge u$. С учётом леммы 4.5 имеем $\psi g - \psi h < \varepsilon$. По свойству (E) $[(\mathrm{E}_\sigma)]$

семейства $A(T)$ существует такая функция $v \in A(T)$, что $\chi(C) \leqslant v \leqslant \chi(G)$, поэтому $h \leqslant f \leqslant g$, где $f \equiv v \wedge u \in A(T)$. Следовательно, $\varphi f \leqslant \psi g < \psi h + \varepsilon \leqslant \leqslant \varphi f + \varepsilon$, поэтому $\psi g = \sup\{\varphi f \mid f \in A(T)_+ \wedge f \leqslant g\} \equiv \overline{\varphi} g = \varphi_S g$.

Пусть $F \in \mathcal{F}$, $u \in A(T)_+$, $f \equiv \chi(F) \wedge u$. Рассмотрим открытое множество $G \equiv T \setminus F$. Из доказанного выше и леммы 4.5 получаем, что

$$\psi f = \psi\Big(\big(\mathbf{1} - \chi(G)\big) \wedge u\Big) = \psi u - \psi(\chi(G) \wedge u) = \varphi u - \varphi_S(\chi(G) \wedge u) = \varphi_S f.$$

Таким образом, ψ и φ_S совпадают, в частности, на функциях вида $\chi(C) \wedge u$, где $C \in \mathcal{C}$, $u \in A(T)_+$.

Теперь пусть $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big)$ и функция $u \in A(T)_+$ такова, что $\chi(A) \leqslant u$. Для любого $\varepsilon > 0$ по лемме 4.2 существуют компактные множества $K \subset A$ и $L \subset A$, такие что $\varphi_S \chi(A \setminus K) < \varepsilon/2$ и $\psi\chi(A \setminus L) < \varepsilon/2$. Рассмотрим компактное множество $C \equiv K \cup L \subset A$. Тогда $\varphi_S \chi(A \setminus C) < \varepsilon/2$ и $\psi\chi(A \setminus C) < \varepsilon/2$, поскольку ψ и φ положительны. Следовательно,

$$\begin{aligned}|\psi\chi(A) - \varphi_S\chi(A)| = |\psi\chi(A \setminus C) + \psi\chi(C) - \varphi_S\chi(A \setminus C) - \varphi_S\chi(C)| \leqslant \\ \leqslant \psi\chi(A \setminus C) + \varphi_S\chi(A \setminus C) + |\psi(\chi(C) \wedge u) - \varphi_S(\chi(C) \wedge u)| < \varepsilon.\end{aligned}$$

Так как ε произвольно, мы видим, что $\psi\chi(A) = \varphi_S\chi(A)$. Следовательно, ψ и φ_S совпадают на пространстве ступенчатых функций $\mathrm{St}\big(T, \mathcal{A}_{\mathrm{m}}(A(T)\big)$.

Наконец, пусть $f \in B(T)$ и функция $u \in A(T)_+$ такова, что $|f| \leqslant u$. По лемме 2.5 найдётся неубывающая последовательность $(f_n \in \mathrm{St}(T, \mathcal{A}) \mid n \in \mathbb{N})$, такая что $f = \mathrm{u}\text{-}\lim(f_n \mid n \in \mathbb{N})$. Из неравенств $f_n \leqslant f \leqslant u$ и леммы 2.7 вытекает, что все f_n принадлежат $\mathrm{St}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{A}, A(T)\big) = \mathrm{St}\big(T, \mathcal{A}_{\mathrm{m}}(A(T)\big)$. Из доказанного выше и σ-непрерывности функционалов ψ и φ_S следует, что $\psi f = \lim \psi f_n = = \lim \varphi_S f_n = \varphi_S f$.

Докажем утверждение 2). Если $A(T)$ обладает свойством $(\mathrm{E}) \,\&\, (\mathrm{D})$ $[(\mathrm{E}_\sigma)]$, то $\varphi_S \equiv \check{\varphi}$ $[\varphi_S \equiv \hat{\varphi}]$. Функционал $\check{\varphi}$ $[\hat{\varphi}]$ является равномерно ограниченным в силу теоремы 3.2.

Докажем утверждение 3). Если $\varphi_1 \neq \varphi_2$, то, очевидно, $(\varphi_1)_S \neq (\varphi_2)_S$, поэтому отображение P инъективно.

Пусть $\psi \in (B(T)^\vartriangle)_+$. Рассмотрим $\varphi \equiv \psi | A(T) \in (A(T)^\vartriangle)_+$. Согласно утверждению 1) $\psi = \varphi_S = P\varphi$. Таким образом, P сюръективно.

Теперь докажем, что P является конусно-линейным. Пусть $a > 0$. Обозначим $a\varphi$ через ψ. Возьмём любые $g \in Y \equiv \mathrm{S}^\sigma\big(T, A(T)\big)$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $L_g \equiv \{f \in A(T) \mid f \leqslant g\}$. Тогда из $\overline{\varphi} g = \sup(\varphi f \mid f \in L_g)$ и $\overline{\psi} g = \sup(\psi f \mid f \in L_g)$ следует, что существуют $u, v \in L_g$, такие что $\overline{\varphi} g - \varepsilon/(2a) < \varphi u$ и $\overline{\psi} g - \varepsilon/2 < \psi v$. Рассмотрим функцию $w \equiv u \vee v \in L_g$. Тогда

$$|(a\overline{\varphi})g - \overline{\psi} g| \leqslant |a\overline{\varphi} g - a\varphi w| + |\psi w - \overline{\psi} g| < a|\overline{\varphi} g - \varphi w| + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Из произвольности ε следует, что $(a\overline{\varphi})g = \overline{\psi} g$.

Совершенно аналогично доказывается, что $(a\underline{\varphi})h = \underline{\psi} h$ для любого $h \in Z \equiv \equiv \mathrm{I}^\sigma\big(T, A(T)\big)$.

Пусть теперь $f \in B(T)$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $Z_f \equiv \{h \in Z \mid h \leqslant f\}$. Тогда из $\hat{\varphi} f = \varphi_\wedge f = \sup(\underline{\varphi} h \mid h \in Z_f)$ и $\hat{\psi} f = \sup(\underline{\psi} h \mid h \in Z_f)$ так же, как и выше, следует, что $(a\hat{\varphi})f = \hat{\psi} f$.

Обозначим $\varphi_1 + \varphi_2$ через ψ. Пусть $g \in Y$ и $\varepsilon > 0$. Тогда из $\overline{\varphi}_1 g = \sup(\varphi_1 f \mid f \in L_g)$, $\overline{\varphi}_2 g = \sup(\varphi_2 f \mid f \in L_g)$ и $\overline{\psi} g = \sup(\psi f \mid f \in L_g)$ следует, что существуют $u, v, w \in L_g$, такие что $\overline{\varphi}_1 g - \varepsilon/3 < \varphi_1 u$, $\overline{\varphi}_2 g - \varepsilon/3 < \varphi_2 v$ и $\overline{\psi} g - \varepsilon/3 < \psi w$. Рассмотрим функцию $x \equiv u \vee v \vee w \in L_g$. Тогда

$$|(\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2)g - \overline{\psi} g| \leqslant |\overline{\varphi}_1 g - \varphi_1 x| + |\overline{\varphi}_2 g - \varphi_2 x| + |\psi x - \overline{\psi} g| < \varepsilon.$$

Следовательно, $(\overline{\varphi}_1 + \overline{\varphi}_2)g = \overline{\psi} g$.

Аналогичным образом доказывается, что $(\underline{\varphi_1} + \underline{\varphi_2})h = \underline{\psi} h$ для любого $h \in Z$.

Пусть теперь $f \in B(T)$ и $\varepsilon > 0$. Тогда $\hat{\varphi}_1 f = (\varphi_1)_\wedge f = \sup(\underline{\varphi_1} h \mid h \in Z_f)$, $\hat{\varphi}_2 f = \sup(\underline{\varphi_2} h \mid h \in Z_f)$ и $\hat{\psi} f = \sup(\underline{\psi} h \mid h \in Z_f)$. Как и выше, отсюда следует, что $(\hat{\varphi}_1 + \hat{\varphi}_2)f = \hat{\psi} f$.

Наконец, докажем монотонность P. Пусть $\varphi, \psi \in A(T)$ и $\varphi \leqslant \psi$. Возьмём любую $g \in Y$ и рассмотрим множество $L_g \equiv \{f \in A(T) \mid f \leqslant g\}$. Тогда из $\overline{\varphi} g = \sup(\varphi f \mid f \in L_g)$ и $\overline{\psi} g = \sup(\psi f \mid f \in L_g)$ следует, что $\overline{\varphi} g \leqslant \overline{\psi} g$.

Возьмём теперь любую функцию $f \in \big(\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)^\vartriangle\big)_+$ и рассмотрим множество $Y^f \equiv \{g \in Y \mid g \geqslant f\}$. Тогда из $\hat{\varphi} f = \varphi_\wedge f = \inf(\overline{\varphi} g \mid g \in Y^f)$ и $\hat{\psi} f = \inf(\overline{\psi} g \mid g \in Y^f)$ следует, что $\hat{\varphi} f \leqslant \hat{\psi} f$. □

Теперь можно доказать основную теорему о продолжении σ-точных линейных функционалов.

Теорема 4.1. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $A(T)$ — *усекаемое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$. *Пусть* $A(T)$ *обладает свойством* (E_σ) *или свойством* $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. *Тогда*

1) *для каждого* σ-*точного линейного функционала* φ *на* $A(T)$ *существует единственный* σ-*точный линейный функционал* φ_S *на* $\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$, *продолжающий функционал* φ;
2) *если функционал* φ *равномерно ограниченный, то и* φ_S *равномерно ограниченный*;
3) *отображение* $Q\colon \varphi \mapsto \varphi_S$ *является изоморфизмом между решёточными линейными пространствами* $A(T)^\vartriangle$ *и* $\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)^\vartriangle$;
4) *отображение* $Q_\mathrm{b} \equiv Q|A(T)^{\circledtriangle}$ *является изоморфизмом между решёточными линейными пространствами* $A(T)^{\circledtriangle}$ *и* $\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)^{\circledtriangle}$.

Доказательство. Докажем утверждения 1) и 3). Согласно предложению 4.5 существует конусно-линейное биективное отображение P подпространства положительных функционалов $(A(T)^\vartriangle)_+$ на $\big(\mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)^\vartriangle\big)_+$. Согласно [50, 3.6.1] существует его единственное линейное биективное продолжение $Q\colon A(T)^\vartriangle \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)^\vartriangle$. Для любого $\varphi \in A(T)^\vartriangle$ положим $\varphi_S \equiv Q\varphi$. Заметим, что $\varphi_S \equiv Q\varphi = Q(\varphi_+ + \varphi_-) = P\varphi_+ - P(-\varphi_-) = (\varphi_+)_S - (-\varphi_-)_S$, где φ_+ и $-\varphi_-$ — положительные функционалы из леммы 1.1.

Остаётся убедиться в сохранении операций $\vee$ и $\wedge$ при отображении Q, для чего достаточно (согласно [32, 14E (b)]) проверить, что из $\varphi \wedge \psi = 0$ следует $Q\varphi \wedge Q\psi = 0$ для любых $\varphi, \psi \in A(T)^{\Delta}$. Пусть $\varphi, \psi \in A(T)^{\Delta}$ и $\varphi \wedge \psi = 0$. Тогда $\varphi, \psi \in (A(T)^{\Delta})_+$ и $Q\varphi \wedge Q\psi = P\varphi \wedge P\psi$. Поскольку P сюръективно, существует $\xi \in (A(T)^{\Delta})_+$, такое что $P\xi = P\varphi \wedge P\psi \in \big(\mathrm{S_m}(T, \mathcal{G}, A(T))^{\Delta}\big)_+$. Тогда $P\xi \leqslant P\varphi$ и $P\xi \leqslant P\psi$, откуда следует, что $\xi \leqslant \varphi$ и $\xi \leqslant \psi$, так как P инъективно и монотонно. Поэтому $\xi \leqslant \varphi \wedge \psi$ и $0 \leqslant P\varphi \wedge P\psi = P\xi \leqslant P(\varphi \wedge \psi) = 0$. Таким образом, Q — изоморфизм решёточных линейных пространств.

Докажем утверждения 2) и 4). Если функционал φ равномерно ограниченный, то функционалы φ_+ и φ_- также равномерно ограниченные (см. замечание к лемме 1.2). Тогда согласно утверждению 2) теоремы 4.5 равномерно ограниченными будут их продолжения $(\varphi_+)_S$ и $(-\varphi_-)_S$, а потому и $\varphi_S = Q(\varphi_+ + \varphi_-) = (\varphi_+)_S - (-\varphi_-)_S$ будет таковым. $\square$

В [12, 15] для описания интегральных функционалов было использовано некоторое свойство тонкости. Покажем, что свойство точности является расширением свойства тонкости. Напомним соответствующие определения: линейный функционал φ на решёточном линейном пространстве $A(T)$, содержащем $\mathrm{S_c}(T, \mathcal{G})$, называется *внутренне компактным*, если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой убывающей последовательности множеств $(A_n \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid n \in \mathbb{N})$, такой что $(\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \mathbb{N},\ C \in \mathcal{C}) \subset A(T)$, найдутся такие $n_0 \in \mathbb{N}$ и $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset \bigcap(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ и $\varphi\chi(A_{n_0} \setminus C) < \varepsilon$. Поточечно σ-непрерывный и внутренне компактный функционал называется *тонким*. Семейство всех тонких функционалов на $A(T)$ обозначается через $A(T)^{\zeta}$.

Предложение 4.6. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — такое решёточное линейное подпространство в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$, что $A(T) = \mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ и $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\mathrm{m}\big(A(T)\big)$. Пусть φ — σ-непрерывный линейный функционал на $A(T)$. Тогда следующие заключения равносильны*:

1) *функционал φ вполне локально узкий*;
2) *для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой убывающей последовательности множеств $\big(A_n \in \mathcal{A}_\mathrm{m}\big(A(T)\big) \mid n \in \mathbb{N}\big)$ существуют число $n_0 \in \mathbb{N}$ и компактное множество $C \subset \bigcap(A_n \mid n \in \mathbb{N})$, такие что соотношения $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(A_{n_0} \setminus C)$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon$*;
3) *для каждого $\varepsilon > 0$ и каждой убывающей последовательности множеств $(A_n \in \mathcal{A}(T, \mathcal{G}) \mid n \in \mathbb{N})$, такой что $(\chi(A_n \setminus C) \mid n \in \mathbb{N},\ C \in \mathcal{C}) \subset A(T)$, существуют число $n_0 \in \mathbb{N}$ и компактное множество $C \subset \bigcap(A_n \mid n \in \mathbb{N})$, такие что соотношения $f \in A(T)_+$ и $f \leqslant \chi(A_{n_0} \setminus C)$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon$*;
4) *функционал φ внутренне компактный.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) равносильны в силу леммы 4.1 и предложения 4.2.

Утверждения 3) и 4) равносильны в силу леммы 4 из [15, п. 4].

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Поскольку $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\mathrm{m}\big(A(T)\big)$, то для любого $C \in \mathcal{C}$ имеем $\chi(C) \in \mathrm{S_m}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big) = A(T)$. Если $A \in \mathcal{A}$ таково, что $\chi(A \setminus C) \in$

$\in A(T)$ для всех $C \in \mathcal{C}$, то $\chi(A) = \chi(A \setminus C) + \chi(C) \in A(T)$, следовательно, $A \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big)$.

Убедимся в справедливости импликации 3) $\Longrightarrow$ 2). Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и $\big(A_n \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(A(T)\big) \mid n \in \mathbb{N}\big)$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\chi(A_n) \in$ $\in \mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big) = A(T)$. Поскольку для всех $C \in \mathcal{C}$, как отмечено выше, $\chi(C) \in A(T)$, то и $\chi(A_n \setminus C) = \chi(A_n) - \chi(C) \in A(T)$ для любых $n \in \mathbb{N}$ и $C \in \mathcal{C}$. Тогда по условию найдутся $n_0 \in \mathbb{N}$ и $C \in \mathcal{C}$, такие что $C \subset \bigcap(A_n \mid n \in \mathbb{N})$ и соотношения $f \in A(T)_+$ и $f \leqslant \chi(A_{n_0} \setminus C)$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon/2$.

Рассмотрим произвольную функцию $f \in A(T)$, такую что $|f| \leqslant \chi(A_{n_0} \setminus C)$. Тогда $f_+ \equiv f \vee \mathbf{0} \in A(T)_+$, $-f_- \equiv -(f \wedge \mathbf{0}) \in A(T)_+$, $f_+ \leqslant \chi(A_{n_0} \setminus C)$ и $-f_- \leqslant \chi(A_{n_0} \setminus C)$. Следовательно, $|\varphi f| = |\varphi f_+ - \varphi(-f_-)| \leqslant |\varphi f_+| + |\varphi(-f_-)| \leqslant$ $\leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$. □

Это означает, что на пространстве со свойствами, указанными в условиях предложения 4.6, семейства точных и тонких функционалов совпадают. Для более общих пространств связь между этими семействами более сложная.

Следствие. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное подпространство в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$, обладающее свойством (E_σ) или свойством $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. Пусть φ — σ-непрерывный линейный функционал на $A(T)$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) $\varphi \in A(T)^{\Delta}$;
2) $\varphi_S \in \mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)^{\zeta}$.

Доказательство. По теореме 4.1 у каждого σ-точного функционала φ существует единственное продолжение φ_S, σ-точное на $B(T) \equiv \mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$. При доказательстве этой теоремы отмечено, что $\varphi_S = (\varphi_+)_S - (-\varphi_-)_S$. По лемме 1.2 функционал φ является вполне локально узким тогда и только тогда, когда положительные функционалы φ_+ и $-\varphi_-$ являются таковыми, что по предложению 4.4 равносильно вполне локальной узкости функционалов $(\varphi_+)_S$ и $(-\varphi_-)_S$, т. е. (опять же по лемме 1.2) самого функционала φ_S.

Согласно лемме 2.6 $B(T) = \mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T, \mathcal{G}, B(T)\big)$. Согласно свойству (E) $[(\mathrm{E}_\sigma)]$ для любого $C \in \mathcal{C}$ существует функция $g \in B(T)$, такая что $\chi(C) \leqslant g$, поэтому $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathrm{m}}\big(B(T)\big)$. Теперь к функционалу φ_S на $B(T)$ можно применить предложение 4.6, что завершает доказательство. □

4.4. Точные и σ-точные функционалы на пространствах непрерывных функций

Докажем, что функционалы, используемые в теоремах Халмоша—Хьюитта—Эдвардса и Бурбаки из введения, на самом деле являются σ-точными.

Лемма 4.6. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — локально компактное пространство, φ — ограниченный линейный функционал на $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$. Тогда φ является поточечно непрерывным.*

Доказательство. Сначала предположим, что функционал φ положительный. Пусть $(f_m \in C_c(T, \mathcal{G})_+ \mid m \in M) \downarrow 0$ в $F(T)$. Зафиксируем $m_0 \in M$ и рассмотрим функцию $g \equiv f_{m_0}$ и компактное множество $C \equiv \operatorname{supp} g \equiv \operatorname{cl}\operatorname{coz} g$. Для C существует функция $h \in C_c(T)_+$, такая что $h \geqslant \chi(C)$.

Возьмём $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такое $a > 0$, что $a\varphi(h) < \varepsilon$. Рассмотрим открытые множества $G_m \equiv \{t \in T \mid f_m(t) < a\}$. Так как $(f_m \mid m \in M) \downarrow 0$, то $(G_m \mid m \in M) \uparrow T$. Поэтому существует конечное покрытие $(G_n \mid n \in N \subset M)$ множества C. Из направленности M следует, что существует такое $m \in M$, что $n \leqslant m$ для любого $n \in N$. Поэтому $G_m \supset G_n$ для любого n. Значит, $C \subset G_m$. Возьмём такое $l \in M$, что $l \geqslant m_0$ и $l \geqslant m$. Тогда $f_l \leqslant g$ и $f_l \leqslant f_m$. Из первого неравенства следует, что $H \equiv \operatorname{coz} f_l \subset C \subset G_m$, а из второго неравенства следует, что $f_l(t) \leqslant f_m(t) < a = a\chi(C)(t) \leqslant ah(t)$ для любой точки $t \in H$. Значит, $f_l \leqslant ah$ влечёт $\varphi f_l \leqslant a\varphi(h) < \varepsilon$. Если $k < l$, то $\varphi f_k \leqslant \varphi f_l < \varepsilon$. Таким образом, $(\varphi f_m \mid m \in M) \downarrow 0$, т. е. функционал φ поточечно непрерывен.

Наконец, если $\varphi \in C_c^\sim$, то по лемме 1.1 $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, где φ_+, $-\varphi_-$ ограниченные и положительные. Следовательно, φ_+ и $-\varphi_-$ поточечно непрерывные. Тогда и φ будет поточечно непрерывным (см. замечание к лемме 1.2). □

Предложение 4.7. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — локально компактное пространство, φ — ограниченный линейный функционал на $C_c(T, \mathcal{G})$. Тогда φ является локально узким.*

Доказательство. Сначала предположим, что φ положительный. Пусть $G \in \mathcal{G}$, $u \in (C_c)_+$ и $\varepsilon > 0$. Рассмотрим множество $M \equiv \{f \in C_c \mid \mathbf{0} \leqslant f \leqslant \chi(G)\}$. Тогда из $(f \mid f \in M) \uparrow \chi(G)$ вытекает, что $(f \wedge u \mid f \in M) \uparrow \chi(G) \wedge u$, поэтому $\chi(G) \wedge u \in \mathrm{S}^\tau(T, C_c)$. Следовательно, $(\varphi(f \wedge u) \mid f \in M) \uparrow \overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u)$ и существует такая функция $f \in M$, что $\overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u) - \varepsilon/2 < \varphi(f \wedge u)$.

Определим функции $f_k \equiv (f - (1/k)\mathbf{1}) \vee \mathbf{0}$. Поскольку $(f_k \wedge u \mid k \in \mathbb{N}) \uparrow f \wedge u$, а по лемме 4.6 функционал φ поточечно непрерывен, мы можем заключить, что $(\varphi(f_k \wedge u) \mid k \in \mathbb{N}) \uparrow \varphi(f \wedge u)$. Следовательно, найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, что $\varphi(f \wedge u) - \varepsilon/2 < \varphi(f_k \wedge u)$. Рассмотрим замкнутое множество $C \equiv \operatorname{supp} f_k \equiv \operatorname{cl}\operatorname{coz} f_k$. Из $f_k \leqslant f \leqslant \chi(G) \leqslant \mathbf{1}$ и $C \subset \{t \in T \mid f(t) \geqslant 1/k\} \subset \subset \operatorname{coz} f$ получаем, что $f_k \leqslant \chi(C)$, $C \subset G$ и C компактно.

Поскольку согласно лемме 3.5 семейство C_c огибает сверху функцию $\chi(C)$, эта функция лежит в $\mathrm{I}^\tau(T, C_c)$, а потому $\chi(C) \wedge u \in \mathrm{I}^\tau(T, C_c)$. Тогда $\varphi(f_k \wedge u) \leqslant \leqslant \underline{\varphi}(\chi(C) \wedge u)$, и мы имеем неравенство $\varphi(f \wedge u) - \varepsilon/2 < \underline{\varphi}(\chi(C) \wedge u)$. Отсюда следует, что

$$\overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u) - \underline{\varphi}(\chi(C) \wedge u) = \\ = \overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u) - \varphi(f \wedge u) + \varphi(f \wedge u) - \underline{\varphi}(\chi(C) \wedge u) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Применяя лемму 4.5, получаем, что

$$\overline{\varphi}(\chi(G \setminus C) \wedge u) = \check{\varphi}\Big(\big(\chi(G) - \chi(C)\big) \wedge u\Big) = \\ = \check{\varphi}(\chi(G) \wedge u - \chi(C) \wedge u) = \overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u) - \underline{\varphi}(\chi(C) \wedge u) < \varepsilon.$$

Если $f \in C_{\rm c}$ и $|f| \leqslant \chi(G \setminus C) \wedge u$, то

$$|\varphi f| \leqslant \varphi|f| = \overline{\varphi}|f| \leqslant \overline{\varphi}(\chi(G \setminus C) \wedge u) < \varepsilon,$$

откуда следует, что φ является локально узким.

Наконец, если $\varphi \in C_{\rm c}^{\sim}$, то по лемме 1.1 $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, где $\varphi_+, -\varphi_-$ ограниченные и положительные. Следовательно, функционалы φ_+ и $-\varphi_-$ локально узкие. Тогда и φ будет локально узким (см. замечание к лемме 1.2). $\square$

Теорема 4.2. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — локально компактное пространство, φ — ограниченный линейный функционал на $C_{\rm c}(T, \mathcal{G})$. Тогда φ является точным.*

Доказательство. Функционал φ будет поточечно непрерывным по лемме 4.6 и локально узким по предложению 4.7. Остаётся показать, что φ вполне локально узкий. Согласно замечанию к лемме 1.2 $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 положительные, локально узкие и поточечно непрерывные. Поскольку $C_{\rm c}(T, \mathcal{G})$ является линейным, решёточным и усекаемым подпространством в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ и обладает по лемме 3.5 свойством (E), функционалы φ_1 и φ_2 вполне локально узкие в силу предложения 4.4. Следовательно, вполне локально узким будет и функционал φ. $\square$

Следствие. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — локально компактное пространство. Тогда $C_{\rm c}(T, \mathcal{G})^{\sim} = C_{\rm c}(T, \mathcal{G})^{\triangledown} = C_{\rm c}(T, \mathcal{G})^{\vartriangle}$.*

Доказательство. Равенство $C_{\rm c}(T, \mathcal{G})^{\triangledown} = C_{\rm c}(T, \mathcal{G})^{\vartriangle}$ имеет место в силу следствия из леммы 3.2. Вложение $C_{\rm c}(T, \mathcal{G})^{\sim} \subset C_{\rm c}(T, \mathcal{G})^{\triangledown}$ справедливо по теореме 4.2. Обратное вложение имеет место, так как поточечно непрерывные функционалы являются ограниченными [32, 16H]. $\square$

Лемма 4.7. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское пространство, φ — узкий линейный функционал на $C_{\rm b}(T, \mathcal{G})$. Тогда φ является поточечно непрерывным.*

Доказательство. Сначала предположим, что функционал φ положительный. Пусть $(f_m \in C_{\rm b} \mid m \in M) \downarrow 0$ в $F(T)$. Если $\varphi f_m = 0$ для всех $m \in M$, то всё доказано. Поэтому предположим, что существует такое m_0, что $\varphi f_{m_0} > 0$. Тогда $\|f_{m_0}\|_u > 0$ и $\varphi\mathbf{1} > 0$. Рассмотрим $M_0 \equiv \{m \in M \mid m \geqslant m_0\}$. Ясно, что $(f_m \mid m \in M_0) \downarrow 0$. Рассмотрим $g_m \equiv f_m / \|f_{m_0}\|_u$. Тогда $0 \leqslant g_m \leqslant g_{m_0} \leqslant \mathbf{1}$ для любого $m \in M_0$ и $(g_m \mid m \in M_0) \downarrow 0$.

Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим такое компактное множество K, что $f \in C_{\rm b}$ и $|f| \leqslant \chi(T \setminus K)$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon/2$. Возьмём $\delta \equiv \varepsilon/(2\varphi\mathbf{1})$. Рассмотрим открытые множества $G_m \equiv \{t \in T \mid g_m(t) < \delta\}$. Так как $(g_m \mid m \in M_0) \downarrow 0$, то $\bigcup(G_m \mid m \in M_0) = T$. Выделим конечное покрытие $(G_n \mid n \in N \subset M_0)$ множества K. Для N существует такое m, что $m \geqslant n$ для всех $n \in N$. Если $t \in K$, то $t \in G_n$. Поэтому $g_m(t) \leqslant g_n(t) < \delta$. Рассмотрим непрерывную функцию $h_m \equiv (g_m - \delta\mathbf{1}) \vee \mathbf{0} \leqslant \mathbf{1}$. Так как $0 \leqslant h_m \leqslant \chi(T \setminus K)$, то $\varphi g_m - \delta\varphi\mathbf{1} \leqslant \varphi h_m < \varepsilon/2$. Следовательно, $\varphi g_m < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Значит, $(\varphi g_m \mid m \in M_0) \downarrow 0$. Отсюда следует, что $(\varphi f_m \mid m \in M_0) \downarrow 0$, и окончательно $(\varphi f_m \mid m \in M) \downarrow 0$.

Используя аналоги леммы 1.2 для узких и поточечно непрерывных функционалов, завершаем доказательство. $\square$

Предложение 4.8. *Пусть $(T,\mathcal{G})$ — тихоновское пространство, φ — узкий линейный функционал на $C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})$. Тогда φ является локально узким.*

Доказательство. Сначала предположим, что φ положительный. Возьмём произвольные $G \in \mathcal{G}$, $u \in (C_{\mathrm{b}})_{+}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такое компактное множество C_0, что из соотношений $f \in C_{\mathrm{b}}$ и $|f| \leqslant \chi(T \setminus C_0)$ вытекает $|\varphi f| < \varepsilon/2$. Согласно лемме 3.5 семейство C_{b} огибает снизу функцию $\chi(T \setminus C_0) = \chi(T \setminus C_0) \wedge \mathbf{1}$, поэтому $\chi(T \setminus C_0) \in \mathrm{S}^{\tau}(T, C_{\mathrm{b}})$. Отсюда следует, что $\overline{\varphi}\bigl(\chi(T \setminus C_0)\bigr) \leqslant \varepsilon/2$. Рассмотрим множество $M \equiv \{f \in C_{\mathrm{b}} \mid \mathbf{0} \leqslant f \leqslant \chi(G)\}$. Тогда из того, что $(f \mid f \in M) \uparrow \chi(G)$, выводим, что $(f \wedge u \mid f \in M) \uparrow \chi(G) \wedge u$. Следовательно, $\chi(G) \wedge u \in \mathrm{S}^{\tau}(T, C_{\mathrm{b}})$ и $(\varphi(f \wedge u) \mid f \in M) \uparrow \overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u)$, а потому существует такая функция $f \in M$, что $\overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u) - \varepsilon/4 < \varphi(f \wedge u)$.

Рассмотрим функции $f_k \equiv (f - (1/k)\mathbf{1}) \vee \mathbf{0}$. Так как $(f_k \wedge u \mid k \in \mathbb{N}) \uparrow f \wedge u$, а по лемме 4.7 функционал φ поточечно непрерывен, заключаем, что $(\varphi(f_k \wedge u) \mid k \in \mathbb{N}) \uparrow \varphi(f \wedge u)$. Следовательно, найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, что $\varphi(f \wedge u) - \varepsilon/4 < \varphi(f_k \wedge u)$. Рассмотрим замкнутое множество $F_k \equiv \operatorname{supp} f_k$. Из $f_k \leqslant \mathbf{1}$ и $F_k \subset \{t \in T \mid f(t) \geqslant 1/k\} \subset \operatorname{coz} f$ следует, что $f_k \leqslant \chi(F_k)$ и $F_k \subset G$.

Функция $\chi(F_k)$ принадлежит $\mathrm{I}^{\tau}(T, C_{\mathrm{b}})$, поскольку C_{b} огибает её сверху, поэтому $\chi(F_k) \wedge u \in \mathrm{I}^{\tau}(T, C_{\mathrm{b}})$. Следовательно, $\varphi(f_k \wedge u) \leqslant \underline{\varphi}(\chi(F_k) \wedge u)$ и $\varphi(f \wedge u) - \varepsilon/4 < \underline{\varphi}(\chi(F_k) \wedge u)$. Отсюда получаем, что

$$\overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u) - \underline{\varphi}(\chi(F_k) \wedge u) = \\ = \overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u) - \varphi(f \wedge u) + \varphi(f \wedge u) - \underline{\varphi}(\chi(F_k) \wedge u) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Теперь рассмотрим компактное множество $C \equiv C_0 \cap F_k$. Тогда

$$\chi(F_k) \wedge u = \bigl(\chi(C) + \chi(F_k \setminus C_0)\bigr) \wedge u \leqslant \chi(C) \wedge u + \chi(F_k \setminus C_0) \wedge u \leqslant \chi(C) \wedge u + \chi(T \setminus C_0).$$

Поэтому

$$\underline{\varphi}(\chi(F_k) \wedge u) = \check{\varphi}(\chi(F_k) \wedge u) \leqslant \check{\varphi}(\chi(C) \wedge u) + \check{\varphi}\bigl(\chi(T \setminus C_0)\bigr) = \\ = \underline{\varphi}(\chi(C) \wedge u) + \overline{\varphi}\bigl(\chi(T \setminus C_0)\bigr) < \underline{\varphi}(\chi(C) \wedge u) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u) - \underline{\varphi}(\chi(C) \wedge u) = \\ = \overline{\varphi}(\chi(G) \wedge u) - \underline{\varphi}(\chi(F_k) \wedge u) + \underline{\varphi}(\chi(F_k) \wedge u) - \underline{\varphi}(\chi(C) \wedge u) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Применяя лемму 4.5, как в доказательстве предложения 4.7, приходим к выводу, что функционал φ является локально узким.

Используя аналоги леммы 1.2 для узких и локально узких функционалов, завершаем доказательство. □

Теорема 4.3. *Пусть $(T,\mathcal{G})$ — тихоновское пространство, φ — узкий линейный функционал на $C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})$. Тогда φ является точным.*

Доказательство. Доказательство вполне аналогично доказательству теоремы 4.2, только вместо леммы 4.6 и предложения 4.7 необходимо использовать лемму 4.7 и предложение 4.8. □

Следствие. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское топологическое пространство. Тогда*

$$C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\pi} = C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\triangledown} = C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle} = C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\textcircled{\pi}} = C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\textcircled{\triangledown}} = C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\textcircled{\vartriangle}}.$$

Доказательство. Равенство $C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\triangledown} = C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle}$ имеет место согласно следствию из леммы 3.2. Вложение $C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\pi} \subset C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\triangledown}$ справедливо по теореме 4.3. Теперь докажем, что точные функционалы являются узкими. Если φ точный, то для $G \equiv T$, $u \equiv \mathbf{1}$ и $\varepsilon > 0$ найдётся компактное множество $C \subset G$, такое что из соотношений $f \in C_{\mathrm{b}}$ и $|f| \leqslant \chi(T \setminus C) = \chi(G \setminus C) \wedge u$ вытекает $|\varphi f| < \varepsilon$. Таким образом, функционал φ узкий.

Остаётся показать, что все функционалы из $C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\pi} = C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\triangledown} = C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle}$ равномерно ограниченные. Если $\varphi \in (C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle})_{+}$, то, поскольку $\mathbf{1} \in C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})$, для каждой функции $f \in C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})$, такой что $|f| \leqslant \mathbf{1}$, имеем $|\varphi f| \leqslant \varphi|f| \leqslant \varphi\mathbf{1} < \infty$, т. е. функционал φ равномерно ограниченный. Отсюда, используя замечание к лемме 1.2, получаем равномерную ограниченность произвольного функционала $\varphi \in C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle}$. □

5. Характеризация радоновских интегралов

5.1. Представление положительных σ-точных функционалов радоновскими интегралами

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово топологическое пространство, $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное подпространство в пространстве симметризуемых функций $\mathrm{S}(T,\mathcal{G})$, обладающее свойством (E_{σ}) или свойством $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. Рассмотрим усекаемое решёточное линейное подпространство $B(T) \equiv \mathrm{S}_{\mathrm{m}}\bigl(T,\mathcal{G},A(T)\bigr)$ в $\mathrm{S}(T,\mathcal{G})$ (см. раздел 2.4). Применим теорему 1.1 (теорему Александрова—Стоуна) к пространству $B(T)$ и рассмотрим соответствующие этому семейству σ-алгебру $\mathcal{M}$ и отображение R (см. раздел 1.3). Вспомним также биекцию $P\colon (A(T)^{\vartriangle})_{+} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow (B(T)^{\vartriangle})_{+}$ из предложения 4.5 и определим отображение $U \equiv R|(B(T)^{\vartriangle})_{+} \circ P$, ставящее в соответствие каждому функционалу из $(A(T)^{\vartriangle})_{+}$ некоторую меру на $(T,\mathcal{G})$.

Теорема 5.1. *Пусть $(T,\mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное подпространство в $\mathrm{S}(T,\mathcal{G})$, обладающее свойством (E_{σ}) или свойством $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$, $\varphi \in (A(T)^{\vartriangle})_{+}$ и $\mu \equiv U\varphi\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_{+}$. Тогда*

1) $\mathcal{I}^{\sigma}\bigl(B(T)\bigr) \subset \mathcal{A}_{\mathrm{m}}\bigl(T,\mathcal{G},A(T)\bigr)_{\delta}$;
2) $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}(T,\mathcal{G})_{0}$;
3) $\mu C = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant \chi(C)\}$ *для каждого* $C \in \mathcal{C}$;
4) *функционал φ представи́м интегралом Лебега над $(T,\mathcal{M},\mu)$;*
5) *если функционал φ равномерно ограниченный, то мера μ ограниченная;*

6) *мера* μ *единственна в следующем смысле: если в* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}(T,\mathcal{G})$ *существует другая мера* $\nu\colon \mathcal{N}\to\bar{\mathbb{R}}_+$, *такая что* $\nu C=\inf\{\varphi f \mid f\in A(T)\wedge f\geqslant\chi(C)\}$ *для каждого* $C\in\mathcal{C}$ *и* φ *представи́м интегралом Лебега над* $(T,\mathcal{N},\nu)$, *то* $\mathcal{N}=\mathcal{M}$ *и* $\nu=\mu$.

Доказательство. В соответствии с предложением 4.5 возьмём функционал $\varphi_S\equiv P\varphi\in(B(T)^{\Delta})_+$, продолжающий функционал φ. Рассмотрим ансамбль $\mathcal{R}\equiv\mathcal{I}^{\sigma}\big(B(T)\big)$ всех таких множеств $R\subset T$, что $B(T)$ σ-огибает сверху функцию $\chi(R)$ (см. раздел 1.3). По теореме 1.1 мера $\mu\equiv R\varphi_S\equiv U\varphi$ является положительной, широкой, полной, сильно насыщенной, внутренне $\mathcal{R}$-регулярной и $\mathcal{R}$-σ-непрерывной сверху, при этом $\mathcal{R}\subset\mathcal{M}^f(\mu)$ и функционал φ_S представи́м интегралом Лебега над $(T,\mathcal{M},\mu)$.

Заметим, что $\mu R\equiv\inf\{\varphi_S f\mid f\in B(T)_+\wedge f\geqslant\chi(R)\}$ согласно определению меры μ и $\mu M=\sup\{\mu R\mid R\in\mathcal{R}\wedge R\subset M\}$ в силу её внутренней $\mathcal{R}$-регулярности. Так как $\chi(C)\in B(T)$ для каждого компактного множества C, мы заключаем, что $\mathcal{C}\subset\mathcal{R}$. Следовательно, μ конечна на компактных множествах.

Докажем утверждение 1). Сначала отметим, что для каждой $f\in B(T)$ и всякого $F\in\mathcal{F}$ $f\wedge\chi(F)\in B(T)$. Действительно, во-первых, $\chi(F)\in\mathrm{S}(T,\mathcal{G})$, а потому и $f\wedge\chi(F)\in\mathrm{S}(T,\mathcal{G})$. Во-вторых, $|f|\leqslant u\in A(T)_+$, поэтому $f\wedge\chi(F)=$ $=f\wedge u\wedge\chi(F)$, а семейство $A(T)$ $[\sigma$-$]$огибает сверху функции вида $u\wedge\chi(F)$, следовательно, $u\wedge\chi(F)\leqslant v\in A(T)_+$. В итоге, $|f\wedge\chi(F)|=|f|\wedge|u\wedge\chi(F)|\leqslant$ $\leqslant u\wedge v\in A(T)_+$, т. е. $f\wedge\chi(F)\in B(T)$.

Пусть $F\in\mathcal{F}$ и $R\in\mathcal{R}$. Тогда $(f_n\mid n\in\omega)\downarrow\chi(R)$ для некоторой последовательности $(f_n\in B(T)_+\mid n\in\omega)$. Рассмотрим функции $g_n\equiv f_n\wedge\chi(F)\in B(T)_+$. Из того что $(g_n\mid n\in\omega)\downarrow\chi(R\cap F)$, согласно определению $\mathcal{R}$ мы заключаем, что $R\cap F\in\mathcal{R}\subset\mathcal{M}$. Так как мера μ является $\mathcal{R}$-насыщенной, мы получаем, что $F\in\mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{F}\subset\mathcal{M}$. Следовательно, $\mathcal{G}\subset\mathcal{M}$, так как $\mathcal{M}$ — σ-алгебра.

Пусть $R\in\mathcal{R}$ и $(f_n\in B(T)_+\mid n\in\omega)\downarrow\chi(R)$. Рассмотрим множества $\Lambda_n\equiv$ $\equiv\{t\in T\mid f_n(t)\geqslant 1\}$. Тогда $(\Lambda_n\mid n\in\omega)\downarrow R$ в $\mathcal{P}(T)$. Так как f_n является симметризуемой, существует конечное покрытие $(B_{nj}\in\mathcal{A}(T,\mathcal{G})\mid j\in J_n)$ множества T, такое что $\omega(f_n,B_{nj})<1/(n+1)$. Рассмотрим множества $J'_n\equiv\{j\in J_n\mid$ $B_{nj}\cap\Lambda_n\neq\varnothing\}$ и $B_n\equiv\bigcup(B_{nj}\mid j\in J'_n)\in\mathcal{A}(T,\mathcal{G})$.

Если $t\in B_n$, то $t\in B_{nj}$ для некоторого $j\in J'_n$. Возьмём некоторую точку $s\in B_{nj}\cap\Lambda_n$. Тогда из $|f_n(t)-f_n(s)|<1/(n+1)$ вытекает, что $f_n(t)>f_n(s)-$ $-1/(n+1)\geqslant n/(n+1)$. Поэтому $\Lambda_n\subset B_n\subset\Lambda'_n\equiv\{t\in T\mid(1+1/n)f_n(t)>1\}$.

По определению семейства $B(T)$ имеем, что $f_n\leqslant u_n$ для некоторых $u_n\in A(T)$. Следовательно, из $\chi(B_n)\leqslant(1+1/n)f_n\leqslant(1+1/n)u_n\in A(T)$ вытекает, что $B_n\in\mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)=\mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(T,\mathcal{G},B(T)\big)$.

Если $t\notin R$, то $f_n(t)<1/2$ для некоторого $n\geqslant 1$. Следовательно, $t\notin\Lambda'_n$, откуда получаем, что $\bigcap(\Lambda'_n\mid n\in\omega)\subset R$. В результате, так как $R=$ $=\bigcap(\Lambda_n\mid n\in\omega)\subset\bigcap B_n\subset\bigcap\Lambda'_n\subset R$, имеем $R=\bigcap B_n\in\mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)_{\delta}$.

Докажем утверждение 2). Возьмём множества $A_n\equiv\bigcap(B_m\mid m\in n+1)\in$ $\in\mathcal{A}_{\mathrm{m}}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)$. Тогда $(A_n\mid n\in\omega)\downarrow R$. Ясно, что $B(T)=\mathrm{S}_{\mathrm{m}}\big(T,\mathcal{G},B(T)\big)$, следовательно, согласно предложению 4.2 для последовательности $\bigl(A_n \in \mathcal{A}_{\mathrm{m}}\bigl(T, \mathcal{G}, A(T)\bigr) \mid n \in \omega\bigr)$ и каждого $\varepsilon > 0$ существуют $n_0 \in \omega$ и компактное множество $C \subset \bigcap(A_n \mid n \in \omega)$, такие что из условий $f \in B(T)$ и $|f| \leqslant \chi(A_{n_0} \setminus C) \equiv g$ следует $|\varphi_S f| < \varepsilon$. Поскольку $g \in B(T)$, заключаем, что $\varphi_S g < \varepsilon$. Тогда

$$\mu R - \mu C \leqslant \mu A_{n_0} - \mu C = \mu(A_{n_0} \setminus C) = \int g \, d\mu = \varphi_S g < \varepsilon.$$

Поэтому $\mu R = \sup\{\mu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset R\}$.

Пусть $M \in \mathcal{M}$. Возьмём такое число x, что $x < \mu M$. Тогда в силу внутренней $\mathcal{R}$-регулярности меры μ существует такое $R \in \mathcal{R}$, что $R \subset M$ и $x < \mu R$. Существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset R$ и $x < \mu C$. Таким образом, $x \leqslant \sup\{\mu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset M\} \leqslant \mu M$. Так как x произвольно, мы заключаем, что $\mu M = \sup\{\mu C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset M\}$. Это означает, что μ является компактно регулярной.

Итак, μ является широкой положительной радоновской мерой.

Докажем утверждение 3). Пусть $A(T)$ обладает свойством (E). Возьмём произвольное компактное множество C. В силу свойства (E) пространства $A(T)$ существует убывающая сеть $(f_n \in A(T) \mid n \in N)$, такая что $(f_n \mid n \in N) \downarrow \chi(C)$ в $F(T)$. Тогда $\chi(C) \in \mathrm{I}^{\tau}\bigl(T, A(T)\bigr) \cap B(T)$ и

$$\mu C = \int \chi(C) \, d\mu = \check{\varphi}_S \chi(C) = \underline{\varphi} \chi(C) = \inf(\varphi f_n \mid n \in N).$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое n, что $\mu C + \varepsilon > \varphi f_n$. Если $f \in A(T)$ и $f \geqslant \chi(C)$, то $\mu C = \check{\varphi}_S \chi(C) \leqslant \check{\varphi}_S f = \varphi f$. Следовательно, $\mu C = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant \chi(C)\}$.

В случае когда $A(T)$ обладает свойством (E_σ), рассуждения аналогичны.

Докажем утверждение 4). Если $f \in A(T)$, то $\varphi f = \varphi_S f = \int f \, d\mu$. Поэтому функционал φ представи́м интегралом Лебега над измеримым пространством $(T, \mathcal{M}, \mu)$.

Докажем утверждение 5). Из равномерной ограниченности φ и компактной регулярности μ получаем, что

$$\mu T = \sup\{\varphi \chi(C) \mid C \in \mathcal{C}\} \leqslant \sup\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge 0 \leqslant f \leqslant \mathbf{1}\} < \infty,$$

т. е. мера μ ограниченная.

Докажем утверждение 6). Нам нужно убедиться в единственности μ. Рассмотрим меру $\nu \colon \mathcal{N} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ из утверждения. Возьмём любое $C \in \mathcal{C}$. Тогда $\mu C = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant \chi(C)\} = \nu C$.

Пусть $N \in \mathcal{N}$ и $C \in \mathcal{C}$. По свойству компактной регулярности ν мы можем найти некоторые последовательности $(K_n \subset C \cap N \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow$ и $(L_n \subset C \setminus N \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow$ компактных множеств, такие что $\nu(C \cap N) = \sup\{\nu K_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\nu(C \setminus N) = \sup\{\nu L_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим непересекающиеся множества $K \equiv \bigcup K_n \subset C \cap N$ и $L \equiv \bigcup L_n \subset C \setminus N$ из $\mathcal{M}$.

Мы имеем

$$\nu\big((C \setminus K_m) \setminus L_n\big) = \nu(C \setminus K_m) - \nu\big((C \setminus K_m) \cap L_n\big) = \\ = \nu C - \nu(C \cap K_m) - \nu L_n = \nu C - \nu K_m - \nu L_n.$$

Следовательно, $\mu K = \sup \mu K_n = \sup \nu K_n = \nu(C \cap N)$ и $\mu L = \sup \mu L_n = = \sup \nu L_n = \nu(C \setminus N)$. Поэтому $\mu(K \cup L) = \mu K + \mu L = \nu(C \cap N) + \nu(C \setminus N) = \nu C$. В результате $\nu C = \mu C = \mu\big(C \setminus (K \cup L)\big) + \mu(K \cup L) = \mu\big(C \setminus (K \cup L)\big) + \nu C$, откуда следует, что $\mu\big(C \setminus (K \cup L)\big) = 0$.

Так как μ полная, из $(C \cap N) \setminus K \subset C \setminus (K \cup L)$ мы выводим, что $(C \cap N) \setminus K \in \mathcal{M}$. Значит, $N \cap C = \big((C \cap N) \setminus K\big) \cup K \in \mathcal{M}$ для любого $C \in \mathcal{C}$.

Возьмём произвольное множество $M \in \mathcal{M}^f(\mu)$. Так как μ компактно регулярна, мы имеем $\mu M = \sup\{\mu D \mid D \in \mathcal{C} \wedge D \subset M\}$. Поэтому существует такая последовательность $(D_n \in \mathcal{C} \mid n \in \mathbb{N}) \uparrow$, что $\bigcup(D_n \mid n \in \mathbb{N}) \subset M$ и $\mu M = \sup\{\mu D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Рассмотрим множества $E \equiv \bigcup(D_n \mid n \in \mathbb{N})$ и $H \equiv M \setminus E$ из $\mathcal{M}$. Так как $\mu D_n \leqslant \mu E = \mu M - \mu H$ для каждого n, получаем, что $\mu M \leqslant \mu M - \mu H$. Значит, $\mu H = 0$. Так как μ полная, из $(N \cap M) \setminus E \subset H$ мы выводим, что $(N \cap M) \setminus E \in \mathcal{M}$. С другой стороны, по доказанному выше $(N \cap M) \cap E = \bigcup((N \cap D_n) \cap M \mid n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{M}$. В результате $N \cap M \in \mathcal{M}$. Из сильной насыщенности μ теперь следует, что $N \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Точно таким же образом показываем, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Теперь из свойства компактной регулярности мер μ и ν следует, что $\mu = \nu$. □

Для любого функционального подсемейства $A(T)$ в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ рассмотрим множества

$$\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0 \equiv \{\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}(T, \mathcal{G})_0 \mid A(T) \subset \mathrm{MI}(T, \operatorname{dom}\mu, \mu)\},$$
$$\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0 \equiv \{\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})_0 \mid A(T) \subset \mathrm{MI}(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{G}), \mu)\}$$

всех положительных радоновских и борелевско-радоновских мер μ, таких что все функции из $A(T)$ μ-интегрируемы.

Положим $U_{\mathrm{b}} \equiv U|(A(T)^{\circledtriangle})_+$.

Следствие. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство и $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное подпространство в $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$.*

1. *Если $A(T)$ обладает свойством (E_σ), то U является биекцией $(A(T)^{\vartriangle})_+$ на $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0$, а U_{b} — биекцией $(A(T)^{\circledtriangle})_+$ на $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})_+$.*
2. *Если $A(T)$ обладает свойством $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$, то U является биекцией $(A(T)^{\triangledown})_+ = (A(T)^{\vartriangle})_+$ на $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0$, а U_{b} — биекцией $(A(T)^{\circledtriangledown})_+ = (A(T)^{\circledtriangle})_+$ на $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})_+$.*

Доказательство. Поскольку все функции из $A(T)$ интегрируемы по любой мере из $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0$, инъективность отображений непосредственно следует из утверждения 4) теоремы.

По следствию леммы 3.2 свойство (D) семейства $A(T)$ обеспечивает равенство $A(T)^{\triangledown} = A(T)^{\vartriangle}$. Таким образом, остаётся показать, что отображение $U\colon (A(T)^{\vartriangle})_+ \rightarrowtail \mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}\bigl(T, \mathcal{G}, A(T)\bigr)_0$ будет и сюръективным.

Для каждой меры $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}\bigl(T, \mathcal{G}, A(T)\bigr)_0$ интегральный функционал i_μ будет σ-точным на $A(T) \subset \mathrm{SI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ в силу предложения 4.3. По лемме 4.3 $\mathrm{S_c}(T, \mathcal{G}) \subset \mathrm{SI}(T, \mathcal{M}, \mu)$, поэтому $\chi(C) \in \mathrm{SI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ для любого $C \in \mathcal{C}$. Тогда, поскольку $A(T)$ огибает [σ-огибает] сверху $\chi(C)$, по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем $\inf\{i_\mu f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant \chi(C)\} = \int \chi(C)\, d\mu = \mu C$. Теперь согласно утверждению 6) теоремы получаем, что $\mu = U i_\mu$.

Заметим, что $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{we}}\bigl(T, \mathcal{G}, A(T)\bigr) = \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{we}}(T, \mathcal{G})$, поскольку все функции из $A(T) \subset \mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ интегрируемы по любой мере из $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{we}}(T, \mathcal{G})$ согласно лемме 4.3. $\square$

Если мы возьмём два различных функционала $\varphi, \psi \in (A(T)^{\vartriangle})_+$, то по теореме 5.1 для каждого из них найдётся своё собственное измеримое пространство, над которым этот функционал будет представим интегралом Лебега. Следовательно, нам важно рассмотреть для всех таких функционалов интегральное представление на одном и том же измеримом пространстве.

С этой целью возьмём борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ и рассмотрим отображения $V\colon (A(T)^{\vartriangle})_+ \to \mathrm{Meas}(T, \mathcal{B})_0$ и $V_{\mathrm{b}}\colon (A(T)^{\circledast})_+ \to \mathrm{Meas_b}(T, \mathcal{B})_+$, определяемые как $V\varphi \equiv (U\varphi)|\mathcal{B}$ и $V_{\mathrm{b}}\varphi \equiv (U_{\mathrm{b}}\varphi)|\mathcal{B}$.

Теорема 5.2. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство,* $A(T)$ — *усекаемое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$, *обладающее свойством* (E_σ) *или свойством* $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$, $\varphi \in (A(T)^{\vartriangle})_+$, $\mu \equiv U\varphi\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ *и* $\mu_0 \equiv V\varphi\colon \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}_+$. *Тогда*

1) $\mu_0 \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})_0$ *и* $\mu_0 = \mu|\mathcal{B}$;
2) $\mu_0 C = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant \chi(C)\}$ *для каждого* $C \in \mathcal{C}$;
3) *функционал* φ *представи́м интегралом Лебега над измеримым пространством* $(T, \mathcal{B}, \mu_0)$;
4) *если функционал* φ *равномерно ограниченный, то мера* μ_0 *ограниченная*;
5) *мера* μ_0 *единственна в следующем смысле: если в* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$ *существует другая мера* $\varkappa\colon \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}_+$, *такая что* $\varkappa C = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant \chi(C)\}$ *для каждого* $C \in \mathcal{C}$ *и функционал* φ *представи́м интегралом Лебега над измеримым пространством* $(T, \mathcal{B}, \varkappa)$, *то* $\varkappa = \mu_0$.

Доказательство. По определению $\mu_0 \equiv V\varphi \equiv (U\varphi)|\mathcal{B} = \mu|\mathcal{B}$. Тогда утверждения 1)—4) следуют непосредственно из теоремы 5.1. Для каждого $C \in \mathcal{C}$ имеем $\mu_0 C = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant \chi(C)\} = \varkappa C$. Поэтому свойство компактной регулярности влечёт равенство $\mu_0 = \varkappa$ на $\mathcal{B}$. $\square$

Следствие. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $A(T)$ — *усекаемое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$.

1. *Если* $A(T)$ *обладает свойством* (E_σ), *то* V *является биекцией из* $(A(T)^{\vartriangle})_+$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}\bigl(T, \mathcal{G}, A(T)\bigr)_0$, *а* V_{b} — *биекцией из* $(A(T)^{\circledast})_+$ *на* $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})_+$.

2. *Если* $A(T)$ *обладает свойством* $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$, *то* V *является биекцией из* $(A(T)^{\triangledown})_{+} = (A(T)^{\vartriangle})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0$, *а* V_{b} — *биекцией из* $(A(T)^{\circledtriangledown})_{+} = (A(T)^{\circledvartriangle})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})_{+}$.

Доказательство этого следствия вполне аналогично доказательству следствия теоремы 5.1.

Теперь мы можем доказать теорему о характеризации радоновских интегралов в положительной биективной версии.

Сначала сформулируем её для положительных расширенных радоновских мер.

Теорема 5.3 (параметрическая теорема о характеризации радоновских интегралов (положительная биективная версия I)). *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство,* $A(T)$ — *усекаемое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$. *Пусть* $A(T)$ *обладает свойством* (E_σ) *или свойством* $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. *Тогда*

1) *для каждого положительного* σ*-точного линейного функционала* φ *существует единственная положительная расширенная радоновская мера* $\mu\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_{+}$, *такая что* φ *представи́м интегралом Лебега над измеримым пространством* $(T, \mathcal{M}, \mu)$ *и* $\mu C = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant \chi(C)\}$ *для всякого компактного множества* C;
2) *если, кроме того, функционал* φ *равномерно ограниченный, то мера* μ *ограниченная*;
3) *отображение* $U\colon \varphi \mapsto \mu$ *есть биекция из* $(A(T)^{\vartriangle})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0$;
4) *отображение* $U_{\mathrm{b}} \equiv U|(A(T)^{\circledvartriangle})_{+}$ — *биекция из* $(A(T)^{\circledvartriangle})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{we}}(T, \mathcal{G})_{+}$.

Доказательство. Все утверждения следуют непосредственно из теоремы 5.1 и её следствия. □

Теперь сформулируем теорему о характеризации интегралов по положительным борелевско-радоновским мерам.

Теорема 5.4 (параметрическая теорема о характеризации радоновских интегралов (положительная биективная версия II)). *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство,* $A(T)$ — *усекаемое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$. *Пусть* $A(T)$ *обладает свойством* (E_σ) *или свойством* $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. *Тогда*

1) *для каждого положительного* σ*-точного линейного функционала* φ *существует единственная положительная борелевско-радоновская мера* μ_0, *такая что* φ *представи́м интегралом Лебега над измеримым пространством* $(T, \mathcal{B}, \mu)$ *и* $\mu_0 C = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant \chi(C)\}$ *для всякого компактного множества* C;
2) *если, кроме того, функционал* φ *равномерно ограниченный, то мера* μ_0 *ограниченная*;
3) *отображение* $V\colon \varphi \mapsto \mu_0$ *есть биекция из* $(A(T)^{\vartriangle})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0$;
4) *отображение* $V_{\mathrm{b}} \equiv V|(A(T)^{\circledvartriangle})_{+}$ — *биекция из* $(A(T)^{\circledvartriangle})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})_{+}$.

Доказательство. Все утверждения следуют непосредственно из теоремы 5.2 и её следствия. $\square$

Покажем теперь, что из этих общих теорем вытекают как частные случаи некоторые теоремы о линейном радоновском представлении, упомянутые во введении (остальные окажутся следствиями теоремы 5.7).

Сначала рассмотрим случай локально компактного пространства.

Следствие 1 (теорема Халмоша—Хьюитта—Эдвардса). *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *локально компактное пространство,* $A(T) \equiv C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$. *Тогда*

1) *отображение* U *является биекцией из* $(C_{\mathrm{c}}(T,\mathcal{G})^{\sim})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}(T,\mathcal{G})_0$, *а отображение* V — *биекцией из* $(C_{\mathrm{c}}(T,\mathcal{G})^{\sim})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_0$; *при этом* $\varphi f = \int f\,dU\varphi = \int f\,dV\varphi$;
2) *отображение* U_{b} *является биекцией из* $(C_{\mathrm{c}}(T,\mathcal{G})^{\textcircled{\sim}})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_{+}$, *а отображение* V_{b} — *биекцией из* $(C_{\mathrm{c}}(T,\mathcal{G})^{\textcircled{\sim}})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_{+}$; *при этом* $\varphi f = \int f\,dU_{\mathrm{b}}\varphi = \int f\,dV_{\mathrm{b}}\varphi$.

Доказательство. В силу леммы 3.5 пространство $A(T)$ обладает свойством (E). По теореме Дини $A(T)$ обладает свойством (D). По следствию теоремы 4.2 $A(T)^{\sim} = A(T)^{\vartriangle}$. Наконец, так как $C_{\mathrm{c}}(T,\mathcal{G}) \subset \mathrm{MI}(T,\mathcal{M},\mu)$, имеем $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)_0 = \mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}(T,\mathcal{G})_0$. Теперь теоремы 5.3 и 5.4 влекут утверждения 1) и 2). $\square$

Далее рассмотрим случай тихоновского (вполне регулярного) пространства.

Следствие 2 (теорема Бурбаки для положительных мер). *Пусть* $(T,\mathcal{G})$ — *тихоновское топологическое пространство и* $A(T) \equiv C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})$. *Тогда отображение* $U = U_{\mathrm{b}}$ *является биекцией из* $(C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\pi})_{+} = (C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\textcircled{\pi}})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_{+}$, *а отображение* $V = V_{\mathrm{b}}$ — *биекцией из* $(C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\pi})_{+} = (C_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})^{\textcircled{\pi}})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_{+}$; *при этом* $\varphi f = \int f\,dU\varphi = \int f\,dV\varphi$.

Доказательство. По лемме 3.5 семейство $A(T)$ обладает свойством (E). По теореме Дини $A(T)$ обладает свойством (D). По следствию теоремы 4.3 $A(T)^{\pi} = A(T)^{\textcircled{\pi}} = A(T)^{\vartriangle} = A(T)^{\textcircled{\vartriangle}}$. Теперь теоремы 5.3 и 5.4 влекут желаемые утверждения. $\square$

Наконец, рассмотрим случай произвольного хаусдорфова пространства.

Следствие 3. *Пусть* $(T,\mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $A(T) \equiv \mathrm{S_c}(T,\mathcal{G})$. *Тогда*

1) *отображение* U *является биекцией из* $(\mathrm{S_c}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}(T,\mathcal{G})_0$, *а отображение* V — *биекцией из* $(\mathrm{S_c}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_0$; *при этом* $\varphi f = \int f\,dU\varphi = \int f\,dV\varphi$;
2) *отображение* U_{b} *является биекцией из* $(\mathrm{S_c}(T,\mathcal{G})^{\textcircled{\vartriangle}})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_{+}$, *а отображение* V_{b} — *биекцией из* $(\mathrm{S_c}(T,\mathcal{G})^{\textcircled{\vartriangle}})_{+}$ *на* $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_{+}$; *при этом* $\varphi f = \int f\,dU_{\mathrm{b}}\varphi = \int f\,dV_{\mathrm{b}}\varphi$.

Доказательство. По лемме 3.5 $A(T)$ обладает свойством (E_σ). Согласно лемме 4.3 $\mathrm{S_c}(T,\mathcal{G}) \subset \mathrm{MI}(T,\mathcal{M},\mu)$, поэтому $\mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)_0 = \mathfrak{RM}^{\mathrm{we}}(T,\mathcal{G})_0$. Теперь теоремы 5.3 и 5.4 приводят к утверждениям 1) и 2). $\square$

Следствие 4. *Пусть* $(T,\mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $A(T) \equiv \mathrm{S}(T,\mathcal{G})$. *Тогда отображение* $U = U_{\mathrm{b}}$ *является биекцией из* $(\mathrm{S}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle})_+ = (\mathrm{S}(T,\mathcal{G})^{\circledcirc})_+$ *на* $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{we}}(T,\mathcal{G})_+$, *а отображение* $V = V_{\mathrm{b}}$ — *биекцией из* $(\mathrm{S}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle})_+ = (\mathrm{S}(T,\mathcal{G})^{\circledcirc})_+$ *на* $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_+$; *при этом* $\varphi f = \int f\,dU\varphi = \int f\,dV\varphi$.

Доказательство. По лемме 3.5 $A(T)$ обладает свойством (E_σ). Поскольку $\mathbf{1} \in \mathrm{S}(T,\mathcal{G})$, для любого функционала $\varphi \in (\mathrm{S}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle})_+$ и каждой функции $f \in \mathrm{S}(T,\mathcal{G})$, такой что $|f| \leqslant \mathbf{1}$, имеем $|\varphi f| \leqslant \varphi|f| \leqslant \varphi\mathbf{1} < \infty$. Поэтому $(\mathrm{S}(T,\mathcal{G})^{\vartriangle})_+ = (\mathrm{S}(T,\mathcal{G})^{\circledcirc})_+$. Тогда теоремы 5.3 и 5.4 влекут требуемые утверждения. $\square$

Предложение 5.1. *Пусть* $(T,\mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство,* $A(T)$ — *усекаемое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T,\mathcal{G})$. *Пусть* $A(T)$ *обладает свойством* (E_σ) *или свойством* $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. *Тогда отображения* V *и* V_{b} *конусно-линейны, изотонны и сохраняют порядковые границы.*

Доказательство. Пусть $\varphi,\psi \in (A(T)^{\vartriangle})_+$, $\mu \equiv V\varphi$, $\nu \equiv V\psi$, $x,y \in \mathbb{R}_+$. Тогда $\lambda \equiv x\mu + y\nu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_0$.

Из утверждения 3) теоремы 5.4 следует, что $A(T) \subset \mathrm{MI}(T,\mathcal{B},\mu) \cap \mathrm{MI}(T,\mathcal{B},\nu)$, где $\mathcal{B} \equiv \mathcal{B}(T,\mathcal{G})$. По свойствам интеграла Лебега $\mathrm{MI}(T,\mathcal{B},\lambda) = \mathrm{MI}(T,\mathcal{B},\mu) \cap \cap \mathrm{MI}(T,\mathcal{B},\nu)$ и $\int f\,d\lambda = x\int f\,d\mu + y\int f\,d\nu$ для каждой функции $f \in \mathrm{MI}(T,\mathcal{B},\lambda)$. Следовательно, $A(T) \subset \mathrm{MI}(T,\mathcal{B},\lambda)$, и для каждой функции $f \in A(T)$ имеем $(x\varphi + y\psi)f = x\int f\,d\mu + y\int f\,d\nu = \int f\,d\lambda$ в силу теоремы 5.4.

Возьмём произвольное компактное множество C и положим $X \equiv \{f \in A(T) \mid f \geqslant \chi(C)\}$. По утверждению 1) теоремы 5.4 $\mu C = \inf(\varphi f \mid f \in X)$ и $\nu C = \inf(\psi f \mid f \in X)$. Обозначим числа $\inf(x\varphi f \mid f \in X)$, $\inf(y\psi f \mid f \in X)$ и $\inf((x\varphi f + y\psi f)f \mid f \in X)$ через a, b и c соответственно. Ясно, что $\lambda C = = x\mu C + y\nu C = a + b \leqslant c$. Поскольку $c \leqslant x\varphi f + y\psi f$, получаем $c - y\psi f \leqslant a$, $c - a \leqslant b$ и, следовательно, $c \leqslant a + b$. Тогда $\lambda C = c$. В силу теоремы 5.4 $\lambda = V(x\varphi + y\psi)$. Отсюда вытекает такое же свойство для V_{b}.

Теперь пусть $\varphi \leqslant \psi$. Если C — компактное множество, то $\mu C = \inf(\varphi f \mid f \in X) \leqslant \inf(\psi f \mid f \in X) = \nu C$. Тогда, пользуясь свойством компактной регулярности, получаем, что $\mu \leqslant \nu$.

Обратно, пусть $\mu \leqslant \nu$. Тогда $\varphi f = \int f\,d\mu \leqslant \int f\,d\nu = \psi f$ для каждой $f \in A(T)$. Это означает, что $\varphi \leqslant \psi$. Таким образом, V изотонно. Следовательно, V сохраняет все порядковые границы. Те же рассуждения справедливы и для V_{b}. $\square$

5.2. Радоновские бимеры и интегрирование по ним.

Поскольку семейство $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})$ всех борелевско-радоновских мер не является линейным пространством (см. раздел 1.4), естественно попытаться построить его решёточную линейную оболочку.

Напомним, что подмножество P из T называется *предкомпактным* (*относительно компактным*), если $\operatorname{cl} P$ является компактным, т. е. P содержится в некотором компактном множестве. Подансамбль ансамбля $\mathcal{B}(T, \mathcal{G})$, состоящий из всех предкомпактных борелевских множеств, обозначим через $\mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. Он является δ-кольцом.

Конечную узкую меру $\mu \colon \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ назовём *узкой радоновской мерой на* $(T, \mathcal{G})$, если выполнены следующие условия:

1) $\mathcal{B}_c(T, \mathcal{G}) \subset \mathcal{M}$;
2) $M \cap G \in \mathcal{M}$ для всех $M \in \mathcal{M}$ и $G \in \mathcal{G}$;
3) для любого $M \in \mathcal{M}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $C \in \mathcal{C}$, такое что $C \subset M$ и $|\mu M - \mu C| < \varepsilon$.

Если $\mathcal{M} = \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$, то назовём μ *узкой борелевско-радоновской мерой*. Подробнее об узких радоновских мерах можно прочитать в [12, II.1].

Триплет $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$, состоящий из мер μ, μ_1 и μ_2 на $(T, \mathcal{G})$, назовём *радоновским триплетом на хаусдорфовом пространстве* $(T, \mathcal{G})$, если

1) $\mu_1 \colon \mathcal{M}_1 \to \bar{\mathbb{R}}_+$ и $\mu_2 \colon \mathcal{M}_2 \to \bar{\mathbb{R}}_+$ являются положительными широкими радоновскими мерами;
2) $\mu \colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}$ является узкой радоновской мерой на δ-кольце $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_1^f(\mu_1) \cap$ $\cap\, \mathcal{M}_2^f(\mu_2)$;
3) $\mu M = \mu_1 M - \mu_2 M$ для каждого $M \in \mathcal{M}$.

Если μ_1 и μ_2 принадлежат $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})_0$, то β назовём *борелевско-радоновским триплетом*. Если меры μ_1 и μ_2 являются ограниченными, то β назовём *ограниченным*.

Множество всех радоновских триплетов на $(T, \mathcal{G})$ обозначим через $\mathfrak{R}(T, \mathcal{G})$. Подсемейство ограниченных радоновских триплетов обозначим через $\mathfrak{R}_b(T, \mathcal{G})$.

Радоновские триплеты $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$ и $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$ назовём *эквивалентными* ($\beta \sim \gamma$), если $\mu | \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G}) = \nu | \mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$. Класс эквивалентности в $\mathfrak{R}(T, \mathcal{G})$ радоновского триплета β обозначим через $\bar{\beta} \equiv \theta\beta$. Множество всех классов $\bar{\beta}$ для всех радоновских триплетов $\beta \in \mathfrak{R}(T, \mathcal{G})$ обозначим через $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$.

Любой элемент $\mathfrak{m} \equiv \bar{\beta}$ из $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ будем называть *радоновской бимерой*. Если $\beta \in \mathfrak{R}_b(T, \mathcal{G})$, то $\mathfrak{m} \equiv \bar{\beta}$ будем называть *ограниченной радоновской бимерой*. Семейство всех ограниченных радоновских бимер обозначим через $\mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$.

В качестве нулевого элемента в $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ возьмём элемент $O = \theta(\zeta, \zeta_1, \zeta_2)$, где ζ — нулевая мера на $\mathcal{B}(T, \mathcal{G})$, ζ_1 и ζ_2 — нулевые меры на $\mathcal{B}_c(T, \mathcal{G})$.

В [12, II.2] определены операции сложения элементов $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ и умножения их на действительные числа и бинарное отношение порядка $\leqslant$ и доказана корректность этих определений. Там же доказано следующее предложение.

Предложение 5.2. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство. Тогда семейства* $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ *и* $\mathfrak{RB}_b(T, \mathcal{G})$ *являются решёточными линейными пространствами.*

Теперь укажем на связь между положительными борелевско-радоновскими мерами и положительными радоновскими бимерами. Для каждой меры $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_0$ возьмём узкую положительную радоновскую меру $\mu_f \equiv \mu|\operatorname{dom}_f \mu$, радоновский триплет $\beta \equiv (\mu_f, \mu, 0)$ и положительную радоновскую бимеру $\mathfrak{m} \equiv \bar{\beta}$. Эта процедура определяет отображение $E^0\colon \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_0 \to \mathfrak{RB}(T,\mathcal{G})_+$, такое что $E^0\mu \equiv \mathfrak{m}$. Если $\mu \in \in \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_+$, то $E^0\mu \in \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_+$. Поэтому мы можем определить отображение $E^0_{\mathrm{b}}\colon \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_+ \to \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_+$, полагая $E^0_{\mathrm{b}} \equiv E^0|\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_+$.

Теорема 5.5. *Пусть $(T,\mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство. Тогда*

1) *отображения*

$$E^0\colon \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_0 \to \mathfrak{RB}(T,\mathcal{G})_+, \quad E^0_{\mathrm{b}}\colon \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_+ \to \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_+$$

являются биекциями;

2) *отображения E^0 и E^0_{b} конусно-линейны, изотонны и сохраняют порядковые границы*;

3) *для каждой бимеры $\mathfrak{m} \in \mathfrak{RB}(T,\mathcal{G})$ существуют единственные меры $\mu', \mu'' \in \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_0$, такие что $\mathfrak{m} = E^0\mu' - E^0\mu''$, $E^0\mu' = \mathfrak{m}_+$ и $E^0\mu'' = -\mathfrak{m}_-$; если бимера $\mathfrak{m}$ ограниченная, то меры μ' и μ'' тоже ограниченные.*

Эта теорема доказана в [12, II.2, теорема 2].

Меры μ' и μ'' назовём *родительскими положительными* (*широкими*) *борелевско-радоновскими мерами радоновской бимеры* $\mathfrak{m}$ и обозначим через $p'(\mathfrak{m})$ и $p''(\mathfrak{m})$ соответственно.

Рассмотрим одно продолжение вложения E^0.

Пусть μ — борелевско-радоновская мера. По лемме 1.3 $\mu = \mu_1 - \mu_2$ для некоторых положительных борелевско-радоновских мер μ_1 и μ_2, хотя бы одна из которых конечна. Рассмотрим борелевско-радоновский триплет $\beta \equiv (\mu|\mathcal{B}_{\mathrm{c}}, \mu_1, \mu_2)$, где $\mathcal{B}_{\mathrm{c}} \equiv \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(T,\mathcal{G})$ — δ-кольцо предкомпактных борелевских множеств. Если $\mu = = \nu_1 - \nu_2$ для каких-то других положительных борелевско-радоновских мер ν_1 и ν_2, то $(\mu|\mathcal{B}_{\mathrm{c}}, \nu_1, \nu_2) \sim \beta$. Поэтому мы можем корректно определить отображение $E\colon \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G}) \to \mathfrak{RB}(T,\mathcal{G})$, полагая $E\mu \equiv \theta\beta$. Если $\mu \in \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})$, то $E\mu \in \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})$. Следовательно, корректно определено отображение $E_{\mathrm{b}} \equiv \equiv E|\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})\colon \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G}) \to \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})$.

Теорема 5.6. *Пусть $(T,\mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство.*

1. *Если $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})$ и $\mu = \mu_1 - \mu_2$ для некоторых положительных борелевско-радоновских мер μ_1 и μ_2, хотя бы одна из которых конечна, то $E\mu = E^0\mu_1 - E^0\mu_2$.*
2. *Если $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})$, $x, y \in \mathbb{R}$, меры $x\mu$ и $y\nu$ принимают бесконечные значения одного и того же знака, $\lambda = x\mu + y\nu$, то $E\lambda = xE\mu + yE\nu$* (*свойство линейности*).
3. *Отображение E инъективно, изотонно и сохраняет порядковые границы.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Положим $\nu \equiv \mu|\mathcal{B}_c$, $\nu_1 \equiv \mu_1|\mathcal{B}_c$, $\nu_2 \equiv \mu_2|\mathcal{B}_c$, $\mathfrak{m} \equiv \theta(\nu, \mu_1, \mu_2)$, $\mathfrak{m}_1 \equiv \theta(\nu_1, \mu_1, 0)$ и $\mathfrak{m}_2 \equiv \theta(\nu_2, 0, \mu_2)$. Тогда $-\mathfrak{m}_2 \equiv \equiv \theta(-\nu_2, \mu_2, 0)$. Так как $\nu = \nu_1 + (-\nu_2)$, $\mu_1 = \mu_1 + 0$ и $\mu_2 = 0 + \mu_2$, заключаем, что $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 - \mathfrak{m}_2$. Следовательно, $E\mu = E^0\mu_1 - E^0\mu_2$.

Докажем утверждение 2. По лемме 1.3 имеем $\mu = \mu_1 - \mu_2$ и $\nu = \nu_1 - \nu_2$ для некоторых мер, удовлетворяющих условию утверждения 1. Тогда по утверждению 1 получаем, что $E\mu = E^0\mu_1 - E^0\mu_2$ и $E\nu = E^0\nu_1 - E^0\nu_2$.

Предположим, что $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, а $x\mu$ и $y\nu$ принимают значение ∞. Тогда $x\mu_2$ и $(-y)\nu_1$ конечны. Поэтому

$$\lambda = x\mu_1 - x\mu_2 + y\nu_1 - y\nu_2 = (x\mu_1 + (-y)\nu_2) - (x\mu_2 + (-y)\nu_1).$$

Применяя утверждение 1 и теорему 5.5, получаем

$$\begin{aligned} E\lambda &= E^0(x\mu_1 + (-y)\nu_2) - E^0(x\mu_2 + (-y)\nu_1) = \\ &= xE^0\mu_1 + (-y)E^0\nu_2 - (xE^0\mu_2 + (-y)E^0\nu_1) = \\ &= x(E^0\mu_1 - E^0\mu_2) + y(E^0\nu_1 - E^0\nu_2) = xE\mu + yE\nu. \end{aligned}$$

Все другие случаи рассматриваются аналогично.

Докажем утверждение 3. Пусть μ и ν — такие борелевско-радоновские меры, что $E\mu = E\nu$. Как и выше, $\mu = \mu_1 - \mu_2$ и $\nu = \nu_1 - \nu_2$ для некоторых мер, удовлетворяющих условию утверждения 1. Тогда по утверждению 1 $E\mu = E^0\mu_1 - E^0\mu_2$ и $E\nu = E^0\nu_1 - E^0\nu_2$, и по теореме 5.5 заключаем, что $E^0(\mu_1 + \nu_2) = E^0(\mu_2 + \nu_1)$. Из инъективности E^0 следует, что $\mu_1 + \nu_2 = \mu_2 + \nu_1$. По определению E, учитывая равенство $E\mu = E\nu$, имеем $(\mu|\mathcal{B}_c, \mu_1, \mu_2) \sim (\nu|\mathcal{B}_c, \nu_1, \nu_2)$. Это означает, что $\mu B = \nu B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c$.

Возьмём произвольное $B \in \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$. Сначала предположим, что мера μ_2 конечная и $\mu B = \infty$. Тогда $\mu_1 = \infty$. Пусть $a > 0$. Тогда $\mu_2 B < ka$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. По определению радоновской меры найдётся такое компактное множество $C \subset B$, что $\mu_1 C > (k+1)a$. Поэтому из

$$\nu_1 C - \nu_2 C = \nu C = \mu C = \mu_1 C - \mu_2 C > (k+1)a - \mu_2 B \geqslant (k+1)a - ka = a$$

получаем, что $\nu_1 B \geqslant \nu_1 C > x$. Значит, $\nu_1 B = \infty$, и следовательно, ν_2 конечна и $\nu B = \infty = \mu B$. В случае $\mu B = -\infty$ рассуждения аналогичны. Если $\mu B \in \mathbb{R}$, то из $\mu_1 B \in \mathbb{R}$ и равенства $\mu_1 B + \nu_2 B = \mu_2 B + \nu_1 B$ выводим, что $\nu_2 B$ и $\nu_1 B$ могут быть только конечны. Отсюда видим, что $\mu B = \mu_1 B - \mu_2 B = \nu_1 B - \nu_2 B = \nu B$.

Если мера μ_1 конечная, то все рассуждения аналогичны. Таким образом, E инъективно.

Пусть μ и ν таковы, как указано выше, и $\mu \leqslant \nu$. Тогда по определению

$$E\mu = \theta(\mu|\mathcal{B}_c, \mu_1, \mu_2) \leqslant \theta(\nu|\mathcal{B}_c, \nu_1, \nu_2) = E\nu.$$

Обратно, если $E\mu \leqslant E\nu$, то $\mu' \leqslant \nu'$ для некоторых радоновских триплетов $(\mu', \mu_1', \mu_2') \in E\mu$ и $(\nu', \nu_1', \nu_2') \in E\nu$. По определению $\mu B = \mu' B$ и $\nu B = \nu' B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c$. Поэтому $\mu C \leqslant \nu C$ для всех $C \in \mathcal{C}$.

Предположим, что $\mu B > \nu B$ для какого-то $B \in \mathcal{B}_c$. Тогда $\nu B < \infty$ и $\nu_1 B < \infty$ во всех случаях, рассматриваемых ниже.

Сперва рассмотрим случай $\mu B = \infty$. Тогда $\mu_1 B = \infty$ и $\mu_2 B < \infty$. Предположим, что $\nu_2 B = \infty$, и возьмём $x > 0$. Тогда $kx > \mu_2 B$ и $kx > \nu_1 B$, $k \in \mathbb{N}$. По условию $\mu_1 C > (k+1)x$ и $\nu_2 C > (k+1)x$ для некоторого компактного множества $C \subset B$. В результате из

$$\mu C = \mu_1 C - \mu_2 C > (k+1)x - \mu_2 B > (k+1)x - kx = x$$

и

$$\nu C = \nu_1 C - \nu_2 C > (k+1)x - \mu_2 B < \nu_1 B - (k+1)x < kx - (k+1)x = -x$$

вытекает, что $\mu C > x > -x > \nu C$, но это неравенство противоречит неравенству, доказанному выше.

Предположим, что $\nu_2 B < \infty$, и возьмём $y > \nu_1 B$. Тогда $ky > \mu_2 B$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. По условию $\mu_1 D > (k+1)y$ для некоторого компактного подмножества $D \subset B$. В итоге

$$\mu D = \mu_1 D - \mu_2 D > (k+1)y - \mu_2 B > (k+1)y - ky = y > \\ > \nu_1 B \geqslant \nu_1 D \geqslant \nu_1 D - \nu_2 D = \nu D,$$

но это неравенство также невозможно.

Теперь рассмотрим случай $\mu B < \infty$. Тогда $\mu_1 B < \infty$. Поэтому из $\mu B > \nu B$ вытекает $\mu_2 B < \infty$. Предположим, что $\nu_2 B = \infty$, и возьмём $y > \mu_2 B$. Тогда $ky > \nu_1 B$, $k \in \mathbb{N}$. По условию $\nu_2 D > (k+1)y$ для некоторого компактного подмножества $D \subset B$. В итоге

$$\nu D = \nu_1 D - \nu_2 D < \nu_1 B - (k+1)y < ky - (k+1)y = -y < \\ < -\mu_2 B \leqslant -\mu_2 D \leqslant \mu_1 D - \mu_2 D = \nu D,$$

но это неравенство невозможно.

Предположим, что $\nu_2 B < \infty$, и возьмём такое $\varepsilon > 0$, что $\mu B - \varepsilon > \nu B$. Из условия следует, что существует компактное множество $C \subset B$, такое что $0 \leqslant \mu_1 B - \mu_1 C < \varepsilon/2$ и $0 \leqslant \nu_2 B - \nu_2 C < \varepsilon/2$. Тогда имеем

$$\mu C = \mu_1 C - \mu_2 C \geqslant (\mu_1 C - \mu_1 B) + \mu_1 B - \mu_2 B > -\frac{\varepsilon}{2} + \mu B > \\ > \nu B + \frac{\varepsilon}{2} = \nu_1 B - \nu_2 B + \frac{\varepsilon}{2} > \nu_1 C - \nu_2 C = \nu C,$$

что также невозможно.

Таким образом, мы во всех случаях пришли к противоречию. Следовательно, наше предположение, что $\mu B > \nu B$, неверно, т. е. $\mu \leqslant \nu$. Это означает, что E изотонно. Поэтому E сохраняет порядковые границы. □

Следствие 5. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство. Тогда* $E\mu = E^0\big(v_+(\mu)\big) - E^0\big(-v^-(\mu)\big)$ *для всякой* $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$.

Доказательство. По лемме 1.3 имеем $\mu = v_+(\mu) + v_-(\mu)$, причём хотя бы одна из этих вариаций конечна. Теперь утверждение 1 теоремы 5.6 даёт желаемое равенство. □

Следствие 6. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство. Тогда*

1) *отображение* $E_{\mathrm{b}} \colon \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G}) \to \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ *биективно, изотонно и сохраняет порядковые границы*;
2) E_{b} *является изоморфизмом данных решёточных линейных пространств*;
3) $E_{\mathrm{b}}\mu = E_{\mathrm{b}}^0(\mu_+) - E_{\mathrm{b}}^0(-\mu_-)$ *для всякой меры* $\mu \in \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $\mathfrak{m}$ — ограниченная радоновская бимера. По теореме 5.5 $\mathfrak{m} = E^0\mu' - E^0\mu''$ для некоторых положительных ограниченных борелевско-радоновских мер μ' и μ''. Рассмотрим ограниченную борелевско-радоновскую меру $\mu \equiv \mu' - \mu''$. Тогда по теореме 5.6 $E_{\mathrm{b}}\mu = E\mu = E^0\mu' - E^0\mu'' = \mathfrak{m}$. Таким образом, E_{b} сюръективно. По теореме 5.6 E_{b} инъективно, изотонно и сохраняет порядковые границы.

Утверждение 2) вытекает из утверждения 1) и из утверждения 2) теоремы 5.6.

Докажем утверждение 3). Возьмём вариации $v_+(\mu)$ и $v_-(\mu)$ из леммы 1.3. Для ограниченной меры μ имеем $v_+(\mu) = \mu_+$ и $v_-(\mu) = -\mu_-$ [40, VIII.2.3]. Поэтому доказываемое равенство вытекает из следствия 5. □

Отметим, что изоморфизм E_{b} совпадает с изоморфизмом F_{b} из [15].

Предложение 5.2 и теоремы 5.5 и 5.6 показывают, что решёточное линейное пространство $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ всех радоновских бимер образует естественную решёточную линейную оболочку для семейства $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$ всех борелевских радоновских мер.

Более того, ниже мы увидим, что отображения E^0, E и E_{b} сохраняют интеграл Лебега.

Предложение 5.3. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство. Тогда если* $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$ *и* $\mathfrak{m} \equiv \theta\big(\mu|\mathcal{B}_{\mathrm{c}}, v_+(\mu), -v_-(\mu)\big)$, *то* $p'(\mathfrak{m}) = v_+(\mu)$, $p''(\mathfrak{m}) = - v_-(\mu)$.

Доказательство. По лемме 1.3 $\mu_1 \equiv v_+(\mu)$ и $\mu_2 \equiv -v_-(\mu)$ являются положительными радоновскими мерами. По теореме 5.5 $\nu' \equiv p'(\mathfrak{m})$ и $\nu'' \equiv p''(\mathfrak{m})$ также являются положительными радоновскими мерами.

Положим $\mathcal{R} \equiv \mathcal{B}_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$ и $\nu \equiv \mu|\mathcal{R}$. Из предложения 4 в [12, II.2] следует, что $\nu'|\mathcal{R} = \nu_+ = v_+(\nu)$ и $\nu''|\mathcal{R} = - \nu_- = -v_-(\nu)$.

Возьмём произвольное разложение Хана (T_+, T_-) множества T для меры μ. Тогда $\mu_1(B) = \mu(B \cap T_+)$ и $\mu_2(B) = - \mu(B \cap T_-)$ для каждого $B \in \mathcal{B}(T, \mathcal{G})$ (см. раздел 1.4).

Для произвольного $R \in \mathcal{R}$ рассмотрим $R_+ \equiv R \cap T_+$ и $R_- \equiv R \cap T_-$. Если $S \in \mathcal{R}$ и $S \subset R_+$, то $\nu S = \mu S \geqslant 0$. Если $S \in \mathcal{R}$ и $S \subset R_-$, то $\nu S = \mu S \leqslant 0$. Кроме того, $R = R_+ \cup R_-$, следовательно (R_+, R_-) — разложение Хана множества R для ν. Тогда по определению вариаций $v_+(\nu)R \equiv \nu R_+$ и $v_-(\nu)R \equiv \nu R_-$. Отсюда следует, что

$$\nu' R = \nu_+ R = \nu(R \cap T_+) = \mu(R \cap T_+) = \mu_1 R$$

и

$$\nu'' R = -\nu_- R = -\nu(R \cap T_-) = -\mu(R \cap T_-) = \mu_2 R.$$

Из компактной регулярности этих положительных радоновских мер вытекает, что $\nu' = \mu_1$ и $\nu'' = \mu_2$. $\square$

Следствие 7. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$. *Тогда* $p'(E\mu) = v_+(\mu)$ *и* $p''(E\mu) = -v_-(\mu)$.

Доказательство. По лемме 1.3 $\mu = v_+(\mu) + v_-(\mu)$, причём одна из этих вариаций конечна. Отсюда по определению имеем $E\mu = \theta\big(\mu|\mathcal{B}_{\mathrm{c}}, v_+(\mu), -v_-(\mu)\big)$, и предложение 5.3 даёт искомые равенства. $\square$

Следствие 8. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$. *Тогда* $p'(E_{\mathrm{b}}\mu) = v_+(\mu)$ *и* $p''(E_{\mathrm{b}}\mu) = -v_-(\mu)$.

Доказательство. Поскольку для ограниченной радоновской меры μ имеем $v_+(\mu) = \mu_+$ и $v_-(\mu) = -\mu_-$, утверждение вытекает из следствия 7. $\square$

Теперь, следуя [12, II.3], введём интегрирование относительно радоновской бимеры.

Для каждой борелевско-радоновской меры μ рассмотрим семейство $\mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) \equiv \mathrm{MI}(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{G}), \mu)$ всех *борелевских μ-интегрируемых функций*. Для каждой радоновской бимеры $\mathfrak{m}$ рассмотрим семейство $\mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m}) \equiv \equiv \mathrm{BI}\big(T, \mathcal{G}, p'(\mathfrak{m})\big) \cap \mathrm{BI}\big(T, \mathcal{G}, p''(\mathfrak{m})\big)$ всех *борелевских функций, интегрируемых* (*по Лебегу*) *относительно бимеры* $\mathfrak{m}$.

Число

$$i_{\mathfrak{m}}(f) \equiv \int f\, d\mathfrak{m} \equiv \int f\, dp'(\mathfrak{m}) - \int f\, dp''(\mathfrak{m})$$

называется *интегралом* (*Лебега*) *от функции* $f \in \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$ *над топологическим биизмеримым пространством* $(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$.

Предложение 5.4. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство. Тогда для каждой меры* $\mu \in \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$ *и любой функции* $f \in \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) = \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, E\mu)$ *справедливо равенство*

$$\int f\, d\mu = \int f\, dE\mu.$$

Доказательство. По следствию 7 из предложения 5.3 $p'(E\mu) = v_+(\mu)$ и $p''(E\mu) = -v_-(\mu)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) \equiv \mathrm{BI}\big(T, \mathcal{G}, v_+(\mu)\big) \cap \mathrm{BI}\big(T, \mathcal{G}, -v_-(\mu)\big) = \\ = \mathrm{BI}\big(T, \mathcal{G}, p'(E\mu)\big) \cap \mathrm{BI}\big(T, \mathcal{G}, p''(E\mu)\big) \equiv \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, E\mu)\end{aligned}$$

и

$$\int f\, d\mu \equiv \int f\, dv_+(\mu) - \int f\, d\big(-v_-(\mu)\big) = \int f\, dp'(E\mu) - \int f\, dp''(E\mu) \equiv \int f\, dE\mu.$$

$\square$

Таким образом, вложение $E\colon \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G}) \rightarrowtail \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$, а следовательно, и биекция $E^0 = E|\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})_0 \colon \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})_0 \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$ и изоморфизм $E_{\mathrm{b}} \equiv \equiv E|\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}) \colon \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}) \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ сохраняют интеграл Лебега. Это показывает, что определения интегралов Лебега для широких мер (см. раздел 1.1) и для бимер согласованы друг с другом.

5.3. Представление всех σ-точных функционалов радоновскими интегралами

Теперь наша цель — продолжить биекции

$$V\colon (A(T)^{\vartriangle})_+ \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)_0, \quad V_{\mathrm{b}}\colon (A(T)^{\circledcirc})_+ \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_+$$

(см. теорему 5.4) до изоморфизмов линейных решёточных пространств. Для продолжения ограниченной биекции V_{b} мы можем использовать привычные средства теории меры. Но семейства $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})$ и $\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)$ не являются линейными пространствами, так как в $\bar{\mathbb{R}}$ не определена операция $\infty-\infty$. Поэтому продолжение (неограниченной) биекции V является непростой задачей, для решения которой и были введены радоновские бимеры.

Для построения искомого продолжения биекции V мы воспользуемся вложением $E^0\colon \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G})_0 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RB}(T,\mathcal{G})_+$ из раздела 5.2. Рассмотрим множество

$$\mathfrak{RB}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big) \equiv \{\mathfrak{m}\in\mathfrak{RB}(T,\mathcal{G}) \mid A(T)\subset \mathrm{BI}(T,\mathcal{G},\mathfrak{m})\}$$

всех радоновских бимер $\mathfrak{m}$, таких что все функции из $A(T)$ $\mathfrak{m}$-интегрируемы. Заметим, что, поскольку все функции из $A(T)\subset \mathrm{S}(T,\mathcal{G})$ интегрируемы по любой ограниченной мере (лемма 4.3), то

$$A(T)\subset \mathrm{BI}\big(T,\mathcal{G},p'(\mathfrak{m})\big)\cap \mathrm{BI}\big(T,\mathcal{G},p''(\mathfrak{m})\big) = \mathrm{BI}(T,\mathcal{G},\mathfrak{m})$$

для любой бимеры $\mathfrak{m}\in\mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})$, т. е. $\mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)=\mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})$.

Если $\mu\in\mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)_0$, то по предложению 5.4 $\int f\,d\mu = \int f\,dE^0\mu$ для каждой функции $f\in \mathrm{BI}(T,\mathcal{G},\mu)=\mathrm{BI}(T,\mathcal{G},E^0\mu)$. Следовательно, $E^0\mu\in$ $\in\mathfrak{RB}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)_+$ и $\int f\,d\mu=\int f\,dE^0\mu$ для каждой функции $f\in A(T)$.

Отсюда следует, что мы можем рассмотреть композицию отображений

$$E^0\circ V\colon (A(T)^{\vartriangle})_+ \rightarrowtail \mathfrak{RB}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)_+.$$

Нетрудно убедиться, что

$$E^0_{\mathrm{b}}\circ V_{\mathrm{b}}\colon (A(T)^{\circledcirc})_+ \rightarrowtail \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T,\mathcal{G})_+.$$

Докажем, наконец, теорему о характеризации интегралов по всем радоновским бимерам.

Теорема 5.7 (параметрическая теорема о характеризации интегралов по радоновским бимерам (изоморфная версия)). *Пусть* $(T,\mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство,* $A(T)$ — *усекаемое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T,\mathcal{G})$. *Пусть* $A(T)$ *обладает свойством* (E_σ) *или свойством* $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. *Тогда*

1) *отображение* $E^0\circ V$ *единственным образом продолжается до изоморфизма* $J\colon A(T)^{\vartriangle} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RB}\big(T,\mathcal{G},A(T)\big)$ *решёточных линейных пространств, при этом* $J\varphi = E^0\big(V(\varphi_+)\big)-E^0\big(V(-\varphi_-)\big)$ *для каждого функционала* $\varphi\in A(T)^{\vartriangle}$;

2) $\varphi f = \int f\,dJ\varphi = \int f\,dV(\varphi_+) - \int f\,dV(-\varphi_-)$ *для всякой функции* $f \in A(T)$ *и каждого функционала* $\varphi \in A(T)^{\vartriangle}$;
3) *отображение* V_{b} *единственным образом продолжается до изоморфизма* $I_{\mathrm{b}}\colon A(T)^{\textcircled{\scriptsize$\vartriangle$}} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$ *решёточных линейных пространств, при этом* $I_{\mathrm{b}}\varphi = V_{\mathrm{b}}(\varphi_+) - V_{\mathrm{b}}(-\varphi_-)$ *для каждого функционала* $\varphi \in A(T)^{\textcircled{\scriptsize$\vartriangle$}}$;
4) $\varphi f = \int f\,dI_{\mathrm{b}}\varphi = \int f\,dV_{\mathrm{b}}(\varphi_+) - \int f\,dV_{\mathrm{b}}(-\varphi_-)$ *для всякой функции* $f \in A(T)$ *и каждого функционала* $\varphi \in A(T)^{\textcircled{\scriptsize$\vartriangle$}}$;
5) *отображение* $E_{\mathrm{b}}^0 \circ V_{\mathrm{b}}$ *единственным образом продолжается до изоморфизма* $J_{\mathrm{b}}\colon A(T)^{\textcircled{\scriptsize$\vartriangle$}} \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ *решёточных линейных пространств, при этом* $J_{\mathrm{b}}\varphi = E_{\mathrm{b}}^0\big(V_{\mathrm{b}}(\varphi_+)\big) - E_{\mathrm{b}}^0\big(V_{\mathrm{b}}(-\varphi_-)\big) = E_{\mathrm{b}}(I_{\mathrm{b}}\varphi)$ *для каждого функционала* $\varphi \in A(T)^{\textcircled{\scriptsize$\vartriangle$}}$;
6) $\varphi f = \int f\,dJ_{\mathrm{b}}\varphi = \int f\,dV_{\mathrm{b}}(\varphi_+) - \int f\,dV_{\mathrm{b}}(-\varphi_-)$ *для всякой функции* $f \in A(T)$ *и каждого функционала* $\varphi \in A(T)^{\textcircled{\scriptsize$\vartriangle$}}$.

Доказательство. Положим

$$X \equiv A(T)^{\vartriangle}, \quad Y_0 \equiv \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0, \quad Z \equiv \mathfrak{RB}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big).$$

Докажем утверждение 1). По теореме 5.4 V есть биекция из X_+ на Y_0. По теореме 5.5 с учётом предложения 5.4 получаем, что $E^0|Y_0$ является биекцией из Y_0 на Z_+. Таким образом, $E^0 \circ V$ взаимно-однозначно отображает X_+ на Z_+. Согласно теореме 5.4 и предложению 5.1 если $\varphi, \psi \in X_+$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$, то

$$(E^0 \circ V)(x\varphi + y\psi) = E^0(xV\varphi + yV\psi) = x(E^0 \circ V)\varphi + y(E^0 \circ V)\psi.$$

Следовательно, отображение $E^0 \circ V$ можно единственным образом продолжить до инъективного линейного оператора $J\colon X \rightarrowtail Z$ так, что $J\varphi = E^0\big(V(\varphi_+)\big) - E^0\big(V(-\varphi_-)\big)$ для всех $\varphi \in X$, где φ_+ и φ_- — положительные функционалы из леммы 1.1.

По теореме 5.5 отображение E^0 сохраняет все порядковые границы. Согласно предложению 5.1 V также сохраняет все порядковые границы. Следовательно, если $\varphi_1, \varphi_2 \in X$ и $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0$, то $\varphi_1, \varphi_2 \in X_+$ и

$$J\varphi_1 \wedge J\varphi_2 = E(V\varphi_1) \wedge E(V\varphi_2) = E(V\varphi_1 \wedge V\varphi_2) = E\big(V(\varphi_1 \wedge \varphi_2)\big) = 0.$$

Тогда согласно [32, 14E (b)] J будет решёточным оператором. Биективность J получим в конце следующего пункта.

Докажем утверждение 2). Зафиксируем φ и рассмотрим $\mathfrak{m} \equiv J\varphi$, $\mu_1 \equiv V(\varphi_+)$, $\mu_2 \equiv V(-\varphi_-)$. Поскольку $\mathfrak{m} = E\mu_1 - E\mu_2$ и $E\mu_1 \wedge E\mu_2 = 0$, имеем $E\mu_1 = \mathfrak{m}_+$ и $E\mu_2 = -\mathfrak{m}_-$. Таким образом, по теореме 5.5 μ_1 и μ_2 являются родительскими борелевско-радоновскими мерами бимеры $\mathfrak{m}$, т. е. $\mu_1 = p'(\mathfrak{m})$ и $\mu_2 = p''(\mathfrak{m})$.

По определению $\mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m}) \equiv \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_1) \cap \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_2)$. Согласно теореме 5.4 функционал φ_+ представи́м интегралом по мере μ_1, $-\varphi_-$ — по мере μ_2 и $\mu_1, \mu_2 \in Y_0$. Поэтому

$$A(T) \subset \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_1) \cap \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu_2) = \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m}).$$

По определению

$$\int f\,d\mathfrak{m} \equiv \int f\,dp'(\mathfrak{m}) - \int f\,dp''(\mathfrak{m}) = \\ = \int f\,d\mu_1 - \int f\,d\mu_2 = \int f\,dV(\varphi_+) - \int f\,dV(-\varphi_-)$$

для каждой функции $f \in A(T)$.

По теореме 5.4 $\int f\,dV(\varphi_+) = \varphi_+ f$ и $\int f\,dV(-\varphi_-) = (-\varphi_-)f$. Таким образом,

$$\int f\,dJ\varphi = \int f\,dV(\varphi_+) - \int f\,dV(-\varphi_-) = \varphi_+ f + \varphi_- f = \varphi f.$$

Теперь пусть $\mathfrak{m}$ — радоновская бимера. По теореме 5.5 $\mathfrak{m} = E^0\mu' - E^0\mu''$ для некоторых положительных борелевско-радоновских мер μ' и μ''. Согласно теореме 5.4 $\mu' = V\varphi'$ и $\mu'' = V\varphi''$ для некоторых функционалов $\varphi', \varphi'' \in X_+$. Рассмотрим функционал $\varphi \equiv \varphi' - \varphi'' \in X$. Тогда $\mathfrak{m} = E^0(V\varphi') - E^0(V\varphi'') = J\varphi' - J\varphi'' = J\varphi$, что даёт сюръективность J. Таким образом, J — биективный решёточный линейный оператор. Итак, J является желаемым изоморфизмом решёточных линейных пространств X и Z.

Докажем утверждение 3). Рассмотрим случай равномерно ограниченных функционалов. Согласно теореме 5.4 и предложению 5.1 отображение V_b является конусно-линейной биекцией из $(A(T)^{Ⓐ})_+$ на $\mathfrak{RM}_\mathrm{b}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})_+$. Следовательно, согласно [50, 3.6.1] V_b имеет единственное продолжение до линейной биекции $I_\mathrm{b}\colon A(T)^{Ⓐ} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}_\mathrm{b}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$. При этом $I_\mathrm{b}\varphi = V_\mathrm{b}(\varphi_+) - V_\mathrm{b}(-\varphi_-)$ для каждого функционала $\varphi \in A(T)^{Ⓐ}$.

По предложению 5.1 V_b сохраняет все порядковые границы. Следовательно, если $\varphi_1 \wedge \varphi_2 = 0$, то

$$I_\mathrm{b}\varphi_1 \wedge I_\mathrm{b}\varphi_2 = V_\mathrm{b}\varphi_1 \wedge V_\mathrm{b}\varphi_2 = V_\mathrm{b}(\varphi_1 \wedge \varphi_2) = 0.$$

Тогда согласно [32, 14E (b)] отображение I_b будет решёточным. Итак, I_b — желаемый изоморфизм решёточных линейных пространств.

Докажем утверждение 4). Пусть $f \in A(T)$ и $\varphi \in X^\circ \equiv A(T)^{Ⓐ}$. По теореме 5.4 f интегрируема по мерам $\mu' \equiv V_\mathrm{b}(\varphi_+)$ и $\mu'' \equiv V_\mathrm{b}(-\varphi_-)$, $\varphi_+ f = \int f\,d\mu'$ и $-\varphi_- f = \int f\,d\mu''$. Следовательно, $f \in \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu' - \mu'') = \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, I_\mathrm{b}\varphi)$ и

$$\varphi f = \varphi_+ f - (-\varphi_-)f = \int f\,d\mu' - \int f\,d\mu'' = \int f\,dI_\mathrm{b}\varphi.$$

Докажем утверждение 5). По предложению 5.2 $Z_\mathrm{b} \equiv \mathfrak{RB}_\mathrm{b}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big) = \mathfrak{RB}_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$ является решёточным линейным пространством. Согласно теореме 5.4 и предложению 5.1 отображение V_b является конусно-линейной биекцией из $(X^\circ)_+$ на $(Y_\mathrm{b})_+$, где $Y_\mathrm{b} \equiv \mathfrak{RM}_\mathrm{b}^{\mathrm{w}\star}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big) = \mathfrak{RM}_\mathrm{b}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$. Отображение E_b^0 есть конусно-линейная биекция из $(Y_\mathrm{b})_+$ на $(Z_\mathrm{b})_+$. Тогда отображение $E_\mathrm{b}^0 \circ V_\mathrm{b}$ является конусно-линейной биекцией из $(X^\circ)_+$ на $(Z_\mathrm{b})_+$, а потому единственным образом продолжается до линейной биекции $J_\mathrm{b}\colon X^\circ \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow Z_\mathrm{b}$ [50, 3.6.1]. При этом $J_\mathrm{b}\varphi = E^0_\mathrm{b}\big(V_\mathrm{b}(\varphi_+)\big) - E^0_\mathrm{b}\big(V_\mathrm{b}(-\varphi_-)\big)$. Пользуясь следствием 6 теоремы 5.6, находим, что

$$J_\mathrm{b}\varphi = E_\mathrm{b}\big(V_\mathrm{b}\varphi_+ - V_\mathrm{b}(-\varphi_-)\big) = E_\mathrm{b}(I_\mathrm{b}\varphi)$$

для всех $\varphi \in X^\circ$.

По доказанному выше утверждению 3) и следствию 6 теоремы 5.6 I_b и E_b — изоморфизмы решёточных линейных пространств. Следовательно, $J_\mathrm{b} = E_\mathrm{b} \circ I_\mathrm{b}$ также является изоморфизмом.

Поскольку $E^0_\mathrm{b} = E^0|(Y_\mathrm{b})_+$ и $V_\mathrm{b} = V|(X^\circ)_+$, для каждого $\varphi \in X^\circ$ имеем

$$J\varphi = E^0(V\varphi_+) - E^0\big(V(-\varphi_-)\big) = E^0_\mathrm{b}(V_\mathrm{b}\varphi_+) - E^0_\mathrm{b}\big(V_\mathrm{b}(-\varphi_-)\big) = J_\mathrm{b}\varphi,$$

т. е. $J_\mathrm{b} = J|X^\circ$.

Докажем утверждение 6). Так как $J_\mathrm{b} = J|X^\circ$ и $V_\mathrm{b} = V|(X^\circ)_+$, получаем из утверждения 2), что

$$\varphi f = \int f\,dJ_\mathrm{b}\varphi = \int f\,dV_\mathrm{b}(\varphi_+) - \int f\,dV_\mathrm{b}(-\varphi_-)$$

для всякой функции $f \in A(T)$ и каждого функционала $\varphi \in X^\circ$. □

Покажем теперь, что из этой параметрической теоремы вытекают как частные случаи все теоремы о характеризации радоновских интегралов, упомянутые во введении (кроме теоремы Халмоша—Хьюитта—Эдвардса, являющейся следствием теоремы 5.4).

Следствие 9 (теорема Радона—Какутани). *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — компактное топологическое пространство и $A(T) \equiv C(T, \mathcal{G})$. Тогда отображение*

$$I_\mathrm{b}\colon C(T,\mathcal{G})^\sim \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}(T,\mathcal{G}) = \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})$$

является изоморфизмом решёточных линейных пространств; при этом

$$\varphi f = \int f\,dI_\mathrm{b}\varphi.$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству следствия 1 теоремы 5.4. □

Следствие 10 (теорема Бурбаки). *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское топологическое пространство и $A(T) \equiv C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$. Тогда отображение*

$$I_\mathrm{b}\colon C_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})^\pi \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}^{\mathrm{w}\star}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})$$

является изоморфизмом решёточных линейных пространств; при этом

$$\varphi f = \int f\,dI_\mathrm{b}\varphi.$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству следствия 2 теоремы 5.4. □

Следствие 11. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $A(T) \equiv \mathrm{S}(T, \mathcal{G})$. *Тогда отображение*

$$I_{\mathrm{b}} \colon \mathrm{S}(T, \mathcal{G})^{\vartriangle} = \mathrm{S}(T, \mathcal{G})^{\circledcirc} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}^{\mathrm{w}\star}(T, \mathcal{G})$$

является изоморфизмом решёточных линейных пространств; *при этом*

$$\varphi f = \int f \, dI_{\mathrm{b}} \varphi.$$

Доказательство. Рассуждения аналогичны доказательству следствия 4 теоремы 5.4. □

Литература

[1] Богачёв В. И. Основы теории меры. — Москва; Ижевск: R & C Dynamics, 2006.

[2] Бурбаки Н. Интегрирование. Меры. Интегрирование мер. — М.: Наука, 1967.

[3] Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.

[4] Вулих Б. З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. — М.: Физматгиз, 1961.

[5] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд. иностр. лит., 1962.

[6] Захаров В. К. Связь между полным кольцом частных кольца непрерывных функций, регулярным пополнением и расширениями Хаусдорфа—Серпинского // Успехи мат. наук. — 1990. — Т. 45, № 6. — С. 133—134.

[7] Захаров В. К. Прообраз Гордона пространства Александрова как окружаемое накрытие // Изв. РАН. Сер. мат. — 1992. — Т. 56, № 2. — С. 427—448.

[8] Захаров В. К. Расширение Аренса кольца непрерывных функций // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, № 2. — С. 135—153.

[9] Захаров В. К. Проблема характеризации радоновских интегралов // Докл. РАН. — 2002. — Т. 385, № 6. — С. 735—737.

[10] Захаров В. К. Проблема Рисса—Радона характеризации интегралов и слабая компактность радоновских мер // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2005. — Т. 248. — С. 106—116.

[11] Захаров В. К. Новые классы функций, связанные с общими семействами множеств // Докл. РАН. — 2006. — Т. 407, № 2. — С. 167—171.

[12] Захаров В. К., Михалёв А. В. Интегральное представление для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 4. — С. 1135—1172.

[13] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема Радона для регулярных мер в произвольном хаусдорфовом пространстве // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 3. — С. 801—808.

[14] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема интегрального представления для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // Докл. РАН. — 1998. — Т. 360, № 1. — С. 13—15.

[15] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства // Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — Т. 63, № 5. — С. 37—82.

[16] Захаров В. К., Михалёв А. В. Связь между интегральными радоновскими представлениями для локально компактного и хаусдорфова пространств // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 1. — С. 33—46.

[17] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства. II // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 6. — С. 3—18.

[18] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Проблема Рисса—Радона—Фреше характеризации радоновских интегралов: ограниченные меры; положительные меры; бимеры; общие радоновские меры // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы междунар. конф., посв. 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего. — М.: Университетская книга, 2009. — С. 91—92.

[19] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Проблема Рисса—Радона—Фреше характеризации интегралов // Успехи мат. наук. — 2010. — Т. 65, № 4. — С. 153—178.

[20] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Проблема характеризации общих радоновских интегралов // Докл. РАН. — 2010. — Т. 433, № 6. — С. 731—735.

[21] Захаров В. К., Родионов Т. В. Класс равномерных функций и его соотношение с классом измеримых функций // Мат. заметки. — 2008. — Т. 84, № 6. — С. 809—824.

[22] Захаров В. К., Родионов Т. В. Классификация борелевских множеств и функций на произвольном пространстве // Мат. сб. — 2008. — Т. 199, № 6. — С. 49—84.

[23] Прохоров Ю. В. Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и её применения. — 1956. — Т. 1. — С. 177—238.

[24] Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.: УРСС, 2004.

[25] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[26] Alexandroff A. D. Additive set-functions on abstract spaces. I—III // Мат. сб. — 1940. — Т. 8, № 2. — С. 303—348; 1941. — Т. 9, № 2-3. — С. 563—628; 1943. — Т. 13, № 3. — С. 169—238.

[27] Bourbaki N. Intégration. Chap. IX. — Paris: Hermann, 1969.

[28] Dinculianu N. Vector Measures. — London; New York: Oxford Univ. Press; Pergamon, 1967.

[29] Edwards R. E. A theory of Radon measures on locally compact spaces // Acta Math. — 1953. — Vol. 89. — P. 133—164.

[30] Fréchet M. Sur les opérations linéaires // Trans. Amer. Math. Soc. — 1904. — Vol. 5. — P. 493—499.

[31] Fréchet M. Sur l'integrale d'une fonctionnelle étendue á un ensemble abstrait // Bull. Soc. Math. Fr. — 1915. — Vol. 18. — P. 248—265.

[32] Fremlin D. H. Topological Riesz Spaces and Measure Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1974.

[33] Fremlin D. H. Measure Theory. Vol. 1—5. — Colchester: Univ. of Essex, 2003—2008.

[34] Hadamard J. Sur les opérations fonctionelles // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1903. — Vol. 136. — P. 351—354.

[35] Halmos P. R. Measure Theory. — Princeton: Van Nostrand, 1950.

[36] Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. — Vien; Leipzig, 1914.

[37] Hausdorff F. Über halbstetige Functionen und deren Verallgemeinerung // Math. Z. — 1915. — Vol. 4. — P. 292—309.

[38] Hewitt E. Integration on locally compact spaces. I // Univ. of Washington Publ. Math. — 1952. — Vol. 3. — P. 71—75.

[39] Hewitt E., Stromberg K. Real and Abstract Analysis. — Berlin: Springer, 1965.

[40] Jacobs K. Measure and Integral. — New York: Academic Press, 1978.

[41] Jech T. Set Theory. — Berlin: Springer, 2002. — (Springer Monographs Math.).

[42] Kakutani S. Concrete representation of abstract (M)-spaces // Ann. Math. (2). — 1941. — Vol. 42. — P. 994—1024.

[43] König H. The Danielle—Stone—Riesz representation theorem // Operator Theory: Advances and Appl. — 1995. — Vol. 75. — P. 191—222.

[44] König H. Measure and Integration. — Berlin: Springer, 1997.

[45] König H. On the inner Daniell—Stone and Riesz representation theorems // Doc. Math. — 2000. — Vol. 5. — P. 301—315.

[46] Radon J. Theorie und Anwendangen der absolut additiven Mengenfunktionen // Sitzungsber. Math.-Natur. Kl. Akad. Wiss. Wien. — 1913. — Vol. 122. — P. 1295—1438.

[47] Riesz F. Sur les opérations fonctionelles linéaires // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1909. — Vol. 149. — P. 974—977.

[48] Saks S. Theory of the Integral. — Warszawa: PWN, 1937.

[49] Saks S. Integration in abstract metric spaces // Duke Math. J. — 1938. — Vol. 4. — P. 408—411.

[50] Semadeni Z. Banach Spaces of Continuous Functions. — Warszawa: PWN, 1971.

[51] Sierpiński W. Sur les fonctions développables en séries absolument convergentes de fonctions continues // Fund. Math. — 1921. — Vol. 2. — P. 15—27.

[52] Stone M. N. Notes on integration. I—IV // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1948. — Vol. 34. — P. 336—342, 447—455, 483—490; 1949. — Vol. 35. — P. 50—58.

[53] Topsoe F. Topology and Measure. — Berlin: Springer, 1970. — (Lect. Notes Math.; Vol. 133).

[54] Topsoe F. Further results on integral representations // Studia Math. — 1976. — Vol. 55. — P. 239—245.

[55] Zakharov V. K. Alexandrovian cover and Sierpińskian extension // Studia Sci. Math. Hungar. — 1989. — Vol. 24, no. 2-3. — P. 93—117.

[56] Zakharov V. K., Mikhalev A. V. Riesz—Radon problem of characterisation of Radon integrals // Kolmogorov and Contemporary Mathematics. — New York: Marcel Dekker, 2003. — P. 260—261.