Локальные задания формаций конечных групп

Л. А. ШЕМЕТКОВ
Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
e-mail: shemet37@gmail.com

УДК 512.542.6

Ключевые слова: подгруппа Фраттини, насыщенная формация, спутник.

Аннотация

В статье обсуждается проблема конструирования локальных заданий для формаций конечных групп. Автор анализирует связи между локальными заданиями различных типов. Приводится новое доказательство существования ω-композиционного спутника у ω-разрешимо насыщенной формации. Доказано, что если непустая формация конечных групп $\mathfrak{X}$-локальна по Фёрстеру, то она имеет $\mathfrak{X}$-композиционный спутник.

Abstract

L. A. Shemetkov, Local definitions of formations of finite groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 229—244.

A problem of constructing local definitions for formations of finite groups is discussed in the article. The author analyzes relations between local definitions of various types. A new proof of the existence of an ω-composition satellite of an ω-solubly saturated formation is obtained. It is proved that if a nonempty formation of finite groups is $\mathfrak{X}$-local by Förster, then it has an $\mathfrak{X}$-composition satellite.

Посвящается А. В. Михалёву
в связи с его семидесятилетием

1. Введение

Мы рассматриваем только конечные группы. Таким образом, все рассматриваемые классы групп — это подклассы класса $\mathfrak{E}$ всех конечных групп. Напомним, что формация — это класс групп, замкнутый относительно взятия гомоморфных образов и подпрямых произведений [17]. Говорят, что формация $\mathfrak{F}$ p-насыщенна (p — простое число), если из условия

$$G/N \in \mathfrak{F} \text{ для } G\text{-инвариантной } p\text{-подгруппы } N \text{ из } \Phi(G)$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 8, с. 229—244.

всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{N}_p$-насыщенной, если из условия

$$G/\Phi(N) \in \mathfrak{F} \text{ для нормальной } p\text{-подгруппы } N \text{ из } G$$

всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Если формация p-насыщенна для любого простого числа p, то она называется насыщенной. Очевидно, каждая p-насыщенная формация $\mathfrak{N}_p$-насыщенна. Обратное неверно: существует широкий класс $\mathfrak{N}_p$-насыщенных формаций, не являющихся p-насыщенными. Однако, как установлено в [22], между локальными заданиями этих двух типов формаций имеется тесная связь.

Концепцию локальных заданий насыщенных формаций впервые рассмотрел В. Гашюц [17]. Следуя [23], мы сформулируем её в общем виде.

Локальное задание — это отображение $f\colon \mathfrak{E} \to \{\text{формации}\}$ вместе с f-правилом, которое решает, является ли данный главный фактор f-центральным или f-эксцентральным в группе. Кроме того, мы следуем соглашению о том, что локальное задание f не различает неединичные группы с одинаковым (с точностью до изоморфизма) набором композиционных факторов. Поэтому f не различает никакие две неединичные p-группы для любого фиксированного простого числа p; мы будем обозначать через $f(p)$ значение f на неединичных p-группах.

Если класс $\mathfrak{F}$ совпадает с классом всех групп, у которых все главные факторы f-центральны, то мы говорим, что f — локальное задание для $\mathfrak{F}$. Это понятие обобщает понятие нильпотентности. Таким образом, проблема нахождения локальных заданий для классов групп равносильна проблеме нахождения обобщённо нильпотентных групп.

В настоящей статье мы анализируем связи между локальными заданиями различных типов и даём новое доказательство теоремы о локальном задании формации, являющейся $\mathfrak{N}_p$-насыщенной для любого простого числа p из некоторого множества ω простых чисел. Заметим, что теоремы, леммы, определения, утверждения и замечания имеют самостоятельную нумерацию.

2. Предварительные сведения

Мы используем стандартные обозначения и определения [15]. Мы говорим, что отображение f не различает группы из класса $\mathfrak{H}$, если $f(A) = f(B)$ для любых двух групп A и B из $\mathfrak{H}$. Следуя В. Гашюцу, определим $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ группы G как наименьшую нормальную подгруппу, фактор-группа по которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Гашюцево произведение $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — это класс всех групп G, таких что $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{F}$. Если формация $\mathfrak{F}$ замкнута относительно взятия нормальных подгрупп, то $\mathfrak{F} \circ \mathfrak{H}$ совпадает с классом $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ всех расширений $\mathfrak{F}$-групп с помощью $\mathfrak{H}$-групп.

Пусть $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, $\mathrm{Char}(\mathfrak{X})$ — множество порядков всех простых абелевых групп из $\mathfrak{X}$. Группа G называется pd-группой, если её порядок делится на простое число p; C_p — группа порядка p; если $\omega \subseteq \mathbb{P}$, то

$\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$; ωd-группа (главный ωd-фактор) — это группа (главный фактор) с порядком, делящимся хотя бы на одно простое число p из ω; $G_{\omega d}$ — наибольшая нормальная подгруппа, у которой все G-главные факторы являются ωd-группами ($G_{\omega d} = 1$, если все минимальные нормальные подгруппы из G являются ω'-группами). Если $\mathfrak{H}$ — класс групп, то $\mathfrak{H}_\omega$ — класс всех ω-групп из $\mathfrak{H}$. Главный фактор H/K группы G называется главным $\mathfrak{H}$-фактором, если $H/K \in \mathfrak{H}$. Цоколь $\mathrm{Soc}(G)$ группы $G \neq 1$ — это произведение всех минимальных нормальных подгрупп из G.

Пусть $[A]B$ — полупрямое произведение с нормальной подгруппой A; $O_\omega(G)$ — наибольшая нормальная ω-подгруппа из G; $\pi(G)$ — множество всех простых чисел, делящих порядок G; $\pi(\mathfrak{F}) = \bigcup\limits_{G\in\mathfrak{F}} \pi(G)$; $\mathfrak{N}$ — класс всех нильпотентных групп; $\mathfrak{A}$ — класс всех абелевых групп; $\mathrm{Com}(G)$ — класс всех групп, изоморфных композиционным факторам группы G; $\mathrm{Com}(\mathfrak{F}) = \bigcup\limits_{G\in\mathfrak{F}} \mathrm{Com}(G)$; $\mathrm{Com}^+(\mathfrak{F})$ — класс всех абелевых групп из $\mathrm{Com}(\mathfrak{F})$; $\mathrm{Com}^-(\mathfrak{F})$ — класс всех неабелевых групп из $\mathrm{Com}(\mathfrak{F})$; (G) — класс всех групп, изоморфных G; $\mathfrak{J}$ — класс всех простых (абелевых и неабелевых) групп; если $\mathfrak{L}$ — некоторый подкласс из $\mathfrak{J}$, то $\mathfrak{L}' = \mathfrak{J} \setminus \mathfrak{L}$; $\mathfrak{L}^+$ — класс всех абелевых групп из $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L}^- = \mathfrak{L} \setminus \mathfrak{L}^+$. Пусть $\mathrm{E}\mathfrak{H}$ — класс всех таких групп G, что $\mathrm{Com}(G) \subseteq \mathfrak{H}$; $G_{\mathrm{E}\mathfrak{H}}$ — $\mathrm{E}\mathfrak{H}$-радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная $\mathrm{E}\mathfrak{H}$-подгруппа из G. Если $S \in \mathfrak{J}$, то $C^S(G)$ — пересечение централизаторов всех главных $\mathrm{E}(S)$-факторов группы G ($C^S(G) = G$, если $S \notin \mathrm{Com}(G)$); в случае $S = C_p$ мы пишем $C^p(G)$ вместо $C^S(G)$.

Лемма 2.1 [23, леммы 2, 3].

1. *Если S — неабелева простая группа, то $C^S(G)$ — $\mathrm{E}(S)'$-радикал группы G, т. е. наибольшая нормальная подгруппа, не имеющая композиционных факторов, изоморфных S.*
2. *Пусть p — простое число, G — группа и $\mathfrak{H}$ — класс всех таких групп, у которых все главные p-факторы центральны. Тогда $C^p(G)$ совпадает с $\mathfrak{H}$-радикалом $G_\mathfrak{H}$ группы G.*

Следующие три леммы — это переформулировки лемм IV.4.14—IV.4.16 из [15], доказательства которых используют только $\mathfrak{N}_p$-насыщенность.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{N}_p$-насыщенная формация, p — простое число. Если $C_p \in \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$.*

Лемма 2.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{N}_p$-насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{N}_p$, p — простое число. Пусть N — элементарная абелева нормальная p-подгруппа из G, такая что $[N](G/N) \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 2.4. *Пусть p — простое число, и пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{N}_p$-насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{N}_p$. Пусть N — элементарная абелева нормальная p-подгруппа из G, такая что $G/N \in \mathfrak{F}$ и $[N]\big(G/C_G(N)\big) \in \mathfrak{F}$. Тогда $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Положим $M = [N](G/N)$, $C = C_G(N)$. Очевидно, что $C/N = C_{G/N}(N)$. В группе M мы имеем $C_M(N) = N \times C/N$, и C/N нормальна в M. Значит, $M/(C/N) \simeq [N](G/C) \in \mathfrak{F}$. Так как $M/N \in \mathfrak{F}$, то $M/\bigl(N \cap (C/N)\bigr) \simeq M \in \mathfrak{F}$. Теперь применяем лемму 2.3. $\square$

Лемма 2.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — $\mathfrak{N}_p$-насыщенная формация, содержащая $\mathfrak{N}_p$, p — простое число. Пусть $H \in \mathfrak{F}$ и $C^p(H) \leqslant L \trianglelefteq H$. Если N — неприводимый $\mathbb{F}_p(H/L)$-модуль, то $[N](H/L) \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 2.6 [15, утверждение IV.1.5]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация и $G \in \mathfrak{F}$. Пусть S, R, K — такие нормальные подгруппы из G, что $S \subseteq R$ и $K \subseteq C_G(R/S)$. Тогда $[R/S](G/K) \in \mathfrak{F}$.*

Лемма 2.7 [8, теорема 7.11; 20]. *Если $H/\Phi(G) = \mathrm{Soc}\bigl(G/\Phi(G)\bigr)$, то $C_G(H) \subseteq H$.*

Лемма 2.8 [15, лемма IV.4.11]. *Пусть p — простое число, $L = \Phi\bigl(O_p(G)\bigr)$. Тогда $C^p(G/L) = C^p(G)/L$.*

3. Локальные и ω-локальные спутники

Следующий тип локального задания предложил В. Гашюц [17].

Определение 3.1. Пусть f — такое локальное задание, что

$$f(A) = \bigcap_{p \in \pi(A)} f(p)$$

для любой группы $A \neq 1$. Пусть f-правило определено следующим образом: главный фактор H/K группы G f-централен, если $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$. Тогда f называется *локальным спутником*.

Определение 3.2 [15, с. 387]. Пусть A — некоторая группа операторов группы G и f — локальный спутник.

1. Скажем, что A действует *f-центрально* на A-композиционном факторе H/K группы G, если $A/C_A(H/K) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(H/K)$.
2. Скажем, что A действует *f-гиперцентрально* на G, если A действует f-центрально на каждом A-композиционном факторе группы G.

Удобное обозначение $\mathrm{LF}(f)$ для класса групп с локальным спутником f было введено К. Дёрком и Т. Хоуксом [15]. Очевидно, что $\mathrm{LF}(f)$ — непустая формация (всегда $1 \in \mathrm{LF}(f)$).

Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 3.1. *Пусть $\pi = \{p \in \mathbb{P} \mid f(p) \neq \varnothing\}$, f — локальный спутник. Тогда $\mathrm{LF}(f)$ состоит в точности из π-групп G, удовлетворяющих следующему условию: $G/O_{p',p}(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Таким образом, если $\pi = \varnothing$, то $\mathrm{LF}(f) = (1)$. Если же $\pi \neq \varnothing$, то*

$$\mathrm{LF}(f) = \mathfrak{E}_\pi \cap \left(\bigcap_{p \in \pi} \bigl(\mathfrak{E}_{p'}\mathfrak{E}_p f(p)\bigr)\right).$$

Напомним, что формация $\mathfrak{F}$ насыщенна, если из условия $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$ (по определению пустое множество — насыщенная формация). В. Гашюц показал, что каждая формация с локальным спутником является насыщенной. Этот факт вытекает также из следующей теоремы П. Шмида.

Теорема 3.1 [15, теорема IV.6.7]. *Пусть f — локальный спутник, и пусть A — группа операторов группы G. Если A действует f-гиперцентрально на $G/\Phi(G)$, то A действует f-гиперцентрально и на G.*

Следующий замечательный результат известен как теорема Гашюца—Любезедер—Шмида [15, теорема IV.4.6].

Теорема 3.2. *Непустая формация имеет локальный спутник тогда и только тогда, когда она является насыщенной.*

Прямая проверка показывает, что если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ — формация с локальным спутником f, таким что $f(p) = \mathfrak{F}$ для любого простого p. Очевидно, что формация $\mathfrak{A}_p \times \mathfrak{N}_{p'}$ всех нильпотентных групп с абелевой силовской p-подгруппой не является насыщенной, но для каждого простого $q \neq p$ из условия $G/\big(\Phi(G) \cap O_q(G)\big) \in \mathfrak{A}_p \times \mathfrak{N}_{p'}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{A}_p \times \mathfrak{N}_{p'}$. Приведём ещё один факт такого рода. Рассмотрим насыщенную формацию вида $\mathfrak{M} \circ \mathfrak{H}$. Здесь $\mathfrak{H}$ может не быть насыщенной, но для каждого простого $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{M})$ из условия $G/\big(\Phi(G) \cap O_p(G)\big) \in \mathfrak{H}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{H}$. Факты такого рода приводят к понятию ω-насыщенной формации [2].

Определение 3.3. Пусть ω — некоторое множество простых чисел. Формация $\mathfrak{F}$ называется *ω-насыщенной*, если для каждого простого $p \in \omega$ из условия $G/\big(\Phi(G) \cap O_p(G)\big) \in \mathfrak{F}$ всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Проблеме нахождения локальных заданий ω-насыщенных формаций посвящены статьи [3] и [23]. При решении этой проблемы оказалась полезной следующее понятие малого централизатора [14].

Определение 3.4. Пусть H/K — главный фактор группы G. *Малый централизатор* $c_G(H/K)$ фактора H/K в G — это подгруппа, порождённая всеми нормальными подгруппами N из G, для которых $\mathrm{Com}(NK/K) \cap \mathrm{Com}(H/K) = \varnothing$.

С помощью определения 3.4 мы можем ввести понятие ω-насыщенного спутника следующим образом.

Определение 3.5. Пусть ω — некоторое множество простых чисел и f — локальное задание, не различающее никакие неединичные ω'-группы; если $\omega' \neq \varnothing$, мы обозначим через $f(\omega')$ значение f на неединичных ω'-группах. Кроме того, мы предполагаем, что

$$f(A) = \bigcap_{p \in \pi(A) \cap \omega} f(p)$$

для любой ωd-группы A. Пусть f-правило определено следующим образом: главный фактор H/K группы G f-централен в G, если либо H/K — ωd-группа и $G/C_G(H/K)$ принадлежит $f(H/K)$, либо H/K — ω'-группа и $G/c_G(H/K) \in f(\omega')$. Тогда f называется *ω-локальным спутником*. Мы обозначаем через

$\mathrm{LF}_\omega(f)$ класс всех групп, у которых все главные факторы f-центральны. По определению $1 \in \mathrm{LF}_\omega(f)$.

Очевидно, что если $\omega = \mathbb{P}$, то ω-локальный спутник f — это локальный спутник и $\mathrm{LF}_\omega(f) = \mathrm{LF}(f)$. Если $\omega \neq \mathbb{P}$ и $f(\omega') = \varnothing$, то $\mathrm{LF}_\omega(f) = \mathrm{LF}(h)$, где $h(p) = f(p)$ при $p \in \omega$ и $h(p) = \varnothing$ при $p \in \omega'$.

Лемма 3.1 [23, лемма 1]. *Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый подкласс из $\mathfrak{J}$ и $\{S_i \mid i \in I\}$ — множество всех главных $\mathrm{E}\mathfrak{L}$-факторов группы G. Тогда $\bigcap\limits_{i\in I} c_G(S_i)$ совпадает с $\mathrm{E}(\mathfrak{L}')$-радикалом $G_{\mathrm{E}(\mathfrak{L}')}$ группы G.*

Замечание 3.1. В лемме 3.1 множество $\{c_G(S_i) \mid i \in I\}$ может оказаться пустым. Мы всегда следуем соглашению о том, что пересечение пустого множества подгрупп группы G совпадает с G.

Следующее утверждение аналогично утверждению 3.1.

Утверждение 3.2. *Пусть f — ω-локальный спутник, ω — собственное подмножество из $\mathbb{P}$. Пусть $\pi = \{p \in \omega \mid f(p) \neq \varnothing\}$. Тогда*

1) *если $\pi = \varnothing$ и $f(\omega') = \varnothing$, то $\mathrm{LF}_\omega(f) = (1)$;*
2) *если $\pi = \varnothing$ и $f(\omega') \neq \varnothing$, то $\mathrm{LF}_\omega(f) = \mathfrak{E}_{\omega'} \cap f(\omega')$;*
3) *если $f(\omega') \neq \varnothing$, то $\mathrm{LF}_\omega(f)$ состоит в точности из таких групп G, что $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/O_{p',p}(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G) \cap \omega$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) очевидны.

Докажем утверждение 3). Предположим, что $f(\omega') \neq \varnothing$, и пусть $G \in \mathrm{LF}_\omega(f)$. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех главных ω'-факторов группы G. Если главный фактор H/K группы G является ω'-группой, то $G/c_G(H/K) \in f(\omega')$. Поэтому $G/\bigcap\limits_{H/K\in\mathfrak{T}} c_G(H/K) \in f(\omega')$. По лемме 3.1 $\bigcap\limits_{H/K\in\mathfrak{T}} c_G(H/K) = G_{\omega d}$. Значит, $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$. Если $p \in \omega$ и H/K — главный pd-фактор, то $G/C_G(H/K) \in \in f(p)$, и мы получаем, что $G/O_{p',p}(G) \in f(p)$.

Обратно, пусть G — такая группа, что $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/O_{p',p}(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G) \cap \omega$. Очевидно, что в G все главные ωd-факторы f-центральны. Пусть H/K — главный ω'-фактор группы G. Тогда $G_{\omega d}K/K \subseteq c_G(H/K)$, и из того, что $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$, следует, что $G/c_G(H/K) \in f(\omega')$. □

Следующий результат распространяет теорему 3.2 на ω-насыщенные формации.

Теорема 3.3 [3, теорема 1]. *Пусть ω — некоторое множество простых чисел. Непустая формация имеет ω-локальный спутник тогда и только тогда, когда она ω-насыщенна.*

4. Композиционные и $\mathfrak{L}$-композиционные спутники

Главная идея В. Гашюца [17] состояла в изучении групп по модулю p-групп, и он реализовал её через локальные спутники разрешимых формаций. При изучении же неразрешимых групп мы должны следовать такому принципу: исследовать группы по модулю p-групп и простых групп. Такой подход был предложен в лекции [7] на конференции в 1973 г.; в этой лекции композиционные спутники фигурировали под названием «примарно однородные экраны».

Определение 4.1. Пусть f — локальное задание, и пусть f-правило определено следующим образом: главный фактор H/K группы G считается f-центральным, если $G/C_G(H/K) \in f(H/K)$. В этом случае f называется *композиционным спутником*, а через $\mathrm{CF}(f)$ обозначается класс всех групп, у которых все главные факторы f-центральны.

Определение 4.2. Пусть A — некоторая группа операторов группы G, f — композиционный спутник.

1. Скажем, что A действует *f-центрально* на A-композиционном факторе H/K группы G, если $A/C_A(H/K) \in f(H/K)$.
2. Скажем, что A действует *f-гиперцентрально* на G, если A действует f-центрально на каждом A-композиционном факторе группы G.

В качестве примера рассмотрим класс $\mathfrak{N}^*$ всех квазинильпотентных групп (определение квазинильпотентной группы см. в [19, определение X.13.2]). Легко проверить, что $\mathfrak{N}^* = \mathrm{CF}(f)$, где f — такой композиционный спутник, что $f(p) = (1)$ для любого простого p и $f(S) = \mathrm{form}(S)$ для любой неабелевой простой группы S. Здесь $\mathrm{form}(S)$ — наименьшая формация, содержащая S; она состоит из всех групп, представимых в виде прямого произведения $A_1 \times \ldots \times A_n$, где $A_i \simeq S$ для любого i.

Как отмечено в [15], формации с композиционными спутниками рассматривались (в другой терминологии) Р. Бэром в его неопубликованной рукописи. Согласно Р. Бэру, формация $\mathfrak{F}$ называется *разрешимо насыщенной*, если из того, что $G/\Phi(G_{\mathfrak{S}}) \in \mathfrak{F}$, всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$ (здесь $G_{\mathfrak{S}}$ — разрешимый радикал группы G). Формация $\mathfrak{N}^*$ не является насыщенной, но она разрешимо насыщенна.

Вопрос о совпадении семейства непустых разрешимо насыщенных формаций и семейства формаций с композиционными спутниками решён следующей теоремой Р. Бэра.

Теорема 4.1 [15, теорема IV.4.17]. *Непустая формация имеет композиционный спутник тогда и только тогда, когда она разрешимо насыщенна.*

Композиционный спутник h называется *приведённым*, если $h(S) \subseteq \mathrm{CF}(h)$ для любой простой группы S. Если $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}(f)$, то $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}(h)$, где $h(S) = f(S) \cap \mathfrak{F}$ для любой простой группы S. Таким образом, если формация имеет композиционный спутник, то она имеет также приведённый композиционный спутник.

Замечание 4.1. Пусть $\{\mathrm{CF}(f_i) \mid i \in I\}$ — некоторое семейство формаций, имеющих композиционные спутники. Пусть $f = \bigcap\limits_{i \in I} f_i$ — такой композиционный спутник, что $f(S) = \bigcap\limits_{i\in I} f_i(S)$ для каждой группы $S \in \mathfrak{J}$. Очевидно, $\mathrm{CF}(f) = \bigcap\limits_{i\in I} \mathrm{CF}(f_i)$.

Замечание 4.2. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — класс всех формаций $\mathfrak{F}_i$, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_i$;
2) $\mathfrak{F}_i$ имеет композиционный спутник.

Положим

$$\mathrm{cform}(\mathfrak{X}) = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i.$$

Согласно замечанию 4.1 $\mathrm{cform}(\mathfrak{X})$ имеет композиционный спутник. В последующем мы будем использовать обозначение $\mathrm{cform}(\mathfrak{X})$.

Замечание 4.3. Предположим, что непустая формация $\mathfrak{F}$ имеет композиционный спутник. Пусть $\{f_i \mid i \in I\}$ — класс всех композиционных спутников формации $\mathfrak{F}$. Ввиду замечаний 4.1 и 4.2 $f = \bigcap\limits_{i\in I} f_i$ — композиционный спутник формации $\mathfrak{F}$; f называется *минимальным композиционным спутником* формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 4.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп, S — простая группа. Тогда $\mathfrak{H} = \mathrm{Q}\big(G/C^S(G) \mid G \in \mathrm{form}(\mathfrak{X})\big)$ — формация, причём $\mathrm{Com}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{Com}(\mathfrak{X})$.*

Доказательство. Согласно [15, утверждение IV.1.10] $\mathfrak{H}$ является формацией. По [15, лемма II.1.18] $\mathrm{form}(\mathfrak{X}) = \mathrm{QR}_0\mathfrak{X}$. Поэтому справедливо включение $\mathrm{Com}(\mathfrak{H}) \subseteq \mathrm{Com}(\mathfrak{X})$. □

Лемма 4.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп и f — такой композиционный спутник, что $f(S) = \mathrm{Q}\big(G/C^S(G) \mid G \in \mathrm{form}(\mathfrak{X})\big)$ при $S \in \mathrm{Com}(\mathfrak{X})$ и $f(S) = \varnothing$ при $S \in \mathfrak{J} \setminus \mathrm{Com}(\mathfrak{X})$. Тогда f — минимальный композиционный спутник формации $\mathrm{cform}(\mathfrak{X})$.*

Доказательство. Пусть f_1 — минимальный композиционный спутник формации $\mathfrak{F} = \mathrm{cform}(\mathfrak{X})$ (см. замечание 4.3). Мы докажем, что $f_1 = f$.

Так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $G/C^S(G) \in f_1(S)$ для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ и любой группы $S \in \mathrm{Com}(G)$, а потому $f(S) \subseteq f_1(S)$. Итак, $\mathrm{CF}(f) \subseteq \mathfrak{F} = \mathrm{CF}(f_1)$. С другой стороны, $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{CF}(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}(f)$ и $f = f_1$. □

Следующая теорема, доказанная независимо в [6] и [21], была первым по времени важным результатом о композиционных формациях.

Теорема 4.2. *Пусть f — приведённый композиционный спутник. Пусть A — некоторая группа автоморфизмов группы G. Если A действует f-гиперцентрально на G, то $A \in \mathrm{CF}(f)$.*

Применение теоремы 4.2 к формации $\mathfrak{U}$ всех сверхразрешимых групп даёт следующий результат.

Теорема 4.3 [6, теорема 2.4]. *Пусть A — некоторая группа автоморфизмов группы G. Предположим, что существует цепь A-инвариантных подгрупп*

$$G = G_0 > G_1 > \ldots > G_n = 1$$

с простыми индексами $|G_{i-1} : G_i|$. Тогда A сверхразрешима.

В 1968 году С. А. Сыскин пытался доказать теорему 4.3 в случае, когда G разрешима, но его доказательство [5] оказалось ошибочным.

В [22] было начато изучение локальных заданий ω-разрешимо насыщенных формаций.

Определение 4.3. Пусть ω — некоторое множество простых чисел. Формация $\mathfrak{F}$ называется

1) *ω-разрешимо насыщенной*, если из условия

$$G/N \in \mathfrak{F} \text{ для } G\text{-инвариантной } \omega\text{-подгруппы } N \text{ из } \Phi(G_{\omega\text{-}\mathfrak{S}})$$

всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$ (здесь $G_{\omega\text{-}\mathfrak{S}}$ — ω-разрешимый радикал группы G);

2) *$\mathfrak{N}_\omega$-насыщенной*, если для любого $p \in \omega$ из того, что $G/\Phi\big(O_p(G)\big) \in \mathfrak{F}$, всегда следует, что $G \in \mathfrak{F}$.

Если $\omega = \{p\}$, то ω-разрешимо насыщенную формацию мы называем p-разрешимо насыщенной. Ниже мы установим, что p-разрешимая насыщенность эквивалентна $\mathfrak{N}_p$-насыщенности, а значит, формация ω-разрешимо насыщенна тогда и только тогда, когда она p-разрешимо насыщенна для любого $p \in \omega$.

Определение 4.4. Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс простых групп. Пусть f — локальное задание, не различающее никакие неединичные $\mathrm{E}(\mathfrak{L}')$-группы; если $\mathfrak{L}' \neq \varnothing$, мы обозначаем через $f(\mathfrak{L}')$ значение f на неединичных $\mathrm{E}(\mathfrak{L}')$-группах. Пусть f-правило определено следующим образом: главный фактор H/K группы G f-централен в G, если либо H/K — $\mathrm{E}\mathfrak{L}$-группа и $G/C_G(H/K)$ принадлежит $f(H/K)$, либо H/K — $\mathrm{E}(\mathfrak{L}')$-группа и $G/c_G(H/K) \in f(H/K) = f(\mathfrak{L}')$. Тогда f называется *$\mathfrak{L}$-композиционным спутником*. Мы обозначаем через $\mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f)$ класс всех групп, у которых все главные факторы f-центральны. По определению $1 \in \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f)$.

Очевидно, что если $\mathfrak{L} = \mathfrak{J}$, то $\mathfrak{L}$-композиционный спутник f является композиционным спутником и $\mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f) = \mathrm{CF}(f)$. Если $\mathfrak{L} \neq \mathfrak{J}$ и $f(\mathfrak{L}') = \varnothing$, то $\mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f) = \mathrm{CF}(h)$, где $h(S) = f(S)$ при $S \in \mathfrak{L}$ и $h(S) = \varnothing$ при $S \in \mathfrak{L}'$.

Утверждение 4.1. *Пусть $\mathfrak{L}$ — некоторый класс простых групп и f — $\mathfrak{L}$-композиционный спутник. Пусть $\mathfrak{K} = \{S \in \mathfrak{L} \mid f(S) \neq \varnothing\}$. Тогда*

1) *если $\mathfrak{K} = \varnothing$ и $f(\mathfrak{L}') = \varnothing$, то $\mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f) = (1)$;*
2) *если $\mathfrak{K} = \varnothing$ и $f(\mathfrak{L}') \neq \varnothing$, то $\mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f) = \mathrm{E}(\mathfrak{L}') \cap f(\mathfrak{L}')$;*
3) *если $f(\mathfrak{L}') \neq \varnothing$, то $\mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f)$ состоит в точности из всех таких групп G, что $G/G_{\mathrm{E}\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}')$ и $G/C^S(G) \in f(S)$ для каждой группы $S \in \mathrm{Com}(G) \cap \mathfrak{L}$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) очевидны.

Докажем утверждение 3). Предположим, что $f(\mathfrak{L}') \neq \varnothing$, и пусть $G \in \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f)$. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех главных $\mathrm{E}(\mathfrak{L}')$-факторов группы G. Если главный фактор H/K группы G — $\mathrm{E}(\mathfrak{L}')$-группа, то $G/c_G(H/K) \in f(\mathfrak{L}')$. Поэтому $G/\bigcap\limits_{H/K\in\mathfrak{T}} c_G(H/K) \in f(\mathfrak{L}')$. По лемме 3.1 $\bigcap\limits_{H/K\in\mathfrak{T}} c_G(H/K) = G_{\mathrm{E}\mathfrak{L}}$. Таким образом, $G/G_{\mathrm{E}\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}')$. Если $S \in \mathfrak{L}$ и H/K — главный $\mathrm{E}\mathfrak{L}$-фактор, то $G/C_G(H/K) \in f(S)$, и мы имеем $G/C^S(G) \in f(S)$.

Обратно, пусть G — такая группа, что $G/G_{\mathrm{E}\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}')$ и $G/C^S(G) \in f(S)$ для каждой группы $S \in \mathrm{Com}(G) \cap \mathfrak{L}$. Очевидно, все G-главные $\mathrm{E}\mathfrak{L}$-факторы f-центральны. Пусть H/K — G-главный $\mathrm{E}(\mathfrak{L}')$-фактор группы G. Тогда $G_{\mathrm{E}\mathfrak{L}} \subseteq c_G(H/K)$, и поэтому из того, что $G/G_{\mathrm{E}\mathfrak{L}} \in f(\mathfrak{L}')$, следует, что $G/c_G(H/K) \in f(\mathfrak{L}')$. □

$\mathfrak{L}$-композиционный спутник f называется *приведённым*, если $f(S) \in \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f)$ для каждой группы $S \in \mathfrak{J}$. Если $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f)$, то $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$, где $h(S) = f(S) \cap \mathfrak{F}$ для любой простой группы S. Таким образом, если формация имеет $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, то она имеет и приведённый $\mathfrak{L}$-композиционный спутник.

Лемма 4.3. *Если $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f)$, то $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$, где h — такой приведённый $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, что $h(S) = \mathfrak{F}$ для любой группы $S \in (\mathfrak{L}^+)'$.*

Доказательство. Мы можем предположить без ограничения общности, что f — приведённый спутник. Пусть $\mathfrak{H} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$, где $h(S) = f(S)$ при $S \in \mathfrak{L}^+$ и $h(S) = \mathfrak{F}$ при $S \in (\mathfrak{L}^+)'$. Очевидно, что $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathfrak{H} \nsubseteq \mathfrak{F}$, и выберем группу G минимального порядка в $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $L = G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, причём L не является f-центральной. Очевидно, что $c_G(L) = 1$, и если L неабелева, то $C_G(L) = 1$. Пусть $A \in \mathrm{Com}(L)$. Применяя определение 4.4 и рассматривая случаи $A \in \mathfrak{L}^+$, $A \in \mathfrak{L}^-$ и $A \in \mathfrak{L}'$, мы приходим к противоречию. □

Теорема 4.4 [4, теорема 2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\mathfrak{L}$ — некоторый класс простых групп. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *$\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{L}$-композиционный спутник*;
2) *$\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{L}^+$-композиционный спутник.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f)$. Применяя лемму 4.3, мы можем считать, что f — приведённый спутник и $f(S) = \mathfrak{F}$ для каждой группы $S \in (\mathfrak{L}^+)'$. Пусть $\mathfrak{H} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}^+}(h)$, где h — такой $\mathfrak{L}^+$-композиционный спутник, что $h(S) = f(S)$ при $S \in \mathfrak{L}^+$ и $h(S) = \mathfrak{F}$ при $S \in \mathfrak{L}' \cup \mathfrak{L}^- = (\mathfrak{L}^+)'$. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Если G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$, то $L = G^{\mathfrak{H}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, причём L не является h-центральной. Очевидно, что $c_G(L) = 1$ и $C_G(L) = 1$, если L неабелева. Применяя определение 4.4, мы видим, что L h-центральна, и получаем противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$.

Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $L = G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, причём L не является f-центральной. Очевидно, что $c_G(L) = 1$ и $C_G(L) = 1$, если L неабелева. Снова применяя определение 4.4, мы видим, что L f-центральна, и приходим к противоречию. Таким образом, $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}^+}(f)$. Учитывая лемму 4.3, мы можем считать, что f — приведённый спутник и $f\big((\mathfrak{L}^+)'\big) = \mathfrak{F}$. Пусть h — такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, что $h(S) = f(S)$ при $S \in \mathfrak{L}^+$ и $h(S) = \mathfrak{F}$ при $S \in (\mathfrak{L}^+)'$. Легко проверить, что $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$. $\square$

Замечание 4.4. Из теоремы 4.4 следует, что каждая непустая формация $\mathfrak{F}$ со свойством $\mathrm{Com}^+(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{L} = \varnothing$ имеет $\mathfrak{L}$-композиционный спутник.

Замечание 4.5. Если $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^+$ и $\omega = \pi(\mathfrak{L})$, то мы будем пользоваться термином «ω-композиционный спутник» и обозначениями $\mathrm{CF}_\omega(f)$, $f(\omega')$ вместо термина «$\mathfrak{L}$-композиционный спутник» и обозначений $\mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f)$, $f(\mathfrak{L}')$ соответственно.

Теорема 4.5 [22, теоремы 3.1, 3.2]. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, ω — некоторое множество простых чисел. Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{N}_\omega$-насыщенной*;
2) *формация $\mathfrak{F}$ ω-разрешимо насыщенна*;
3) $\mathrm{cform}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{N}_{\omega'}\mathfrak{F}$;
4) $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_\omega(f)$, *где f — ω-композиционный спутник, удовлетворяющий следующим условиям*:
   а) $f(p) = \mathrm{Q}\big(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}\big)$, *если $p \in \omega$ и $C_p \in \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$*;
   б) $f(p) = \varnothing$, *если $p \in \omega$ и $C_p \notin \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$*;
   в) $f(S) = \mathfrak{F}$, *если $S \in \mathfrak{J} \setminus \{C_p \mid p \in \omega\}$*.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 3). Положим $\mathfrak{H} = \mathrm{cform}(\mathfrak{F})$. Зафиксируем $p \in \omega$. Так как $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то достаточно показать, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$. Очевидно, что группа G монолитична и $L = \mathrm{Soc}(G)$ совпадает с $\mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$-корадикалом группы G. Так как $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \geqslant L$. Так как $G \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}$. Так как группа G монолитична и $G \notin \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$, то $G^{\mathfrak{F}}$ — p-группа. Из того, что $G/L \in \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$, следует, что $(G/L)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}/L$ — p'-группа. Поэтому $G^{\mathfrak{F}} = L = G^{\mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}}$. По лемме 4.2 $\mathfrak{H}$ имеет такой композиционный спутник h, что $h(p) = \mathrm{Q}(A/C^p(A) \mid A \in \mathfrak{F})$. Так как L — p-группа, то $C_p \in \mathrm{Com}(G)$. Теперь из леммы 4.1 следует, что $C_p \in \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$. Таким образом, применяя лемму 2.2, мы получаем, что $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$. Так как h — композиционный спутник формации $\mathfrak{H}$, то $G/C_G(L) \in h(p)$. Поэтому $[L]\big(G/C_G(L)\big) \in \mathfrak{H}$, причём $G/C_G(L)$ действует без неподвижных точек на L. Получается, что $G/C_G(L) \simeq T/N$, $T = A/C^p(A)$, $A \in \mathfrak{F}$. Если $C_p \notin \mathrm{Com}(A)$, то $A = C_p(A)$, $T = 1$ и $G = L \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $C_p \in \mathrm{Com}(A)$. Так как $G/C_G(L) \simeq T/N$, то мы можем рассматривать L как неприводимый $\mathbb{F}_p(T/N)$-модуль. Тогда L становится неприводимым $\mathbb{F}_pT$-модулем по инфляции [15, с. 105].

Так как $T = A/C^p(A)$, мы получаем, ввиду леммы 2.5, что $[L]T \in \mathfrak{F}$. Из леммы 2.6 тогда следует, что $[L](T/N) \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из того, что $T/N \simeq G/C_G(L)$, мы выводим, что $[L]\bigl(G/C_G(L)\bigr) \in \mathfrak{F}$. Следовательно, по лемме 2.4 мы получаем, что $G \in \mathfrak{F}$.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 2). Достаточно рассмотреть только случай $\omega = \{p\}$. Пусть H — p-разрешимая нормальная подгруппа из G, $L = O_p(H) \cap \cap \Phi(H)$ и $G/L \in \mathfrak{F}$. Нам нужно доказать, что $G \in \mathfrak{F}$. Если $O_{p'}(H) \neq 1$, то $LO_{p'}(H)/O_{p'}(H) \leqslant \Phi\bigl(H/O_{p'}(H)\bigr)$, и по индукции мы получаем, что $G/O_{p'}(H) \in \in \mathfrak{F}$. Отсюда и из того, что $G/L \in \mathfrak{F}$, следует, что $G \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $O_{p'}(H) = 1$. По лемме 4.2 $\mathfrak{H} = \mathrm{cform}(\mathfrak{F})$ имеет такой композиционный спутник h, что $h(p) = \mathrm{Q}(A/C^p(A) \mid A \in \mathfrak{F})$. Пусть t — такой локальный спутник, что $t(p) = h(p)$ и $t(q) = \mathfrak{E}$ для любого простого $q \neq p$. Так как $G/L \in \mathfrak{F} \subseteq \subseteq \mathfrak{H}$ и $L = \Phi(H)$, то G действует t-гиперцентрально на $H/\Phi(H)$. По теореме 3.1 G действует t-гиперцентрально на $L = \Phi(H)$, и мы получаем, что $G \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$. Таким образом, $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{p'} \cap \mathfrak{N}_p = (1)$. Итак, $G \in \mathfrak{F}$, что и требовалось.

Убедимся в справедливости импликации 1) $\Longrightarrow$ 4). Предположим, что формация $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{N}_\omega$-насыщенной. Пусть h — минимальный композиционный спутник формации $\mathfrak{H} = \mathrm{cform}(\mathfrak{F})$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{CF}_\omega(f)$, где f — ω-композиционный спутник, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $f(p) = h(p)$, если $p \in \omega$;

б) $f(S) = \mathfrak{F}$, если $S \in \mathfrak{J} \setminus \{C_p \mid p \in \omega\}$.

Включение $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$ очевидно. Предположим, что обратное включение неверно, и пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $L = G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Если L не является абелевой ω-группой, то из $G \in \mathfrak{M}$ и $c_G(L) = 1$ получаем, что $G \simeq G/c_G(L) \in \mathfrak{F}$. Поэтому L — p-группа для некоторого $p \in \omega$, и $G/C^p(G) \in f(p) = h(p)$. Таким образом, $G \in \mathfrak{H}$. Так как справедлива импликация 1) $\Longrightarrow$ 3), мы получаем, что $G \in \mathfrak{N}_{p'}\mathfrak{F}$, и поэтому $G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_{p'} \cap \mathfrak{N}_p = (1)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Заметим, что согласно лемме 4.2 равенство $f(p) = h(p) = \varnothing$ выполняется, если $p \in \omega$ и $C_p \notin \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$.

Докажем импликацию 4) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $G/L \in \mathfrak{F}$ и $L = \Phi\bigl(O_p(G)\bigr)$, $p \in \omega$. Согласно лемме 2.8 $C^p(G)/L = C^p(G/L)$. Применяя утверждение 4.1 к G/L, мы имеем $G/O_p(G) \simeq (G/L)/O_p(G/L) \in \mathfrak{F}$ и $G/C^p(G) \simeq (G/L)/C^p(G/L) = = (G/L)/C^p(G/L) \in f(p)$. Но тогда по утверждению 4.1 $G \in \mathfrak{F}$.

Так как $\Phi\bigl(O_p(G)\bigr) \leqslant \Phi(G_{\omega\text{-}\mathfrak{S}})$ для любого $p \in \omega$, то ясно, что из утверждения 2) следует 1). □

Следствие 4.5.1. *Если непустая формация $\mathfrak{F}$ p-разрешимо насыщенна и $C_p \in \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$, то $\mathfrak{F}$ имеет такой p-композиционный спутник f, что $f(p') = \mathfrak{F}$ и $f(p) = \mathrm{Q}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F})$.*

Следствие 4.5.2. *Если непустая формация $\mathfrak{F}$ разрешимо насыщенна, то $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}(f)$, где f — композиционный спутник, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) $f(p) = \mathrm{Q}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F})$, *если* $p \in \omega$ *и* $C_p \in \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$;

2) $f(S) = \mathfrak{F}$ *для любой группы* $S \in \mathrm{Com}^-(\mathfrak{F})$;
3) $f(S) = \varnothing$ *для любой группы* $S \in \mathfrak{J} \setminus \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$.

Теорема 4.6 [22, теорема 3.1 (b)]. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *непустая* ω-*насыщенная формация и* h — *минимальный композиционный спутник формации* $\mathrm{cform}(\mathfrak{F})$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(f)$, *где* f — *такой* ω-*локальный спутник, что* $f(p) = h(p)$ *для любого* $p \in \omega$.

Доказательство. Мы можем предположить без потери общности, что $\omega \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Согласно лемме 4.2 $h(S) = \mathrm{Q}(H/C^S(H) \mid H \in \mathfrak{F})$ при $S \in \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$ и $h(S) = \varnothing$ при $S \in \mathfrak{J} \setminus \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$.

Пусть p — простое число из ω, S — неабелева pd-группа из $\mathrm{Com}(\mathfrak{F})$. Докажем, что $h(S) \subseteq h(p)$. Рассмотрим $R = H/C^S(H)$, $H \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 2.1 $C^S(H)$ — наибольшая нормальная подгруппа, не имеющая композиционных факторов, изоморфных S. Очевидно, что $O_{p',p}(R) = 1$. Пусть $A_p(R)$ — p-фраттиниев модуль, т. е. ядро универсального фраттиниева p-элементарного R-расширения:

$$1 \longrightarrow A_p(R) \xrightarrow{\mu} E \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 1.$$

Здесь $E/A_p(R) \simeq R$, $A_p(R)$ — элементарная абелева p-группа, содержащаяся в $\Phi(E)$. Пусть $N_1, \ldots, N_t$ — все минимальные нормальные подгруппы из E, содержащиеся в $A_p(R)$. Так как $\mathfrak{F}$ p-насыщенна, то $E \in \mathfrak{F} \subseteq \mathrm{cform}(\mathfrak{F})$, а значит, $E/\bigcap_i C_E(N_i) \in h(p)$. Так как $N_1, \ldots, N_t$ являются простыми подмодулями $\mathbb{F}_pR$-модуля $A_p(R)$, то $R/\mathrm{Ker}\big(R \text{ на } (N_1 \ldots N_t)\big) \in h(p)$. По теореме Р. Л. Грисса и П. Шмида $\mathrm{Ker}\big(R \text{ на } (N_1 \ldots N_t)\big) = O_{p',p}(R)$ (см. [18] или [15, с. 853]). Так как $O_{p',p}(R) = 1$, то $R \in h(p)$. Таким образом, $h(S) = \mathrm{Q}(H/C^S(H) \mid H \in \mathfrak{F}) \subseteq h(p)$, если $S \in \mathrm{Com}(\mathfrak{F})$ и $p \in \omega \cap \pi(S)$.

Пусть f — такой ω-локальный спутник, что $f(p) = h(p)$ при $p \in \omega$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$ при $\omega' \neq \varnothing$. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_\omega(f)$.

Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathrm{LF}_\omega(f)$. Тогда $L = G^{\mathrm{LF}_\omega(f)}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G, причём L не является f-центральной в G. Если L — ω'-группа, то $c_G(L) = 1$, и $G \simeq G/c_G(L) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$. Если L — неабелева pd-группа для некоторого $p \in \omega$ и $S \in \mathrm{Com}(L)$, то $C_G(L) = 1$, и мы получаем, что $G \simeq G/C_G(L) \in h(S) \subseteq h(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Предположим, что L является p-группой для некоторого $p \in \omega$. Так как L не f-центральна, то $L \not\subseteq Z(G)$. Согласно лемме 2.1 $C^p(G) = 1$. Значит, $G \in h(p) = \mathrm{Q}(H/C^p(H) \mid H \in \mathfrak{F})$, т. е. группа L f-центральна, и мы получаем противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{LF}_\omega(f)$.

Пусть G — группа минимального порядка из $\mathrm{LF}_\omega(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда $L = G^{\mathfrak{F}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Очевидно, что $c_G(L) = 1$, а если L неабелева, то $C_G(L) = 1$. Следовательно, из $G \in \mathrm{LF}_\omega(f)$ вытекает, что если L — ω'-группа, то $G \in f(\omega') = \mathfrak{F}$, а если L — неабелева pd-группа для некоторого $p \in \omega$, то $G \in f(p) = h(p) \subseteq \mathfrak{F}$, и мы получаем противоречие. Предположим, что L — p-группа, $p \in \omega$. Очевидно, что L не содержится в $\Phi(G)$ (напомним, что формация $\mathfrak{F}$ p-насыщенна). По лемме 2.7 $L = C_G(L)$. Так как

L f-центральна, мы получаем, что $G = [L]T$, где $T \in f(p)$. Значит, $T \simeq R/K$, где $R = H/C^p(H)$ для некоторой $H \in \mathfrak{F}$. Теперь мы можем рассматривать L как неприводимый $\mathbb{F}_pR$-модуль по инфляции [15, с. 105]. Согласно лемме 2.5 $[L]R \in \mathfrak{F}$. Так как K действует тождественно на L, то, применяя лемму 2.6, получаем, что $[L](R/K) \simeq LT = G \in \mathfrak{F}$, и мы снова приходим к противоречию. Таким образом, $\mathrm{LF}_\omega(f) = \mathfrak{F}$. □

Следствие 4.6.1. *Если непустая формация $\mathfrak{F}$ ω-насыщенна, то $\mathfrak{F}$ имеет такой ω-локальный спутник f, что $f(p) = \mathrm{Q}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ при $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{F})$, $f(p) = \varnothing$ при $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{F})$ и $f(\omega') = \mathfrak{F}$ при $\omega' \neq \varnothing$.*

Следствие 4.6.2. *Если непустая формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной, то $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}(f)$, где f — такой локальный спутник, что $f(p) = \mathrm{Q}(G/C^p(G) \mid G \in \mathfrak{F})$ при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ и $f(p) = \varnothing$ при любом $p \notin \pi(\mathfrak{F})$.*

5. $\mathfrak{X}$-локальные формации

В 1985 году П. Фёрстер [16] ввёл понятие «$\mathfrak{X}$-локальная формация» с целью получения общего расширения теорем 3.2 и 4.1.

Определение 5.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — такой класс простых групп, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{X})$. Рассмотрим отображение

$$f\colon \pi(\mathfrak{X}) \cup \mathfrak{X}' \to \{\text{формации}\},$$

не различающее никакие две неединичные изоморфные группы. Обозначим через $\mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(f)$ класс всех групп G, удовлетворяющих следующим условиям:

1) если H/K — главный $\mathrm{E}\mathfrak{X}$-фактор группы G, то $G/C_G(H/K)$ принадлежит $f(p)$ для любого $p \in \pi(H/K)$;
2) если G/L — монолитическая фактор-группа группы G и $\mathrm{Soc}(G/L) \in \mathrm{E}(\mathfrak{X}')$, то $G/L \in f(S)$, где $S \in \mathrm{Com}\big(\mathrm{Soc}(G/L)\big)$.

Класс $\mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(f)$ является формацией; она называется *$\mathfrak{X}$-локальной формацией*.

$\mathfrak{X}$-локальные формации изучались в [1,10—13]. В [24] с помощью некоторых лемм из [1] было доказано, что каждая $\mathfrak{X}$-локальная формация имеет $\mathfrak{X}^+$-композиционный спутник. Сейчас мы дадим прямое доказательство этого результата.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $\mathfrak{X}$ — такой класс простых групп, что $\mathrm{Char}(\mathfrak{X}) = \pi(\mathfrak{X})$. Пусть $\mathfrak{L}$ — такой класс простых групп, что $\mathfrak{L}^+ = \mathfrak{X}^+$.*

1. *Если $\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{X}$-локальной формацией, то $\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{L}$-композиционный спутник.*
2. *Если формация $\mathfrak{F}$ имеет $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, то она $\mathfrak{X}^+$-локальна.*

Доказательство. Положим $\omega = \mathrm{Char}(\mathfrak{X})$. Очевидно, что

$$\mathfrak{L}^- \cup \mathfrak{L}' = \mathfrak{X}^- \cup \mathfrak{X}' = (\mathfrak{L}^+)' = (\mathfrak{X}^+)'.$$

1. Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}}(f)$. Рассмотрим такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник h, что $h(p) = f(p) \cap \mathfrak{F}$ при $p \in \omega$ и $h(S) = \mathfrak{F}$ при $S \in \mathfrak{L}^- \cup \mathfrak{L}'$. Докажем, что $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$.

Предположим, что $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$. Тогда G монолитична и $G/M \in \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$, где M — цоколь группы G. Очевидно, что M совпадает с $\mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$-корадикалом группы G, причём каждый главный фактор между G и L h-централен. Предположим, что M — $\mathrm{E}(\mathfrak{L}^- \cup \mathfrak{L}')$-группа. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G \in h(S)$, где $S \in \mathrm{Com}(M)$. Так как $c_G(L) = 1$, то группа M h-центральна в G, и поэтому $G \in \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$. Предположим теперь, что M — p-группа, $p \in \omega$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то $G/C_G(M) \in f(p) \cap \mathfrak{F} = h(p)$, т. е. группа M h-центральна. Мы видим, что $G \in \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$, получили противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$.

Предположим теперь, что $\mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h) \not\subseteq \mathfrak{F}$. Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G монолитична и $G/M \in \mathfrak{F}$, где $M = G^{\mathfrak{F}}$ — цоколь группы G. Предположим, что M — $\mathrm{E}(\mathfrak{L}^- \cup \mathfrak{L}')$-группа. Тогда из того, что $c_G(L) = 1$, и из h-центральности L следует, что $G/c_G(M) \simeq G \in \mathfrak{F}$. Допустим, что M — p-группа, $p \in \omega$. Тогда

$$G/C_G(M) \in h(p) = \mathfrak{F} \cap f(p) \subseteq f(p).$$

Мы видим, что все главные факторы и все фактор-группы группы G удовлетворяют условиям 1) и 2) определения 5.1. Итак, $G \in \mathfrak{F}$, снова противоречие. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(h)$.

2. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, имеющая $\mathfrak{L}$-композиционный спутник. По лемме 4.3 $\mathfrak{F} = \mathrm{CF}_{\mathfrak{L}}(f)$, где f — такой $\mathfrak{L}$-композиционный спутник, что $f(S) = \mathfrak{F}$ для каждой группы $S \in \mathfrak{L}^- \cup \mathfrak{L}'$. Рассмотрим $\mathfrak{X}^+$-локальную формацию $\mathfrak{H} = \mathrm{LF}_{\mathfrak{X}^+}(h)$, где $h(p) = f(p)$ при $p \in \omega$ и $h(S) = \mathfrak{F}$ при $S \in (\mathfrak{X}^+)'$. Легко проверить, что $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$. □

Литература

[1] Баллестер-Болинше А., Кальво К., Шеметков Л. А. О частично насыщенных формациях конечных групп // Мат. сб. — 2007. — Т. 198, № 6. — С. 3—24.

[2] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. О частично локальных формациях // Докл. АН Беларуси. — 1995. — Т. 39, № 3. — С. 9—11.

[3] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. тр. — 1999. — Т. 2, № 2. — С. 114—147.

[4] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно $\mathfrak{L}$-композиционные формации конечных групп // Укр. мат. журн. — 2000. — Т. 52, № 6. — С. 783—797.

[5] Сыскин С. А. Сверхразрешимые группы автоморфизмов конечных разрешимых групп // Алгебра и логика. — 1968. — Т. 7, № 3. — С. 105—107.

[6] Шеметков Л. А. Ступенчатые формации групп // Мат. сб. — 1974. — Т. 94, № 4. — С. 628—648.

[7] Шеметков Л. А. Два направления в развитии непростых конечных групп (доклад, прочитанный на XII Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме в Свердловске в сентябре 1973 г.) // Успехи мат. наук. — 1975. — Т. 30, № 2. — С. 179—198.

[8] Шеметков Л. А. Формации конечных групп. — М.: Наука, 1978.

[9] Шеметков Л. А. О произведении формаций // Докл. АН БССР. — 1984. — Т. 28, № 2. — С. 101—103.

[10] Ballester A. Remarks on formations // Israel J. Math. — 1991. — Vol. 73, no. 1. — P. 97—106.

[11] Ballester-Bolinches A., Calvo C., Esteban-Romero R. Products of formations of finite groups // J. Algebra. — 2000. — Vol. 299, no. 2. — P. 602—615.

[12] Ballester-Bolinches A., Calvo C., Esteban-Romero R. $\mathfrak{X}$-saturated formations of finite groups // Commun. Algebra. — 2005. — Vol. 33, no. 4. — P. 1053—1064.

[13] Ballester-Bolinches A., Ezquerro L. M. Classes of Finite Groups. — Dordrecht: Springer, 2006.

[14] Ballester-Bolinches A., Shemetkov L. A. On lattices of p-local formations of finite groups // Math. Nachr. — 1997. — Vol. 186, no. 1. — P. 57—65.

[15] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. — Berlin: Walter de Gruyter, 1992.

[16] Förster P. Projektive Klassen endlicher Gruppen IIa. Gesättigte Formationen: ein allgemeiner Satz von Gaschütz—Lubeseder—Baer Typ // Publ. Sec. Mat. Univ. Autònoma Barcelona. — 1985. — Vol. 29, no. 2-3. — P. 39—76.

[17] Gaschütz W. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen // Math. Z. — 1963. — Vol. 80, no. 4. — P. 300—305.

[18] Griess R. L., Schmid P. Frattini module // Arch. Math. — 1978. — Vol. 30, no. 3. — P. 256—266.

[19] Huppert B., Blackburn N. Finite Groups. II. — Berlin: Springer, 1982. — (Grundlehren Math. Wiss.; Vol. 242).

[20] Schmid P. Über die Automorphismengruppen endlicher Gruppen // Arch. Math. — 1972. — Vol. 23, no. 3. — P. 236—242.

[21] Schmid P. Lokale Formationen endlicher Gruppen // Math. Z. — 1974. — Vol. 137, no. 1. — P. 31—48.

[22] Shemetkov L. A. Frattini extensions of finite groups and formations // Commun. Algebra. — 1997. — Vol. 25, no. 3. — P. 955—964.

[23] Shemetkov L. A. On partially saturated formations and residuals of finite groups // Commun. Algebra. — 2001. — Vol. 29, no. 9. — P. 4125—4137.

[24] Shemetkov L. A. A note on $\mathfrak{X}$-local formations // Проблемы физики, математики и техники. — 2010. — № 4 (5). — С. 64—65.