

О первичных радикалах и сплетениях частично упорядоченных групп

Е. Е. ШИРШОВА

Московский педагогический
государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченная группа, первичный радикал, полупрямое произведение, сплетение групп, направленная группа.

Аннотация

Рассматривается понятие декартова сплетения частично упорядоченных групп. Получен ряд результатов о полупрямых произведениях для АО-групп и групп с интерполяционным условием. Некоторые результаты касаются первичных радикалов направленных групп.

Abstract

E. E. Shirshova, On prime radicals and wreath products of partially ordered groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 16 (2010), no. 8, pp. 245—261.

The notion of a wreath product for partially ordered groups is considered. A series of results on semidirect products of AO-groups and interpolation groups is obtained. Some results are obtained concerning prime radicals of directed groups.

1. Введение

Пусть G — частично упорядоченная группа, e — единица группы G , множество $G^+ = \{x \in G \mid e \leq x\}$ — положительный конус группы G . Элементы $a, b \in G^+$ называются *почти ортогональными*, если из $c \leq a, b$ следует, что $c^n \leq a, b$ для всех элементов $c \in G$ и всех целых чисел $n > 0$. Понятие почти ортогональности было определено в [18]. Это один из способов обобщения понятия ортогональности, которое играет важную роль в теории решёточно упорядоченных групп (см. [3, 7]). Частично упорядоченная группа G называется *группой с условием почти ортогональности (АО-группой)*, если каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = ab^{-1}$, где элементы a и b почти ортогональны в группе G .

Для каждого элемента $g \neq e$ в частично упорядоченной группе G выпуклая направленная подгруппа M , максимальная среди подгрупп такого вида, не содержащих элемент g , называется *значением элемента g* [8, теорема 1.1]. Элементы a и b из G^+ называются *псевдоортогональными (р-ортогональными)*,

Фундаментальная и прикладная математика, 2010, том 16, № 8, с. 245—261.

© 2010 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

если каждый из них принадлежит всем значениям другого элемента. Единицу e группы G считают p -ортогональной любому элементу $g \in G^+$. Группа G называется *псевдорешёточно упорядоченной группой* (pl -группой), если каждый элемент $g \in G$ представим в виде $g = ab^{-1}$, где элементы a и b являются p -ортогональными в группе G . Каждая решёточно упорядоченная группа (l -группа) является pl -группой.

Частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой*, если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leq c \leq b_1, b_2$. Если G — направленная интерполяционная группа, то G называется *группой Рисса—Фукса*. (Впервые Л. Фукс в статье 1965 года (см. [7]) назвал группой Рисса направленную интерполяционную группу, но позднее группами Рисса стали называть интерполяционные группы с изолированным частичным порядком.)

Псевдорешёточно упорядоченная группа есть в точности интерполяционная $\mathcal{AO}$ -группа [18, следствие 10].

Понятие первичного радикала группы было введено в [15]. *Первичным радикалом* группы G называется пересечение таких её нормальных подгрупп H , для которых взаимный коммутант двух любых неединичных нормальных подгрупп фактор-группы G/H отличен от $\{H\}$. Первичный радикал группы является совокупностью строго энгелевых элементов. (Элемент $a \in G$ является *строго энгелевым*, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [[g_i, a_i], a_i]$, где $g_i \in G$ и $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, начиная с некоторого места все элементы равны единице.) В l -группе *l -первичный радикал* определяется как пересечение таких l -идеалов H группы G , для которых взаимный коммутант двух любых неединичных l -идеалов фактор-группы G/H отличен от $\{H\}$ (см. [4]). При этом l -первичный радикал оказался совокупностью l -строго энгелевых элементов l -группы G . (Элемент $a \in G$ называется *l -строго энгелевым*, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [g_i x_i g_i^{-1}, y_i]$, где $g_i \in G$ и $e \leq x_i, y_i \leq |a_i|$, начиная с некоторого места все элементы равны единице.)

В [5, 6] рассматривается понятие первичного радикала в классах $\mathcal{AO}$ -групп и pl -групп. В $\mathcal{AO}$ -группе (pl -группе) *$\mathcal{AO}$ -первичный* (pl -первичный) *радикал* определяется как пересечение таких o -идеалов H группы G , для которых взаимный коммутант двух любых неединичных o -идеалов фактор-группы G/H отличен от подгруппы $\{H\}$. При этом $\mathcal{AO}$ -первичный (pl -первичный) радикал оказался совокупностью $\mathcal{AO}$ -строго (pl -строго) энгелевых элементов $\mathcal{AO}$ -группы (pl -группы) G .

Во втором разделе данной работы уточняется понятие pl -строгой энгелевости и описывается связь между понятиями энгелевости в различных частично упорядоченных группах. Здесь же доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *l -первичные радикалы решёточно упорядоченных групп и только они являются pl -первичными радикалами этих групп.*

Теорема 2. *pl-первичные радикалы псевдорешёточно упорядоченных групп и только они являются АО-первичными радикалами этих групп.*

Пусть A и G — произвольные группы. Группа GA называется *полупрямым произведением подгруппы A и дополнительной подгруппы G* , если

$$GA = \{ga \mid g \in G, a \in A\},$$

подгруппа A является нормальной подгруппой группы GA , $G \cap A = \{e\}$ и умножение в группе GA определено по правилу

$$(g_1 a_1)(g_2 a_2) = g_1 g_2 a_1^{g_2} a_2,$$

где $a_1^{g_2} = g_2^{-1} a_1 g_2$ для всех элементов $g_1, g_2 \in G$ и элементов $a_1, a_2 \in A$ (см., например, [2]).

Если GA является полупрямым произведением подгруппы A и дополнительной подгруппы G , где группы G и A являются частично упорядоченными группами и $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех элементов $g \in G$, то обозначим через P множество

$$\{ga \in GA \mid \text{либо } g \in G^+ \setminus \{e\}, \text{ либо } g = e \text{ и } a \in A^+\}.$$

Предложение 3 [14, теорема 19]. *Если группа GA является полупрямым произведением частично упорядоченных подгруппы A и дополнительной подгруппы G , где $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех элементов $g \in G$, то на группе GA можно определить частичный порядок P , согласованный с порядками групп A и G , относительно которого A будет являться выпуклой подгруппой группы GA .*

В третьем разделе исследуются свойства полупрямых произведений частично упорядоченных групп. Там приводятся доказательства следующих теорем.

Теорема 4. *Пусть GA — полупрямое произведение АО-группы A и частично упорядоченной дополнительной подгруппы G , где $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех элементов $g \in G$. Тогда группа GA относительно частичного порядка P является АО-группой в том и только в том случае, когда G — АО-группа.*

Теорема 5. *Пусть GA — полупрямое произведение частично упорядоченной группы A и частично упорядоченной дополнительной подгруппы G , где $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех элементов $g \in G$. Тогда группа GA относительно частичного порядка P является pl-группой в том и только в том случае, когда G и A — pl-группы.*

В доказательстве теоремы 5 существенную роль играет следующее утверждение.

Теорема 6. *Если частично упорядоченная группа G является лексикографическим расширением частично упорядоченной группы M , то G — pl-группа в том и только в том случае, когда G — лексикографическое расширение pl-группы M с помощью pl-группы G/M .*

Декартово сплетение $A \text{ Wr } B$ произвольных групп A и B является полупрямым произведением группы A^B , (декартова произведения изоморфных копий группы A) и дополнительной подгруппы B (см., например, [2]).

В четвёртом разделе содержится описание декартовых сплетений групп Рисса—Фукса и групп с условием почти ортогональности.

Определение 7. Декартовым сплетением $A \text{ Wr } B$ частично упорядоченных групп A и B назовём полупрямое произведение BA^B , где A^B — декартово произведение частично упорядоченных групп A_b , если при этом группа A_b o -изоморфна группе A для каждого элемента $b \in B$.

Будут доказаны следующие утверждения.

Теорема 8. Если группа $A \text{ Wr } B$ является декартовым сплетением групп Рисса—Фукса A и B , то на группе $A \text{ Wr } B$ можно определить частичный порядок, согласованный с порядками групп A и B , при котором группа $A \text{ Wr } B$ также будет группой Рисса—Фукса.

Теорема 9. Если группа $A \text{ Wr } B$ является декартовым сплетением $\mathcal{AO}$ -групп A и B , то на группе $A \text{ Wr } B$ можно определить частичный порядок, согласованный с порядками групп A и B , при котором группа $A \text{ Wr } B$ также будет $\mathcal{AO}$ -группой.

Напомним, что для расширения G нормальной подгруппы A с помощью фактор-группы $B = G/A$ существуют инъективные гомоморфизмы $\varphi_\alpha: G \rightarrow A \text{ Wr } B$, определённые правилами $g\varphi_\alpha = \bar{g}f_g$ для любого $g \in G$ (см., например, [2]). Здесь $\alpha: B \rightarrow G$ — функция, выбирающая представители в смежных классах, и для $\bar{g} = gA$ $f_g(b) = ((\bar{g}b)\alpha)^{-1}gb\alpha$ для любого $g \in G$ и любого элемента $b \in B$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 10. Пусть группа Рисса—Фукса G является расширением o -идеала A с помощью фактор-группы $B = G/A$. Тогда инъективные гомоморфизмы $\varphi_\alpha: G \rightarrow A \text{ Wr } B$ являются порядковыми гомоморфизмами в группу Рисса—Фукса.

Теорема 11. Пусть $\mathcal{AO}$ -группа G является расширением o -идеала A с помощью фактор-группы $B = G/A$. Тогда инъективные гомоморфизмы $\varphi_\alpha: G \rightarrow A \text{ Wr } B$ являются порядковыми гомоморфизмами в $\mathcal{AO}$ -группу.

Теорема 12. Пусть частично упорядоченная группа G является лексикографическим расширением направленной подгруппы A с помощью частично упорядоченной группы $B = G/A$. Функции $\varphi_\alpha: G \rightarrow A \text{ Wr } B$ являются o -изоморфизмами в $\mathcal{AO}$ -группу $A \text{ Wr } B$ в том и только в том случае, если G — $\mathcal{AO}$ -группа.

Свойства сплетений pl -групп являются предметом изучения в пятом разделе работы. Здесь содержатся доказательства следующих теорем.

Теорема 13. Если группа $A \text{ Wr } B$ является декартовым сплетением pl -групп A и B , то на группе $A \text{ Wr } B$ можно определить частичный порядок, согласованный с порядками групп A и B , при котором группа $A \text{ Wr } B$ также будет pl -группой.

Теорема 14. Пусть частично упорядоченная группа G является лексикографическим расширением выпуклой нормальной подгруппы A с помощью частично упорядоченной группы $B = G/A$. Функции $\varphi_\alpha: G \rightarrow A \operatorname{Wr} B$ являются o -изоморфизмами в pl -группу $A \operatorname{Wr} B$ в том и только в том случае, если G — pl -группа.

В работе используется обычная для частично упорядоченных групп терминология (см., например, [3, 7]).

2. Обобщения строгой энгелевости

Напомним, что элемент a в $\mathcal{AO}$ -группе G называется $\mathcal{AO}$ -строго энгелевым, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [g_i^{-1}x_i g_i, y_i]$, где $g_i \in G$ и для подгрупп справедливы включения $G(x_i), G(y_i) \subseteq G(a_i)$, начиная с некоторого места все элементы равны единице e .

Замечание. Здесь и далее через $G(g)$ обозначается наименьшая выпуклая направленная подгруппа группы G , содержащая элемент $g \in G$, и $[a, b] = = a^{-1}b^{-1}ab$.

Предложение 15. Каждый $\mathcal{AO}$ -строго энгелев элемент $\mathcal{AO}$ -группы является её строго энгелевым элементом.

Доказательство. Напомним, что элемент $a \in G$ является строго энгелевым, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [[g_i, a_i], a_i]$, где $g_i \in G$ и $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, начиная с некоторого места все элементы равны единице.

Простые вычисления позволяют утверждать, что $a_{i+1} = [(g_i^{-1})^{-1}a^{-1}g_i^{-1}, a]$ и имеет место включение для подгрупп $G(a^{-1}) = G(a) \subseteq G(a)$. $\square$

Определение 16. Элемент a в pl -группе G будем называть pl -строго энгелевым, если в любой последовательности элементов (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = = [g_i^{-1}x_i g_i, y_i]$, где $g_i \in G$ и $x_i, y_i \in (G(a_i))^+$, начиная с некоторого места все элементы равны e .

Из теоремы 1.1 из [9] вытекает следующее утверждение.

Предложение 17. Элементы pl -группы псевдоортогональны тогда и только тогда, когда они почти ортогональны.

Предложение 18. Всякий pl -строго энгелев элемент pl -группы является её $\mathcal{AO}$ -строго энгелевым элементом.

Доказательство. Рассмотрим для pl -строго энгелева элемента g из pl -группы G некоторую последовательность элементов (a_i) вида $a_0 = g$, $a_{i+1} = = [g_i^{-1}x_i g_i, y_i]$, где $g_i \in G$ и справедливы включения для подгрупп $G(x_i), G(y_i) \subseteq \subseteq G(a_i)$.

В группе G $x_i = u_i v_i^{-1}$ и $y_i = s_i t_i^{-1}$ для некоторых псевдоортогональных элементов u_i и v_i (s_i и t_i). Тогда по замечанию 24 из [5] элемент a_{i+1} можно

выразить с помощью умножения через коммутаторы

$$[g_i^{-1}u_i g_i, s_i], \quad [g_i^{-1}u_i g_i, t_i], \quad [g_i^{-1}v_i g_i, s_i], \quad [g_i^{-1}v_i g_i, t_i].$$

Так как G является $\mathcal{AO}$ -группой, то по лемме 19 из [5] $x_i, y_i \in G(a_i)$. Тогда по предложению 17 и лемме 2 из [18] положительные элементы u_i, v_i, s_i, t_i принадлежат $G(a_i)$.

Каждая последовательность, содержащая один из четырёх указанных выше коммутаторов, стабилизируется, поэтому стабилизируется и последовательность (a_i) . $\square$

Лемма 19. Пусть G — решёточно упорядоченная группа. Если $g \in G$, то имеет место равенство подгрупп $G(g) = G(|g|)$.

Доказательство. По теореме 2.4 из [8] существует единственная пара p -ортогональных элементов a и $b \in G^+$, для которых $g = ab^{-1}$. В силу предложения 17 элементы a и b почти ортогональны в группе G . Тогда по определению 16 из [5] $G(g) = G(ab)$.

Но в l -группе G $a = g^+$ и $b = (g^-)^{-1}$, поэтому $|g| = ab$ (см., например, [7, часть I, гл. V, § 4]). $\square$

Предложение 20. Каждый l -строго энгелев элемент решёточно упорядоченной группы G является pl -строго энгелевым элементом.

Доказательство. Напомним, что элемент $a \in G$ называется l -строго энгелевым, если в любой последовательности (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [g_i x_i g_i^{-1}, y_i]$, где $g_i \in G$ и $e \leq x_i, y_i \leq |a_i|$, начиная с некоторого места все элементы равны единице.

Пусть $a \in G$. Рассмотрим элемент $a_1 = [b^{-1}ub, v]$, где $b \in G$ и $u, v \in (G(a))^+$. Так как по лемме 19 $G(a) = G(c)$, где $c = |a|$, то по лемме 3.4 из [18] справедливы неравенства $e \leq u \leq c^m$ и $e \leq v \leq c^n$ для некоторых целых положительных чисел m, n .

Согласно [7, часть I, гл. V, § 1, следствие 2] существуют элементы $x_1, x_2, \dots, x_m$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$, для которых верны соотношения

$$u = x_1 x_2 \cdots x_m, \quad v = y_1 y_2 \cdots y_n, \\ x_i \leq c \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad y_j \leq c \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

По замечанию 26 из [5]

$$a_1 = \prod_{i,j} r_{ij} [b^{-1}x_i b, y_j] r_{ij}$$

для элементов $r_{ij} \in G$. При этом имеют место неравенства $e \leq x_i, y_j \leq |a|$ для всех индексов $i = 1, 2, \dots, m$ и $j = 1, 2, \dots, n$.

Так как любая последовательность, содержащая коммутатор $[b^{-1}x_i b, y_j]$, по условию стабилизируется, то стабилизируется и последовательность, содержащая коммутатор a_1 . $\square$

В любой решёточно упорядоченной группе справедливо утверждение, обратное предложению 20.

Предложение 21. *Каждый pl -строго энгелев элемент решёточно упорядоченной группы G является l -строго энгелевым элементом.*

Доказательство. Пусть элемент $a \in G$ является pl -строго энгелевым. Рассмотрим последовательность (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [g_i x_i g_i^{-1}, y_i]$, где $g_i \in G$ и справедливы неравенства $e \leq x_i, y_i \leq |a_i|$. Тогда $x_i, y_i \in G(|a_i|)$, так как подгруппа $G(|a_i|)$ является выпуклой подгруппой группы G для любого индекса i . В силу леммы 19 $x_i, y_i \in G(a_i)$ для любого индекса i . Тогда из леммы 19 из [5] и того, что каждая l -группа является $\mathcal{AO}$ -группой, следует справедливость включений $G(x_i), G(y_i) \subseteq G(a_i)$.

Таким образом, в силу выбора элемента a последовательность (a_i) стабилизируется. Следовательно, a — l -строго энгелев элемент. $\square$

Доказательство теоремы 1. Так как из предложений 20 и 21 следует, что pl -строго энгелевы элементы решёточно упорядоченной группы и только они являются l -строго энгелевыми элементами этой группы, то утверждение теоремы 1 является следствием теоремы 7 из [5] и теоремы статьи [4]. $\square$

В произвольной pl -группе справедливо утверждение, обратное предложению 18.

Предложение 22. *Каждый $\mathcal{AO}$ -строго энгелев элемент псевдорешёточно упорядоченной группы G является pl -строго энгелевым элементом.*

Доказательство. Пусть элемент $a \in G$ является $\mathcal{AO}$ -строго энгелевым элементом. Рассмотрим последовательность (a_i) вида $a_0 = a$, $a_{i+1} = [g_i^{-1} x_i g_i, y_i]$, где $g_i \in G$ и $x_i, y_i \in (G(a_i))^+$ для любого индекса i .

Тогда из леммы 19 из [5] и того, что каждая pl -группа является $\mathcal{AO}$ -группой, следует справедливость включений $G(x_i), G(y_i) \subseteq G(a_i)$.

Таким образом, в силу выбора элемента a последовательность (a_i) стабилизируется. Следовательно, a — pl -строго энгелев элемент. $\square$

Доказательство теоремы 2. Так как из предложений 18 и 22 следует, что $\mathcal{AO}$ -строго энгелевы элементы псевдорешёточно упорядоченной группы и только они являются pl -строго энгелевыми элементами этой группы, утверждение теоремы 2 является следствием теоремы 7 из [5] и теоремы 7 из [6]. $\square$

3. Полупрямые произведения частично упорядоченных групп

Из определения почти ортогональных элементов вытекает следующее предложение.

Предложение 23. Единица e частично упорядоченной группы G почти ортогональна любому положительному элементу $a \in G$.

Напомним, что гомоморфизм $f: G \rightarrow H$ частично упорядоченной группы G в частично упорядоченную группу H называется *порядковым гомоморфизмом* (*о-гомоморфизмом*), если из неравенства $a \leq b$ следует неравенство $af \leq bf$ для всех $a, b \in G$. Если существует порядковый гомоморфизм f^{-1} , то f называется *о-изоморфизмом*.

Лемма 24. Пусть A и B — частично упорядоченные группы. Если функция $\varphi: A \rightarrow B$ является о-изоморфизмом, то φ сохраняет отношение почти ортогональности.

Доказательство. Пусть элементы a и u являются почти ортогональными элементами группы A . Рассмотрим их образы $b = a\varphi$ и $v = u\varphi$ в группе B .

Если для элемента $y \in B$ имеют место неравенства $y \leq b, v$, то для элемента $x \in A$, для которого $x\varphi = y$, справедливы неравенства $x \leq a, u$, так как отображение φ^{-1} сохраняет порядок.

Из выбора элементов a и u следует, что $x^n \leq a, u$ для любого целого положительного числа n .

Так как функция φ — порядковый гомоморфизм, то справедливы соотношения

$$y^n = (x\varphi)^n = x^n\varphi \leq b, v$$

для любого целого положительного числа n , т. е. элементы b и v почти ортогональны в группе B . $\square$

Теорема 25. Если существует порядковый изоморфизм φ $\mathcal{AO}$ -группы A на частично упорядоченную группу B , то B — $\mathcal{AO}$ -группа.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент $b \in B$.

Если $e \leq b$, то $b = be^{-1}$, где по предложению 23 элементы b и e почти ортогональны в группе B .

Если $b < e$, то $b = e(b^{-1})^{-1}$, где по предложению 23 элементы b^{-1} и e почти ортогональны в группе B .

Пусть $b \parallel e$. Рассмотрим в группе A элемент a , для которого $a\varphi = b$. Так как отображение φ^{-1} сохраняет порядок, то $a \parallel e$ в группе A .

По условию теоремы $a = uv^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов группы A . Следовательно, $b = (u\varphi)(v\varphi)^{-1}$, где по лемме 24 элементы $u\varphi$ и $v\varphi$ почти ортогональны в группе B . $\square$

Следствием предложения 4 из § 3 главы II в [3] является следующее утверждение.

Предложение 26. В условиях предложения 3 фактор-группа GA/A является частично упорядоченной группой с положительным конусом

$$\bar{P} = \{gA \mid gA \cap P \neq \emptyset\}.$$

Частично упорядоченную группу G называют *лексикографическим расширением* выпуклой нормальной подгруппы M с помощью фактор-группы G/M , если все строго положительные смежные классы в частично упорядоченной группе G/M состоят только из положительных элементов группы G .

Лемма 27. Если группа GA является полупрямым произведением частично упорядоченных подгруппы A и дополнительной подгруппы G , где $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех элементов $g \in G$, то на группе GA можно определить частичный порядок, согласованный с порядками групп A и G , относительно которого группа GA является лексикографическим расширением группы A с помощью частично упорядоченной группы GA/A .

Доказательство. В силу предложения 26 фактор-группа GA/A является частично упорядоченной группой.

Пусть элемент b принадлежит $P \setminus A$. Тогда по определению множества P $b = ga$, где $g \in G^+$ и $a \in A$.

Рассмотрим произвольный элемент $c \in A$. В силу леммы 20 из [14] справедливо неравенство $ca^{-1} < g$. Отсюда следует, что элемент $c < ga = b$.

Применение леммы 2.2 из [17] доказывает, что группа GA — лексикографическое расширение группы A с помощью группы GA/A . $\square$

Предложение 28 [14, теорема 7]. Если GA — полупрямое произведение подгруппы A и дополнительной подгруппы G , где A и G являются АО-группами и $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех элементов $g \in G$, то на группе GA можно определить частичный порядок, согласованный с порядками групп A и G , относительно которого группа GA будет АО-группой.

Следующее утверждение является следствием теорем 2 и 4 из [13].

Лемма 29. Если частично упорядоченная группа G — лексикографическое расширение АО-группы M , то группа G является АО-группой в том и только в том случае, когда фактор-группа G/M — АО-группа.

Предложение 30 [3, гл. II, § 3, предложение 3]. Гомоморфизм f частично упорядоченной группы G в частично упорядоченную группу H является о-гомоморфизмом в том и только в том случае, когда $f(G^+) \subseteq H^+$.

Лемма 31. Если группа GA является полупрямым произведением частично упорядоченных подгруппы A и дополнительной подгруппы G , где $g^{-1}A^+g \subseteq A^+$ для всех элементов $g \in G$, то на группе GA можно определить частичный порядок, согласованный с порядками групп A и G , относительно которого группа G будет о-изоморфна частично упорядоченной группе GA/A .

Доказательство. Определим функцию $\varphi: G \rightarrow GA/A$ по правилу

$$\varphi(g) = gA \text{ для любого элемента } g \in G.$$

Если имеет место равенство $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$ для некоторых элементов $g_1, g_2 \in G$, то $g_1A = g_2A$, поэтому $g_1^{-1}g_2 \in G \cap A$. Значит, $g_1^{-1}g_2 = e$, т. е. $g_1 = g_2$. Таким образом, φ — инъективная функция.

Из определения отношения порядка в группе GA/A следует, что φ — o -гомоморфизм групп.

Пусть $K \in GA/A$ и $K \neq A$. Тогда найдётся элемент $ga \in K$, для которого $g \neq e$. Тогда $ga \cdot a^{-1} \in K$, т. е. $g \in K$ и $\varphi(g) = K$. Кроме того, $\varphi(e) = A$. Следовательно, φ — изоморфизм групп и порядковый гомоморфизм.

Если смежный класс K принадлежит $\bar{P}$, то для $K \neq A$ существует представитель $ga \in K \cap P$ для некоторого элемента $g \neq e$. Таким образом, $g \in G^+ \setminus \{e\}$, т. е. $K\varphi^{-1} \in G^+$. Следовательно, $\varphi^{-1}(\bar{P}) \subseteq G^+$, т. е. по предложению 30 φ — o -изоморфизм. $\square$

Доказательство теоремы 4. По лемме 27 группа GA является лексикографическим расширением группы A с помощью группы GA/A .

Если группа GA является $\mathcal{AO}$ -группой, то по лемме 29 GA/A — $\mathcal{AO}$ -группа.

По лемме 31 группа G o -изоморфна группе GA/A . Тогда по теореме 25 группа G является $\mathcal{AO}$ -группой.

Обратное утверждение следует из предложения 28. $\square$

Предложение 32 [7, с. 22]. Если в частично упорядоченной группе G для e и каждого элемента $g \in G$ существует нижняя (верхняя) грань, то G — направленная группа.

Лемма 33. Пусть G — pl -группа, являющаяся лексикографическим расширением выпуклой нормальной подгруппы M . Тогда группа M — направленная группа.

Доказательство. Рассмотрим элемент $m \in M$. В группе G $m = ab^{-1}$ для некоторых псевдоортогональных элементов $a, b \in G^+$.

Если $b \notin M$, то по лемме 2.2 из [17] имеет место неравенство $m < b$, т. е. $ab^{-1} < b$, и справедливо неравенство $ab^{-1} \leq a$. Из последних неравенств в силу выбора элементов a и b следует неравенство $(ab^{-1})^2 \leq a$. Таким образом, имеет место неравенство $a \leq b^2$.

По предложению 17 элементы a и b почти ортогональны в группе G , которая по теореме 2.7 из [8] является группой Рисса—Фукса. Тогда по теореме 2.5 из [12] заключаем, что элементы a и b^2 почти ортогональны в группе G . Тогда из леммы 4 из [12] следует, что $a = e$.

Значит, $m = b^{-1}$, т. е. $b \in M$, что противоречит выбору данного элемента.

Следовательно, $b \in M$ и b^{-1} является нижней гранью элементов m и e в группе M . Остаётся применить предложение 32. $\square$

Доказательство теоремы 6. Если G — pl -группа, то из леммы 33 следует, что M — o -идеал группы G .

По теореме 2.5 из [8] M — pl -группа.

По теореме 1.3 из [10] группа G/M является pl -группой.

Обратное утверждение справедливо в силу теоремы 3.1 из [9]. $\square$

Теорема 34. Если существует порядковый изоморфизм φ группы Рисса—Фукса A на частично упорядоченную группу B , то B — группа Рисса—Фукса.

Доказательство. Пусть $u, v \in B$. Тогда у прообразов этих элементов a и b по предложению 32 существует верхняя грань $c \in A$. По условию теоремы элемент $c\varphi$ является верхней гранью элементов u и v в группе B , поэтому по предложению 32 группа B является направленной группой.

Пусть для элементов $u_1, u_2, v_1, v_2 \in B$ имеют место неравенства $u_1, u_2 \leq v_1, v_2$. Тогда по условию теоремы для их прообразов a_1, a_2, b_1, b_2 в группе A справедливы неравенства $a_1, a_2 \leq b_1, b_2$.

По интерполяционному свойству в группе a найдётся элемент c , для которого верны соотношения $a_1, a_2 \leq c \leq b_1, b_2$. Тогда в группе B по условию теоремы должны выполняться соотношения $u_1, u_2 \leq c\varphi \leq v_1, v_2$. Таким образом, B — группа Рисса—Фукса. $\square$

Лемма 35. Образ pl -группы при o -изоморфизме является pl -группой.

Доказательство. Утверждение является следствием теорем 25 и 34 согласно следствию 10 из [18]. $\square$

Доказательство теоремы 5. По лемме 27 группа GA является лексикографическим расширением группы A с помощью группы GA/A .

Если группа GA является pl -группой, то по теореме 6 GA/A — pl -группа, и A — pl -группа.

По лемме 31 группа G o -изоморфна группе GA/A , откуда по лемме 35 получаем, что G — pl -группа.

Применение следствия 8 из [14] завершает доказательство. $\square$

4. Свойства сплетений

Напомним, как определяется сплетение $A \text{ Wr } B$ групп A и B в [2].

1. Рассматривается декартово произведение

$$A^B = \left\{ f: B \rightarrow \bigcup_{b \in B} A_b \right\}$$

с покомпонентным умножением.

2. Определяются функции $f^b \in A^B$ по правилу $f^b(x) = f(bx)$ для фиксированного элемента $b \in B$ и каждого элемента $x \in B$.
3. Показывается, что для любого элемента $b \in B$ функция $b^*: A^B \rightarrow A^B$, определённая по правилу $b^*(f) = f^b$ для любой функции $f \in A^B$, является автоморфизмом.
4. Рассматривается изоморфное вложение $\Phi: B \rightarrow \text{Aut } A^B$, определённое по правилу $\Phi(b) = b^*$ для любого элемента $b \in B$.
5. Полагается $A \text{ Wr } B = BA^B$.

Следствие 36. Если группы A и B являются частично упорядоченными, то

- 1) группа A^B является частично упорядоченной;

- 2) если $f \in (A^B)^+$, то и $f^b \in (A^B)^+$ для любого элемента $b \in B$;
- 3) функция b^* является порядковым автоморфизмом;
- 4) группы B и $\Phi(B)$ o -изоморфны.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) прямо следуют из определения 7. Утверждение 3) следует из утверждения 2).

Рассмотрим множество

$$P_1 = \{b^* \mid b \in B^+\} \subset \Phi(B).$$

Для элементов $b^*, c^* \in P_1$ получаем $b^* \cdot c^* = (bc)^*$, где $bc \in B^+$, т. е. P_1 — подполугруппа в группе $\Phi(B)$.

Из условия $b^* \in P_1 \cap P_1^{-1}$ следует, что $b \in B^+$ и $b^{-1} \in B^+$, т. е. $b = e$, и $b^* = \text{id}$.

Пусть $c^* \in \Phi(B)$ и $b^* \in P_1$. Тогда $(c^*)^{-1}b^*c^* = (c^{-1}bc)^*$ для элемента $c^{-1}bc \in B^+$. Следовательно, $(c^+)^{-1}P_1c \subseteq P_1$, т. е. P_1 — положительный конус группы $\Phi(B)$. Отсюда следует утверждение 4). $\square$

Таким образом, группа A^B является нормальной подгруппой группы $A \text{ Wr } B$, $B \cap A^B = \{e\}$ и элементы из группы B индуцируют автоморфизмы группы A^B , определяемые правилом $b^{-1}fb(x) = f(bx)$ для всех элементов $f \in A^B$ и $x, b \in B$.

Лемма 37. Если $A \text{ Wr } B$ — декартово сплетение частично упорядоченных групп, $f \in (A^B)^+$, то для любого элемента $b \in B$ справедливо $b^{-1}fb \in (A^B)^+$.

Доказательство. По определению декартова произведения частично упорядоченных групп (см. [3]) из условия леммы следует, что $e \leq f(x)$ для любого элемента $x \in B$.

Обозначим через g функцию $b^{-1}fb$ для некоторого элемента $b \in B$. Тогда $g(x) = f(bx)$, где $bx \in B$. Из сказанного выше следует, что $g(x) \geq e$ для любого элемента $x \in B$, поэтому $g \in (A^B)^+$. $\square$

Теорема 38. Если $A \text{ Wr } B$ — декартово сплетение частично упорядоченных групп A и B , то на группе $A \text{ Wr } B$ можно определить частичный порядок, который согласован с порядками, определёнными на группах A и B .

Доказательство. По пункту 1) следствия 36 группа A^B является частично упорядоченной группой.

По лемме 37 для полупрямого произведения групп A^B и B справедливо включение $b^{-1}(A^B)^+b \subseteq (A^B)^+$. Тогда по предложению 3 на группе $A \text{ Wr } B$ можно определить частичный порядок с положительным конусом

$$\mathcal{P} = \{bf \in A \text{ Wr } B \mid \text{либо } b \in B^+ \setminus \{e\}, \text{ либо } b = e \text{ и } f \in (A^B)^+\},$$

для которого $\mathcal{P} \cap B = B^+$ и $\mathcal{P} \cap A^B = (A^B)^+$.

В силу определения сплетения подгруппа A o -изоморфна своей первой копии, а порядок копии согласован с порядком группы A^B . $\square$

Теорема 39. Если частично упорядоченная группа G является расширением выпуклой нормальной подгруппы A с помощью фактор-группы $B = G/A$, то вложения φ_α являются порядковыми гомоморфизмами.

Доказательство. Пусть $g \in G^+$.

Если $g \in G^+ \setminus A$, то $\bar{g} \in B^+ \setminus \{A\}$, следовательно, $g\varphi_\alpha \in (A \operatorname{Wr} B)^+$.

Если $g \in A^+$, то $\bar{g} = A$. В этом случае $\bar{g}b = b$ и $f_g(b) = (b\alpha)^{-1}gb\alpha$, где $b\alpha \in G$ и $g \in A^+$.

Из условия теоремы по теореме Леви [7, предложение 6, с. 34] выводим, что $f_g(b) \in A^+$ для любого элемента $b \in B$. Тогда $f_g \in (A^B)^+$. Поэтому элемент $g\varphi_\alpha$ принадлежит положительному конусу сплетения.

Имеем, что образ $\varphi_\alpha(G^+)$ является подмножеством $(A \operatorname{Wr} B)^+$, и φ_α — порядковый гомоморфизм по предложению 30. $\square$

Утверждения теорем 38 и 39, сформулированные немного иначе, можно найти в [1].

Теорема 40. Если частично упорядоченная группа G является лексикографическим расширением выпуклой нормальной подгруппы A с помощью фактор-группы $B = G/A$, то функции φ_α^{-1} также являются порядковыми гомоморфизмами.

Доказательство. Пусть $V = \operatorname{Im} \varphi_\alpha$ и $v \in V^+$. Тогда существует элемент $g \in G$, для которого $v = g\varphi_\alpha$. Таким образом, элемент $v = \bar{g}f_g$ является положительным элементом группы $A \operatorname{Wr} B$. Отсюда по определению порядка $\mathcal{P}$ в данной группе либо $\bar{g} \in B^+ \setminus \{A\}$, либо $\bar{g} = A$ и элемент $f_g(b) = (b\alpha)^{-1}gb\alpha$ принадлежит положительному конусу A^+ для всех элементов $b \in B$. Во втором случае по свойству положительного конуса $g \in A^+$. В первом случае по определению лексикографического расширения любой представитель класса $\bar{g}$ является положительным элементом группы G .

Таким образом, $g \in G^+$, т. е. $\varphi_\alpha^{-1}(V) \subseteq G^+$. Остается применить предложение 30. $\square$

Из определения декартова произведения частично упорядоченных групп легко вытекает следующее утверждение.

Предложение 41. Декартово произведение направленных групп является направленной группой.

Доказательство теоремы 8. По теореме 34 группа A_b является группой Рисса—Фукса для каждого элемента $b \in B$, так как каждая группа A_b α -изоморфна группе A .

Так как группа A^B — декартово произведение групп A_b , то по теореме 4 из [14] группа A^B является интерполяционной группой.

По предложению 41 из направленности групп A_b следует направленность группы A^B . Следовательно, группа A^B является группой Рисса—Фукса.

Из теоремы 38 следует, что на группе $A \operatorname{Wr} B$ можно определить частичный порядок, согласованный с порядками групп A и B . В силу теоремы 6 из [14] группа $A \operatorname{Wr} B$ является группой Рисса—Фукса. $\square$

Доказательство теоремы 10. В [16] доказано, что при порядке $A^+ = A \cap G^+$ группа A является группой Рисса—Фукса. Группа B также является группой Рисса—Фукса [7, предложение (а), с. 160].

В силу теоремы 39 вложение φ_α группы G в группу $A \operatorname{Wr} B$ является o -гомоморфизмом. По теореме 8 группа $A \operatorname{Wr} B$ — группа Рисса—Фукса. $\square$

Доказательство теоремы 9. Из теоремы 38 следует, что на группе $A \operatorname{Wr} B$ можно определить частичный порядок, согласованный с порядками групп A и B .

По теореме 25 группа A_b является $\mathcal{AO}$ -группой для каждого элемента $b \in B$, так как она o -изоморфна $\mathcal{AO}$ -группе.

В силу теоремы 1 из [14] группа A^B — $\mathcal{AO}$ -группа, так как она является декартовым произведением таких групп. Из предложения 28 следует, что $A \operatorname{Wr} B$ — $\mathcal{AO}$ -группа. $\square$

Предложение 42. Выпуклая направленная подгруппа $\mathcal{AO}$ -группы является $\mathcal{AO}$ -группой [19, следствие 3.5].

Фактор-группа $\mathcal{AO}$ -группы по o -идеалу является $\mathcal{AO}$ -группой [11, теорема 2].

Доказательство теоремы 11. По предложению 42 порядок $A^+ = A \cap G^+$ превращает группу A в $\mathcal{AO}$ -группу, и группа B также является $\mathcal{AO}$ -группой.

В силу теоремы 39 вложение φ_α группы G в группу $A \operatorname{Wr} B$ является o -гомоморфизмом.

По теореме 9 группа $A \operatorname{Wr} B$ является $\mathcal{AO}$ -группой. $\square$

Следствие 43. Если $\mathcal{AO}$ -группа G является лексикографическим расширением o -идеала A с помощью фактор-группы $B = G/A$, то функции $\varphi_\alpha: G \rightarrow A \operatorname{Wr} B$ являются $\mathcal{AO}$ -изоморфизмами группы G на $\mathcal{AO}$ -группу $\varphi_\alpha(G)$.

Доказательство. По теореме 11 гомоморфизмы φ_α сохраняют порядок. Из теоремы 40 следует, что функции φ_α являются o -изоморфизмами. В силу теоремы 25 образ $\varphi_\alpha(G)$ является $\mathcal{AO}$ -группой. Применение леммы 24 завершает доказательство. $\square$

Теорема 44. Пусть частично упорядоченная группа G является лексикографическим расширением направленной подгруппы A с помощью частично упорядоченной группы $B = G/A$. Если декартово сплетение $A \operatorname{Wr} B$ относительно порядка $\mathcal{P}$ является $\mathcal{AO}$ -группой, то и группа G является $\mathcal{AO}$ -группой.

Доказательство. Из свойств сплетения $A \operatorname{Wr} B$ следует, что A^B — выпуклая нормальная подгруппа в сплетении.

Так как A — направленная группа, то группа A_b является направленной для любого элемента $b \in B$. Тогда по предложению 41 группа A^B — o -идеал $\mathcal{AO}$ -группы. Отсюда по предложению 42 следует, что A^B — $\mathcal{AO}$ -группа.

В силу теоремы 4 группа B — $\mathcal{AO}$ -группа.

Для фиксированного элемента $b \in B$ рассмотрим множество

$$M_b = \{a_b^* \in A^B \mid a_b^*(x) = e \text{ при } x \neq b \text{ и } a_b^*(x) = a_b \text{ при } x = b\}$$

для всех элементов $x \in B$. Так как группа A^B является $\mathcal{AO}$ -группой, то по теореме 2 из [14] для каждого элемента $b \in B$ множество M_b является o -идеалом данной группы. Группа M_b o -изоморфна группе A_b , т. е. o -изоморфна группе A .

Так как по предложению 42 M_b — $\mathcal{AO}$ -группа, то в силу теоремы 25 и группа A — $\mathcal{AO}$ -группа. Остаётся применить теорему 2 из [13]. $\square$

Доказательство теоремы 12. Из теоремы 40 следует, что функции $\varphi_\alpha: G \rightarrow A \operatorname{Wr} B$ являются o -изоморфизмами.

Если G — $\mathcal{AO}$ -группа, то по теореме 11 и сплетение является $\mathcal{AO}$ -группой.

Обратное утверждение справедливо в силу теоремы 44. $\square$

5. Сплетения pl -групп

Доказательство теоремы 13. Так как по следствию 10 из [18] группы A и B являются $\mathcal{AO}$ -группами, то по теореме 9 группа $A \operatorname{Wr} B$ — $\mathcal{AO}$ -группа.

По теореме 2.7 из [8] группы A и B являются группами Рисса—Фукса, поэтому по теореме 8 группа $A \operatorname{Wr} B$ также является группой Рисса—Фукса.

Применение следствия 10 из [18] к группе $A \operatorname{Wr} B$ завершает доказательство теоремы. $\square$

Теорема 45. Если pl -группа G является лексикографическим расширением выпуклой нормальной подгруппы A с помощью фактор-группы $B = G/A$, то функции $\varphi_\alpha: G \rightarrow A \operatorname{Wr} B$ являются r -изоморфизмами группы G на pl -группу $\varphi_\alpha(G)$.

Доказательство. По теореме 6 группы A и B являются pl -группами.

В силу теоремы 40 функции φ_α являются o -изоморфизмами.

По лемме 35 группа $\varphi_\alpha(G)$ является pl -группой.

По лемме 24 гомоморфизмы φ_α и φ_α^{-1} сохраняют отношение почти ортогональности. По предложению 17 функции φ_α и φ_α^{-1} сохраняют отношение r -ортогональности. $\square$

Теорема 46. Пусть частично упорядоченная группа G является лексикографическим расширением выпуклой нормальной подгруппы A с помощью частично упорядоченной группы $B = G/A$. Если сплетение $A \operatorname{Wr} B$ частично упорядоченных групп A и B относительно порядка $\mathcal{P}$ является pl -группой, то и группа G является pl -группой.

Доказательство. Из определения 7 по лемме 27 следует, что сплетение $A \operatorname{Wr} B$ является лексикографическим расширением выпуклой нормальной группы A^B . Из теоремы 6 следует, что группы A^B и B являются pl -группами.

Для фиксированного элемента $b \in B$ рассмотрим множество

$$M_b = \{a_b^* \in A^B \mid a_b^*(x) = e \text{ при } x \neq b \text{ и } a_b^*(x) = a_b \text{ при } x = b\}$$

для всех элементов $x \in B$. Так как по следствию 10 из [18] группа A^B является AO -группой, то по теореме 2 из [14] для каждого элемента $b \in B$ множество M_b является o -идеалом данной группы, и группа M_b o -изоморфна группе A_b .

Применение теоремы 2.5 из [8] и леммы 35 доказывает, что каждая группа A_b является pl -группой. Тогда по определению 7 и лемме 35 группа A — pl -группа. Остаётся применить теорему 3 из [9]. $\square$

Доказательство теоремы 14. Пусть G — pl -группа. Тогда по теореме 6 подгруппа A является pl -группой, и группа B также является pl -группой.

Из теоремы 10 следует, что $A \operatorname{Wr} B$ — pl -группа.

По теореме 45 функции φ_α являются o -изоморфизмами.

Обратное утверждение является следствием теоремы 46. $\square$

Теорема 47. Если решёточно упорядоченная группа G является расширением l -идеала A с помощью частично упорядоченной группы $B = G/A$, то существуют инъективные o -гомоморфизмы φ_α группы G в pl -группу $A \operatorname{Wr} B$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что группа G является pl -группой.

По предложению 2 из [3, гл. II, § 3] группа A — o -идеал группы G . По теореме 2.5 из [8] подгруппа A является pl -группой.

По теореме 1.3 из [10] группа B также является pl -группой.

В силу теоремы 13 группа $A \operatorname{Wr} B$ — pl -группа. Остаётся применить теорему 39. $\square$

Следствие 48 [1]. Пусть решёточно упорядоченная группа G является лексикографическим расширением l -идеала A с помощью частично упорядоченной группы $B = G/A$. Функции $\varphi_\alpha: G \rightarrow A \operatorname{Wr} B$ являются l -изоморфизмами в l -группу $A \operatorname{Wr} B$ в том и только в том случае, если B — o -группа.

Литература

- [1] Вараксин С. В. Порядок на сплетении упорядоченных групп // Алгебра, логика и приложение: Сб. науч. трудов, посвящённый памяти А. И. Кокорина. — Иркутск, 1994. — С. 16—21.
- [2] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1972.
- [3] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.
- [4] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика, механика. — 1990. — № 2. — С. 84—86.
- [5] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал pl -групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 193—199.
- [6] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичные радикалы AO -групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 197—206.
- [7] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.
- [8] Ширшова Е. Е. О псевдо структурно упорядоченных группах // Группы и модули. Теория игр: Сб. тр. МОПИ им. Н. К. Крупской. — М., 1973. — С. 10—18.

- [9] Ширшова Е. Е. Лексикографические расширения и pl -группы // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 1133—1138.
- [10] Ширшова Е. Е. Гомоморфизмы, сохраняющие p -ортогональность // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 939—952.
- [11] Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах AO -групп // Универсальная алгебра и её приложения. Тр. участников междунар. семинара. — Волгоград: Перемена, 2000. — С. 287—294.
- [12] Ширшова Е. Е. Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, № 1. — С. 122—132.
- [13] Ширшова Е. Е. Расширения AO -групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, вып. 1. — С. 122—132.
- [14] Ширшова Е. Е. О полупрямых произведениях и сплетениях частично упорядоченных групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 175—184.
- [15] Щукин К. К. RI -разрешимый радикал группы // Мат. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1021—1031.
- [16] Jakubiková M. Konvexe gerichtete Untergruppen der Rieszschen Gruppen // Mat. Časopis Sloven. Akad. Vied. — 1971. — Vol. 21, no. 1. — P. 3—8.
- [17] Shirshova E. E. On extensions of po -groups // Proc. of the Int. Conf. on Algebra Dedicated to the Memory of A. I. Mal'cev. Part 1. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131). — P. 345—353.
- [18] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.
- [19] Shirshova E. E. On Archimedean extensions of AO -groups // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 102, no. 6. — P. 4662—4666.

