Дистрибутивные кольца косых многочленов Лорана*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский государственный торгово-экономический университет
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.553+512.541

Ключевые слова: кольцо косых многочленов Лорана, дистрибутивный модуль, регулярное кольцо.

Аннотация

Описаны дистрибутивные справа кольца косых многочленов Лорана.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Distributive skew Laurent polynomial rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 223—227.

We describe skew Laurent polynomial rings that are right distributive.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Если A — кольцо и φ — его автоморфизм, то через $A[x, x^{-1}, \varphi]$ обозначается (левое) кольцо косых многочленов Лорана, состоящее из многочленов

$$f = \sum_{i=-k}^{n} f_i x^i,$$

где k и n — неотрицательные целые числа и все коэффициенты f_i — элементы кольца A (их называют *каноническими коэффициентами* многочлена f). Сумма двух многочленов из $A[x, x^{-1}, \varphi]$ определяется естественным образом, а умножение определяется с использованием соотношений $xa = \varphi(a)x$ для любых $a \in A$. Если φ — тождественный автоморфизм, то кольцо косых многочленов Лорана $A[x, x^{-1}, \varphi]$ превращается в обычное кольцо многочленов Лорана $A[x, x^{-1}]$.

Кольцо называется *дистрибутивным справа*, если решётка всех его правых идеалов дистрибутивна. Кольцо A называется *квазиинвариантным справа*, если все его правые идеалы являются идеалами в A. Кольцо A называется *регулярным* (в смысле фон Неймана), если $a \in aAa$ для любого элемента $a \in A$.

В [3] доказан следующий результат.

*Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований, проект 08-01-00693-а «Структурная теория колец».

Теорема A [3, теорема 12.4]. *Если A — кольцо, то равносильны следующие условия*:

1) $A[x, x^{-1}]$ — *дистрибутивное справа кольцо*;
2) A — *коммутативное регулярное кольцо.*

Основным результатом данной работы является теорема 1.

Теорема 1. *Если A — кольцо и φ — его автоморфизм, то равносильны следующие условия*:

1) $A[x, x^{-1}, \varphi]$ — *дистрибутивное справа кольцо*;
2) A — *коммутативное регулярное кольцо и φ — тождественный автоморфизм кольца A.*

Мы разобьём доказательство теоремы 1 на ряд утверждений.

Лемма 2. *Пусть R — кольцо и a, b — два его элемента.*

1. *Если*
$$(a+b)R \cap (aR + bR) = (a+b)R \cap aR + (a+b)R \cap bR,$$
то существуют такие элементы $f, g \in R$, что $f + g = 1$ и $afR + bgR \subseteq \subseteq aR \cap bR$.
2. *Если существует такое натуральное число n, что $a^m b \in bA$ для всех $m \geqslant n$ и*
$$(a^k b + b)R \cap (a^k bR + bR) = (a^k b + b)R \cap a^k bR + (a^k b + b)R \cap bR$$
для всех $k < n$, то $abA \subseteq bA$.
3. *Если существует такое натуральное число n, что $a^n = 0$ и*
$$(a^k b + b)R \cap (a^k bR + bR) = (a^k b + b)R \cap a^k bR + (a^k b + b)R \cap bR$$
для всех $k \leqslant n$, то $abR \subseteq bR$.

Доказательство. 1. По условию
$$a + b \in (a+b)R \cap aR + (a+b)R \cap bR.$$
Поэтому существуют такие элементы $c, d, g, h \in R$, что $a + b = ac + bd$, $ac = = (a+b)g$ и $bd = (a+b)h$. Обозначим через f элемент $1 - g$. Тогда
$$f + g = 1, \quad bg = a(c-g) \in aR \cap bR,$$
$$ah = b(d-h) \in aR \cap bR, \quad (a+b)(f-h) = 0,$$
$$af = ah + b(f-h) = b(d - h + f - h) \in aR \cap bR,$$
$$afR + bgR \subseteq aR \cap bR.$$

2. Если $n = 1$, то утверждение верно. Без ограничения общности можно считать, что $n \geqslant 2$ и n — минимальное натуральное число с указанным в условии свойством. Тогда $a^{n-1}b \notin bR$, $2n-2 \geqslant n$ и $a^{2n-2}b \in bA$. Применяя утверждение 1

к элементам $a^{n-1}b$ и b, получаем, что существуют такие элементы $f, g \in R$, что $f+g=1$ и
$$a^{n-1}bfR + bgR \subseteq a^{n-1}bR \cap bR.$$
Тогда
$$a^{n-1}b = a^{n-1}bf + a^{n-1}bg \subseteq bR + a^{2n-2}bR \subseteq bR.$$
Это противоречит тому, что $a^{n-1}b \notin bR$.

3. Утверждение 3 следует из утверждения 2. □

Лемма 3 [1, 1.7, 2.3, 4.2]. *Пусть A — кольцо, φ — его автоморфизм, N — множество всех таких элементов $a \in A$, что $a \cdot \varphi(a) \cdot \ldots \cdot \varphi^n(a) = 0$ для некоторого натурального числа n, зависящего от a. Допустим, что кольцо $A[x, x^{-1}, \varphi]$ квазиинвариантно справа. Тогда кольцо косых многочленов $A[x, \varphi]$ квазиинвариантно справа, N — идеал кольца A, $\varphi(N) = N$, автоморфизм $\bar{\varphi}$ фактор-кольца A/N, индуцированный автоморфизмом φ, является тождественным автоморфизмом, причём фактор-кольцо A/N коммутативно.*

Лемма 4. *Пусть A — кольцо, φ — его автоморфизм, a — элемент кольца A, $R = A[x, x^{-1}, \varphi]$ — кольцо косых многочленов Лорана, N — множество всех таких элементов $a \in A$, что $a \cdot \varphi(a) \cdot \ldots \cdot \varphi^n(a) = 0$ для некоторого натурального числа n, зависящего от a.*

1. *Если $a(1-x) \in (1-x)R$, то $\varphi(a) = a$.*
2. *Если $ax(1-x) \in (1-x)R$, то $\varphi(a) = a$.*
3. *Если $a \in N$, то многочлен ax нильпотентен.*
4. *Если $a \in N$ и $f \cdot (1-x) \in (1-x)R$ для любого нильпотентного многочлена $f \in R$, то $\varphi(a) = a$ и элемент a нильпотентен.*
5. *Если $\varphi(a) = a$ и*
$$\big(a+(1-x)\big)R \cap (aR + (1-x)R) = \big(a+(1-x)\big)R \cap aR + \big(a+(1-x)\big)R \cap bR,$$
то $a \in a^k A$ для всех натуральных чисел k.
6. *Если кольцо R дистрибутивно справа, то $N = 0$.*
7. *Если кольцо R дистрибутивно справа, то A — коммутативное регулярное кольцо и φ — тождественный автоморфизм кольца A.*

Доказательство. 1. Так как $a(1-x) \in (1-x)R$, то существуют такие целое число k и многочлен
$$f = \sum_{i=0}^{n} f_i x^i \in A[x, \varphi],$$
что $a(1-x) = (1-x)fx^k$ и $f_i \in A$ для всех i, причём $f_0 \neq 0$ и $f_n \neq 0$. Так как $a(1-x) = (1-x)fx^k$, то младший член f_0x^k многочлена $(1-x)fx^k$ и старший член $-\varphi(f_n)x^{n+k+1}$ многочлена $(1-x)fx^k$ равны a и $-ax$ соответственно.

Поэтому $k = 0$ и $n + k + 1 = 1$, откуда следует, что $n = 0$, $f = f_0 \in A$ и

$$a - ax = a(1 - x) = (1 - x)f_0 = f_0 - \varphi(f_0)x.$$

Поэтому $a = f_0$, $-a = -\varphi(f_0)$ и $a = \varphi(a)$.

2. Так как $ax(1 - x) \in (1 - x)R$, то

$$a(1 - x) = a(1 - x)x \cdot x^{-1} = ax(1 - x)x^{-1} \in (1 - x)R.$$

Тогда $\varphi(a) = a$ по утверждению 1.

3. Так как $a \in N$, то $a \cdot \varphi(a) \cdot \ldots \cdot \varphi^n(a) = 0$ для некоторого натурального числа n. Поэтому

$$(ax)^{n+1} = a \cdot \varphi(a) \cdot \ldots \cdot \varphi^n(a)x^{n+1} = 0,$$

и многочлен ax нильпотентен.

4. Многочлен ax нильпотентен по утверждению 3. По условию $ax \cdot (1 - x) \in \in (1 - x)R$. Тогда $\varphi(a) = a$ по утверждению 2. Поэтому

$$a^{n+1} = a \cdot \varphi(a) \cdot \ldots \cdot \varphi^n(a) = 0,$$

и элемент a нильпотентен.

5. Можно считать, что $a \neq 0$. По утверждению 1 леммы 2 существуют такие многочлены $f, g, h, t \in R$, что

$$1 = f + g, \quad af = (1 - x)h, \quad (1 - x)g = at.$$

Так как $\varphi(a) = a$, то $(1 - x)a = a(1 - x)$. Тогда

$$a(1 - x) = (1 - x)a = (1 - x)af + a(1 - x)g = (1 - x)^2h + a^2t.$$

Существует такое натуральное число n, что $hx^n = p \in A[x, \varphi]$ и $tx^n = q \in \in A[x, \varphi]$, т. е. младшие члены многочленов p и q не содержат отрицательных степеней x. Тогда

$$\begin{aligned}
&a(1 - x)x^n = (1 - x)^2p + a^2q,\\
&a(1 - x) = a(1 - x)x^n + a(1 - x)(1 - x^n) =\\
&\quad = (1 - x)^2p + a^2q + a(1 - x)^2(1 + \ldots + x^{n-1}) =\\
&\quad = (1 - x)^2(p + 1 + \ldots + x^{n-1}) + a^2q.
\end{aligned}$$

Так как кольцо косых многочленов $A[x, \varphi]$ является свободным левым модулем с базисом $\{(1 - x)^k\}_{k=0}^{\infty}$ и $a(1 - x) = (1 - x)^2(p + 1 + \ldots + x^{n-1}) + a^2q$, то $a = a^2b$, где b — коэффициент при $1 - x$ в разложении многочлена q по базису $\{(1 - x)^k\}_{k=0}^{\infty}$. Поскольку $a = a^2b$, то $a \in a^kA$ для всех натуральных чисел k.

6. Надо доказать, что $a = 0$ для любого элемента $a \in N$. По утверждению 3 многочлен ax нильпотентен. Если f — любой нильпотентный многочлен из R и B — произвольный правый идеал кольца R, то из утверждения 3 леммы 2 следует включение $fB \subseteq fB$. По утверждению 4 $\varphi(a) = a$, и элемент a нильпотентен. По утверждению 5 $a \in a^kA$ для всех натуральных чисел k. Поэтому $a = 0$.

7. Так как кольцо R дистрибутивно справа, то кольцо R квазиинвариантно справа [2]. Поэтому утверждение следует из леммы 3 и утверждения 6. $\square$

Окончание доказательства теоремы 1. Теорема 1 вытекает из утверждения 7 леммы 4 и теоремы A. □

Литература

[1] Leroy A., Matczuk J., Puczylowski E. R. Quasi-duo skew polynomial rings // J. Pure Appl. Algebra. — 2008. — Vol. 212, no. 8. — P. 1951—1959.

[2] Stephenson W. Modules whose lattice of submodules is distributive // Proc. London Math. Soc. — 1974. — Vol. 28, no. 2. — P. 291—310.

[3] Tuganbaev A. A. Semidistributive Rings and Modules. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.