Конечные градуировки специальных линейных алгебр Ли

А. А. ЗОЛОТЫХ, П. А. ЗОЛОТЫХ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: p.zolotykh@gmail.com

УДК 512.554.37

Ключевые слова: градуированная алгебра, простая алгебра Ли, градуирование, автоморфизмы алгебр Ли.

Аннотация

В данной работе изучаются градуировки простых классических алгебр Ли произвольными абелевыми группами и связь таких градуировок с группами автоморфизмов алгебры Ли. В случае алгебраически замкнутого поля нулевой характеристики даётся полная классификация градуировок специальных линейных алгебр Ли, задаваемых внутренними автоморфизмами.

Abstract

A. A. Zolotykh, P. A. Zolotykh, Finite gradings of special linear Lie algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 163—187.

In this paper, we study gradings of simple classical Lie algebras with arbitrary Abelian groups and the interconnection of such gradings and automorphism groups of Lie algebras. We give the complete classification of gradings of special linear Lie algebras that are specified by inner automorphisms in the case of an algebraically closed field of zero characteristic.

Введение

Изучение конечных градуировок полупростых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики было начато в хорошо известной работе В. Каца [7]. В этой работе им были рассмотрены градуировки полупростых алгебр Ли конечными циклическими группами, или, что то же самое, конечные автоморфизмы полупростых алгебр Ли. Все такие градуировки (автоморфизмы) были описаны, была дана их классификация с точностью до эквивалентности.

В дальнейшем многие исследователи возвращались к этому вопросу. Особо следует отметить статью [10], которую М. Хавличек, И. Патера и Э. Пелантова опубликовали более десяти лет назад, где в некотором смысле обобщаются результаты В. Каца. Авторы рассматривают произвольные конечные градуировки простых классических алгебр Ли. Однако стоит заметить, что в работах [7]

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 8, с. 163—187.

и [10] понятие градуировки вводится совершенно по-разному. Авторы [10] рассматривают градуировки простых алгебр Ли конечными множествами, а не конечными группами. И хотя по конечному множеству группа восстанавливается, это восстановление группы по множеству неоднозначно. Второе существенное отличие двух рассматриваемых работ — это максимальность градуировки, требуемой в [10]. Если нам нужно найти все градуировки простой алгебры Ли определённой заданной заранее группой, это вызовет трудности. Наконец, к недостаткам работы [10] следует отнести большую сложность проверки эквивалентности рассматриваемых градуировок (задача проверки совпадения двух графов имеет слишком большую алгебраическую сложность). Следует отметить также работу [9], в которой приведена классификация градуировок специальных линейных алгебр Ли.

В предлагаемой работе реализован другой подход к проблеме классификации градуировок, основанный на классификации проективных представлений конечных абелевых групп и имеющий практический интерес. Этот подход даёт полную классификацию всех внутренних градуировок специальной линейной алгебры Ли конечными абелевыми группами над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики.

1. Градуировки алгебр Ли

Пусть K — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики, $K^* = K \setminus \{0\}$ — множество обратимых элементов поля K и G — произвольная конечная абелева группа (мы будем использовать мультипликативную нотацию в группах).

Для каждого целого числа $k > 0$ зафиксируем некоторый корень степени k из единицы, т. е. такое число $\boldsymbol{\xi}_k \in K^*$, что $\boldsymbol{\xi}_k^k = 1$, и $\boldsymbol{\xi}_k^i \neq 1$ для всех натуральных $i < k$. Кроме того, мы считаем, что для всех натуральных чисел k, n выполняется соотношение $\boldsymbol{\xi}_{kn}^k = \boldsymbol{\xi}_n$.

Множество всех характеров группы G, т. е. всех гомоморфизмов из группы G в группу K^*, мы будем обозначать через G^*. На множестве G^* естественным образом вводится структура абелевой группы. При этом группы G и G^* изоморфны.

Для удобства записи характеров мы будем использовать билинейную форму

$$\langle\, ,\, \rangle \colon G^* \times G \to K^*,$$

полагая $\langle \chi, g \rangle = \chi(g)$ для всех $\chi \in G^*$, $g \in G$. При помощи этой формы естественно определяется канонический изоморфизм групп G и G^{**}. В дальнейшем мы будем отождествлять эти группы.

Для любого подмножества U группы G *аннулятором* $\operatorname{Ann}(G^*, U)$ *этого множества* мы будем называть множество всех таких характеров $\chi \in G^*$, что $\langle \chi, U \rangle = 1$. Легко убедиться, что если G_0 — подгруппа группы G, порождённая множеством U, то $\operatorname{Ann}(G^*, U) = \operatorname{Ann}(G^*, G_0)$. Поскольку мы отождествляем

G и G^{**}, для любого подмножества U группы G^* естественно определяется аннулятор $\operatorname{Ann}(G, U)$.

Лемма 1.1. *Для любой подгруппы H группы G фактор-группа $G^*/\operatorname{Ann}(G^*, H)$ изоморфна H^*. При этом выполняется равенство*

$$\operatorname{Ann}\bigl(G, \operatorname{Ann}(G^*, H)\bigr) = H.$$

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon G^* \to H^*$, ограничивающий характеры группы G на подгруппу H. Очевидно, что $\varphi(G^*) = H^*$, но при этом характер $\chi \in G^*$ принадлежит ядру этого гомоморфизма в том и только том случае, если $\langle \chi, H\rangle = 1$, т. е. если ядром гомоморфизма φ является $\operatorname{Ann}(G^*, H)$. По определению $\operatorname{Ann}(G^*, H)$ состоит из всех таких характеров $\chi \in G^*$, что $\langle \chi, H\rangle = 1$, т. е. $\langle \operatorname{Ann}(G^*, H), H\rangle = 1$. Группа $\operatorname{Ann}\bigl(G, \operatorname{Ann}(G^*, H)\bigr)$ состоит из всех таких элементов $g \in G$, что $\langle \operatorname{Ann}(G^*, H), g\rangle = 1$. Поэтому получаем

$$H \subseteq \operatorname{Ann}\bigl(G, \operatorname{Ann}(G^*, H)\bigr).$$

Первая часть леммы позволяет вычислить порядок группы $\operatorname{Ann}\bigl(G, \operatorname{Ann}(G^*, H)\bigr)$:

$$\bigl|\operatorname{Ann}\bigl(G, \operatorname{Ann}(G^*, H)\bigr)\bigr| = \frac{|G|}{|\operatorname{Ann}(G^*, H)|} = \frac{|G|}{|G|/|H|} = |H|.$$

Поэтому $\operatorname{Ann}\bigl(G, \operatorname{Ann}(G^*, H)\bigr) = H$. □

Следствие. *Для любой подгруппы F группы характеров G^* конечной абелевой группы G найдётся подгруппа H группы G, такая что $F = \operatorname{Ann}(G^*, H)$.*

Доказательство. Достаточно взять $H = \operatorname{Ann}(G, F)$. Тогда

$$\operatorname{Ann}(G^*, H) = \operatorname{Ann}\bigl(G^*, \operatorname{Ann}(G, F)\bigr) = F. \qquad \square$$

Пусть L — произвольная конечномерная G-градуированная алгебра Ли над полем K, т. е.

$$L = \bigoplus_{g\in G} L_g,$$

где L_g — K-линейные подпространства в L, такие что $[L_g, L_h] \subseteq L_{g\cdot h}$ для всех $g, h \in G$.

Носителем градуировки мы будем называть подмножество группы G, состоящее из всех таких элементов $g \in G$, что $L_g \neq 0$.

Для любого характера χ группы G определим отображение

$$\theta_\chi\colon L \to L,$$

полагая

$$\theta_\chi(a) = \langle \chi, g\rangle a$$

для любого $g \in G$ и любого $a \in L_g$ и продолжая это отображение по K-линейности.

Лемма 1.2. *Для любого характера $\chi \in G^*$ отображение θ_χ является автоморфизмом алгебры Ли L. Отображение δ, ставящее в соответствие любому характеру $\chi \in G^*$ автоморфизм θ_χ алгебры Ли L, является гомоморфизмом групп G^* и $\mathrm{Aut}(L)$. Ядром этого гомоморфизма является подгруппа $\mathrm{Ann}(G^*, U)$, где U — носитель градуировки алгебры Ли L.*

Доказательство. Очевидно, что для каждого $\chi \in G^*$ линейное отображение θ_χ невырожденно. Для любых $g, h \in G$ и любых $a \in L_g$, $b \in L_h$ получаем

$$\theta_\chi([a,b]) = \langle \chi, g \cdot h\rangle [a,b] = [\langle \chi, g\rangle a, \langle \chi, h\rangle b] = [\theta_\chi(a), \theta_\chi(b)],$$

т. е. θ_χ является автоморфизмом алгебры Ли L.

Для любых $\chi_1, \chi_2 \in G^*$, тривиального характера χ_0 и любых $g \in G$, $a \in L_g$ выполняются равенства

$$\begin{aligned}
&\theta_{\chi_0}(a) = \langle \chi_0, g\rangle a = a,\\
&\theta_{\chi_1}^{-1}(a) = \langle \chi_1, g\rangle^{-1} a = \langle \chi_1^{-1}, g\rangle a = \theta_{\chi_1^{-1}}(a),\\
&\theta_{\chi_1}\theta_{\chi_2}(a) = \langle \chi_1, g\rangle\langle \chi_2, g\rangle a = \langle \chi_1 \cdot \chi_2, g\rangle a = \theta_{\chi_1\cdot\chi_2}(a),
\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned}
&\theta_{\chi_0} = 1,\\
&\theta_{\chi_1^{-1}} = \theta_{\chi_1}^{-1},\\
&\theta_{\chi_1\cdot\chi_2} = \theta_{\chi_1}\theta_{\chi_2}.
\end{aligned}$$

Это означает, что отображение $\delta\colon G^* \to \mathrm{Aut}(L)$, ставящее в соответствие каждому характеру χ автоморфизм θ_χ, является гомоморфизмом групп.

Пусть $\chi \in G^*$. Условие $\theta_\chi = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда для любого $g \in G$ и любого $a \in L_g$

$$a = \theta_\chi(a) = \langle \chi, g\rangle a,$$

т. е. если для любого $g \in G$ выполняется одно из двух условий: $\langle \chi, g\rangle = 1$ или $L_g = 0$. Мы видим, что $\theta_\chi = 1$ в том и только том случае, если $\chi \in \mathrm{Ann}(G^*, U)$, где U — носитель G-градуировки. $\square$

В дальнейшем гомоморфизм $\delta\colon G^* \to \mathrm{Aut}(L)$, такой что $\delta(\chi) = \theta_\chi$ для всех $\chi \in G^*$, мы будем называть *гомоморфизмом групп, заданным градуировкой алгебры Ли L*.

Лемма 1.3. *Пусть $\delta\colon G \to \mathrm{Aut}(L)$ — произвольный гомоморфизм конечной абелевой группы G в группу автоморфизмов конечномерной алгебры Ли L. Тогда существует G^*-градуировка алгебры Ли L, задающая этот гомоморфизм групп.*

Доказательство. Определим действие элементов группы G на алгебре Ли L, полагая

$$g \cdot a = \delta(g)(a)$$

для всех $g \in G$, $a \in L$.

Так как G — конечная абелева группа, алгебра Ли L разлагается относительно действия группы G в прямую сумму одномерных неприводимых собственных подпространств:

$$L = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n.$$

Для каждого такого подпространства V_i найдётся характер $\chi_i \in G^*$, такой что

$$ga = \langle \chi_i, g\rangle a$$

для всех $g \in G$ и всех $a \in V_i$.

Для любого характера $\chi \in G^*$ обозначим через L_χ прямую сумму таких подпространств V_i, что $\chi_i = \chi$. Таким образом мы получаем G^*-градуировку K-линейного пространства L,

$$L = \bigoplus_{\chi \in G^*} L_\chi, \tag{1}$$

причём для всех $g \in G$, $\chi \in G^*$, $a \in L_\chi$ выполняется соотношение

$$ga = \langle \chi, g\rangle a.$$

Если $\chi_1, \chi_2 \in G^*$, $a_1 \in L_{\chi_1}$, $a_2 \in L_{\chi_2}$, то для любого автоморфизма $g \in G$ алгебры Ли L получаем

$$g[a_1, a_2] = [ga_1, ga_2] = [\langle \chi_1, g\rangle a_1, \langle \chi_2, g\rangle a_2] = \\ = \langle \chi_1, g\rangle \langle \chi_2, g\rangle [a_1, a_2] = \langle \chi_1 \cdot \chi_2, g\rangle [a_1, a_2],$$

т. е. $[a_1, a_2] \in L_{\chi_1 \cdot \chi_2}$. Таким образом, разложение (1) является G^*-градуировкой алгебры Ли L.

Пусть $g \in G$ — произвольный элемент. Тогда по определению автоморфизм θ_g задаётся равенствами

$$\theta_g(a) = \langle g, \chi\rangle a = \langle \chi, g\rangle a = \delta(g)(a)$$

для всех $\chi \in G^*$, $a \in L_\chi$, т. е. автоморфизмы θ_g и $\delta(g)$ совпадают. Значит, указанная градуировка задаёт гомоморфизм δ. □

Рассмотрим две G-градуировки алгебры Ли L

$$L = \bigoplus_{g \in G} L_g = \bigoplus_{g \in G} L'_g. \tag{2}$$

Мы будем говорить, что эти две G-градуировки *эквивалентны*, если существует автоморфизм θ алгебры Ли L, такой что $\theta(L_g) = L'_g$ для всех $g \in G$.

Мы будем говорить, что два гомоморфизма групп

$$\delta_1 \colon G^* \to \mathrm{Aut}(L), \quad \delta_2 \colon G^* \to \mathrm{Aut}(L)$$

эквивалентны, если существует автоморфизм θ алгебры Ли L, такой что $\theta \cdot \delta_1(\chi) \cdot \theta^{-1} = \delta_2(\chi)$ для всех $\chi \in G^*$.

Лемма 1.4. *Две G-градуировки алгебры Ли L эквивалентны в том и только том случае, если эквивалентны заданные ими гомоморфизмы групп.*

Доказательство. Обозначим через δ и δ' два гомоморфизма групп G^* и $\mathrm{Aut}(L)$, заданные градуировками (2). Кроме того, для любого $\chi \in G^*$ обозначим $\theta_\chi = \delta(\chi)$, $\theta'_\chi = \delta'(\chi)$.

Предположим, что существует автоморфизм θ алгебры Ли L, такой что $\theta(L_g) = L'_g$ для всех $g \in G$. Тогда по определению автоморфизмов θ_χ и θ'_χ для всех $\chi \in G^*$, $g \in G$, $a \in L_g$, учитывая, что $\theta(a) \in L'_g$, получаем

$$\begin{aligned}\theta\big(\theta_\chi(a)\big) &= \theta(\langle\chi, g\rangle a) = \langle\chi, g\rangle\theta(a),\\ \theta'_\chi\big(\theta(a)\big) &= \langle\chi, g\rangle\theta(a),\end{aligned}$$

т. е. $\theta \cdot \theta_\chi = \theta'_\chi \cdot \theta$ для всех $\chi \in G^*$, откуда следует, что $\theta \cdot \theta_\chi \cdot \theta^{-1} = \theta'_\chi$.

Обратно, если для некоторого автоморфизма θ алгебры Ли L и всех $\chi \in G^*$ выполнено равенство $\theta \cdot \theta_\chi \cdot \theta^{-1} = \theta'_\chi$, то для всех $g \in G$, $a \in L_g$ получаем

$$\theta'_\chi\big(\theta(a)\big) = \theta \cdot \theta_\chi \cdot \theta^{-1}\big(\theta(a)\big) = \theta\big(\theta_\chi(a)\big) = \theta(\langle\chi, g\rangle a) = \langle\chi, g\rangle\theta(a),$$

т. е. $\theta(a) \in L'_g$. □

Суммируя все доказанные в этом разделе леммы, мы получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть G — конечная абелева группа, L — конечномерная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики. Любая G-градуировка алгебры Ли L однозначно задаёт некоторый гомоморфизм групп G^* и $\mathrm{Aut}(L)$. Для любого гомоморфизма групп G^* и $\mathrm{Aut}(L)$ существует G-градуировка алгебры Ли L, задающая этот гомоморфизм. Две G-градуировки алгебры Ли L эквивалентны в том и только том случае, если эквивалентны задаваемые ими гомоморфизмы групп.*

Таким образом, для классификации градуировок алгебры Ли L конечными абелевыми группами с точностью до эквивалентности достаточно найти классификацию гомоморфизмов конечных абелевых групп в группу автоморфизмов алгебры Ли L. Этим мы и будем заниматься в следующих разделах.

2. Типы автоморфизмов

Пусть θ — автоморфизм алгебры Ли L, $\rho\colon L \to \mathrm{End}_K(V)$ — представление алгебры Ли L в конечномерном K-линейном пространстве V и $\varphi\colon V \to V'$ — изоморфизм K-линейных пространств V и V'. Обозначим через $\rho^\varphi_\theta\colon L \to \mathrm{End}_K(V')$ такое отображение, что

$$\rho^\varphi_\theta(a)v = \varphi \cdot \rho\big(\theta(a)\big) \cdot \varphi^{-1} \cdot v$$

для всех $a \in L$, $v \in V'$. В случае если θ — тождественный автоморфизм, мы будем также вместо ρ^φ_θ использовать обозначение ρ^φ, а если $V = V'$ и φ — тождественное отображение, то будем использовать обозначение ρ_θ.

Лемма 2.1. *Для любого представления ρ алгебры Ли L, любого изоморфизма φ линейных пространств и любого автоморфизма θ отображение ρ_θ^φ является представлением алгебры Ли L.*

Доказательство. Пусть $a, b \in L$, $v \in V'$. Тогда

$$\begin{aligned}\rho_\theta^\varphi\big([a,b]\big)v &= \varphi\cdot\rho\big(\theta([a,b])\big)\cdot\varphi^{-1}\cdot v = \varphi\cdot\rho([\theta(a),\theta(b)])\cdot\varphi^{-1}\cdot v = \\ &= \varphi\cdot\Big(\rho\Big(\theta(a)\big)\cdot\rho\big(\theta(b)\big) - \rho\big(\theta(b)\big)\cdot\rho\big(\theta(a)\big)\Big)\cdot\varphi^{-1}\cdot v = \\ &= \varphi\cdot\rho\big(\theta(a)\big)\cdot\varphi^{-1}\cdot\varphi\cdot\rho\big(\theta(b)\big)\cdot\varphi^{-1}\cdot v - \varphi\cdot\rho\big(\theta(b)\big)\cdot\varphi^{-1}\cdot\varphi\cdot\rho\big(\theta(a)\big)\cdot\varphi^{-1}\cdot v = \\ &= \rho_\theta^\varphi(a)\cdot\rho_\theta^\varphi(b)\cdot v - \rho_\theta^\varphi(b)\cdot\rho_\theta^\varphi(a)\cdot v = [\rho_\theta^\varphi(a),\rho_\theta^\varphi(b)]\cdot v.\end{aligned}$$

Линейность отображения ρ_θ^φ очевидна. □

Напомним, что представления $\rho\colon L \to \mathrm{End}_K(V)$ и $\rho'\colon L \to \mathrm{End}_K(V')$ алгебры Ли L называются эквивалентными, если существует изоморфизм $\varphi\colon V \to V'$ линейных пространств, такой что

$$\rho'(a)\cdot\varphi\cdot v = \varphi\cdot\rho(a)\cdot v$$

для всех $a \in L$, $v \in V$, т. е. такой что $\rho' = \rho^\varphi$. Обозначим через $E(\rho)$ класс всех представлений алгебры Ли L, эквивалентных представлению ρ. Тогда для любого изоморфизма φ линейных пространств классы представлений $E(\rho)$ и $E(\rho^\varphi)$ совпадают.

Лемма 2.2. *Пусть $\rho\colon L \to \mathrm{End}_K(V_1)$ — представление алгебры Ли L, $\varphi_1\colon V_1 \to V_2$ и $\varphi_2\colon V_2 \to V_3$ — изоморфизмы линейных пространств и θ_1, θ_2 — автоморфизмы алгебры Ли L. Тогда $(\rho_{\theta_1}^{\varphi_1})_{\theta_2}^{\varphi_2} = \rho_{\theta_1\theta_2}^{\varphi_2\varphi_1}$.*

Доказательство. Для любых $a \in L$, $v \in V_2$ имеем

$$\begin{aligned}\big((\rho_{\theta_1}^{\varphi_1})_{\theta_2}^{\varphi_2}\big)(a)v = \varphi_2\cdot\rho_{\theta_1}^{\varphi_1}\big(\theta_2(a)\big)\cdot\varphi_2^{-1}\cdot v = \varphi_2\cdot\varphi_1\cdot\rho\big(\theta_1\theta_2(a)\big)\cdot\varphi_1^{-1}\cdot\varphi_2^{-1}\cdot v = \\ = (\varphi_2\varphi_1)\cdot\rho\big(\theta_1\theta_2(a)\big)\cdot(\varphi_2\varphi_1)^{-1}\cdot v = \rho_{\theta_1\theta_2}^{\varphi_2\varphi_1}(a)v.\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 2.3. *Формула*

$$E(\rho)\cdot\theta = E(\rho_\theta),$$

где θ — автоморфизм алгебры Ли L и $\rho\colon L \to \mathrm{End}_K(V)$ — конечномерное представление алгебры Ли L, корректно задаёт правое действие группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(L)$ на множестве всех классов эквивалентности представлений алгебры Ли L.

Доказательство. Предположим, что $E(\rho) = E(\rho')$ для некоторого представления ρ' алгебры Ли L в пространстве V'. Тогда представления ρ и ρ' эквивалентны, и значит, существует изоморфизм φ пространств V и V', такой что

$\rho' = \rho^{\varphi}$. Поэтому по лемме 2.2

$$(\rho')_{\theta} = (\rho^{\varphi})_{\theta} = \rho_{\theta}^{\varphi} = (\rho_{\theta})^{\varphi},$$

т. е.

$$E(\rho') \cdot \theta = E\big((\rho')_{\theta}\big) = E\big((\rho_{\theta})^{\varphi}\big) = E(\rho_{\theta}) = E(\rho) \cdot \theta,$$

что доказывает корректность определения класса эквивалентности $E(\rho) \cdot \theta$.

Если θ_0 — тождественный автоморфизм, то

$$E(\rho) \cdot \theta_0 = E(\rho_{\theta_0}) = E(\rho).$$

Для двух произвольных автоморфизмов θ_1 и θ_2 по лемме 2.2 получаем

$$E(\rho) \cdot \theta_1 \cdot \theta_2 = E(\rho_{\theta_1}) \cdot \theta_2 = E\big((\rho_{\theta_1})_{\theta_2}\big) = E(\rho_{\theta_1\theta_2}) = E(\rho) \cdot (\theta_1\theta_2),$$

т. е. мы действительно задали правое действие группы на множестве. □

Для любого конечномерного представления ρ алгебры Ли L обозначим через $C(\rho)$ орбиту группы $\mathrm{Aut}(L)$, содержащую класс эквивалентных представлений $E(\rho)$, т. е. множество всех классов эквивалентности представлений L вида $E(\rho_{\theta})$, $\theta \in \mathrm{Aut}(L)$. Поскольку множество $C(\rho)$ инвариантно относительно правого действия группы $\mathrm{Aut}(L)$, мы можем рассмотреть правое действие группы $\mathrm{Aut}(L)$ на множестве $C(\rho)$, тем самым мы определяем гомоморфизм $s\colon \mathrm{Aut}(L) \to S_{C(\rho)}$ группы автоморфизмов алгебры Ли L в группу подстановок на множестве $C(\rho)$. Для произвольного автоморфизма $\theta \in \mathrm{Aut}(L)$ образ этого автоморфизма $s(\theta) \in S_{C(\rho)}$ мы будем называть *типом автоморфизма θ по отношению к представлению ρ*. Если $s(\theta) = 1$, мы будем говорить, что θ *имеет тривиальный тип*. Так как s является гомоморфизмом групп, тип произведения автоморфизмов равен произведению типов автоморфизмов.

Начиная с этого момента мы будем предполагать, что L является простой классической алгеброй Ли, и будем в качестве $\rho\colon L \to \mathrm{End}_K(V)$ рассматривать ненулевое неприводимое представление L минимальной размерности. Таким образом, мы будем рассматривать реализацию алгебры Ли L в виде алгебры матриц нулевого следа $\mathfrak{sl}_{n+1}(K)$ в случае алгебры Ли типа A_n $(n \geqslant 1)$, алгебры ортогональных матриц $\mathfrak{so}_{2n+1}(K)$ в случае алгебры Ли типа B_n $(n \geqslant 3)$, алгебры симплектических матриц $\mathfrak{sp}_{2n}(K)$ в случае алгебры Ли типа C_n $(n \geqslant 2)$ и алгебры ортогональных матриц $\mathfrak{so}_{2n}(K)$ в случае алгебры Ли типа D_n $(n \geqslant 4)$. Поэтому мы считаем, что алгебра Ли L вложена в алгебру матриц размера $N \times N$, $L \subseteq \mathrm{M}_N(K)$, где N — размерность минимального ненулевого неприводимого представления алгебры Ли L ($N = n+1$ для алгебры Ли типа A_n, $N = 2n+1$ для алгебры Ли типа B_n и $N = 2n$ для алгебры Ли типа C_n или D_n). Типы всех рассматриваемых автоморфизмов будут браться по отношению к указанному представлению ρ.

Лемма 2.4. *Пусть $G \subseteq \mathrm{Aut}(L)$ — произвольная конечная абелева подгруппа группы автоморфизмов простой классической алгебры Ли L. Обозначим через G_0 множество всех автоморфизмов группы G, имеющих тривиальный тип. Тогда выполняется одно из следующих трёх условий*:

а) *подгруппа G_0 совпадает со всей группой G;*

б) *алгебра Ли L имеет тип A_n ($n \geqslant 2$) или D_4 и индекс подгруппы G_0 в группе G равен 2;*

в) *алгебра Ли L имеет тип D_4 и индекс подгруппы G_0 в группе G равен 3.*

Доказательство. Для любого автоморфизма θ алгебры Ли L представление ρ_θ, как и ρ, является неприводимым представлением размерности N. Из теории представлений простых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики (см., например, [1,8]) хорошо известно, что для алгебр Ли типов A_1, B_n ($n \geqslant 3$), C_n ($n \geqslant 2$) и D_n ($n \geqslant 5$) существует единственное с точностью до эквивалентности неприводимое представление размерности N; для алгебры Ли типа A_n ($n \geqslant 2$) множество всех неприводимых представлений размерности N разбивается ровно на два класса эквивалентности; для алгебры Ли типа D_4 множество всех неприводимых представлений размерности N разбивается на три класса эквивалентности. При этом внешние автоморфизмы алгебры Ли переводят эти классы эквивалентности друг в друга. Таким образом, множество $C(\rho)$ состоит из одного, двух или трёх классов эквивалентности в зависимости от типа алгебры Ли L.

Подгруппа G_0 является ядром гомоморфизма s, определяющего тип автоморфизма $\theta \in G$. Поэтому индекс подгруппы G_0 в группе G равен порядку образа $s(G) \subseteq S_{C(\rho)}$ группы G. Если $|s(G)| = 1$, то выполняется условие а). Если $|s(G)| = 2$, то множество $C(\rho)$ состоит не менее чем из двух классов эквивалентности, а значит, алгебра Ли L имеет тип A_n ($n \geqslant 2$) или D_4, т. е. выполняется условие б). Предположим, наконец, что образ $s(G) \subseteq S_{C(\rho)}$ состоит не менее чем из трёх элементов. Тогда множество $C(\rho)$ содержит не менее трёх классов эквивалентности, а значит, алгебра Ли L имеет тип D_4 и группа подстановок $S_{C(\rho)}$ является группой подстановок на множестве из трёх элементов. При этом подгруппа $s(G)$, как образ абелевой группы, является абелевой. Учитывая, что в $S_{C(\rho)}$ все абелевы подгруппы имеют порядок не выше 3, мы видим, что выполняется условие в). □

Лемма 2.5. *Пусть δ и δ' — два гомоморфизма группы G^* в группу автоморфизмов алгебры Ли L, заданные двумя эквивалентными G-градуировками этой алгебры Ли, и $\theta_\lambda = \delta(\lambda)$, $\theta'_\lambda = \delta'(\lambda)$ для любого $\lambda \in G^*$. Тогда для любого $\lambda \in G^*$ подстановки $s(\theta_\lambda)$ и $s(\theta'_\lambda)$ эквивалентны. Подмножества элементов группы G^*, переводимые гомоморфизмами δ и δ' в автоморфизмы тривиального типа, совпадают. Если тип алгебры Ли L отличен от D_4, то для любого характера $\lambda \in G^*$ автоморфизмы θ_λ и θ'_λ имеют одинаковый тип.*

Доказательство. По лемме 1.4 существует автоморфизм $\theta \in \mathrm{Aut}(L)$, такой что $\theta \cdot \theta_\lambda \cdot \theta^{-1} = \theta'_\lambda$ для всех $\lambda \in G^*$. Поэтому, если обозначить $s = s(\theta) \in S_{C(\rho)}$, мы для любого $\lambda \in G^*$ получаем

$$s(\theta'_\lambda) = s(\theta \cdot \theta_\lambda \cdot \theta^{-1}) = s(\theta) \cdot s(\theta_\lambda) \cdot s(\theta)^{-1} = s \cdot s(\theta_\lambda) \cdot s^{-1}.$$

Для любого $\lambda \in G^*$, такого что $s(\theta_\lambda) = 1$, справедливо $s(\theta'_\lambda) = s \cdot 1 \cdot s^{-1} = 1$; если же $s(\theta'_\lambda) = 1$, то $s \cdot s(\theta_\lambda) \cdot s^{-1} = 1$, откуда следует, что $s(\theta_\lambda) = 1$. Это доказывает вторую часть леммы. Наконец, если тип алгебры Ли не равен D_4, то группа подстановок $S_{C(\rho)}$ абелева, и $s(\theta'_\lambda) = s \cdot s(\theta_\lambda) \cdot s^{-1} = s(\theta_\lambda)$. $\square$

Мы будем говорить, что *абелева группа автоморфизмов имеет тривиальный тип*, если все автоморфизмы этой группы имеют тривиальный тип. В случае если группа автоморфизмов, заданная градуировкой, имеет тривиальный тип, мы будем также говорить, что *градуировка имеет тривиальный тип*.

3. Общий вид автоморфизма

Лемма 3.1. *Пусть L — простая классическая алгебра Ли и $A \in \mathrm{M}_N(K)$ — произвольная невырожденная матрица, такая что $A \cdot L \cdot A^{-1} \subseteq L$. Тогда отображение θ_A, такое что $\theta_A(a) = A \cdot a \cdot A^{-1}$ для всех $a \in L$, является автоморфизмом алгебры Ли L. При этом выполняется одно из следующих двух условий*:

а) *тип автоморфизма θ_A тривиален*;
б) *алгебра Ли L является алгеброй Ли типа D_4, тип автоморфизма θ_A имеет порядок 2, причём $E(\rho) \cdot \theta_A = E(\rho)$.*

Доказательство. Линейность и невырожденность отображения θ_A очевидны. Для любых $a, b \in L$

$$\theta_A([a,b]) = A \cdot [a,b] \cdot A^{-1} = A \cdot a \cdot A^{-1} \cdot A \cdot b \cdot A^{-1} - A \cdot b \cdot A^{-1} \cdot A \cdot a \cdot A^{-1} = [\theta_A(a), \theta_A(b)],$$

т. е. θ_A является автоморфизмом алгебры Ли L.

Обозначим через φ изоморфизм пространства V, задаваемый матрицей A^{-1}. Тогда для любых $a \in L$, $v \in V$ имеем

$$\rho^{\varphi}_{\theta_A}(a)v = \varphi \cdot \theta_A(a) \cdot \varphi^{-1} \cdot v = A^{-1} \cdot A \cdot a \cdot A^{-1} \cdot A \cdot v = a \cdot v = \rho(a)v,$$

т. е. представления ρ_{θ_A} и ρ эквивалентны, и $E(\rho) \cdot \theta_A = E(\rho_{\theta_A}) = E(\rho)$.

Группа $S_{C(\rho)}$ является группой подстановок множества $C(\rho)$, причём подстановка $s(\theta_A)$ оставляет элемент $E(\rho)$ этого множества на месте, и значит, порядок элемента $s(\theta_A)$ не превышает $(|C(\rho)| - 1)!$. Если тип алгебры Ли L отличен от D_4, то множество $C(\rho)$ содержит не более двух элементов, и значит, $s(\theta_A) = 1$. Если же тип алгебры Ли равен D_4, то $|C(\rho)| = 3$, и поэтому порядок элемента $s(\theta_A)$ не превышает 2. $\square$

Лемма 3.2. *Для любого автоморфизма $\theta \in \mathrm{Aut}(L)$ тривиального типа существует невырожденная матрица $A \in \mathrm{M}_N(K)$, однозначно определённая с точностью до скалярного множителя, такая что $A \cdot L \cdot A^{-1} \subseteq L$ и $\theta = \theta_A$. Для любых автоморфизмов θ_A, θ_B тривиального типа, $A, B \in \mathrm{M}_N(K)$, выполняются равенства $\theta_A \cdot \theta_B = \theta_{AB}$, $\theta_A^{-1} = \theta_{A^{-1}}$.*

Доказательство. Так как автоморфизм θ имеет тривиальный тип, имеем $E(\rho) \cdot \theta = E(\rho)$, т. е. представления ρ и ρ_θ эквивалентны. Следовательно, существует изоморфизм линейных пространств $\varphi\colon V \to V$, такой что

$$\rho_\theta(a) \cdot \varphi \cdot v = \varphi \cdot \rho(a) \cdot v$$

для всех $a \in L$, $v \in V$. Изоморфизм φ записывается в виде некоторой невырожденной матрицы $A \in \mathrm{M}_N(K)$. Так как представление ρ является вложением алгебры Ли L в $\mathrm{M}_N(K)$, мы можем переписать полученное равенство в матричном виде:

$$\theta(a) \cdot A = A \cdot a,$$

где $a \in L$, т. е. $\theta(a) = A \cdot a \cdot A^{-1}$.

Очевидно, что для любого $\lambda \in K$ имеет место равенство

$$(\lambda A) \cdot a \cdot (\lambda A)^{-1} = A \cdot a \cdot A^{-1} = \theta(a).$$

Пусть $A, B \in \mathrm{M}_N(K)$ — две невырожденные матрицы, такие что

$$\theta(a) = A \cdot a \cdot A^{-1} = B \cdot a \cdot B^{-1}$$

для всех $a \in L$. Тогда

$$B^{-1}A \cdot a = a \cdot B^{-1}A.$$

Мы видим, что матрица $B^{-1}A$ лежит в централизаторе неприводимого конечномерного представления алгебры Ли L. Следовательно, в силу алгебраической замкнутости поля $B^{-1}A = \lambda \cdot 1$ для некоторого $\lambda \in K$.

Наконец, для любого $a \in L$ имеем

$$\theta_A \cdot \theta_B(a) = A \cdot \theta_B(a) \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot a \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = (AB) \cdot a \cdot (AB)^{-1} = \theta_{AB}(a),$$

и значит,

$$\theta_A \cdot \theta_{A^{-1}} = \theta_{AA^{-1}} = \theta_1 = 1,$$

т. е. $\theta_A^{-1} = \theta_{A^{-1}}$. □

Следствие. *Пусть $A, B \in \mathrm{M}_N(K)$ — такие невырожденные матрицы, что $A \cdot L \cdot A^{-1} \subseteq L$ и $B \cdot L \cdot B^{-1} \subseteq L$, причём автоморфизмы θ_A, θ_B коммутируют. Тогда $AB = \lambda BA$ для некоторого $\lambda \in K$.*

Доказательство. Рассмотрим автоморфизм $\theta = \theta_A \theta_B \theta_A^{-1} \theta_B^{-1}$. По лемме 3.2 $\theta = \theta_C$, где $C = ABA^{-1}B^{-1}$. Так как автоморфизмы θ_A, θ_B коммутируют, $\theta_C = 1$, и по лемме 3.2 существует элемент $\lambda \in K$, такой что $C = \lambda \cdot 1$. □

Как следует из леммы 2.4, автоморфизмы нетривиального типа могут быть только в случае алгебры Ли типа A_n ($n \geqslant 2$) или типа D_4. Мы ограничимся рассмотрением случая A_n. Нам потребуется оператор транспонирования матриц $*\colon \mathrm{M}_N(K) \to \mathrm{M}_N(K)$.

Лемма 3.3. *Пусть L — простая алгебра Ли типа A_n ($n \geqslant 2$), $A \in \mathrm{M}_N(K)$ — произвольная невырожденная матрица. Тогда отображение θ_A^*, такое что $\theta_A^*(a) = - A \cdot a^* \cdot A^{-1}$ для всех $a \in L$, является автоморфизмом алгебры Ли L.*

Доказательство. Рассмотрим сначала единичную матрицу $A = 1$. Тогда для всех элементов $a, b \in \mathrm{M}_N(K)$

$$\theta_1^*([a, b]) = -([a, b])^* = (-ab + ba)^* = a^*b^* - b^*a^* = [a^*, b^*] = [\theta_1^*(a), \theta_1^*(b)].$$

При этом, как легко убедиться, след элемента $\theta_1^*(a)$ равен следу элемента $-a$ для всех $a \in \mathrm{M}_N(K)$. Так как линейность и невырожденность отображения θ_1^* очевидны, θ_1^* является автоморфизмом алгебры Ли L.

Если след элемента $a \in \mathrm{M}_N(K)$ равен нулю, то и след элемента $A \cdot a \cdot A^{-1}$ также равен нулю. Поэтому по лемме 3.1 отображение θ_A является автоморфизмом. Осталось заметить, что $\theta_A^* = \theta_A \cdot \theta_1^*$. □

Лемма 3.4. *Пусть L — простая алгебра Ли типа A_n $(n \geqslant 2)$. Для любого автоморфизма $\theta \in \mathrm{Aut}(L)$ нетривиального типа существует невырожденная матрица $A \in \mathrm{M}_N(K)$, однозначно определённая с точностью до скалярного множителя, такая что $\theta = \theta_A^*$.*

Доказательство. Заметим, что автоморфизм θ_1^* имеет нетривиальный тип. Действительно, если θ_1^* имеет тривиальный тип, то

$$\theta_1^*(a) = \theta_A(a)$$

для некоторого $A \in \mathrm{M}_N(K)$ и всех $a \in L$, т. е.

$$-a^* = A \cdot a \cdot A^{-1}$$

и

$$-A \cdot a = a^* \cdot A.$$

Но в $L \subset \mathrm{M}_N(K)$ можно выбрать такие элементы a, b, что

$$a \cdot b \in L, \quad a \cdot b \neq 0, \quad b \cdot a = 0$$

(например, можно взять в качестве a матричную единицу E_{12}, а в качестве b — матричную единицу E_{23}). Тогда

$$(a \cdot b)^* \cdot A = b^* \cdot a^* \cdot A = -b^* \cdot A \cdot a = A \cdot b \cdot a = 0,$$

что противоречит условию $a \cdot b \neq 0$.

Для алгебры Ли типа A_n $(n \geqslant 2)$ существует единственный нетривиальный тип автоморфизмов. Учитывая, что тип произведения автоморфизмов равен произведению типов автоморфизмов, мы получаем тривиальность типа автоморфизма $\theta \cdot \theta_1^*$. По лемме 3.2 существует невырожденная матрица A, определённая однозначно с точностью до скалярного множителя, такая что $\theta \cdot \theta_1^* = \theta_A$. Так как автоморфизм θ_1^* имеет порядок 2, получаем, что $\theta = \theta_A \cdot \theta_1^* = \theta_A^*$. □

Лемма 3.5. *Пусть L — простая алгебра Ли типа A_n $(n \geqslant 2)$, $A, B \in \mathrm{M}_N(K)$ — произвольные невырожденные матрицы. Тогда*

а) $\theta_A \cdot \theta_B^* = \theta_{AB}^*$, $\theta_A^* \cdot \theta_B^* = \theta_{AB^{*-1}}$, $\theta_A^* \cdot \theta_B = \theta_{AB^{*-1}}^*$, $\theta_A^{*-1} = \theta_{A^*}^*$;

б) *автоморфизмы θ_A и θ_B^* коммутируют в том и только том случае, если $AB = \lambda BA^{*-1}$ для некоторого $\lambda \in K$;*

в) *автоморфизмы θ_A^* и θ_B^* коммутируют в том и только том случае, если $AB^{*-1} = \lambda BA^{*-1}$ для некоторого $\lambda \in K$.*

Доказательство. Сначала получим некоторые соотношения для умножения автоморфизмов. Как мы уже отмечали,

$$\theta_A \cdot \theta_1^* = \theta_A^*$$

для любой невырожденной матрицы $A \in \mathrm{M}_N(K)$. С другой стороны, для любого $a \in L$

$$\theta_1^* \cdot \theta_A(a) = \theta_1^*(A \cdot a \cdot A^{-1}) = -(A \cdot a \cdot A^{-1})^* = -A^{*-1} \cdot a^* \cdot A^* = \theta_{A^{*-1}}^*(a),$$

т. е.

$$\theta_1^* \cdot \theta_A = \theta_{A^{*-1}}^* = \theta_{A^{*-1}} \cdot \theta_1^*.$$

Для любых невырожденных матриц $A, B \in \mathrm{M}_N(K)$ имеем

$$\begin{aligned}
&\theta_A \cdot \theta_B^* = \theta_A \cdot \theta_B \cdot \theta_1^* = \theta_{AB} \cdot \theta_1^* = \theta_{AB}^*,\\
&\theta_A^* \cdot \theta_B^* = \theta_A \cdot \theta_1^* \cdot \theta_B \cdot \theta_1^* = \theta_A \cdot \theta_{B^{*-1}} \cdot \theta_1^* \cdot \theta_1^* = \theta_{AB^{*-1}},\\
&\theta_A^* \cdot \theta_B = \theta_A \cdot \theta_1^* \cdot \theta_B = \theta_A \cdot \theta_{B^{*-1}} \cdot \theta_1^* = \theta_{AB^{*-1}} \cdot \theta_1^* = \theta_{AB^{*-1}}^*.
\end{aligned}$$

Из второй формулы, в частности, следует, что

$$\theta_A^{*-1} = \theta_{A^*}^*.$$

Рассмотрим автоморфизмы

$$\theta = \theta_A \cdot \theta_B^* \cdot \theta_A^{-1} \cdot \theta_B^{*-1}, \quad \theta' = \theta_A^* \cdot \theta_B^* \cdot \theta_A^{*-1} \cdot \theta_B^{*-1}.$$

Мы можем легко их вычислить:

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta_A \cdot \theta_B^* \cdot \theta_A^{-1} \cdot \theta_B^{*-1} = \theta_A \cdot \theta_B^* \cdot \theta_{A^{-1}} \cdot \theta_{B^*}^* =\\
&= \theta_{AB}^* \cdot \theta_{A^{-1}B^*}^* = \theta_{AB(A^{-1}B^*)^{*-1}}^* = \theta_{ABA^*B^{-1}}^*,\\
\theta' &= \theta_A^* \cdot \theta_B^* \cdot \theta_A^{*-1} \cdot \theta_B^{*-1} = \theta_A^* \cdot \theta_B^* \cdot \theta_{A^*}^* \cdot \theta_{B^*}^* = \theta_{AB^{*-1}} \cdot \theta_{A^*B^{-1}} = \theta_{AB^{*-1}A^*B^{-1}}.
\end{aligned}$$

По лемме 3.2 автоморфизм θ является тождественным автоморфизмом в том и только том случае, если $ABA^*B^{-1} = \lambda \cdot 1$ для некоторого $\lambda \in K$. Так как автоморфизм θ является коммутантом автоморфизмов θ_A и θ_B^*, мы видим, что эти два автоморфизма коммутируют в том и только том случае, если $AB = \lambda BA^{*-1}$ для некоторого $\lambda \in K$.

Точно так же автоморфизм θ' является тождественным автоморфизмом в том и только том случае, если $AB^{*-1}A^*B^{-1} = \lambda \cdot 1$ для некоторого $\lambda \in K$. Так как автоморфизм θ' является коммутантом автоморфизмов θ_A^* и θ_B^*, эти два автоморфизма коммутируют в том и только том случае, если $AB^{*-1} = \lambda BA^{*-1}$ для некоторого $\lambda \in K$. □

4. Проективные представления и коммутационные факторы

Пусть G — конечная группа, K — алгебраически замкнутое поле, характеристика которого не делит порядок группы G, K^* — мультипликативная группа поля K и V — конечномерное линейное пространство. Отображение $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ группы G в группу невырожденных операторов линейного пространства V называется *проективным представлением* группы G в пространстве V, если существует отображение $\pi\colon G \times G \to K^*$, такое что

$$\varphi(x)\varphi(y) = \pi(x,y)\varphi(xy)$$

для всех $x, y \in G$. Функция π называется *системой факторов* проективного представления φ. Легко проверяется, что если π — система факторов некоторого проективного представления группы G, то для любых $x, y, z \in G$ выполняется равенство

$$\pi(x,y)\pi(xy,z) = \pi(y,z)\pi(x,yz). \tag{3}$$

Верно и обратное утверждение: любое отображение $\pi\colon G \times G \to K^*$, удовлетворяющее условию (3), является системой факторов некоторого проективного представления.

Размерностью проективного представления мы будем называть размерность линейного пространства, в котором определено это проективное представление.

Обозначим через $\mathrm{PGL}(V)$ фактор-группу группы $\mathrm{GL}(V)$ по нормальной подгруппе скалярных операторов, т. е. $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/K \cdot \mathbf{1}$. Тогда для любого отображения $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ мы можем естественным образом построить отображение $\bar\varphi\colon G \to \mathrm{PGL}(V)$, полагая $\bar\varphi(x) = K\varphi(x)$ для всех $x \in G$. Хорошо известно, что отображение $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ является проективным представлением в том и только том случае, если соответствующее отображение $\bar\varphi$ является гомоморфизмом группы G в проективную линейную группу $\mathrm{PGL}(V)$.

Проективные представления $\varphi_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ и $\varphi_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ группы G называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм γ линейных пространств V_1 и V_2 и функция $\alpha\colon G \to K^*$, такие что

$$\varphi_1(x) = \alpha(x) \cdot \gamma \cdot \varphi_2(x) \cdot \gamma^{-1}$$

для всех $x \in G$.

Отображение $\varepsilon\colon G \times G \to K^*$ называется *коммутационным фактором* на абелевой группе G, если для любых элементов $x, y, z \in G$ выполняются равенства

$$\varepsilon(xy,z) = \varepsilon(x,z) \cdot \varepsilon(y,z), \tag{4}$$

$$\varepsilon(x,yz) = \varepsilon(x,y) \cdot \varepsilon(x,z), \tag{5}$$

$$\varepsilon(x,y) = \varepsilon(y,x)^{-1}. \tag{6}$$

При этом соотношение (5) естественным образом следует из соотношений (4) и (6). Кроме того, для любого $x \in G$ очевидны равенства $\varepsilon(x,1) = \varepsilon(1,x) = 1$ и $\varepsilon(x,x) = \pm 1$. Мы будем называть коммутационный фактор ε *положительно определённым*, если $\varepsilon(x,x) = 1$ для всех $x \in G$.

Для системы факторов π произвольного проективного представления φ конечной абелевой группы G определим отображение $\varepsilon_\pi\colon G \times G \to K^*$, полагая

$$\varepsilon_\pi(x,y) = \pi(x,y) \cdot \pi(y,x)^{-1}$$

для всех $x, y \in G$. Тогда для любых $x, y \in G$ выполняется соотношение

$$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varepsilon_\pi(x, y) \cdot \varphi(y) \cdot \varphi(x).$$

Лемма 4.1 [2, 4]. *Для системы факторов π произвольного проективного представления конечной абелевой группы отображение ε_π является положительно определённым коммутационным фактором.*

Проективное представление φ, у которого коммутирование операторов $\varphi(x)$ определяется коммутационным фактором ε, мы будем называть *проективным ε-представлением*.

Доказательство следующей леммы осуществляется простой проверкой равенства коммутационных факторов.

Лемма 4.2. *Если проективное ε_1-представление φ_1 и проективное ε_2-представление φ_2 конечной абелевой группы эквивалентны, то $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.*

Таким образом, мы видим, что коммутационные факторы должны играть существенную роль в описании проективных представлений.

Ядром G_ε коммутационного фактора ε на группе G мы будем называть множество всех таких элементов $x \in G$, что $\varepsilon(x, G) = 1$. Коммутационный фактор ε называется невырожденным, если его ядро G_ε тривиально.

Мы будем говорить, что подгруппы G_1, G_2 группы G *ортогональны относительно коммутационного фактора* ε, если $\varepsilon(G_1, G_2) = 1$. В частности, ядро коммутационного фактора — это максимальная подгруппа G, ортогональная всей группе G относительно этого коммутационного фактора. Коммутационный фактор ε на группе G называется *разложимым*, если группа G может быть представлена в виде прямого произведения двух нетривиальных ортогональных относительно ε подгрупп G_1, G_2. В этом случае, обозначая через ε_1, ε_2 ограничения коммутационного фактора ε на подгруппы G_1, G_2, мы будем говорить, что коммутационный фактор ε разлагается в прямое произведение коммутационных факторов ε_1 и ε_2, и будем записывать это как $\varepsilon = \varepsilon_1 \times \varepsilon_2$.

Коммутационный фактор ε_1 на группе G_1 и коммутационный фактор ε_2 на группе G_2 называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм $\gamma\colon G_1 \to G_2$ групп G_1 и G_2, такой что $\varepsilon_2\big(\gamma(x), \gamma(y)\big) = \varepsilon_1(x, y)$ для всех $x, y \in G_1$.

Для любого натурального числа n обозначим через $\boldsymbol{\xi}_n$ первообразный корень степени n из единицы. Рассмотрим следующие коммутационные факторы.

1. Пусть $n = p^k$, где p — произвольное простое число, $k > 0$, и группа G равна прямому произведению двух циклических подгрупп порядка n с образующими x, y. Коммутационный фактор $\boldsymbol{\epsilon}_n$ на этой группе G задаётся соотношениями $\boldsymbol{\epsilon}_n(x, x) = 1$, $\boldsymbol{\epsilon}_n(y, y) = 1$, $\boldsymbol{\epsilon}_n(x, y) = \boldsymbol{\xi}_n$.
2. Пусть $n = 2^k$, где $k > 0$, и группа G равна прямому произведению двух циклических подгрупп порядка n с образующими x, y. Коммутационный фактор $\boldsymbol{\epsilon}'_n$ на группе G задаётся соотношениями $\boldsymbol{\epsilon}'_n(x, x) = 1$, $\boldsymbol{\epsilon}'_n(y, y) = -1$, $\boldsymbol{\epsilon}'_n(x, y) = \boldsymbol{\xi}_n$.

3. Пусть группа G является циклической группой порядка 2 с образующим элементом x. Коммутационный фактор $\boldsymbol{\epsilon}_2''$ на группе G задаётся соотношением $\boldsymbol{\epsilon}_2''(x,x) = -1$.

Легко проверить, что все построенные здесь коммутационные факторы невырожденны и неразложимы. Из всех этих коммутационных факторов только $\boldsymbol{\epsilon}_n$ являются положительно определёнными. Полная классификация невырожденных коммутационных факторов, приведённая ниже в теореме 2, была получена в [5]. Заметим, что ранее частный случай этой теоремы для невырожденных положительно определённых коммутационных факторов был доказан в [3].

Теорема 2 [5].

1. *Любой невырожденный неразложимый коммутационный фактор на конечной абелевой группе эквивалентен одному из следующих коммутационных факторов:* $\boldsymbol{\epsilon}_{p^k}$ *(*p *— простое число,* $k > 0$*),* $\boldsymbol{\epsilon}'_{2^k}$ $(k > 0)$ *или* $\boldsymbol{\epsilon}''_2$.
2. *Максимальные* p*-подгруппы конечной абелевой группы ортогональны относительно любого коммутационного фактора этой группы.*
3. *Любой невырожденный коммутационный фактор на нетривиальной конечной абелевой* p*-группе эквивалентен одному из следующих коммутационных факторов*:

   а) $\boldsymbol{\epsilon}_{n_1} \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_2} \times \ldots \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_k}$,

   б) $\boldsymbol{\epsilon}''_2 \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_1} \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_2} \times \ldots \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_k}$,

   в) $\boldsymbol{\epsilon}''_2 \times \boldsymbol{\epsilon}''_2 \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_1} \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_2} \times \ldots \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_k}$,

   г) $\boldsymbol{\epsilon}'_{n_1} \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_2} \times \ldots \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_k}$,

   где $k > 0$ *и* $n_1 \geqslant n_2 \geqslant \ldots \geqslant n_k > 0$ *— степени простого числа* p *(при этом, естественно, коммутационные факторы* б)—г) *рассматриваются только в случае* $p = 2$*).*
4. *Все перечисленные в пунктах* а)—г) *невырожденные коммутационные факторы попарно неэквивалентны. Только коммутационные факторы* а) *являются положительно определёнными.*

Ядром проективного представления φ конечной абелевой группы G называется множество всех элементов $x \in G$, таких что $\varphi(x)$ является скалярным оператором. Проективное представление называется *точным*, если его ядро тривиально.

Лемма 4.3 [2,4]. *Ядро неприводимого проективного* ε*-представления конечной абелевой группы* G *совпадает с ядром* G_ε *коммутационного фактора* ε.

Таким образом, мы видим, что конечная абелева группа G может иметь точное неприводимое проективное представление только в том случае, если на G можно определить невырожденный положительно определённый коммутационный фактор.

Для каждого коммутационного фактора ε на конечной абелевой группе G мы построим неприводимое проективное ε-представление $\varphi_\varepsilon\colon G \to \mathrm{GL}(V_\varepsilon)$ следующим образом.

Если группа G тривиальна, то мы рассматриваем одномерное линейное пространство V_ε и полагаем $\varphi_\varepsilon(1) = \mathbf{1}$.

В случае если $\varepsilon = \boldsymbol{\epsilon}_n$, где $n = p^k$, мы обозначим через V_ε линейное пространство размерности n с базисом $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ и определим отображение φ_ε, полагая

$$\varphi_\varepsilon(x^a y^b)e_c = \boldsymbol{\xi}_n^{ac} e_{b+c\,(\mathrm{mod}\ n)}$$

для всех $a, b, c = 0, 1, \ldots, n-1$.

Если коммутационный фактор ε на группе G эквивалентен коммутационному фактору $\boldsymbol{\epsilon}_n$, то существует изоморфизм $\gamma\colon G \to G_n$, такой что

$$\varepsilon(g,h) = \boldsymbol{\epsilon}_n\bigl(\gamma(g), \gamma(h)\bigr) \tag{7}$$

для всех $g, h \in G$ (здесь через G_n обозначена группа, на которой определён коммутационный фактор $\boldsymbol{\epsilon}_n$). В этом случае мы полагаем $V_\varepsilon = V_{\epsilon_n}$ и $\varphi_{\varepsilon,\gamma}(g) = \varphi_{\epsilon_n}\bigl(\gamma(g)\bigr)$ для всех $g \in G$. Легко убедиться, что φ_{ϵ_n} — проективное $\boldsymbol{\epsilon}_n$-представление, а все $\varphi_{\varepsilon,\gamma}$ — проективные ε-представления.

Для каждого коммутационного фактора ε на группе G, эквивалентного коммутационному фактору $\boldsymbol{\epsilon}_n$, мы среди всех изоморфизмов $\gamma\colon G \to G_n$, удовлетворяющих условию (7), выберем и зафиксируем некоторый (произвольный) изоморфизм γ_0 и положим $\varphi_\varepsilon = \varphi_{\varepsilon,\gamma_0}$.

Пусть теперь группа G представляется в виде прямого произведения собственных подгрупп G_1, G_2, ортогональных относительно невырожденного коммутационного фактора ε на группе G, и невырожденные коммутационные факторы ε_1, ε_2 получаются ограничением ε на G_1, G_2 соответственно. Для любых проективного ε_1-представления $\varphi_1\colon G_1 \to \mathrm{GL}(V_1)$ и проективного ε_2-представления $\varphi_2\colon G_2 \to \mathrm{GL}(V_2)$ мы можем построить проективное ε-представление $\varphi = \varphi_1 \otimes \varphi_2$ группы G в линейном пространстве $V = V_1 \otimes_K V_2$, называемое *тензорным произведением* проективных представлений φ_1 и φ_2, полагая

$$\varphi(x_1x_2)\cdot(v_1 \otimes v_2) = (\varphi_1(x_1)v_1) \otimes (\varphi_2(x_2)v_2)$$

для всех $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$, $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$.

По теореме 2 любой невырожденный положительно определённый коммутационный фактор ε на нетривиальной конечной абелевой группе G эквивалентен коммутационному фактору $\boldsymbol{\epsilon}_{n_1} \times \ldots \times \boldsymbol{\epsilon}_{n_k}$, где $k > 0$ и $n_1, \ldots, n_k$ — степени простых чисел. Поэтому группа G представима в виде прямого произведения $G = G_1 \times \ldots \times G_k$ попарно ортогональных относительно ε подгрупп, и для любого $t = 1, \ldots, k$ ограничение ε_t коммутационного фактора ε на подгруппу G_t эквивалентно коммутационному фактору $\boldsymbol{\epsilon}_{n_t}$. Поэтому проективные представления $\varphi_{\varepsilon_1}, \ldots, \varphi_{\varepsilon_k}$ мы можем считать уже определёнными. Полагая $V_\varepsilon = V_{\varepsilon_1} \otimes_K \ldots \otimes_K V_{\varepsilon_k}$, мы определим проективное ε-представление $\varphi_\varepsilon\colon G \to \mathrm{GL}(V_\varepsilon)$ как тензорное произведение проективных представлений $\varphi_{\varepsilon_1}, \ldots, \varphi_{\varepsilon_k}$. Здесь также разложение группы в произведение ортогональных относительно ε подгрупп может быть выбрано неоднозначно. Мы выбираем и фиксируем произвольное такое разложение.

Наконец, для произвольного положительно определённого коммутационного фактора ε мы можем рассмотреть ядро G_ε этого коммутационного фактора и фактор-группу $\bar{G} = G/G_\varepsilon$. На этой фактор-группе естественным образом задаётся коммутационный фактор $\bar{\varepsilon}$, такой что $\bar{\varepsilon}(xG_\varepsilon, yG_\varepsilon) = \varepsilon(x, y)$ для всех $x, y \in G$. Он всегда невырожден, и поэтому можно считать уже определённым проективное представление $\varphi_{\bar{\varepsilon}}$. Мы задаём проективное представление φ_ε, полагая $V_\varepsilon = V_{\bar{\varepsilon}}$ и $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_{\bar{\varepsilon}}(xG_\varepsilon)$ для всех $x \in G$.

Напомним, что *линейным представлением* группы G в пространстве V называется произвольный гомоморфизм групп $\psi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Два линейных представления $\psi_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ и $\psi_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ называются *эквивалентными*, если существует изоморфизм линейных пространств $\gamma\colon V_1 \to V_2$, такой что

$$\gamma \cdot \psi_1(x) \cdot \gamma^{-1} = \psi_2(x)$$

для всех $x \in G$.

Пусть $\psi\colon G \to \mathrm{GL}(U)$ — произвольное линейное представление конечной абелевой группы G в линейном пространстве U. Для любого положительно определённого коммутационного фактора ε на группе G и любого проективного ε-представления $\varphi\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ мы можем построить проективное ε-представление φ^ψ группы G в линейном пространстве $U \otimes_K V$, полагая

$$\varphi^\psi(x) \cdot (u \otimes v) = (\psi(x)u) \otimes (\varphi(x)v)$$

для всех $x \in G$, $u \in U$, $v \in V$.

Пусть $\psi\colon G \to \mathrm{GL}(U)$ — произвольное линейное представление конечной абелевой группы G и χ — некоторый характер этой группы. Обозначим через $\psi^\chi\colon G \to \mathrm{GL}(U)$ линейное представление группы G, такое что

$$\psi^\chi(x)u = \chi(x)\psi(x)u$$

для всех $x \in G$, $u \in U$.

Следующая теорема, доказанная в [6], даёт полную классификацию проективных представлений конечных абелевых групп.

Теорема 3 [6]. *Для любого проективного представления φ конечной абелевой группы G существуют линейное представление ψ группы G и коммутационный фактор ε на группе G, такие что проективные представления φ и φ_ε^ψ эквивалентны. Для любых коммутационных факторов ε_1 и ε_2 на группе G и любых линейных представлений ψ_1 и ψ_2 группы G проективные представления $\varphi_{\varepsilon_1}^{\psi_1}$ и $\varphi_{\varepsilon_2}^{\psi_2}$ эквивалентны в том и только том случае, если $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ и для некоторого характера χ группы G ограничения линейных представлений ψ_1 и ψ_2^χ на подгруппу G_{ε_1} эквивалентны как линейные представления этой группы.*

Следствие. *Пусть ε — произвольный положительно определённый коммутационный фактор на группе G, и пусть n — натуральное число, такое что индекс подгруппы G_ε группы G равен n^2. Тогда любое n-мерное проективное ε-представление эквивалентно φ_ε.*

Доказательство. По построению φ_ε размерность этого представления равна n. Осталось заметить, что если ψ — некоторое линейное представление группы G размерности m, то размерность проективного ε-представления φ_ε^ψ равна mn, т. е. оно имеет размерность n только в случае одномерного линейного представления ψ. □

Заметим, что приведённое следствие оправдывает как произвол в выборе φ_ε среди $\varphi_{\varepsilon,\gamma}$ в случае невырожденного неразложимого коммутационного фактора ε, так и произвол в разложении группы на ортогональные подгруппы в случае невырожденного коммутационного фактора ε.

5. Градуировки тривиального типа алгебры Ли A_n

В данном разделе будет дана классификация градуировок тривиального типа алгебры Ли L типа A_n.

Рассмотрим произвольную такую градуировку

$$L = \bigoplus_{g\in G} L_g,$$

и пусть $\delta\colon G^* \to \mathrm{Aut}(L)$ — гомоморфизм групп, заданный этой градуировкой. Поскольку рассматриваемая градуировка имеет тривиальный тип, все автоморфизмы $\delta(\chi)$, $\chi \in G^*$, имеют тривиальный тип. Таким образом, по лемме 3.2 для любого характера $\chi \in G^*$ найдётся матрица $A_\chi \in \mathrm{M}_N(K)$, такая что $\delta(\chi) = \theta_{A_\chi}$. Таким образом, исходя из градуировки, мы можем построить отображение $\varphi\colon G^* \to \mathrm{M}_N(K)$, полагая $\varphi(\chi) = A_\chi$ для всех $\chi \in G^*$.

Лемма 5.1. *Построенное отображение $\varphi\colon G^* \to \mathrm{M}_N(K)$ является проективным представлением группы G^*.*

Доказательство. Для любых $\chi_1, \chi_2 \in G^*$ мы получаем

$$\theta_{A_{\chi_1\chi_2}} = \delta(\chi_1\chi_2) = \delta(\chi_1)\delta(\chi_2) = \theta_{A_{\chi_1}}\theta_{A_{\chi_2}} = \theta_{A_{\chi_1}A_{\chi_2}}.$$

Таким образом, найдётся элемент $\pi(\chi_1,\chi_2) \in K^*$, такой что

$$A_{\chi_1}A_{\chi_2} = \pi(\chi_1,\chi_2)A_{\chi_1\chi_2},$$

т. е.

$$\varphi(\chi_1)\varphi(\chi_2) = \pi(\chi_1,\chi_2)\cdot\varphi(\chi_1\chi_2),$$

что и доказывает лемму. □

В дальнейшем проективное представление, построенное описанным выше способом, мы будем называть *проективным представлением, индуцированным градуировкой тривиального типа* алгебры Ли L.

Лемма 5.2. *Для любого проективного представления $\varphi\colon G^* \to \mathrm{M}_{n+1}(K)$ существует G-градуировка тривиального типа алгебры Ли L типа A_n, индуцирующая это проективное представление.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм групп $\delta\colon G^* \to \mathrm{Aut}(L)$, полагая для любого $\chi \in G^*$
$$\delta(\chi) = \theta_{\varphi(\chi)}.$$
Это действительно гомоморфизм групп, так как для любых $\chi_1, \chi_2 \in G^*$ существует число $\pi(\chi_1, \chi_2) \in K^*$, такое что
$$\varphi(\chi_1)\varphi(\chi_2) = \pi(\chi_1, \chi_2)\varphi(\chi_1\chi_2),$$
и поэтому
$$\delta(\chi_1)\delta(\chi_2) = \theta_{\varphi(\chi_1)}\theta_{\varphi(\chi_2)} = \theta_{\varphi(\chi_1)\varphi(\chi_2)} = \theta_{\pi(\chi_1,\chi_2)\varphi(\chi_1\chi_2)} = \theta_{\varphi(\chi_1\chi_2)} = \delta(\chi_1\chi_2).$$
По лемме 1.3 существует G-градуировка алгебры Ли L, задающая этот гомоморфизм. Поскольку все автоморфизмы $\delta(\chi)$, $\chi \in G^*$, по построению имеют тривиальный тип, эта градуировка также имеет тривиальный тип, и проективное представление φ индуцировано этой градуировкой. □

Для любого проективного представления $\varphi\colon G^* \to \mathrm{M}_N(K)$ группы G^* рассмотрим отображение $\varphi^*\colon G^* \to \mathrm{M}_N(K)$, полагая
$$\varphi^*(\chi) = (\varphi(\chi)^*)^{-1}$$
для всех $\chi \in G^*$. Поскольку для любых характеров $\chi_1, \chi_2 \in G^*$ выполняется соотношение
$$\begin{aligned}\varphi^*(\chi_1)\varphi^*(\chi_2) &= (\varphi(\chi_1)^*)^{-1}(\varphi(\chi_2)^*)^{-1} = (\varphi(\chi_2)^*\varphi(\chi_1)^*)^{-1} = \\ &= \Bigl(\bigl(\varphi(\chi_1)\varphi(\chi_2)\bigr)^*\Bigr)^{-1} = \Bigl(\bigl(\pi(\chi_1,\chi_2)\varphi(\chi_1\chi_2)\bigr)^*\Bigr)^{-1} = \\ &= \pi(\chi_1,\chi_2)^{-1}(\varphi(\chi_1\chi_2)^*)^{-1} = \pi(\chi_1,\chi_2)^{-1}\varphi^*(\chi_1\chi_2),\end{aligned}$$
то φ^* также является проективным представлением. Проективные представления φ и φ^* мы будем называть *дуальными проективными представлениями*. Проективные представления φ_1 и φ_2 мы будем называть *дуально эквивалентными*, если проективные представления φ_1 и φ_2^* эквивалентны.

Понятно, что понятие дуальности проективных представлений зависит от выбора базиса, относительно которого мы записываем операторы в матричной форме. Однако, как хорошо известно, если $\#$ — это оператор транспонирования матриц в некотором другом базисе и C — оператор перехода от старого базиса к новому, то для любого оператора A имеет место равенство
$$C^{-1}A^{\#}C = (C^{-1}AC)^*,$$
т. е.
$$A^{\#} = (CC^*)A^*(CC^*)^{-1}.$$
Поэтому два проективных представления, дуальные одному и тому же проективному представлению, но относительно различных базисов линейного пространства, эквивалентны между собой. Всё вышесказанное означает независимость понятия дуальной эквивалентности от выбора базиса.

Кроме того, понятие дуальной эквивалентности проективных представлений полностью согласовано с понятием эквивалентности. Действительно, если $\varphi_1\colon G \to \mathrm{M}_N(K)$ и $\varphi_2\colon G \to \mathrm{M}_N(K)$ — два эквивалентных проективных представления, то существуют функция $\alpha\colon G \to K^*$ и невырожденная матрица $C \in \mathrm{M}_N(K)$, такие что

$$\varphi_1(g) = \alpha(g) C \varphi_2(g) C^{-1}.$$

Транспонируя обе части этого равенства и вычисляя их обратные элементы, мы получаем

$$\varphi_1^*(g) = (\varphi_1(g)^*)^{-1} = \alpha(g)^{-1}(C^*)^{-1}(\varphi_2(g)^*)^{-1}C^* = \alpha(g)^{-1}(C^*)^{-1}\varphi_2^*(g)C^*,$$

т. е. проективные представления φ_1^* и φ_2^* также эквивалентны.

Лемма 5.3. *Две G-градуировки тривиального типа алгебры Ли L типа A_n эквивалентны в том и только том случае, если индуцируемые ими проективные представления эквивалентны или дуально эквивалентны.*

Доказательство. По лемме 1.4 две G-градуировки эквивалентны в том и только том случае, если эквивалентны заданные ими гомоморфизмы групп

$$\delta_1\colon G^* \to \mathrm{Aut}(L), \quad \delta_2\colon G^* \to \mathrm{Aut}(L).$$

Обозначим через φ_1 и φ_2 проективные представления группы G^*, индуцированные этими градуировками. Тогда для всех $\chi \in G^*$ имеют место равенства

$$\delta_1(\chi) = \theta_{\varphi_1(\chi)}, \quad \delta_2(\chi) = \theta_{\varphi_2(\chi)}.$$

Если проективные представления φ_1 и φ_2 эквивалентны, то существуют матрица $A \in \mathrm{M}_N(K)$ и функция $\alpha\colon G^* \to K^*$, такие что

$$\varphi_1(\chi) = \alpha(\chi) A \varphi_2(\chi) A^{-1}$$

для всех $\chi \in G^*$. Поэтому, рассматривая автоморфизм $\theta = \theta_A$, мы получаем

$$\theta\delta_2(\chi)\theta^{-1} = \theta_A \theta_{\varphi_2(\chi)} \theta_A^{-1} = \theta_{A\varphi_2(\chi)A^{-1}} = \theta_{\alpha(\chi)^{-1}\varphi_1(\chi)} = \theta_{\varphi_1(\chi)} = \delta_1(\chi)$$

для всех $\chi \in G^*$, что доказывает эквивалентность гомоморфизмов групп δ_1 и δ_2 в этом случае.

Если проективные представления φ_1 и φ_2 дуально эквивалентны, то существуют матрица $A \in \mathrm{M}_N(K)$ и функция $\alpha\colon G^* \to K^*$, такие что

$$\varphi_1(\chi) = \alpha(\chi) A \varphi_2^*(\chi) A^{-1}$$

для всех $\chi \in G^*$. Рассматривая автоморфизм $\theta = \theta_A^*$ и применяя полученные в лемме 3.5 соотношения, мы получаем

$$\begin{aligned}\theta \cdot \delta_2(\chi) \cdot \theta^{-1} = \theta_A^* \cdot \theta_{\varphi_2(\chi)} \cdot (\theta_A^*)^{-1} = \theta^*_{A(\varphi_2(\chi)^*)^{-1}} \cdot \theta^*_{A^*} = \\ = \theta^*_{A\varphi_2^*(\chi)} \cdot \theta^*_{A^*} = \theta_{A\varphi_2^*(\chi)A^{-1}} = \theta_{\alpha(\chi)^{-1}\varphi_1(\chi)} = \theta_{\varphi_1(\chi)} = \delta_1(\chi)\end{aligned}$$

для всех $\chi \in G^*$, что доказывает эквивалентность гомоморфизмов групп δ_1 и δ_2 в этом случае.

Наконец, если гомоморфизмы δ_1 и δ_2 эквивалентны, то для некоторого автоморфизма θ алгебры Ли L и всех $\chi \in G^*$ выполняется равенство

$$\theta \cdot \delta_2(\chi) \cdot \theta^{-1} = \delta_1(\chi).$$

Из лемм 3.2 и 3.4 следует, что любой автоморфизм θ алгебры Ли L типа A_n имеет либо вид θ_A, либо вид θ_A^*, где $A \in \mathrm{M}_N(K)$ — некоторая невырожденная матрица. В первом случае

$$\theta \cdot \delta_2(\chi) \cdot \theta^{-1} = \theta_A \cdot \theta_{\varphi_2(\chi)} \cdot \theta_A^{-1} = \theta_{A\varphi_2(\chi)A^{-1}} = \delta_1(\chi) = \theta_{\varphi_1(\chi)},$$

т. е. $\varphi_1(\chi) = \alpha(\chi)A\varphi_2(\chi)A^{-1}$ для некоторой функции $\alpha\colon G^* \to K^*$, что доказывает эквивалентность проективных представлений φ_1 и φ_2. Во втором случае

$$\theta \cdot \delta_2(\chi) \cdot \theta^{-1} = \theta_A^* \cdot \theta_{\varphi_2(\chi)} \cdot (\theta_A^*)^{-1} = \theta_{A\varphi_2^*(\chi)A^{-1}} = \delta_1(\chi) = \theta_{\varphi_1(\chi)},$$

т. е. $\varphi_1(\chi) = \alpha(\chi)A\varphi_2^*(\chi)A^{-1}$ для некоторой функции $\alpha\colon G^* \to K^*$, что доказывает дуальную эквивалентность проективных представлений φ_1 и φ_2. Лемма доказана. □

Поскольку теорема 3 даёт полную классификацию проективных представлений с точностью до эквивалентности, нам осталось понять, какие классы эквивалентности проективных представлений дуально эквивалентны.

Для любого коммутационного фактора ε на абелевой группе обозначим через ε^* коммутационный фактор на той же группе, такой что

$$\varepsilon^*(g,h) = \varepsilon(g,h)^{-1} = \varepsilon(h,g)$$

для всех элементов g, h этой группы. Коммутационный фактор ε^* мы будем называть *дуальным* к коммутационному фактору ε.

Лемма 5.4. *Для любого проективного ε-представления φ проективное представление φ^* является проективным ε^*-представлением.*

Доказательство. Для любых элементов g, h группы выполняется соотношение

$$\varphi(g)\varphi(h) = \varepsilon(g,h)\varphi(h)\varphi(g).$$

Транспонируя обе части этого равенства и применяя к ним оператор обращения, мы получаем

$$\varphi^*(g)\varphi^*(h) = \varepsilon(g,h)^{-1}\varphi^*(h)\varphi^*(g) = \varepsilon^*(g,h)\varphi^*(h)\varphi^*(g). \qquad \square$$

Лемма 5.5. *Для любого положительно определённого коммутационного фактора ε проективные представления φ_ε и φ_{ε^*} дуально эквивалентны.*

Доказательство. Очевидно, что $G_\varepsilon = G_{\varepsilon^*}$. Обозначим через n размерность проективного представления φ_ε. Тогда индекс подгруппы G_ε группы G равен n^2. По лемме 5.4 проективное представление φ_{ε^*} является проективным ε^*-представлением, а так как его размерность равна n, из следствия к теореме 3 следует эквивалентность проективных представлений φ_ε^* и φ_{ε^*}. □

Лемма 5.6. *Для любого положительно определённого коммутационного фактора ε на группе G и любого линейного представления ψ группы G проективные представления φ_ε^ψ и $\varphi_{\varepsilon^*}^{\psi^{-1}}$ дуально эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим через V линейное пространство, на котором определено линейное представление ψ. Тогда проективное представление φ_ε^ψ определено на линейном пространстве $V \otimes_K V_\varepsilon$. Зафиксируем произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ в линейном пространстве V_ε, а также некоторый базис $u_1, \ldots, u_m$ в линейном пространстве V, такой что для некоторых характеров $\chi_1, \ldots, \chi_m \in G^*$ для всех $g \in G$ имеет место равенство

$$\psi(g) \cdot u_i = \chi_i(g) \cdot u_i.$$

Для любого оператора A линейного пространства V и любого оператора B линейного пространства V_ε обозначим через $A \otimes B$ оператор пространства $V \otimes V_\varepsilon$, такой что

$$(A \otimes B)(u \otimes v) = (Au) \otimes (Bv)$$

для всех $u \in V$, $v \in V_\varepsilon$. Тогда по определению

$$\varphi_\varepsilon^\psi(g) = \psi(g) \otimes \varphi_\varepsilon(g)$$

для всех $g \in G$. Заметим, что прямым вычислением мы можем получить следующую зависимость операций транспонирования в базисах e_i, u_j и $e_i \otimes u_j$ соответственно:

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*.$$

Поэтому мы получаем

$$(\varphi_\varepsilon^\psi(g)^*)^{-1} = (\psi(g)^*)^{-1} \otimes (\varphi_\varepsilon(g)^*)^{-1} = \psi^{-1}(g) \otimes \varphi_\varepsilon^*(g)$$

для всех $g \in G$. По лемме 5.5 существует оператор C линейного пространства V_ε, такой что

$$C^{-1}\varphi_\varepsilon^*(g)C = \varphi_{\varepsilon^*}(g)$$

для всех $g \in G$. Обозначая $C_0 = \mathbf{1} \otimes C$, мы видим, что

$$(\varphi_\varepsilon^\psi)^*(g) = (\varphi_\varepsilon^\psi(g)^*)^{-1} = \psi^{-1}(g) \otimes \varphi_\varepsilon^*(g) = \psi^{-1}(g) \otimes (C\varphi_{\varepsilon^*}(g)C^{-1}) =$$
$$= C_0 \cdot \big(\psi^{-1}(g) \otimes \varphi_{\varepsilon^*}(g)\big) \cdot C_0^{-1} = C_0 \varphi_{\varepsilon^*}^{\psi^{-1}}(g) C_0^{-1},$$

что и доказывает лемму. □

Суммируя всё сказанное в этом разделе, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть G — произвольная конечная абелева группа и L — специальная линейная алгебра Ли $\mathfrak{sl}_n(K)$ над алгебраически замкнутым полем K нулевой характеристики, $n \geqslant 2$. Каждой G-градуировке тривиального типа алгебры Ли L соответствует проективное представление φ_ε^ψ группы G^*, где ε — некоторый положительно определённый коммутационный фактор на группе G^* и ψ — некоторое линейное представление группы G^* в линейном пространстве* *размерности* $n/\sqrt{|G^*|/|G^*_\varepsilon|}$. *Каждому такому проективному представлению соответствует некоторая* G*-градуировка тривиального типа алгебры Ли* L. *Две градуировки тривиального типа алгебры Ли* L *эквивалентны в том и только том случае, если соответствующие им проективные представления* $\varphi^{\psi_1}_{\varepsilon_1}$ *и* $\varphi^{\psi_2}_{\varepsilon_2}$ *эквивалентны или дуально эквивалентны, т. е. если выполняется одно из следующих двух условий*:

1) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ *и существует характер* χ *группы* G^*, *такой что*
$$\psi_1(g) = \chi(g)\psi_2(g)$$
для всех $g \in G^*_\varepsilon$;
2) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^*$ *и существует характер* χ *группы* G^*, *такой что*
$$\psi_1(g) = \chi(g)\psi_2^{-1}(g)$$
для всех $g \in G^*_\varepsilon$.

Таким образом, для перечисления всех попарно неэквивалентных градуировок тривиального типа алгебры Ли L мы должны сделать следующее. Сначала мы должны перечислить все положительно определённые коммутационные факторы ε на группе G^*.

Коммутационные факторы на произвольной конечной абелевой группе H могут быть легко перечислены (см. [11]). Для этого достаточно произвольным образом выбрать образующие $g_1, \ldots, g_k$ группы H и задать коммутационный фактор ε на парах образующих произвольным набором ненулевых элементов поля
$$\{\alpha_{ij} = \varepsilon(g_i, g_j) \in K^* \mid i, j = 1, \ldots, k\},$$
удовлетворяющих соотношениям $\alpha_{ij} \cdot \alpha_{ji} = 1$ и $\alpha_{ij}^{d_{ij}} = 1$, $i, j = 1, \ldots, k$, где d_{ij} — это наибольший общий делитель порядков элементов g_i и g_j. Чтобы коммутационный фактор ε был положительно определённым, мы должны также наложить условие $\alpha_{ii} = 1$, $i = 1, \ldots, k$.

Для любого коммутационного фактора ε на группе G^* мы должны найти ядро G^*_ε этого коммутационного фактора и рассмотреть все линейные представления ψ этого ядра в линейном пространстве размерности $n/\sqrt{|G^*|/|G^*_\varepsilon|}$ (этого достаточно, так как любое линейное представление может быть продолжено с подгруппы на всю группу). Пары (ε_1, ψ_1) и (ε_2, ψ_2) соответствуют эквивалентным градуировкам, если существует характер χ группы G^*_ε, такой что или $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, $\psi_1 = \psi_2^\chi$, или $\varepsilon_1 = \varepsilon_2^*$, $\psi_1^{-1} = \psi_2^\chi$.

Литература

[1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Подалгебры Картана, регулярные элементы, расщепляемые полупростые алгебры Ли. — М.: Мир, 1978.

[2] Жмудь Э. М. Об изоморфных неприводимых проективных представлениях конечных групп // Записки мат. отд. физ.-мат. ф-та ХГУ и Харьк. мат. об-ва. — 1960. — Т. 26. — С. 333—372.

[3] Жмудь Э. М. Симплектические геометрии на конечных абелевых группах // Мат. сб. — 1971. — Т. 86 (128), № 1 (9). — С. 9—33.

[4] Жмудь Э. М. Симплектические геометрии и проективные представления конечных абелевых групп // Мат. сб. — 1972. — Т. 87 (129). — С. 3—17.

[5] Золотых А. А. Коммутационные факторы и многообразия ассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 2. — С. 453—468.

[6] Золотых А. А. Классификация проективных представлений конечных абелевых групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2002. — № 3. — С. 3—10.

[7] Кац В. Г. Автоморфизмы конечного порядка полупростых алгебр Ли // Функц. анализ и его прил. — 1969. — Т. 3, № 3. — С. 94—96.

[8] Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.

[9] Bahturin Y., Zaicev M. Gradings on simple Lie algebras of type «A» // J. Lie Theory. — 2006. — Vol. 16, no. 4. — P. 719—742.

[10] Havlїček M., Patera J., Pelantová E. On Lie gradings. II // Linear Algebra Appl. — 1998. — Vol. 277, no. 1-3. — P. 97—125.

[11] Scheunert M. Generalized Lie algebras // J. Math. Phys. — 1979. — Vol. 20. — P. 712—720.