

Свободные произведения групп с объединением: стратификация множеств нормальных форм и оценки

А. Г. МЯСНИКОВ

Технологический институт Стивенса, США
e-mail: amiasnikov@gmail.com

В. Н. РЕМЕСЛЕННИКОВ

Омский филиал Института математики СО РАН
e-mail: remesl@iitam.omsk.net.ru

Е. В. ФРЕНКЕЛЬ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: lizzy.frenkel@gmail.com

УДК 512.54.0+510.53

Ключевые слова: свободное произведение с объединением, атомарная мера, асимптотическая плотность, регулярные и сингулярные нормальные формы.

Аннотация

Пусть A, B, C — свободные группы конечного ранга, $G = A *_C B$ — свободное произведение групп с объединением. На множестве нормальных форм элементов G в статье введены атомарные меры и соответствующие им асимптотические плотности. Определены две страты для нормальных форм: первая страта регулярных (или стабильных) нормальных форм, вторая — сингулярных (или нестабильных) нормальных форм. В более ранних работах авторов для классических алгоритмических проблем было показано, что стандартные алгоритмы для свободных конструкций групп работают хорошо на элементах первой страты, но об их работе на второй страте может быть ничего не известно. В данной статье даются вероятностные и асимптотические оценки размеров этих страт.

Abstract

A. G. Myasnikov, V. N. Remeslennikov, E. V. Frenkel, Amalgamated products of groups: measures of random normal forms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 189—221.

Let $G = A *_C B$ be an amalgamated product of finite rank free groups A, B , and C . We introduce atomic measures and corresponding asymptotic densities on a set of normal forms of elements in G . We also define two strata of normal forms: the first one consists of regular (or stable) normal forms, and the second stratum is formed by singular (or unstable) normal forms. In a series of previous works about classical algorithmic problems, it was shown that standard algorithms work fast on elements of the first stratum and nothing is known about their work on the second stratum. In this paper, we give probabilistic and asymptotic estimates of these strata.

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 8, с. 189—221.

© 2010 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Введение

Пусть F — свободная группа с базой X , $X < \infty$. В [5, 9] авторами была развита техника, которая может быть использована при анализе сложности алгоритмических проблем для конечно определённых групп вида $G = F/N$. В практических вычислениях элементы группы G , как правило, записываются в виде свободных редуцированных слов от букв алфавита X (нормальных форм для G), и следовательно, все вычисления над элементами G фактически производятся в группе F . Для качественного анализа сложности конкретной алгоритмической проблемы в группе G необходимо наличие

- 1) хороших нормальных форм для элементов группы G ;
- 2) удобных генераторов случайных нормальных форм элементов G ;
- 3) атомарных и вероятностных мер на свободной группе F для измерения размеров элементов и подмножеств элементов в свободной группе F ;
- 4) результатов о стратификации входных данных (т. е. нормальных форм элементов) по крайней мере на две страты: страту регулярных (или стабильных) элементов, на которой алгоритм работает быстро, например за полиномиальное время, и вторую страту сингулярных (или нестабильных) элементов, где либо алгоритм работает медленно, либо результат работы алгоритма неизвестен;
- 5) развитых асимптотических и вероятностных методов оценки размеров регулярной и сингулярной страт алгоритма.

Опишем коротко, что было сделано в предыдущих работах авторов (и их соавторов), а также основные результаты данной статьи.

Мы работаем с группами, представимыми в виде свободных конструкций, чаще всего в виде $G = A *_C B$ — свободного произведения конечно определённых групп A и B , объединённого по конечно порождённой подгруппе C . Это гарантирует для группы G наличие хороших нормальных форм (т. е. выполнение условия 1)), если таковые есть для A и B . Для случая, когда A , B , C — свободные группы конечных рангов, в данной статье (см. раздел 3) построены генераторы порождения четырёх типов случайных нормальных форм и указаны формулы вероятности появления таких форм.

В [5] на свободной группе F построена серия атомарных вероятностных мер $\{\mu_s \mid 0 < s < 1, s \in \mathbb{R}^+\}$ с помощью невозвратного случайного блуждания по графу Кэли свободной группы $F = F(X)$. Это позволило, во-первых, дать асимптотическую классификацию подмножеств группы F , а во-вторых, доказать весьма важный результат для асимптотических оценок регулярных подмножеств группы F (т. е. множеств, распознаваемых с помощью конечных автоматов). Необходимые определения читатель сможет найти в [5] и разделе 4 данной статьи.

Теорема 1 [5, теорема 3.2]. Пусть R — регулярное подмножество свободной группы F . Тогда R является толстым тогда и только тогда, когда его префиксное замыкание в F содержит конус.

В [9] теорема 1 была доказана в сильной форме.

Теорема 2 [9, теорема 5.4]. Пусть R — регулярное подмножество префиксно-замкнутого регулярного множества L в свободной группе F конечного ранга. Тогда либо префиксное замыкание $\bar{R}$ множества R в L содержит большой L -конус, либо $\bar{R}$ экспоненциально λ_L -измеримо.

Эта теорема сыграла существенную роль при доказательстве основных результатов данной статьи — теорем А и Б.

Основные результаты по стратификации входных данных содержатся в [7, 9]. В [9] проведена стратификация и измерение систем шрайеровых представителей классов смежности по подгруппе в свободной группе. Основным результатом здесь является следующая теорема.

Теорема 3 [9, теорема 5.4]. Пусть C — конечно порождённая подгруппа бесконечного индекса в $F(X)$ и S — шрайерова трансверсаль для C . Тогда множества сингулярных представителей $S_{\sin}$ и нестабильных представителей S_{uns} являются экспоненциально пренебрежимыми относительно S .

Примером удобной стратификации входных данных для поисковой проблемы сопряжённости элементов группы служит следующий результат.

Теорема 4 [7, следствие 4.19]. Пусть $G = A *_C B$ — свободное произведение свободных групп конечного ранга A и B , амальгамированное по конечно порождённой подгруппе C . Тогда поисковая проблема сопряжённости в G разрешима для всех циклически редуцированных регулярных элементов группы G .

Здесь циклически редуцированные регулярные элементы составляют первую страту, а дополнение к ней — вторую.

Основные результаты данной статьи касаются пункта 5) программы исследований, описанной выше, и содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема А. Пусть A, B, C — свободные группы конечного ранга и $G = A *_C B$ — свободное произведение групп с объединением. Тогда для множеств нормальных форм $\mathcal{NF} = \{\mathcal{EF}, \mathcal{RF}, \mathcal{CNF}, \mathcal{CRF}\}$

- 1) если C имеет конечный индекс в A и B , то всякая нормальная форма сингулярна и нестабильна, т. е. $\mathcal{NF}_{\sin} = \mathcal{NF}_{\text{uns}} = \mathcal{NF}$;
- 2) если C имеет бесконечный индекс хотя бы в одной из групп A и B , то $\mathcal{NF}_r$ и $\mathcal{NF}_s$ экспоненциально μ -генерические относительно $\mathcal{NF}$, а $\mathcal{NF}_{\sin}$ и $\mathcal{NF}_{\text{uns}}$ экспоненциально μ -пренебрежимы относительно $\mathcal{NF}$ в следующих случаях:
 - 2а) μ определяется по псевдомерам μ_A и μ_B , которые являются функциями мощности на A и B соответственно, а ρ_μ — двумерная асимптотическая плотность;
 - 2б) μ определяется по атомарным вероятностным мерам $\mu_{A,l}$ и $\mu_{B,l}$ на A и B соответственно, а ρ_{μ_l} — двумерная асимптотическая плотность по Чезаро.

Теорема Б. Пусть A, B, C — свободные группы конечного ранга и $G = A *_C B$ — свободное произведение групп с объединением. Если C имеет бесконечный индекс хотя бы в одной из групп A и B , то множества всех нестабильных $\mathcal{NF}_{\text{uns}}$ и всех сингулярных $\mathcal{NF}_{\text{sin}}$ нормальных форм экспоненциально $\lambda_{\mathcal{NF}}$ -измеримы для $\mathcal{NF} = \{\mathcal{EF}, \mathcal{RF}, \mathcal{CNF}, \mathcal{CRF}\}$.

Основная специфика формулировок результатов этой статьи и их отличие от результатов других статей этой серии состоит в следующем. В данной работе группа $G = A *_C B$ есть свободное произведение двух свободных групп $A = F(X)$ и $B = F(Y)$ с объединением по C , причём на множителях A, B уже определены атомарные меры μ_A и μ_B и индуцируемые ими асимптотические плотности. Необходимо было, учитывая специфику алгоритмических проблем, правильно определить атомарную меру μ на $F = A * B$ и соответствующие ей двумерные асимптотические плотности подмножеств $A * B$. Это сделано в разделе 2 данной статьи.

При работе над данной статьей в области теории групп мы следовали книгам [2, 3], в области формальных языков книге [8], в теории случайных блужданий книгам [12, 14]. В статье существенно используется терминология статей [5, 7, 9].

1. Предварительные сведения

В этом разделе мы напомним некоторые определения и известные факты о свободных произведениях групп с объединённой подгруппой. За более подробной информацией мы отсылаем читателя к [3]. Пусть A, B, C — группы и отображения $\varphi: C \rightarrow A$ и $\psi: C \rightarrow B$ — мономорфизмы. Тогда группа $G = A *_C B$ называется свободным произведением групп A и B с объединённой подгруппой C (мономорфизмы φ, ψ обычно опускаются в этом обозначении). Если A и B заданы представлениями $A = \langle X \mid R_A = 1 \rangle$, $B = \langle Y \mid R_B = 1 \rangle$, а Z — множество порождающих подгруппы C , то группа G может быть задана следующим копредставлением:

$$G = \langle X \cup Y \mid R_A = 1, R_B = 1, \varphi(z) = \psi(z), z \in Z \rangle. \quad (1)$$

Если обозначить $\varphi(z) = u_z(x)$, $\psi(z) = v_z(y)$, то можно записать копредставление G также как

$$G = \langle X \cup Y \mid R_A = 1, R_B = 1, u_z(x) = v_z(y) (z \in Z) \rangle.$$

Группы A и B называются множителями группы $G = A *_C B$, они изоморфны подгруппам G , порождённым X и Y соответственно. Поэтому мы вправе отождествлять A и B с этими подгруппами относительно очевидных отображений.

Обозначим через S и T некоторые фиксированные системы представителей правых классов смежности подгруппы C по A и B соответственно. Будем также предполагать, что представителем самой подгруппы C является 1. Для всякого

элемента $g \in (A \cup B) \setminus C$ положим $F(g) = A$, если $g \in A$, и $F(g) = B$, если $g \in B$.

Существует четыре основных метода представления элементов группы G :

- 1) свободно-редуцированным словом в алфавите $X \cup X^{-1} \cup Y \cup Y^{-1}$. Согласно копредставлению (1) группы G каждый нетривиальный элемент $g \in G$ может быть записан в форме

$$g = g_1 g_2 \dots g_n, \quad (2)$$

где $g_1, \dots, g_n$ — редуцированные слова в алфавите $X \cup X^{-1}$ или $Y \cup Y^{-1}$, и если $F(g_i) = A$, то $F(g_{i+1}) = B$, и наоборот. Легко убедиться, что форма (2) элемента g может не быть единственной; более того, число n множителей, соответствующих различным представлениям g в форме (2), может произвольным образом варьироваться;

- 2) в единственной (см. [3]) канонической нормальной форме

$$g = c p_1 p_2 \dots p_l, \quad (3)$$

где $c \in C$, $p_i \in (S \cup T) \setminus \{1\}$ и $F(p_i) \neq F(p_{i+1})$, $i = 1, \dots, l$, $l \geq 0$. Если проблема нахождения представителей классов смежности (см., например, [7] об алгоритмических проблемах в группах) разрешима для C в A и B , то форма (3) может быть эффективно построена из формы (2);

- 3) в редуцированной форме

$$g = c g_1 g_2 \dots g_k, \quad (4)$$

где $c \in C$, $g_i \in (A \cup B) \setminus C$ и $F(g_i) \neq F(g_{i+1})$, $i = 1, \dots, k$, если $k \geq 0$. Эта форма может не быть единственной, но число k однозначно определяется по элементу g . В некоторых случаях нам по техническим причинам будет удобнее использовать немного изменённое определение редуцированной формы. Именно, будем также считать, что элемент $g \in G$ записан в редуцированной форме, если

$$g = g_1 g_2 \dots g_k, \quad (5)$$

где $g_i \in (A \cup B) \setminus C$ и $F(g_i) \neq F(g_{i+1})$, $i = 1, \dots, k$, если $k \geq 1$, и $g = c$, если $k = 0$. Нетрудно убедиться, что эти определения эквивалентны. Более того, если проблема вхождения для C в A и B разрешима, то форма элемента (5) может быть эффективно построена из его формы (2);

- 4) в циклически редуцированной форме

$$g = c g_1 \dots g_k. \quad (6)$$

Всякий элемент в редуцированной форме (4) сопряжён элементу в этой форме. Форма (6) элемента g называется *циклически редуцированной формой*, если

- а) $k = 0$, т. е. $g = c \in C$;
- б) $k = 1$ и элемент $g \in A \cup B$ не сопряжён элементу из C ;
- в) $k > 1$ и длина k элемента g чётная.

Мы будем говорить в дальнейшем, что элемент $g \in G$ записан в нормальной форме, если он имеет вид (2), (3), (5) или (6). Хотя количества n, k, l множителей в представлении элемента в нормальных формах, вообще говоря, различны, мы будем обозначать любое из этих чисел через $s(g)$ и называть (слоговой) длиной g , если не возникает двусмысленности.

1.1. Измерение и сравнение подмножеств свободной группы

В этом разделе мы приводим основные сведения, касающиеся мер и псевдомер на свободных группах конечного ранга $F(X)$; читатель может получить более подробные сведения об этих понятиях, например, в работах [5, 9].

Пусть $\mathcal{P}(F)$ — это множество всех подмножеств $F = F(X)$ и $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(F)$. Вещественнозначная неотрицательная аддитивная функция $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ называется *псевдомерой на F* . Если $\mathcal{A}$ является подалгеброй $\mathcal{P}(F)$, то μ называется *мерой*.

Итак, пусть $F = F(X)$ — свободная группа. Обозначим через S_n и B_n соответственно сферу и шар радиуса n в F . Пусть μ — атомарная псевдомера на F . Напомним, что мера μ на счётном множестве P называется *атомарной*, если каждое подмножество $Q \subseteq P$ измеримо; при этом также выполняется равенство $\mu(Q) = \sum_{q \in Q} \mu(q)$.

Для множества $R \subseteq F$ определим его *сферическую асимптотическую плотность* относительно меры μ как предел

$$s\rho_\mu(R) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} s\rho_n(R),$$

где $s\rho_n(R) = \mu(R \cap S_n) / \mu(S_n)$. Аналогично определяется *шаровая асимптотическая плотность* множества R относительно μ :

$$b\rho_\mu(R) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b\rho_n(R),$$

где $b\rho_n(R) = \mu(R \cap B_n) / \mu(B_n)$.

Сформулируем факт, касающийся связи этих двух плотностей; его доказательство можно найти во многих местах, например в [10, лемма 3.2].

Лемма 1.1. Пусть μ — некоторая псевдомера на F . Предположим, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \infty$. Тогда для любого подмножества $R \subseteq F$ существование сферической асимптотической плотности $s\rho_\mu(R)$ влечёт существование шаровой асимптотической плотности $b\rho_\mu(R)$ и, более того, $b\rho_\mu(R) = s\rho_\mu(R)$.

Пусть μ — псевдомера на F и $\rho_\mu(R)$ — сферическая асимптотическая плотность. Множество $R \subseteq F$ называется *генерическим* относительно меры μ , если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} s\rho_n(R)$ существует и $\rho_\mu(R) = 1$, и *пренебрежимым* относительно меры μ , если $\rho_\mu(R) = 0$.

Будем говорить, что R является *экспоненциально генерическим* относительно μ , если существует положительное число $\delta < 1$, такое что $1 - \delta^n < s\rho_n(R) < 1$

для достаточно больших n . Если же $s\rho_n(R) < \delta^n$ для всех достаточно больших n , то R называется *экспоненциально пренебрежимым* относительно меры μ .

Например, если $\mu(A) = |A|$, то мы получаем стандартную асимптотическую плотность подмножеств F . Ниже мы будем обозначать стандартную асимптотическую плотность просто через $\rho(R)$. Понятия плотности множества в группе F , приведённые выше, несложно доопределить до понятий асимптотической плотности множества R относительно другого подмножества $R_1 \subseteq F$ (см. [9], а также раздел 4.4). Мы будем использовать обозначение $\rho_\mu(R, R_1)$ для соответствующей асимптотической плотности.

Далее нам будут интересны специальные виды мер на F и, соответственно, определяемых по ним асимптотических плотностей, которые были детально описаны в нескольких работах (см., например, [1, 5, 9]). Именно, рассмотрим так называемую *частотную* меру на $R \subseteq F = F(X)$, где

$$\lambda(R) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(R),$$

где $f_n(R) = |R \cap S_n|/|S_n|$ — частоты элементов из R среди всех (свободно-редуцированных) слов длины n в F . Эта мера не является вероятностной, потому что, например, $\lambda(F) = \infty$. Более того, λ является аддитивной, но не σ -аддитивной.

Относительные частоты множества R определяют также *асимптотическую плотность по Чезаро*. Это предел по Чезаро частот для R :

$$\rho^c(R) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (f_1(R) + \dots + f_n(R)). \quad (7)$$

В некоторых случаях эта асимптотическая плотность оказывается более чувствительной, чем стандартная плотность ρ (см., например, [5, 14]). Однако если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(R)$ существует (и, следовательно, равен $\rho(R)$), то $\rho^c(R)$ также существует и $\rho^c(R) = \rho(R)$.

1.2. Стратификация и измерение

шрайеровых систем представителей в свободной группе

В этом разделе мы напомним понятие шрайеровой системы представителей (см., например, [9]) в свободных группах, а также даём определения стабильной и регулярной нормальных форм элементов в свободном произведении групп с объединённой подгруппой.

Следуя [11], мы свяжем с подгруппой C два графа: *подгрупповой граф* $\Gamma = \Gamma_C$ и шрайеров граф $\Gamma^* = \Gamma_C^*$. Напомним, что Γ представляет собой конечный связный диграф с рёбрами, помеченными элементами из алфавита X , и выделенной (корневой) вершиной 1_C , который удовлетворяет следующим двум

условиям. Во-первых, Γ является f -диграфом, т. е. в нём нет двух рёбер с одинаковыми метками, имеющих одну и ту же начальную или финальную вершину. Во-вторых, Γ допускает в точности те редуцированные слова в алфавите $X \cup X^{-1}$, которые принадлежат C .

Шрайеров граф $\Gamma^* = \Gamma_C^*$ группы C — это связный размеченный диграф со множеством $\{Cu \mid u \in F\}$ правых смежных классов группы F по C в качестве множества вершин, такой что вершина Cu соединена ребром с меткой $x \in X$ с вершиной Cv тогда и только тогда, когда $Cux = Cv$. Этот граф можно также построить из Γ при помощи следующей процедуры. Пусть $v \in \Gamma$ и $x \in X$ такие, что из вершины v не исходит ребро с меткой x и в вершину v не входит ребро, помеченное x . Ко всякой такой вершине v и $x \in X$ мы присоединяем новое ребро e (соответственно исходящее или входящее) с меткой x и новой финальной вершиной u (не лежащей в Γ). Затем мы присоединяем к u граф Кэли $C(F, X)$ группы F относительно порождающих X (отождествляя u с корневой вершиной графа $C(F, X)$), а затем производим так называемые процедуры фолдингов, т. е. склеивания ребра e с соответствующим ему ребром в $C(F, X)$, которое помечено x и входит в u (либо выходит из u). Заметим, что для всякой вершины $v \in \Gamma^*$ и любого редуцированного слова w в алфавите $X \cup X^{-1}$ существует единственный путь в Γ^* , начинающийся в v и имеющий метку w . Через p_w мы будем обозначать путь, который начинается в корневой вершине 1_C , и через v_w — финальную вершину p_w .

Рассмотрим теперь множество представителей правых смежности $F = F(X)$ по C ; мы будем также называть его *трансверсалью* для C . Напомним, что трансверсаль S группы C называется *шрайеровой*, если всякий начальный сегмент представителя из S снова лежит в S . В [9] было показано, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством всех шрайеровых трансверсальных S для C и множеством всех остовных поддеревьев графа Γ^* . В частности, это означает, что мы можем отождествлять всякого представителя $s \in S$ с меткой некоторого пути в (фиксированном) остовном поддереве графа Γ^* .

В [9] была произведена классификация представителей классов смежности $F = F(X)$ по C .

Определение 1.2. Пусть S — трансверсаль для C .

Представитель $s \in S$ называется *внутренним*, если путь p_s заканчивается в Γ , т. е. $v_s \in V(\Gamma)$. Через S_{int} мы будем обозначать множество всех внутренних представителей в S . Элементы из $S_{\text{ext}} = S \setminus S_{\text{int}}$ называются *внешними* представителями в S .

Представитель $s \in S$ называется *сингулярным*, если он принадлежит обобщённому нормализатору C :

$$N_F^*(C) = \{f \in F \mid f^{-1}Cf \cap C \neq \{1\}\}.$$

Все прочие представители называются *регулярными*. Через S_{sin} и S_{reg} обозначим соответственно множества всех сингулярных и регулярных представителей из S .

Представитель $s \in S$ называется *стабильным*, если $sc \in S$ для любого $c \in C$. Через S_{st} мы обозначим множество всех стабильных представителей из S и через $S_{\text{uns}} = S \setminus S_{\text{st}}$ — множество всех нестабильных представителей в S .

Будем называть вершину v_u *границной* для $V(\Gamma)$, если $v_u \in V(\Gamma^*) \setminus V(\Gamma)$ и эта вершина инцидентна ребру e в Γ^* , другая вершина которого принадлежит $V(\Gamma)$. *Конусом* $C(u)$ называется подмножество свободной группы вида

$$\{w \in F: w = uf \text{ и } uf \text{ — редуцированное слово}\}.$$

Со следующим утверждением о структуре всех сингулярных и нестабильных представителей читатель может более подробно ознакомиться в [9].

Утверждение 1.3 [9, утверждение 3.5]. Пусть S — шрайерова трансверсаль для C , C имеет бесконечный индекс в F и $S = S_{T^*}$ для некоторого остовного поддерева T^* графа Γ^* . Тогда

- 1) $|S_{\text{int}}| = |V(\Gamma)|$;
- 2) S_{ext} является объединением конечного числа конусов $C(u)$, где v_u — граничные вершины Γ ;
- 3) S_{sin} содержится в конечном объединении двойных классов смежности $Cs_1s_2^{-1}C$ для C , где $s_1, s_2 \in S_{\text{int}}$;
- 4) S_{uns} является конечным объединением левых смежных классов по C вида $s_1s_2^{-1}C$, где $s_1, s_2 \in S_{\text{int}}$;
- 5) $S_{\text{sin}} \subseteq S_{\text{uns}}$ (см. [9, утверждение 3.9]).

В [9] было показано, что множество всех сингулярных и нестабильных представителей является экспоненциально пренебрежимым относительно шрайеровой трансверсали.

Следствие 1.4 [9, следствие 5.12]. Пусть C — конечно порождённая подгруппа бесконечного индекса в $F(X)$ и S — шрайерова трансверсаль для C . Тогда множества сингулярных представителей S_{sin} и нестабильных представителей S_{uns} являются экспоненциально пренебрежимыми относительно S .

Следуя идеям введения о разбиении множества нормальных форм элементов группы $G = A *_C B$ на «хорошую» и «плохую» компоненты, мы вводим следующие определения.

Элемент g свободной группы $F(X)$ мы называем регулярным (стабильным и т. д.), если он может быть представлен в форме $g = cs$, $c \in C$, $s \in S$, и элемент s регулярен, стабилен и т. д.

Определение 1.5. Элемент $g \in G$ в нормальной форме (2), (3), (5) или (6) называется *регулярным*, если по крайней мере один из элементов g_i и p_i , $i = 1, \dots, s(g)$, регулярен. В противном случае g называется *сингулярным*.

Определение 1.6. Элемент $g \in G$ в нормальной форме (2), (3), (5) или (6) называется *стабильным*, если по крайней мере один из элементов g_i и p_i , $i = 1, \dots, s(g)$, стабилен, и *нестабильным* в противном случае.

В основных теоремах А и Б раздела 4 оцениваются размеры подмножеств стабильных и регулярных форм во множестве всех нормальных форм, поэтому данные понятия являются наиболее важными в данной работе.

2. Асимптотические плотности свободных произведений подмножеств

В этом разделе нашей целью является определение асимптотических плотностей подмножеств свободного произведения с объединённой подгруппой $G = A *_C B$. Чтобы определить асимптотические плотности подмножеств G , требуется, в свою очередь, построить меры на свободных произведениях подмножеств свободных групп, к чему непосредственно мы и приступаем.

2.1. Свободные произведения подмножеств

Пусть $F = A * B$ — свободное произведение конечно порождённых групп A и B , A_0 — непустое подмножество в A , B_0 — непустое подмножество в B . Тогда *свободное произведение* $A_0 * B_0$ — это множество всех элементов в F , имеющих форму $f = f_1 f_2 \dots f_k$, где $k \geq 1$, $f_i \in A_0 \cup B_0$, $i = 1, \dots, k$, $f_i \neq 1$, если $i \geq 2$, и для всех $i = 1, \dots, k-1$ выполняется $F(f_i) \neq F(f_{i+1})$. Каждый нетривиальный элемент $f \in F$ может быть представлен в свободно-редуцированной форме

$$f = f_1 f_2 \dots f_k, \quad (8)$$

где $f_1, \dots, f_k$ — редуцированные слова в $X \cup X^{-1}$ или в $Y \cup Y^{-1}$ и если $F(f_i) = A$, то $F(f_{i+1}) = B$, и наоборот. Для каждого такого нетривиального $f \in F$ положим $s(f) = k$; пусть также $s(1) = 0$. Мы будем обозначать через $|f|$, $|f_i|$ число различных букв в алфавите $X \cup X^{-1}$ или $X \cup X^{-1} \cup Y \cup Y^{-1}$ в свободно-редуцированной форме слов f , f_i .

Пусть μ_A и μ_B — атомарные псевдомеры на A и B соответственно и $\mu_A(1) = \mu_B(1)$. Зафиксируем также вероятностное распределение $\theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ (в частности, $\sum_{k=1}^{\infty} \theta(k) = 1$). Определим атомарную меру μ на F следующим образом:

$$\mu(f) = \frac{1}{2} \theta(k) \mu_{F_1}(f_1) \dots \mu_{F_k}(f_k), \quad (9)$$

где f записан в свободно-редуцированной форме (8).

Для подмножеств $R \subseteq F$ положим

$$\mu(R) = \sum_{f \in R} \mu(f).$$

Будем говорить, что R является μ -измеримым множеством, если $\mu(R) < \infty$. Обозначим через M_μ множество всех μ -измеримых подмножеств в F :

$$M_\mu = \{R \subseteq F \mid \mu(R) < \infty\}.$$

Лемма 2.1. Пусть $F = A * B$ — свободное произведение конечно порождённых групп A и B .

1. Если μ_A, μ_B — атомарные псевдомеры на A и B соответственно, то мера μ на F , определённая выше, является атомарной псевдомерой на F и $M_{\mu_A} \subset M_\mu, M_{\mu_B} \subset M_\mu$.
2. Если μ_A, μ_B — атомарные вероятностные меры на A и B соответственно, то μ — атомарная вероятностная мера на F .

Доказательство. Утверждение 1 проверяется непосредственно. Мы докажем утверждение 2.

Разобьём группу F на слои: $F = F_1 \sqcup F_2 \sqcup F_3 \dots$, где

$$F_i = \{f \in F \mid f \text{ имеет свободно-редуцированную форму вида (8) и } s(f) = i\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(F_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2} \theta(i) (\mu_A^{[(i+1)/2]}(A) \mu_B^{i-[(i+1)/2]}(B) + \mu_A^{i-[(i+1)/2]}(A) \mu_B^{[(i+1)/2]}(B)) = \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \theta(i) = 1. \end{aligned} \quad \square$$

Пример. Предположим, что μ_A, μ_B — псевдомеры на A и B , определяемые функциями мощности на A и B , и $\theta(k) = 6/(\pi^2 k^2)$ — вероятностное распределение на $\mathbb{N}$. Тогда $M_{\mu_A} = \mathcal{F}(A)$ и $M_{\mu_B} = \mathcal{F}(B)$, где $\mathcal{F}(A)$ и $\mathcal{F}(B)$ — множества всех конечных подмножеств A и B . Однако $M_\mu \supset \mathcal{F}(F)$ является строгим включением. В самом деле, пусть $R \subseteq F$ и $R_k = R \cap F_k$. Тогда $R \in M_\mu$ тогда и только тогда, когда ряд $\sum |R_k|/k^2$ сходится.

В следующих разделах мы опишем несколько методов определения асимптотической плотности подмножеств группы $F = A * B$.

2.2. Двумерная асимптотическая плотность

Пусть $T = A_0 * B_0 \subseteq F = A * B$. Для пары натуральных чисел (n, k) определим (n, k) -шар:

$$T_{n,k} = \{f = f_1 \dots f_k \in T : s(f) = k, |f_i| \leq n, i = 1, \dots, k\}.$$

Назовём $T = \bigcup_{k=0, n=0}^{\infty} T_{n,k}$ *двумерным разложением* множества T . Двумерное разложение множества T помогает проанализировать асимптотическое поведение его подмножеств и других подмножеств группы F относительно T . Для множества $Q = A_1 * B_1$ в F функцию

$$(n, k) \rightarrow \mu(Q \cap T_{n,k})$$

назовём функцией роста Q в T и функцию

$$(n, k) \rightarrow \rho_\mu^{n,k}(Q, T) = \frac{\mu(Q \cap T_{n,k})}{\mu(T_{n,k})} -$$

частотной функцией Q относительно T . Под *функцией направления* $d(n, k)$ мы понимаем взаимно-однозначный путь между n и k из $(1, 1)$ в (∞, ∞) , такой что при $d(n, k) \rightarrow \infty$ аргументы n и k также стремятся к бесконечности. Пусть теперь $d(n, k)$ — некоторая функция направления. Асимптотическое поведение Q относительно T мы будем характеризовать *двумерной асимптотической плотностью*, которую определим как следующий предел:

$$\rho_\mu(Q, T) = \overline{\lim}_{d(n,k) \rightarrow \infty} \rho_\mu^{n,k}(Q, T).$$

Если указанный предел существует и не зависит от выбора направления, обозначим его через $\rho_\mu^e(Q, T)$. Будем говорить, что множество Q является μ -генерическим относительно T , если $\rho_\mu^e(R) = 1$, и μ -пренебрежимым относительно T , если $\rho_\mu^e(R) = 0$.

Назовём множество Q экспоненциально μ_n -генерическим относительно T , если Q является μ -генерическим и существует положительная константа $\delta < 1$, такая что $1 - \delta^{nk} < \rho_\mu^{n,k}(Q, T) < 1$ для всех достаточно больших n и k . Наоборот, если Q является μ -пренебрежимым и $\rho_\mu^{n,k}(Q, T) < \delta^{nk}$ для всех достаточно больших n, k , назовём Q экспоненциально μ_n -пренебрежимым относительно T .

Ниже мы будем использовать также другие понятия экспоненциально генерического и пренебрежимого множества относительно меры μ . Они позволят нам получить в разделе 4 хотя и более грубые, но в то же время и более общие оценки подмножеств нормальных форм. Именно, множество Q назовём экспоненциально μ -генерическим относительно T , если Q является μ -генерическим и существует положительная константа $\delta < 1$, такая что $1 - \delta^k < \rho_\mu^{n,k}(Q, T) < 1$ для всех достаточно больших k . Если Q является μ -пренебрежимым и $\rho_\mu^{n,k}(Q, T) < \delta^k$ для достаточно больших k , то Q называется экспоненциально μ -пренебрежимым относительно T .

Обозначим

$$\begin{aligned} (T)_n &= \{f = f_1 \dots f_k \in T \mid |f_i| = n, i = 1, \dots, k\}, \\ (T)_{\leq n} &= \{f = f_1 \dots f_k \in T \mid |f_i| \leq n, i = 1, \dots, k\}, \\ (T)^k &= \{f \in T \mid s(f) = k\}. \end{aligned}$$

Мы будем использовать те же самые обозначения для групп A и B в тех случаях, когда не возникает двусмысленности, т. е. $(A_i)_n = (A)_n \cap A_i$ (или $(B_i)_n = (B)_n \cap B_i$) для сферы радиуса n в подмножествах A (или B) и $(A_i)_{\leq n} = (A)_{\leq n} \cap A_i$ (или $(B_i)_{\leq n} = (B)_{\leq n} \cap B_i$) для шара радиуса n в соответствующих подмножествах.

Утверждение 2.2. Пусть $F = A * B$ — свободное произведение свободных групп A и B конечных рангов, $A_1 \subseteq A_0 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B_0 \subseteq B$, и пусть $T = A_0 * B_0$ и $Q = A_1 * B_1$.

1. Предположим, что μ_A и μ_B — атомарные вероятностные меры на A и B соответственно и μ — псевдомера на F , определённая выше. Пусть $\rho_{\mu_A}(A_1, A_0)$ и $\rho_{\mu_B}(B_1, B_0)$ существуют. Если найдётся такая константа δ , $0 < \delta < 1$, что для всех $n > n_0$ либо

$$\frac{\mu_A((A_1)_{\leq n})}{\mu_A((A_0)_{\leq n})} < \delta^n,$$

либо

$$\frac{\mu_B((B_1)_{\leq n})}{\mu_B((B_0)_{\leq n})} < \delta^n,$$

то Q является экспоненциально μ_n -пренебрежимым относительно T множеством.

2. Предположим, что μ_A и μ_B — атомарные вероятностные меры на A и B соответственно и μ — псевдомера на F , определённая выше. Пусть $\rho_{\mu_A}(A_1, A_0)$ и $\rho_{\mu_B}(B_1, B_0)$ существуют и по крайней мере одно из этих чисел строго меньше 1. Тогда Q является экспоненциально μ -пренебрежимым относительно T множеством.
3. Предположим, что μ_A и μ_B — псевдомеры на A и B , определяемые функциями мощности, и μ — псевдомера на F , определённая выше. Пусть $\rho(A_1, A_0)$ и $\rho(B_1, B_0)$ существуют и по крайней мере одно из этих чисел строго меньше 1. Тогда Q является экспоненциально μ -пренебрежимым относительно T множеством.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения предположим для определённости, что

$$\frac{\mu_A((A_1)_{\leq n})}{\mu_A((A_0)_{\leq n})} < \delta^n.$$

Тогда по определению для всех $n \geq n_0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mu(Q \cap T_{n,k})}{\mu(T_{n,k})} &= \\ &= \begin{cases} \frac{(\mu_A((A_1)_{\leq n}))^t (\mu_B((B_1)_{\leq n}))^t}{(\mu_A((A_0)_{\leq n}))^t (\mu_B((B_0)_{\leq n}))^t}, & \text{если } k=2t, \\ \frac{(\mu_A((A_1)_{\leq n}))^t (\mu_B^t((B_1)_{\leq n}))^t (\mu_A((A_1)_{\leq n}) + \mu_B((B_1)_{\leq n}))}{(\mu_A((A_0)_{\leq n}))^t (\mu_B((B_0)_{\leq n}))^t (\mu_A((A_0)_{\leq n}) + \mu_B((B_0)_{\leq n}))}, & \text{если } k=2t+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку $\rho_{\mu_B}(B_1, B_0)$ существует, найдётся натуральное число n_1 , такое что

$$\frac{\mu(Q \cap T_{n,k})}{\mu(T_{n,k})} \leq \delta^{nt} < \delta^{n(t-1)} < \delta^{n(k/2-2)}$$

для всех $n \geq n_1$. Следовательно, предел

$$\lim_{d(n,k) \rightarrow \infty} \frac{\mu(Q \cap T_{n,k})}{\mu(T_{n,k})}$$

существует и не зависит от $d(n, k)$. Он равен нулю, и, более того, Q является экспоненциально μ_n -пренебрежимым множеством относительно T при $\delta' = \delta^{1/2}$.

Для доказательства утверждения 2 предположим, что $\rho_{\mu_A}(A_1, A_0) < 1$. Легко заметить, что, так как существует предел

$$\rho_{\mu_A}(A_1, A_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_A((A_1)_n)}{\mu_A((A_0)_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_A((A_1)_{\leq n})}{\mu_A((A_0)_{\leq n})},$$

имеет место и неравенство

$$\frac{\mu_A((A_1)_{\leq n})}{\mu_A((A_0)_{\leq n})} < 1 - \varepsilon$$

для подходящего $0 < \varepsilon < 1$.

Снова применяя (10), получаем

$$\frac{\mu(Q \cap T_{n,k})}{\mu(T_{n,k})} \leq (1 - \varepsilon)^t < (1 - \varepsilon)^{t-1} < (1 - \varepsilon)^{k/2-2},$$

и значит, Q является μ -пренебрежимым относительно T для произвольного выбора функции направления d . Также ясно, что Q является экспоненциально μ -пренебрежимым относительно T при $\delta = (1 - \varepsilon)^{1/2}$.

Доказательство последнего утверждения аналогично доказательству 2. $\square$

2.3. Двумерная асимптотическая плотность по Чезаро

Пусть $\{\mu_s, 0 < s < 1\}$ — семейство вероятностных распределений, введённое в [5] для свободной группы $F(X)$ конечного ранга. В терминах относительных частот множества $R \subseteq F$ имеем

$$\mu_s(R) = s \sum_{k=0}^{\infty} f_k(1 - s)^k.$$

В [5] также было показано, что средняя (свободно-редуцированная) длина слов в $F(X)$, распределённых согласно μ_s , равна $l = 1/s - 1$. Очевидно, $l \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0^+$. Следовательно, семейство $\{\mu_s\}$ может быть параметризовано также числом l : $\{\mu_l \mid 1 < l < \infty\}$.

Пусть $\mu_A = \{\mu_{A,l}\}$ и $\mu_B = \{\mu_{B,l}\}$, $1 < l < \infty$, — атомарные вероятностные меры на группе A и B соответственно. Для проведения асимптотических оценок достаточно предполагать, что параметр l пробегает только натуральные значения. Итак, далее l — натуральное число больше 1. Пусть μ_l — атомарная вероятностная мера на F , индуцированная $\mu_{A,l}$ и $\mu_{B,l}$, и пусть

$$Q = A_1 * B_1 \subseteq T = A_0 * B_0 \subseteq F = A * B.$$

Для некоторой функции направления $d(l, k)$ введём функцию $(l, k) \rightarrow \rho_{\mu_l}^{l,k}(Q, T)$ относительных частот.

Определение 2.3. Пусть $Q \subseteq T \subseteq F$. Функцию

$$(l, k) \rightarrow \frac{\mu_l((F)^k \cap Q)}{\mu_l((F)^k \cap T)} = \rho_{\mu_l}^{l,k}(Q, T)$$

назовём частотной функцией Q относительно T . Предел (если таковой существует и не зависит от выбора $d(l, k)$)

$$\rho^C(Q, T) = \lim_{d(l,k) \rightarrow \infty} \rho_{\mu_l}^{l,k}(Q, T)$$

называется *двумерной асимптотической плотностью по Чезаро* множества Q относительно T .

Если s не мало (например, $s \geq 1/2$), то никакое множество, содержащее 1 или очень короткие элементы, не является пренебрежимым, так как $\mu_s(1) = s$. Мы избегаем этого недостатка, так как в нашем случае l — натуральное число, большее 1.

Множество Q назовём *C-пренебрежимым* относительно T , если $\rho^C(Q, T) = 0$. Множество Q является *экспоненциально C-пренебрежимым* относительно T , если $\rho_{\mu_l}^{l,k}(Q, T) < \delta^k$ для некоторой константы $0 < \delta < 1$ и всех достаточно больших k . Дополнения к этим множествам называются *C-генерическим* и *экспоненциально C-генерическим* соответственно.

Ниже мы приводим некоторые достаточные условия экспоненциальной пренебрежимости свободных произведений множеств по отношению к плотности по Чезаро. Эти условия мы будем использовать в разделе 4 для оценки относительных размеров множеств нормальных форм.

Утверждение 2.4. Пусть $F = A * B$ — свободное произведение свободных групп A и B конечных рангов, $\mu_A = \{\mu_{A,l}\}$ и $\mu_B = \{\mu_{B,l}\}$, $1 < l < \infty$, — семейства атомарных вероятностных мер на A и B соответственно и $\{\mu_l\}$ — индуцированное семейство мер на F . Предположим, что $A_1 \subseteq A_0 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B_0 \subseteq B$ и $\rho_{\mu_{A,l}}(A_1, A_0)$ и $\rho_{\mu_{B,l}}(B_1, B_0)$ существуют. Если найдётся число $0 < q < 1$, такое что

$$\frac{\mu_{A,l}(A_1)}{\mu_{A,l}(A_0)} < q$$

или

$$\frac{\mu_{B,l}(B_1)}{\mu_{B,l}(B_0)} < q$$

при всех $l > l_0$ для некоторого l_0 , то множество $Q = A_1 * B_1$ является экспоненциально *C-пренебрежимым* относительно $T = A_0 * B_0$.

Доказательство. Зафиксируем пару натуральных чисел (l, k) , где $l > l_0$. Предположим для определённости, что

$$\frac{\mu_{A,l}(A_1)}{\mu_{A,l}(A_0)} < q.$$

Разбивая множество T на слои как в лемме 2.1, получаем

$$\rho_{\mu_l}^{l,k}(Q, T) = \begin{cases} \frac{(\mu_{A,l}(A_1))^t (\mu_{B,l}(B_1))^t}{(\mu_{A,l}(A_0))^t (\mu_{B,l}(B_0))^t}, & \text{если } k = 2t, \\ \frac{(\mu_{A,l}(A_1))^t (\mu_{B,l}(B_1))^t (\mu_{A,l}(A_1) + \mu_{B,l}(B_1))}{(\mu_{A,l}(A_0))^t (\mu_{B,l}(B_0))^t (\mu_{A,l}(A_0) + \mu_{B,l}(B_0))}, & \text{если } k = 2t + 1. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\rho_{\mu_l}^{k,l}(Q, T) \leq \left(\frac{\mu_{A,l}(A_1)}{\mu_{A,l}(A_0)} \right)^t \leq q^t$$

и, поскольку предел не зависит от выбора функции направления, $A_1 * B_1$ экспоненциально (при $\delta = q^{1/2}$) C -пренебрежимо относительно $A_0 * B_0$. $\square$

Следующая лемма связывает два типа мер в свободной группе.

Лемма 2.5. Пусть A_1 — экспоненциально пренебрежимое множество относительно подмножества A_0 конечно порождённой свободной группы $A = F(X)$. Тогда для всякого $l_0 > 1$ найдётся действительное число $0 < q < 1$, такое что для всех $l > l_0$ выполнено

$$\frac{\mu_{A,l}(A_1)}{\mu_{A,l}(A_0)} < q.$$

Доказательство. Поскольку A_1 экспоненциально пренебрежимо относительно A_0 , то существуют такие натуральное число n_0 и вещественное число $0 < p < 1$, что

$$f_n(A_1, A_0) = \frac{|(A_1)_n|}{|(A_0)_n|} < p^n$$

для всех $n \geq n_0$. В частности, $|(A_1)_n| < p^{n_0} |(A_0)_n|$ для всех $n \geq n_0$. Достаточно показать, что для всякого фиксированного $s < s_0$ число $(\mu_{A,s}(A_1)) / (\mu_{A,s}(A_0))$ ограничено сверху некоторым положительным $q < 1$.

По определению имеем

$$\frac{\mu_{A,s}((A_1)_{\leq n})}{\mu_{A,s}((A_0)_{\leq n})} = \frac{s \sum_{k=0}^n |(A_1)_k| (1-s)^k}{s \sum_{k=0}^n |(A_0)_k| (1-s)^k} < \frac{\sum_{k=0}^n p^{n_0} |(A_0)_k| (1-s)^k}{\sum_{k=0}^n |(A_0)_k| (1-s)^k} < p^{n_0} \quad (11)$$

для всех $n \geq n_0$, $s > s_0$. Без ограничения общности можно полагать, что $n_0 > 1$, так как в противном случае нам ничто не мешает добавить в A_1 или исключить из него произвольный элемент длины 1. Переходя к пределу в неравенстве

$$\frac{\mu_{A,s}((A_1)_{\leq n})}{\mu_{A,s}((A_0)_{\leq n})} < p^{n_0},$$

получаем

$$\frac{\mu_{A,s}(A_1)}{\mu_{A,s}(A_0)} \leq p^{n_0},$$

и следовательно, $(\mu_{A,s}(A_1))/(\mu_{A,s}(A_0))$ строго ограничено сверху положительной константой $q = p^{n_0-1}$ для всякого $s < s_0$. $\square$

3. Порождение случайных нормальных форм

Пусть $G = A *_C B$ — свободное произведение свободной группы A с конечной базой X и свободной группы B с конечной базой Y , объединённое по конечно порождённой подгруппе C .

В серии предыдущих работ [5, 7] нами были описаны некоторые алгоритмы для свободных групп конечного ранга и амальгамированных произведений таких групп. Особую роль в анализе сложности алгоритмических проблем в G играют регулярные и стабильные нормальные формы. Одной из основных целей данного раздела является построение процедур порождения случайных редуцированных, канонических нормальных и циклически редуцированных форм элементов группы G . Вторая важная задача — получить асимптотические оценки множеств регулярных (стабильных) форм по отношению ко множествам всех форм при помощи различных асимптотических плотностей (см. раздел 4). Мы представляем ниже четыре различных генератора случайных нормальных форм.

3.1. Генератор редуцированных форм

Процедура RG_{rf} порождает случайный элемент в редуцированной форме слововой длины k . Эта процедура зависит от заданного вероятностного распределения $\theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ на множестве натуральных чисел $\mathbb{N}$ с нулём, двух вероятностных распределений μ_A и μ_B на $A \setminus C$ и $B \setminus C$ и двух вероятностных распределений $\mu_{A,C}$, $\mu_{B,C}$ на C , где C рассматривается либо как подгруппа A , либо как подгруппа B соответственно.

Процедура 3.1 (генератор RG_{rf} случайных элементов в редуцированной форме (5)).

Вход: число k , выбранное относительно фиксированного вероятностного распределения $\theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Выход: случайное слово u в редуцированной форме длины k .

Вычисления:

- 1) выбираем A или B с равной вероятностью $1/2$;
- 2) если $k = 0$, производим следующие действия:
 - а) если в 1) выбрано A , то выбираем случайный элемент c из C с вероятностью $\mu_{A,C}$;
 - б) если в 1) выбрано B , то выбираем случайный элемент c из C с вероятностью $\mu_{B,C}$.

Подаём на выход процедуры слово $u = c$;

3) если $k > 0$, производим следующие действия:

- а) если в 1) выбрано A , то выбираем случайный элемент $g_1 \in A \setminus C$ с вероятностью μ_A , затем элемент $g_2 \in B \setminus C$ с вероятностью μ_B и повторяем этот процесс, выбирая попеременно $g_i \in A \setminus C$ и $g_{i+1} \in B \setminus C$, до тех пор пока не построены k элементов $g_1, \dots, g_k$;
- б) если в 1) выбрано B , то выбираем случайный элемент $g_1 \in B \setminus C$ с вероятностью μ_B , затем элемент $g_2 \in A \setminus C$ с вероятностью μ_A и повторяем этот процесс, как и на шаге 3а).

Подаём на выход процедуры слово $u = g_1 \dots g_k$.

Замечание 3.1. Генератор RG_{ef} случайных элементов g в свободно-редуцированной форме (2) может быть построен аналогично. Для этого следует выбирать последовательно элементы из A и B . Мы будем использовать RG_{ef} в разделе 4.

3.2. Генератор канонических нормальных форм

Пусть $G = A *_C B$ и S, T — фиксированные шрайеровы трансверсали для C в A и B соответственно.

Обозначим через RG_{cnf} следующую процедуру для порождения случайных элементов в канонической нормальной форме слоговой длины k . Эта процедура зависит от заданного вероятностного распределения $\theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$, двух фиксированных вероятностных распределений μ_A и μ_B на $A \setminus C$ и $B \setminus C$ и двух вероятностных распределений $\mu_{A,C}$, $\mu_{B,C}$ на C .

Процедура 3.2 (генератор RG_{cnf} случайных элементов в канонической нормальной форме (3)).

Вход: натуральное число k , выбранное относительно фиксированного вероятностного распределения $\theta: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$.

Выход: случайное слово v в канонической нормальной форме слоговой длины k .

Вычисления:

- 1) выбираем A или B с равной вероятностью $1/2$ и поступаем так же, как в процедуре 3.1:
 - а) если в 1) выбрано A , то выбираем случайный элемент c из C с вероятностью $\mu_{A,C}$;
 - б) если в 1) выбрано B , то выбираем c из C с вероятностью $\mu_{B,C}$;
- 2) если $k = 0$, подаём на выход слово $v = c$;
- 3) если $k \geq 1$, производим следующие действия:
 - а) если в 1) выбрано A , то выбираем элемент $g_1 \in A \setminus C$, представляем его в виде $g_1 = c_1 s_1$, где $c_1 \in C$, $s_1 \in S$ (таким образом, $\mu_A(Cg_1) = \mu_A(Cs_1)$), и повторяем эту процедуру, выбирая последовательно $g_i \in A \setminus C$ и $g_{i+1} \in B \setminus C$ с вероятностями $\mu_A(Cg_i)$, $\mu_B(Cg_{i+1})$,

представляя их в форме $g_i = c_i s_i$, $g_{i+1} = c_{i+1} t_{i+1}$, до тех пор пока не построено k элементов $s_1, t_2, s_3, t_4, \dots$. Подаём на выход слово $v = cs_1 t_2 s_3 t_4 \dots$;

- б) если в 1) выбрано B , то выбираем $g_1 \in B \setminus C$, представляем его в виде $g_1 = c_1 t_1$, где $c_1 \in C$, $t_1 \in T$, и повторяем процесс аналогично шагу 3а). На выход подаём слово $v = ct_1 s_2 t_3 s_4 \dots$.

Замечание 3.2. Вероятностные распределения μ_A и μ_B на $A \setminus C$ и $B \setminus C$ мы опишем подробнее в разделе 4.1.

Построим теперь ещё один генератор нормальных форм.

3.3. Генератор циклически редуцированных нормальных форм

Обозначим через RG_{crf} следующую процедуру для порождения случайных элементов в циклически редуцированной нормальной форме слоговой длины $2k$ или 1. Эта процедура зависит от заданного вероятностного распределения $\theta: 2\mathbb{N} \cup \{1\} \rightarrow \mathbb{R}^+$, двух фиксированных вероятностных распределений μ_A и μ_B на $A \setminus C_A^*$ и $B \setminus C_B^*$ и двух вероятностных распределений $\mu_{A,C}$, $\mu_{B,C}$ на C , где

$$C_A^* = \bigcup_{x \in A} C^x, \quad C_B^* = \bigcup_{x \in B} C^x.$$

Процедура 3.3 (генератор RG_{crf} случайных элементов в циклически редуцированной нормальной форме (6)).

Вход: случайное натуральное число k или 1, выбранное с вероятностью θ .

Выход: случайное слово w в циклически редуцированной нормальной форме длины k .

Вычисления:

- 1) выбираем A или B с равной вероятностью $1/2$ и поступаем так же, как в процедуре 3.1:
 - а) если в 1) выбрано A , выбираем случайный элемент s из C с вероятностью $\mu_{A,C}$;
 - б) если в 1) выбрано B , выбираем s из C с вероятностью $\mu_{B,C}$;
- 2) если $k = 0$, подаём на выход слово $w = s$;
- 3) если $k = 1$, производим следующие действия:
 - а) если в 1) выбрано A , то выбираем случайный элемент $g_1 \in A \setminus C_A^*$ с вероятностью $\mu_{A \setminus C_A^*}(Cg_1)$, представляем его в виде $g_1 = c_1 s_1$, где $c_1 \in C$, $s_1 \in S$, и подаём на выход $w = cs_1$;
 - б) если в 1) выбрано B , то выбираем элемент $g_1 \in B \setminus C_B^*$ с вероятностью $\mu_{B \setminus C_B^*}(Cg_1)$, представляем его в виде $g_1 = c_1 t_1$, где $c \in C$, $t_1 \in T$, и подаём на выход $w = ct_1$;

4) если $k = 2l$, $l \geq 1$, производим следующие действия:

- а) если в 1) выбрано A , выбираем $g_1 \in A \setminus C^*$ как в 3), затем выбираем $g_2 \in B \setminus C^*$ с вероятностью $\mu_B(Cg_2)$ и представляем его в виде $g_2 = c_2t_2$ и повторяем процесс, выбирая попеременно элементы $g_i \in A \setminus C^*$ и $g_{i+1} \in B \setminus C^*$ с вероятностью $\mu_A(Cg_i)$, $\mu_B(Cg_{i+1})$ и представляя их в виде $g_i = c_is_i$, $g_{i+1} = c_{i+1}p_{i+1}$, до тех пор пока не построено k элементов $s_1, t_2, s_3, t_4, \dots$. Подаём на выход $w = cs_1t_2s_3t_4 \dots$;
- б) если в 1) выбрано B , выбираем $g_1 \in B \setminus C^*$ как в 3), затем выбираем $g_2 \in A \setminus C^*$ с вероятностью $\mu_A(Cg_2)$ и представляем его в виде $g_2 = c_2s_2$ и продолжаем как в шаге 4а). Подаём на выход $w = ct_1s_2t_3s_4 \dots$.

Замечание 3.3. О вероятностных распределениях на классах смежности $\mu_A(Cg_i)$, $\mu_B(Cg_i)$ и других множествах речь пойдёт в разделе 4.

4. Асимптотические оценки множеств нормальных форм

Пусть $G = A *_C B$, где A и B — свободные группы с конечными базисами X и Y соответственно и подгруппа C конечно порождённая. Теперь у нас всё готово для того, чтобы приступить к стратификации множеств нормальных форм элементов в G на регулярные, сингулярные, стабильные и нестабильные подмножества и оценить их размеры во всех множествах соответствующих нормальных форм.

4.1. Атомарные меры элементов в нормальной форме

В этом разделе мы определяем вероятностные меры на множествах нормальных форм, построенных при помощи генераторов случайных нормальных форм.

Для элемента $g \in G$ в свободно-редуцированной или редуцированной форме, полученной на выходе генератора RG_{ef} или RG_{rf} , вероятность появления равна

$$\mu_k(g) = \frac{1}{2} \mu_1(g_1) \cdots \mu_k(g_k),$$

где $\mu_i(g_i) = \mu_A(g_i)$, если $g_i \in A$, и $\mu_i(g_i) = \mu_B(g_i)$ в противном случае, $i = 1, \dots, k$, $k \geq 1$; если же $k = 0$, то вероятность появления элемента равна $\mu_0(c) = \mu_C(c)$, где $\mu_C(c) = \mu_{A,C}$, если C рассматривается как подгруппа A , и $\mu_C(c) = \mu_{B,C}$ иначе. Ясно, что μ_k является атомарной вероятностной мерой на множестве $\mathcal{EF}_k$ или $\mathcal{RF}_k$ всех (свободно-)редуцированных элементов слоговой длины k . Вероятностная мера μ на множестве $\mathcal{EF}$ или $\mathcal{RF}$ всех (свободно-)редуцированных элементов при этом равна

$$\mu(g) = \theta(k) \mu_k(g).$$

Чтобы завершить определение атомарной меры, нам необходимо определить вероятностные меры μ_A , μ_B , $\mu_{A,C}$ и $\mu_{B,C}$. Существует немало различных способов описания вероятностных распределений на свободной группе. Например, это может быть сделано как в [9] при помощи невозвратного случайного блуждания W_s ($s \in (0, 1]$) по графу Кэли группы $A = F(X)$ ранга r . Вероятность $\mu_s(g)$, что этот процесс остановится в g , задаётся формулой

$$\mu_s(g) = \frac{s(1-s)^{|g|}}{2r(2r-1)^{|g|-1}} \quad \text{для } w \neq 1,$$

и

$$\mu_s(1) = s.$$

Это случайное блуждание может быть также рассмотрено на множестве $A \setminus C$ с небольшими изменениями в определении. Поскольку множество $A \setminus C$ регулярно в $A = F(X)$, существует простая процедура определения вероятностной меры для случайного блуждания на соответствующем конечном автомате (или графе). Мы введём это понятие несколько другим путём, используя бесконечные деревья, а именно граф Кэли группы A относительно X и подгрупповой и шрайеров графы подгруппы C . Пусть Γ — граф Кэли группы A , Γ_C — подгрупповой граф для C и Γ_C^* — его расширенный граф. Обозначим через $\pi: \Gamma \rightarrow \Gamma_C^*$ единственную каноническую проекцию Γ на Γ_C^* . Тогда π — это морфизм графов, который сохраняет метки рёбер. Выберем действительное число $s \in (0, 1)$ и определим невозвратное случайное блуждание $\mathcal{W}_s$ на Γ следующим образом. Если $\mathcal{W}_s$ находится в вершине $v \in \Gamma$ и $v \notin V(\Gamma_C)$, то $\mathcal{W}_s$ останавливается в v с вероятностью s и следует дальше из вершины v (удаляясь от вершины 1_C) вдоль инцидентного v ребра с вероятностью $(1-s)/(2r-1)$. Если же $\mathcal{W}_s$ находится в вершине $v \in V(\Gamma_C)$, то $\mathcal{W}_s$ движется из v (также удаляясь от 1_C) вдоль любого инцидентного v ребра с вероятностью $1/(2r-1)$. Случайное блуждание $\mathcal{W}_s$ индуцирует (при помощи проекции π) случайное блуждание $\mathcal{W}_s^*$ на Γ_C^* . При этом вероятность $\mu_s(w)$, что $\mathcal{W}_s$ остановится в $w \in A \setminus C$, может быть записана следующим образом:

$$\mu_s(w) = \frac{1}{2r} \frac{(1-s)^{|w|-m_w}}{(2r-1)^{|w|-m_w}} \frac{1}{(2r-1)^{m_w-1}},$$

где $|w|$ — свободно-редуцированная длина w в A и m_w — количество раз, которое путь $\pi(w)$ проходит вершину 1_C в Γ_C^* .

Теперь вычислим вероятность появления элемента в канонической и циклически редуцированной нормальных формах на выходе генераторов RG_{cnf} и RG_{crf} . Для данного элемента в нормальной форме $v = cp_1p_2 \dots p_k$, $k \geq 0$, вероятность появления равна

$$\mu_k(v) = \frac{1}{2} \mu_C(c) \mu_1(p_1) \mu_2(p_2) \dots \mu_k(p_k),$$

где $\mu_i(p_i) = \mu_{F(p_i)}(Cp_i)$, $i = 0, \dots, k$, и $\mu_C(c) = \mu_{A,C}$, если C рассматривается как подгруппа A , и $\mu_C(c) = \mu_{B,C}$ в противном случае.

Ясно, что μ_k является атомарной вероятностной мерой на множестве $\mathcal{CNF}_k$ всех канонических нормальных форм (как и на $\mathcal{CRF}_k$ — множестве циклически редуцированных нормальных форм) слоговой длины k . Вероятностная мера μ получения случайного элемента из множества $\mathcal{CNF}$ или $\mathcal{CRF}$ всех канонических или циклически редуцированных нормальных форм равна при этом

$$\mu(v) = \theta(k)\mu_k(v).$$

Для завершения этого определения нам необходимо знать также, как вычисляется вероятностная мера на подгруппе C и смежных классах по ней. Это может быть сделано при помощи консолидированного подгруппового графа для C (см. [5, § 3.3]).

4.2. Меры на множествах нормальных форм

Здесь и далее через $\mathcal{NF}_r$ ($\mathcal{NF}_s$) мы будем обозначать множество всех регулярных (стабильных) элементов в нормальной форме (префикс $\mathcal{NF}$ будет изменяться в зависимости от типа формы) и через $\mathcal{NF}_{\text{sin}}$ ($\mathcal{NF}_{\text{uns}}$) его дополнение в $\mathcal{NF}$.

Решение алгоритмических проблем и задача стратификации входных данных алгоритмов делают необходимыми оценку размеров множеств нормальных форм и их регулярных и сингулярных подмножеств. Для этого мы используем два подхода: асимптотический (и возникающее в связи с ним понятие L -меры) и вероятностный (и понятие λ_L -меры). Чтобы применять теоремы о классификации регулярных множеств, приведённые во введении, мы доказываем в этом разделе, что множества $\mathcal{NF}$ и $\mathcal{NF}_{\text{uns}}$ регулярны.

Сначала напомним некоторые определения. В [9] для подмножеств R , L группы F их *относительные частоты* длины k были определены как

$$f_n(R, L) = \frac{f_n(R)}{f_n(L)} = \frac{|R \cap S_n|}{|L \cap S_n|}.$$

Асимптотическая плотность $\rho(R, L)$ множества R относительно L определяется как

$$\rho(R, L) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(R, L).$$

Через $r_L(R)$ обозначим *суммарную относительную частоту* R относительно L :

$$r_L(R) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(R, L).$$

Множество R будем называть *пренебрежимым* относительно L , если $\rho(R, L) = 0$. Множество R назовём *экспоненциально пренебрежимым* относительно L (или *экспоненциально L -пренебрежимым*), если $f_n(R, L) \leq \delta^n$ для всех достаточно больших n и положительной константы $\delta < 1$. Множество R мы будем называть *генерическим* относительно L , если предел $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(R, L)$ существует и равен 1;

R назовём *экспоненциально генерическим* относительно L , если существует положительная константа $\delta < 1$, такая что $1 - \delta^n < f_n(R, L) < 1$ начиная с некоторого числа n . В данном разделе мы будем использовать также понятие толстого множества. Множество R называется *толстым* относительно L , если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(R, L)$ существует и строго больше 0.

В [9] были также введены понятия λ_L -измеримого и экспоненциально λ_L -измеримого множества R . Этот способ измерения множеств близок к определённой выше частотной мере и тоже связан со случайным невозвратным блужданием, но по автомату для L . Именно,

$$\lambda_L(R) = \sum_{w \in R} \lambda_L(w) = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(R, L),$$

где

$$f'_n(R, L) = \sum_{w \in R \cap S_n} \lambda_L(w)$$

и $\lambda_L(w)$, $f'_n(R, L)$ определяются случайным блужданием на некотором автомате для L (см. более подробно в [9, § 5.2, с. 109]). Отметим, что, вообще говоря, частоты $f'_n(R, L)$ отличаются от относительных частот $f_n(R, L)$, определённых выше, в силу специфики автомата для L . С другой стороны, эти частоты совпадают для $L = F(X)$, т. е. $f'_n(R, F(X)) = f_n(R, F(X))$. Отметим также, что λ_L является мультипликативной мерой, так как $\lambda_L(uv) = \lambda_L(u)\lambda_L(v)$ для всех $u, v \in R$, таких что $uv = u \circ v$ и $uv \in R$; последнее равенство легко следует из определения случайного блуждания на L .

Множество R назовём λ_L -измеримым, если $\lambda_L(R)$ конечно. Множество R будем называть *экспоненциально λ_L -измеримым*, если $f'_n(R, L) \leq \delta^n$ для всех достаточно больших n и положительной константы $\delta < 1$.

В [9] введено следующее понятие и доказана теорема 4.1. Для всякого $w \in F$ множество $C_L(w) = L \cap C(w)$ называется L -конусом. Конус $C_L(w)$ называется L -малым, если он экспоненциально λ_L -измерим; в противном случае будем называть конус большим.

Теорема 4.1 [9, теорема 5.4]. Пусть R — регулярное подмножество префиксно-замкнутого регулярного множества L в свободной группе F конечного ранга. Тогда либо префиксное замыкание $\bar{R}$ множества R в L содержит большой L -конус, либо $\bar{R}$ экспоненциально λ_L -измеримо.

Теорема 4.1 очень удобна для оценки размеров подмножеств свободных групп, и мы применим её при доказательстве теоремы Б. Нам также понадобятся вспомогательные леммы 4.2 и 4.4.

Лемма 4.2. Пусть $F = F(X)$ — свободная группа конечного ранга, $W = \{w_1, \dots, w_d\}$ — её конечное подмножество и хотя бы один из элементов w_i отличен от 1. Тогда множество

$$F_0 = \{f \in F \mid f \text{ не содержит в качестве подслов элементов из } W\}$$

является регулярным, префиксно-замкнутым и экспоненциально λ_F -измеримым множеством.

Доказательство. Напомним критерий Майхилла—Нероуда, дающий необходимые и достаточные условия регулярности подмножеств полугруппы. Для языка R в полугруппе A^* рассмотрим следующее отношение эквивалентности $\sim_R$ в A^* относительно R : $v_1 \sim_R v_2$, если для любой строки u над A строки v_1u и v_2u либо одновременно принадлежат языку R , либо не принадлежат R .

Теорема Майхилла—Нероуда. Множество R регулярно в A^* тогда и только тогда, когда число классов $\sim_R$ -эквивалентности конечно.

Доказательство теоремы может быть найдено, например, в [8, теорема 1.2.9].

Мы работаем в свободной группе. В [9] был сформулирован и доказан аналог вышеприведённой теоремы для групп. Для $R \subseteq F$ определим следующее отношение эквивалентности $\sim_R$ на F относительно R : $v_1 \sim_R v_2$ тогда и только тогда, когда для любого слова $u \in F$ справедливо, что $v_1u = v_2u$ и $v_1u \in R$ тогда и только тогда, когда $v_2u \in R$.

Лемма 4.3 [9, лемма 5.3]. Пусть $R \subseteq F$. Множество R регулярно тогда и только тогда, когда число классов $\sim_R$ -эквивалентности в F относительно R конечно.

Доказательство леммы можно найти в [9]. Мы же используем её для доказательства регулярности F_0 .

Достаточно показать, что утверждение леммы справедливо для одноэлементного множества W . В самом деле, пусть F_0 — множество всех слов в F , не содержащих в качестве подслова w , а F_1 — множество слов в F , не содержащих подслов $w, w_1, \dots, w_d$. Тогда $F_1 \subseteq F_0$, и потому экспоненциальная λ_F -измеримость множества F_1 будет следовать из экспоненциальной λ_F -измеримости большего множества F_0 . Пусть теперь $W = \{w\}$ и $|w| = t \geq 1$. Определим классы эквивалентности в F относительно F_0 :

1) $\mathcal{K}_0 = F \setminus F_0$;

2) для каждого $u \in S_{t-1}$ определим класс

$$\mathcal{K}_u = \{f \in F: f = g \circ u, g \in F, u \in S_{t-1}\} \setminus \mathcal{K}_0;$$

3) для каждого $v \in B_{t-2}$ положим $\mathcal{K}_v = \{v\}$.

Покажем, что это разбиение действительно задаёт отношение эквивалентности на F относительно F_0 , т. е. что для любых представителей $u_1, u_2 \in F$ выполняется $u_1 \sim_{F_0} u_2$ в том и только в том случае, когда для любого $p \in F$ справедливо, что $u_1p = u_2p$ и $u_1p \in F_0$ тогда и только тогда, когда $u_2p \in F_0$.

Понятно, что это условие выполняется для класса $\mathcal{K}_0$ и классов $\mathcal{K}_v$ из пункта 3). Покажем, что оно выполнено и для остальных классов. Итак, пусть $u_1, u_2 \in \mathcal{K}_u$, где $u \in S_{t-1}$, т. е. $u_1 = g_1 \circ u$, $u_2 = g_2 \circ u$ и u_1, u_2 не содержат w в качестве подслова. Если $u_1p = (g_1 \circ u) \circ p \in F_0$, то и $u_2p = g_2 \circ u \circ p$.

Осталось показать, что $g_2 \circ u \circ p$ не лежит в $\mathcal{K}_0$. Но так как ни $g_2 \circ u$, ни $u \circ p$ не содержат w в качестве подслова, то если w содержится в $g_2 \circ u \circ p$, то оно имеет вид $w = g'_2 \circ u \circ p'$, где неединичный элемент g'_2 — это конец g_2 , а p' — нетривиальное начало p . Но тогда $t = |w| = |g'_2| + |u| + |p'| > t$, и мы пришли к противоречию. Предположим теперь, что $u_1 p = (g_1 \circ u) \circ p \notin F_0$. Это означает, что именно произведение $u \circ p$ содержит w в качестве подслова. Но тогда и $u_2 p = g_2 \circ u \circ p$ содержит w в качестве подслова.

Значит, $\sim_{F_0}$ действительно задаёт отношение эквивалентности на F относительно F_0 , и так как число классов эквивалентности конечно, то регулярность F_0 следует из леммы 4.3. Префиксная замкнутость F_0 в F следует из определения множества F_0 . Поскольку F_0 не содержит конуса, по теореме 4.1 F_0 является экспоненциально λ_F -измеримым. Последнее утверждение об экспоненциальной измеримости F_0 в F может быть также выведено из леммы 3 работы [4]. $\square$

Лемма 4.4. Пусть F — свободная группа конечного ранга, $W = \{w_1, \dots, w_d\}$ — конечное подмножество F , причём хотя бы один из элементов w_i отличен от 1, и F_0 — множество всех слов, которые не содержат элементов из W в качестве подслов. Обозначим через F_1 дополнение F_0 в F . Пусть $R \subseteq F_0$ регулярно и $L \subseteq F$ — регулярное и префиксно-замкнутое в F множество. Тогда если для любого большого конуса $C_L(u)$ в L множество $C_L(u) \cap F_1$ непусто, то R является экспоненциально λ_L -измеримым.

Доказательство. По условию леммы множество $R \cap F_1$ пусто, а все большие конусы $C_L(u)$ пересекаются с F_1 . Значит, $C_L(u) \not\subseteq R$, и тогда по теореме 4.1 множество R экспоненциально λ_L -измеримо. $\square$

Для того чтобы оценить размеры подмножеств нормальных форм, докажем сперва следующую теорему, описывающую их структуру.

Теорема 4.5. Пусть $G = A *_C B$ — свободное произведение с объединением, где A, B, C — свободные группы конечных рангов. Тогда множество $\mathcal{NF}_{\text{uns}}$ регулярно в G , а множество $\mathcal{NF}$ регулярно и префиксно-замкнуто в G для всех $\mathcal{NF} = \{\mathcal{EF}, \mathcal{RF}, \mathcal{CNF}, \mathcal{CRF}\}$.

Доказательство. Пусть L, M — два регулярных множества в алфавитах $X \cup X^{-1}, Y \cup Y^{-1}$ соответственно (напомним, что $A = F(X), B = F(Y)$). Пусть LM означает конкатенацию L и M , и пусть L^* — моноид, порождённый L . При доказательстве теоремы мы будем использовать формулу

$$L * M = L \cup M \cup LML \cup MLM \cup L(ML)^* M \cup M(LM)^* L. \quad (12)$$

В частности, эта формула показывает, что для регулярных L, M их свободное произведение $L * M$ также регулярно (в алфавите $X \cup X^{-1} \cup Y \cup Y^{-1}$).

Рассмотрим сначала множество всех свободно-редуцированных нормальных форм

$$\mathcal{EF} = A * B. \quad (13)$$

Множество $\mathcal{EF}$ регулярно и префиксно-замкнуто. Множество всех нестабильных свободно-редуцированных нормальных форм имеет вид

$$\mathcal{EF}_{\text{uns}} = \left(\bigcup_{s \in S_{\text{uns}}} Cs \right) * \left(\bigcup_{t \in T_{\text{uns}}} Ct \right). \quad (14)$$

По лемме 1.3 множество S_{uns} является конечным объединением левых смежных классов по C вида $s_1 s_2^{-1} C$, где $s_1, s_2 \in S_{\text{int}}$. Поскольку $\bigcup_{s \in S_{\text{uns}}} Cs$ (как и $\bigcup_{t \in T_{\text{uns}}} Ct$) является конкатенацией регулярных множеств C и S_{uns} (или T_{uns}) и потому регулярно, то множество $\mathcal{EF}_{\text{uns}}$ регулярно как свободное произведение регулярных множеств (см. формулу (12)).

Рассмотрим множество всех нетривиальных редуцированных форм

$$\mathcal{RF} = (A \setminus C) * (B \setminus C). \quad (15)$$

Поскольку разность регулярных множеств снова регулярна, оба множества форм регулярны. Чтобы показать префиксную замкнутость множества $A \setminus C$ в A , следует отождествить его с языком всех слов, распознаваемых по графу $\Gamma^* = \Gamma_C^*$ при чтении меток путей, начинающихся в корневой вершине 1_C (и, возможно, возвращающихся туда снова), но заканчивающихся в произвольной вершине графа Γ^* , кроме корневой (напомним, что граф Γ^* был определён в разделе 1.2). Ясно, что такой язык префиксно-замкнут в A . Аналогично $B \setminus C$ префиксно-замкнуто в B , и тогда $\mathcal{RF}$ префиксно-замкнуто как свободное произведение таких множеств.

Множество всех нестабильных редуцированных форм задаётся формулой

$$\mathcal{RF}_{\text{uns}} = (A'_1 \setminus C) * (B'_1 \setminus C), \quad (16)$$

где

$$A'_1 = \bigcup_{s \in S_{\text{uns}}} Cs, \quad B'_1 = \bigcup_{t \in T_{\text{uns}}} Ct.$$

Регулярность этого множества следует из изложенных рассуждений.

Пусть теперь $\mathcal{NF}$ — это множество всех канонических нормальных форм. Любой элемент $v \in \mathcal{CNF}$ может быть представлен в виде (3), т. е. как

$$v = cp_1 p_2 \dots p_l,$$

где $c \in C$, $p_i \in (S \cup T) \setminus 1$, и $F(p_i) \neq F(p_{i+1})$, $i = 1, \dots, l$, $l \geq 0$. Теперь рассмотрим множество всех таких форм:

$$\mathcal{CNF} = C \circ_t (S * T). \quad (17)$$

В то же время

$$\mathcal{CNF} = A \circ (S * T)_1 \sqcup B \circ (S * T)_2, \quad (18)$$

где $(S * T)_1$ начинается с $t \in T$ и $(S * T)_2$ начинается с $s \in S$. Заменяя $\circ$ операцией конкатенации и применяя формулу (12) для $(S * T)_i$, $i = 1, 2$, заключаем, что

$\mathcal{CNF}$ регулярно. Так как A , S и T префиксно-замкнуты, множество $\mathcal{CNF}$ также обладает этим свойством.

Аналогичное разложение может быть проделано и со множеством $\mathcal{CNF}_{\text{uns}}$:

$$\mathcal{CNF}_{\text{uns}} = C \circ_t (S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}}) = A'_1 \circ (S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_1 \sqcup B'_1 \circ (S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_2, \quad (19)$$

где A'_1 , B'_1 получаются пересечением двух регулярных множеств и $(S_{\text{uns}})_i$, $(T_{\text{uns}})_i$, $i = 1, 2$, регулярны в силу утверждения 1.3.

Доказательство этой теоремы для $\mathcal{CRF}$ вытекает напрямую из её доказательства для канонических нормальных форм. $\square$

4.3. Регулярные и стабильные нормальные формы

Понятия регулярных и стабильных форм были сформулированы в разделе 1.2, и сейчас у нас всё готово для того, чтобы доказать основные теоремы этой работы об оценке множеств сингулярных и нестабильных (а вместе с ними регулярных и стабильных) нормальных форм элементов группы G относительно двумерных асимптотических плотностей.

Теорема А. Пусть A , B , C — свободные группы конечного ранга и $G = A *_C B$ — свободное произведение групп с объединением. Тогда для множеств нормальных форм $\mathcal{NF} = \{\mathcal{EF}, \mathcal{RF}, \mathcal{CNF}, \mathcal{CRF}\}$

- 1) если C имеет конечный индекс в A и B , то всякая нормальная форма сингулярна и нестабильна, т. е. $\mathcal{NF}_{\text{sin}} = \mathcal{NF}_{\text{uns}} = \mathcal{NF}$;
- 2) если C имеет бесконечный индекс хотя бы в одной из групп A и B , то $\mathcal{NF}_r$ и $\mathcal{NF}_s$ экспоненциально μ -генерические относительно $\mathcal{NF}$, а $\mathcal{NF}_{\text{sin}}$ и $\mathcal{NF}_{\text{uns}}$ экспоненциально μ -пренебрежимые относительно $\mathcal{NF}$ в следующих случаях:
 - 2а) μ определяется по псевдомерам μ_A и μ_B , которые являются функциями мощности на A и B соответственно, а ρ_μ — двумерная асимптотическая плотность;
 - 2б) μ определяется по атомарным вероятностным мерам $\mu_{A,l}$ и $\mu_{B,l}$ на A и B соответственно, а ρ_{μ_l} — двумерная асимптотическая плотность по Чезаро.

Доказательство. Заметим, что все сингулярные представители по утверждению 1.3 являются также нестабильными, и поэтому достаточно доказать теорему А для нестабильных нормальных форм.

Предположим сначала, что C имеет конечный индекс и в A , и в B . Тогда найдутся нетривиальная подгруппа N_A в C , которая является нормальной подгруппой в A , и N_B в C , нормальная в B . Таким образом, $A *_C B = N_{A *_C B}^*(C)$. Но тогда по определению все представители классов смежности (и сами формы $\mathcal{NF}$) нестабильны, т. е. $\mathcal{NF}_{\text{sin}} = \mathcal{NF}_{\text{uns}} = \mathcal{NF}$.

Теперь будем считать, что C имеет бесконечный индекс в A . Пусть $\mathcal{NF} = \{\mathcal{EF}, \mathcal{RF}\}$ и выполнено 2а). По утверждению 2.2 достаточно показать, что

$\mathcal{NF} = A_0 * B_0$, $\mathcal{NF}_{\text{uns}} = A_1 * B_1$ и A_1 экспоненциально пренебрежимо относительно A_0 (легко проверить, что существование плотности $\rho_{\mu_B}(B_1, B_0)$ для этих форм вытекает непосредственно из определений множеств B_0 и B_1).

Рассмотрим сначала свободно-редуцированные нормальные формы. Применяя формулы (13), (14), положим

$$A_0 = A, \quad B_0 = B, \quad A_1 = \bigcup_{s \in S_{\text{uns}}} Cs, \quad B_1 = \bigcup_{t \in T_{\text{uns}}} Ct.$$

Отметим, что S_{uns} экспоненциально пренебрежимо относительно S по следствию 1.4, и потому A_1 экспоненциально пренебрежимо относительно A_0 по утверждению 4.7. из [9]. Случай $\mathcal{EF}$ разобран.

Для множества всех нетривиальных редуцированных форм, используя (15), (16), положим

$$A_0 = A \setminus C, \quad B_0 = B \setminus C, \quad A_1 = A'_1 \setminus C, \quad B_1 = B'_1 \setminus C,$$

где

$$A'_1 = \bigcup_{s \in S_{\text{uns}}} Cs, \quad B'_1 = \bigcup_{t \in T_{\text{uns}}} Ct.$$

Мы уже доказали для $\mathcal{EF}$, что A'_1 экспоненциально пренебрежимо относительно A , и значит, найдётся константа q , $0 < q < 1$, такая что

$$\frac{\mu_A((A'_1)_n)}{\mu_A((A)_n)} < q$$

для всех $n \geq n_0$ для некоторого натурального n_0 .

Ясно, что

$$\frac{\mu_A((C)_n)}{\mu_A((A)_n)} < q,$$

где $n \geq n_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \mu_A((A_1)_n) &= \mu_A(((A'_1)_n) \setminus ((C)_n)) = \\ &= \mu_A((A'_1)_n) - \mu_A((C)_n) < q\mu_A((A)_n) - \mu_A((C)_n) < q(\mu_A((A)_n) - \mu_A((C)_n)). \end{aligned}$$

Мы получили, что

$$\frac{\mu_A((A_1)_n)}{\mu_A((A_0)_n)} < q$$

для всех $n \geq n_0$, а значит, A_1 экспоненциально пренебрежимо относительно A_0 .

Пусть выполняется условие 2б) теоремы, т. е. мера μ определяется на $F = A * B$ атомарными вероятностными мерами $\mu_{A,l}$ и $\mu_{B,l}$ на A и B соответственно и ρ^C — двумерная асимптотическая плотность по Чезаро. Так как множество $A'_1 = \bigcup_{s \in S_{\text{uns}}} Cs$ является экспоненциально пренебрежимым относительно A , по лемме 2.5 найдётся число q , $0 < q < 1$, такое что

$$\frac{\mu_{A,l}(A'_1)}{\mu_{A,l}(A)} < q$$

для всех $l \geq l_0$. Тогда по утверждению 2.4 множество всех нестабильных свободно-редуцированных форм является C -пренебрежимым относительно $\mathcal{EF}$.

Поскольку

$$\mu_{A,l}(A'_1) - \mu_{A,l}(C) < q\mu_{A,l}(A) - \mu_{A,l}(C) < q(\mu_{A,l}(A) - \mu_{A,l}(C))$$

для всех $l \geq l_0$, получаем, что

$$\frac{\mu_{A,l}(A'_1 \setminus C)}{\mu_{A,l}(A \setminus C)} < q.$$

Следовательно, по утверждению 2.4 получаем результат, объявленный в 2б) для $\mathcal{RF}$.

Теперь рассмотрим множество канонических нормальных форм, задаваемых формулами (18) и (19):

$$\mathcal{CNF} = (A \circ (S * T)_1) \sqcup (B \circ (S * T)_2),$$

$$\mathcal{CNF}_{\text{uns}} = (A \circ (S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_1) \sqcup (B \circ (S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_2).$$

Понятно, что достаточно доказать утверждение теоремы для пары $\Sigma = (A \circ (S * T)_1)$ и $\Sigma_{\text{uns}} = (A \circ (S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_1)$. Обозначим через $\hat{A}$ множество $A \setminus \{1\}$.

Мы покажем, что нестабильные канонические нормальные формы являются μ -экспоненциально пренебрежимыми во множестве всех канонических нормальных форм относительно двумерной асимптотической плотности, определяемой функцией мощности. По определению частотной функции

$$\begin{aligned} \rho_{\mu}^{n,k}(\Sigma_{\text{uns}}, \Sigma) &= \frac{\mu(\Sigma_{\text{uns}} \cap \Sigma_{n,k})}{\mu(\Sigma_{n,k})} = \\ &= \frac{\mu_A((\hat{A})_{\leq n})\mu(((S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_1)_{n,k-1}) + \mu(((S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_1)_{n,k})}{\mu_A((\hat{A})_{\leq n})\mu(((S * T)_1)_{n,k-1}) + \mu(((S * T)_1)_{n,k})} = \\ &= \frac{\mu_A((\hat{A})_{\leq n})\mu(((S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_1)_{n,k-1}) + \mu(((S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_1)_{n,k})}{\mu_A((\hat{A})_{\leq n})\mu(((S * T)_1)_{n,k-1}) + \mu(((S * T)_1)_{n,k})} = \\ &= \frac{\mu_A((\hat{A})_{\leq n})(\mu_B((T_{\text{uns}})_{\leq n}))^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (\mu_A((S_{\text{uns}})_{\leq n}))^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} + (\mu_B((T_{\text{uns}})_{\leq n}))^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (\mu_A((S_{\text{uns}})_{\leq n}))^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}{\mu_A((\hat{A})_{\leq n})(\mu_B((T)_{\leq n}))^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (\mu_A((S)_{\leq n}))^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} + (\mu_B((T)_{\leq n}))^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} (\mu_A((S)_{\leq n}))^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}}. \end{aligned}$$

Предположим, что k нечётное. Тогда

$$\begin{aligned} \rho_{\mu}^{n,k}(\Sigma_{\text{uns}}, \Sigma) &= \\ &= \frac{(\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_B((T_{\text{uns}})_{\leq n}))(\mu_B((T_{\text{uns}})_{\leq n}))^{\frac{k-1}{2}} (\mu_A((S_{\text{uns}})_{\leq n}))^{\frac{k-1}{2}}}{(\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_B((T)_{\leq n}))(\mu_B((T)_{\leq n}))^{\frac{k-1}{2}} (\mu_A((S)_{\leq n}))^{\frac{k-1}{2}}}. \end{aligned}$$

Поскольку множество S_{uns} также экспоненциально пренебрежимо относительно S , имеем

$$\rho_{\mu_A}(S_{\text{uns}}, S) < 1.$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_A((S_{\text{uns}}))_n}{\mu_A((S)_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_A((S_{\text{uns}}))_{\leq n}}{\mu_A((S)_{\leq n})}$$

и

$$\frac{\mu_A((S_{\text{uns}}))_{\leq n}}{\mu_A((S)_{\leq n})} < 1 - \varepsilon_1.$$

По той же причине

$$\frac{\mu_B((T_{\text{uns}}))_{\leq n}}{\mu_B((T)_{\leq n})} < 1 - \varepsilon_2$$

для некоторых $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \leq 1$ и достаточно больших n . Следовательно,

$$\rho_{\mu}^{n,k}(\Sigma_{\text{uns}}, \Sigma) < \left(\frac{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_B((T_{\text{uns}})_{\leq n})}{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_B((T)_{\leq n})} \right) ((1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2))^{\frac{k-1}{2}}$$

для достаточно больших n и нечётных k .

Нетрудно проверить, что для всех чётных k частоты $\rho_{\mu}^{n,k}(\Sigma_{\text{uns}}, \Sigma)$ ограничены сверху величиной

$$\left(\frac{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_A((S_{\text{uns}})_{\leq n})}{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_A((S)_{\leq n})} \right) (1 - \varepsilon_2)((1 - \varepsilon_1)(1 - \varepsilon_2))^{\frac{k-2}{2}}.$$

Отношения

$$\frac{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_B((T_{\text{uns}})_{\leq n})}{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_B((T)_{\leq n})}, \quad \frac{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_A((S_{\text{uns}})_{\leq n})}{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_A((S)_{\leq n})}$$

не зависят от k и меньше 1 для всех достаточно больших n .

Пусть $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тогда

$$\rho_{\mu}^{n,k}(\Sigma_{\text{uns}}, \Sigma) < \left(\frac{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_B((T_{\text{uns}})_{\leq n})}{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_B((T)_{\leq n})} \right) (1 - \varepsilon)^{k-1}$$

для нечётных k и

$$\rho_{\mu}^{n,k}(\Sigma_{\text{uns}}, \Sigma) < \left(\frac{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_A((S_{\text{uns}})_{\leq n})}{\mu_A((\hat{A})_{\leq n}) + \mu_A((S)_{\leq n})} \right) (1 - \varepsilon)^{k-1}$$

для чётных k . В обоих случаях предел частот $\rho_{\mu}^{n,k}(\Sigma_{\text{uns}}, \Sigma)$ при $d(n, k) \rightarrow \infty$ существует, равен нулю и не зависит от выбора функции направления. Более того, для достаточно больших n и k эти частоты ограничены сверху величиной $(1 - \varepsilon)^{k-1}$, что завершает доказательство.

Утверждение теоремы для $\mathcal{CRF}$ вытекает напрямую из его определения и уже доказанных фактов. $\square$

4.4. Регулярные и стабильные нормальные формы: L -мера и λ_L -мера

Теперь мы готовы сформулировать и доказать другой принципиальный результат этой работы.

Теорема Б. Пусть A, B, C — свободные группы конечного ранга и $G = A *_C B$ — свободное произведение групп с объединением. Если C имеет бесконечный индекс хотя бы в одной из групп A и B , то множества всех нестабильных $\mathcal{NF}_{\text{uns}}$ и всех сингулярных $\mathcal{NF}_{\text{sin}}$ нормальных форм экспоненциально $\lambda_{\mathcal{NF}}$ -измеримы для $\mathcal{NF} = \{\mathcal{EF}, \mathcal{RF}, \mathcal{CNF}, \mathcal{CRF}\}$.

Доказательство. Заметим снова, что, как и в теореме А, нам достаточно показать результат только для нестабильных нормальных форм. Предположим, что C имеет бесконечный индекс в A .

Рассмотрим сперва множество всех нетривиальных свободно-редуцированных нормальных форм. Поскольку C имеет бесконечный индекс в A , то найдётся хотя бы один стабильный представитель $s \in S_{\text{st}}$. Рассмотрим множество слов $W = \{y_i s y_j \mid y_i, y_j \in Y \cup Y^{-1}\}$. Пусть, как в лемме 4.4, F_0 — множество всех слов в группе $F = A *_C B$, не содержащих элементов из W в качестве подслов, а F_1 — дополнение F_0 в F .

Согласно лемме 4.5 множество всех нестабильных свободно-редуцированных форм имеет вид

$$\mathcal{EF}_{\text{uns}} = \left(\bigcup_{s \in S_{\text{uns}}} Cs \right) * \left(\bigcup_{t \in T_{\text{uns}}} Ct \right)$$

и, таким образом, заведомо не содержит элементов, имеющих подслова $y_i s y_j$, т. е. $\mathcal{EF}_{\text{uns}} \subseteq F_0$. Множество $\mathcal{EF} = A *_C B$ является свободной группой, и потому каждый конус $C(u)$ в нём — это все редуцированные слова в $A *_C B$, начинающиеся на u . Очевидно, что все такие конусы $C(u)$ пересекаются с F_1 по непустому множеству, и значит, из леммы 4.5 о структуре нормальных форм и леммы 4.4 следует, что нестабильные свободно-редуцированные формы экспоненциально $\lambda_{\mathcal{EF}}$ -измеримы.

Рассмотрим теперь множество нетривиальных редуцированных форм и подмножество нестабильных форм в нём. По лемме 4.5

$$\mathcal{RF}_{\text{uns}} = (A'_1 \setminus C) * (B'_1 \setminus C),$$

где

$$A'_1 = \bigcup_{s \in S_{\text{uns}}} Cs, \quad B'_1 = \bigcup_{t \in T_{\text{uns}}} Ct.$$

Таким образом, множество нестабильных редуцированных форм регулярно и является подмножеством F_0 .

Множество всех редуцированных форм $\mathcal{RF} = (A \setminus C) * (B \setminus C)$ по лемме 4.5 является регулярным и префиксно-замкнутым в $A *_C B$. Поскольку $C \cap F_1 = \emptyset$, то,

как и $\mathcal{EF}$, множество $\mathcal{RF}$ имеет непустое пересечение с F_1 . Тогда по лемме 4.4 множество $\mathcal{RF}_{\text{uns}}$ является экспоненциально $\lambda_{\mathcal{RF}}$ -измеримым.

Перейдём теперь к доказательству теоремы для канонических нормальных форм, задаваемых в виде (18) и (19):

$$\begin{aligned}\mathcal{CNF} &= (A \circ (S * T)_1) \sqcup (B \circ (S * T)_2), \\ \mathcal{CNF}_{\text{uns}} &= (A \circ (S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_1) \sqcup (B \circ (S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_2).\end{aligned}$$

Как и в теореме А, докажем утверждение теоремы для пары $\Sigma = (A \circ (S * T)_1)$ и $\Sigma_{\text{uns}} = (A \circ (S_{\text{uns}} * T_{\text{uns}})_1)$.

Множество Σ_{uns} является (регулярным) подмножеством F_0 . Чтобы показать, что Σ_{uns} не содержит больших Σ -конусов, разложим оба множества нормальных форм, пользуясь формулой (12). Тогда

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{uns}} &= A(T_{\text{uns}} \cup T_{\text{uns}} S_{\text{uns}} T_{\text{uns}} \cup T_{\text{uns}} (S_{\text{uns}} T_{\text{uns}})^* S_{\text{uns}}), \\ \Sigma &= A(T \cup T S T \cup T (S T)^* S).\end{aligned}$$

Всякий конус в Σ , кроме, может быть, Σ -конусов из AT , имеет непустое пересечение с F_1 и потому не может содержаться в Σ_{uns} . Но в AT нет больших Σ -конусов, и значит, множество $\mathcal{CNF}_{\text{uns}}$ является экспоненциально $\lambda_{\mathcal{CNF}}$ -измеримым.

Утверждение теоремы для $\mathcal{CRF}$ вытекает напрямую из приведённых рассуждений для других видов форм. $\square$

Авторы благодарят Александра Васильевича Боровика за вдохновение и полезные обсуждения.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 08-01-00067-а.

Литература

- [1] Аверина Я. С., Френкель Е. В. О строго разреженных подмножествах свободной группы // Сиб. электрон. мат. изв. — 2005. — Т. 2. — С. 1–13. — <http://semr.math.nsc.ru>.
- [2] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. — М.: Мир, 1980.
- [3] Магнус В., Каррасс А., Солитер Д. Комбинаторная теория групп. — М.: Наука, 1974.
- [4] Arzhantseva G., Cherix P.-A. On the Cayley graph of a generic finitely presented group // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2004. — Vol. 11, no. 4. — P. 589–601.
- [5] Borovik A. V., Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N. Multiplicative measures on free groups // Int. J. Algebra Comput. — 2003. — Vol. 13, no. 6. — P. 705–731.
- [6] Borovik A. V., Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N. Algorithmic stratification of the conjugacy problem in Miller's groups // Int. J. Algebra Comput. — 2007. — Vol. 17, no. 5-6. — P. 963–997.
- [7] Borovik A. V., Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N. The conjugacy problem in amalgamated products I: regular elements and black holes // Int. J. Algebra Comput. — 2007. — Vol. 17, no. 7. — P. 1301–1335.

- [8] Epstein D., Cannon J., Holt D., Levy S., Paterson M., Thurston W. Word Processing in Groups. — Boston: Jones and Bartlett, 1992.
- [9] Frenkel E., Myasnikov A. G., Remeslennikov V. N. Regular sets and counting in free groups // Combinatorial and Geometric Group Theory. Dortmund and Ottawa—Montreal Conferences. Selected Papers of the Conferences on «Combinatorial and Geometric Group Theory with Applications» (GAGTA), Dortmund, Germany, August 27–31, 2007, «Fields Workshop in Asymptotic Group Theory and Cryptography», Ottawa, Canada, December 14–16, 2007, and the Workshop on «Action on Trees, Non-Archimedean Words, and Asymptotic Cones», Montreal, Canada, December 17–21, 2007 / O. Bogopolski, ed. — Basel: Birkhäuser, 2010. — (Trends Math.) — P. 93–118.
- [10] Gilman R., Miasnikov A. G., Myasnikov A. D., Ushakov A. Report on generic case complexity // Вестн. Омск. ун-в. — 2007. — Спец. вып. — С. 103–110.
- [11] Kapovich I., Myasnikov A. G. Stallings foldings and subgroups of free groups // J. Algebra. — 2002. — Vol. 248. — P. 608–668.
- [12] Kemeny J. G., Snell J. L. Finite Markov chains. — Princeton: Van Nostrand, 1960.
- [13] Miller C. F., III. On Group-Theoretic Decision Problems and Their Classification. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1971. — (Ann. Math. Studies; Vol. 68).
- [14] Woess W. Cogrowth of groups and simple random walks // Arch. Math. — 1983. — Vol. 41. — P. 363–370.

