# Монотонная линейная связность $R$-слабо выпуклых множеств в пространстве $C(Q)$*

**А. Р. АЛИМОВ**
*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
e-mail: alexey.alimov@gmail.com

УДК 517.982.252+517.982.256

**Ключевые слова:** $R$-слабо выпуклое множество, монотонно линейно связное множество, ацикличность, солнце, строгое солнце.

### Аннотация

Подмножество $M$ линейного нормированного пространства $X$ называется $R$-слабо выпуклым ($R > 0$ фиксировано), если пересечение $(D_R(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap M$ непусто при любых $x, y \in M$, $0 < \|x-y\| < 2R$. Здесь $D_R(x,y)$ есть пересечение всех шаров радиуса $R$, содержащих $x$, $y$. В работе исследуется связность $R$-слабо выпуклых множеств в пространствах типа $C(Q)$. Устанавливается, что $R$-слабо выпуклое множество $M$ в пространстве $C(Q)$ локально $\mathrm{m}$-связно (локально связно по Менгеру), и показывается, что каждая компонента связности ограниченно компактного $R$-слабо выпуклого подмножества $M$ пространства $C(Q)$ монотонно линейно связна и является солнцем в $C(Q)$. Показано, что ограниченно компактное подмножество $M$ пространства $C(Q)$ является $R$-слабо выпуклым множеством при некотором $R > 0$, если и только если $M$ — дизъюнктное объединение монотонно линейно связных солнц в пространстве $C(Q)$, причём хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности множества $M$ не менее $2R$.

### Abstract

*A. R. Alimov, Monotone path-connectedness of R-weakly convex sets in the space* $C(Q)$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 23—32.

A subset $M$ of a normed linear space $X$ is said to be $R$-weakly convex ($R > 0$ is fixed) if the intersection $(D_R(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap M$ is nonempty for all $x, y \in M$, $0 < \|x-y\| < 2R$. Here $D_R(x,y)$ is the intersection of all the balls of radius $R$ that contain $x$, $y$. The paper is concerned with connectedness of $R$-weakly convex sets in $C(Q)$-spaces. It will be shown that any $R$-weakly convex subset $M$ of $C(Q)$ is locally $\mathrm{m}$-connected (locally Menger-connected) and each connected component of a boundedly compact $R$-weakly convex subset $M$ of $C(Q)$ is monotone path-connected and is a sun in $C(Q)$. Also, we show that a boundedly compact subset $M$ of $C(Q)$ is $R$-weakly convex for some $R > 0$ if and only if $M$ is a disjoint union of monotonically path-connected suns in $C(Q)$, the Hausdorff distance between each pair of the components of $M$ being at least $2R$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00442).

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2011/2012, том 17, № 1, с. 23—32.

# 1. Введение

В последнее время теория $R$-слабо выпуклых множеств получила интенсивное развитие (см. [4, 8, 9] и цитированную там литературу). Интерес к $R$-слабо выпуклым множествам обусловлен их приложением к теории экстремальных задач, задачам оптимального управления, теории дифференциальных игр, теории приближений и теории многозначных отображений [9].

В настоящей работе исследуется связность $R$-слабо выпуклых множеств в пространствах типа $C(Q)$. Устанавливается, что $R$-слабо выпуклое множество $M$ в пространстве $C(Q)$ локально $\mathrm{m}$-связно; при условии его ограниченной компактности каждая компонента связности множества $M$ монотонно линейно связна (теорема 1). Теорема 2 показывает, что ограниченно компактное подмножество $M$ пространства $C(Q)$ является $R$-слабо выпуклым множеством при некотором $R > 0$, если и только если $M$ есть дизъюнктное объединение монотонно линейно связных солнц в пространстве $C(Q)$, причём хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности множества $M$ не менее $2R$.

Ниже $X$ — действительное линейное нормированное пространство, $Q$ — метрический компакт (если не оговорено противное), $B(x,r)$ — замкнутый шар с центром $x$ и радиусом $r$, $\mathring{B}(x,r)$ — открытый шар, $B := B(0,1)$ — единичный шар.

Пусть $R > 0$ и $x, y \in X$, $\|x - y\| < 2R$. Множество

$$D_R(x,y) = \bigcap_{x,y \in B(z,R)} B(z,R)$$

называется *$R$-сильно выпуклым отрезком* [4, 9]. Подмножество $M \subset X$ называется *$R$-слабо выпуклым* [4] (в терминологии Балашова—Иванова [4, 9] — *слабо выпуклым по Виалю с константой $R > 0$*), если

$$(D_R(x,y) \setminus \{x,y\}) \cap M \neq \varnothing \quad \text{для любых} \quad x, y \in M, \quad 0 < \|x - y\| < 2R. \tag{1}$$

При исследовании связности $R$-слабо выпуклых множеств в пространствах типа $C(Q)$ важным оказывается факт, что в таких пространствах класс $R$-слабо выпуклых множеств совпадает (за исключением вырожденных случаев) с классом $\mathrm{m}$-связных (по Менгеру) множеств (см. предложение 2).

# 2. Монотонно линейно связные и $\mathrm{m}$-связные множества

Для ограниченного множества $\varnothing \neq M \subset X$ пусть $\mathrm{m}(M)$ — *оболочка Банаха—Мазура* множества $M$, т. е. пересечение всех замкнутых шаров, содержащих $M$. Подмножество $M \subset X$ называется $\mathrm{m}$-*связным* (связным по Менгеру) (см. [12]), если $\mathrm{m}(\{x,y\}) \cap M \neq \{x,y\}$ для любых различных точек $x, y \in M$. Для краткости далее обозначаем $\mathrm{m}(\{x,y\}) = \mathrm{m}(x,y)$.

Поскольку операция пересечения множеств неограниченно ассоциативна, то

$$\mathrm{m}(x,y) = \bigcap_{R \geqslant \|x-y\|/2} D_R(x,y). \tag{2}$$

К примеру, в пространстве $C(Q)$ структура $\mathrm{m}(M)$ вполне ясна (см., например, [12, теорема 3.1]):

$$\mathrm{m}(x,y) = \{z \in C(Q) \mid z(q) \in [x(q), y(q)],\ q \in Q\} =: [\![x,y]\!]. \tag{3}$$

Пусть $k(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, — непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве $X$. Следуя [11], говорим, что кривая $k(\cdot)$ *монотонная*, если $f\big(k(\tau)\big)$ является монотонной функцией по $\tau$ для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$; здесь $\operatorname{ext} S^*$ — множество крайних точек единичной сферы $S^*$ сопряжённого пространства $X^*$.

Подмножество $M \subset X$ называется *монотонно линейно связным* [2], если любые две точки из $M$ можно соединить непрерывной монотонной кривой $k(\cdot) \subset \subset M$. Понятно, что монотонно линейно связное множество является $\mathrm{m}$-связным. Обратное утверждение неверно. Следующий пример предложен К. Франчетти и С. Роверси [14]. Пусть $M = M_1 \cup M_{-1}$, где $M_\sigma = \{x \in C[0,1] \mid x(0) = \sigma\}$, $\sigma = \pm 1$. Тогда $M$ состоит из двух выпуклых непересекающихся компонент. В то же время несложно проверить, что $M$ $\mathrm{m}$-связно. Похожий пример построен в [4, пример 2.1].

Однако в $\ell^\infty(n)$, как отмечено в [10], и в $c_0$ [1, теорема 1] эти свойства эквивалентны. Пусть множество $M \subset c_0$ или $M \in \ell^\infty(n)$ замкнуто и $\mathrm{m}$-связно. Тогда множество $M$ и множества $M \cap B(x,r)$, $M \cap \mathring{B}(x,r)$ и $P_M x$ монотонно линейно связны для любого выбора $x \in X$ и $r > 0$. (Здесь и далее $P_M x$ — множество ближайших точек из множества $M$ для точки $x$.)

В лемме А даются достаточные условия для монотонной линейной связности $\mathrm{m}$-связного подмножества линейного нормированного пространства. Предварительно введём два условия на линейное нормированное пространство $X$:

($*$) для всех $x, y \in X$ выполнено

$$\mathrm{m}(x,y) = \{z \in X \mid \min\{\varphi(x), \varphi(y)\} \leqslant \varphi(z) \leqslant \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} \text{ для любого } \varphi \in \operatorname{ext} S^*\};$$

($**$) существует подмножество $F = (f_i)_{i \in I} \subset \operatorname{ext} S^*$, $\operatorname{card} I \leqslant \aleph_0$, такое что $F \cup (-F)$ $w^*$-плотно в $S^*$.

В силу (3) условие ($*$) выполнено для пространств $C(Q)$ и $c_0$; эти пространства ($C(Q)$, если компакт $Q$ сепарабельный) удовлетворяют и условию ($**$). Отметим, что $C(Q)$ при несепарабельном $Q$ и $c_0(\Gamma)$ на несчётном множестве $\Gamma$ не удовлетворяют условию ($**$).

Пусть пространство $X$ удовлетворяет условию ($**$), $F = (f_i)$ — семейство функционалов из ($**$). Пусть $\{\alpha_i\} \subset \mathbb{R}$, $\alpha_i > 0$, $i \in I$, и пусть $\sum \alpha_i < \infty$. Для $x \in X$ положим

$$|x| = \sum_{i \in I} \alpha_i |f_i(x)|.$$

Тогда $|\cdot|$ — норма на $X$, которую, следуя [12], мы называем *ассоциированной*. Следующий результат установлен в [14] (см. также [2, лемма 2]).

**Лемма A.** *Пусть $X$ удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, и пусть множество $M \subset X$ замкнуто и $\mathrm{m}$-связно. Предположим, что выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

а) *$M$ ограниченно компактно (в норме $\|\cdot\|$)*;

б) *$M$ $|\cdot|$-замкнуто и $\mathrm{m}(u,v)$ $|\cdot|$-компактно для любых $x,y \in X$*;

в) *$\mathrm{m}(x,y)$ $\|\cdot\|$-компактно для любых $x,y \in X$.*

*Тогда $M$ монотонно линейно связно.*

Условие б) выполнено в пространстве $c_0$ [1, предложение 5]: в пространстве $c_0$ $\mathrm{m}(x,y)$ всегда компактно; если $M \subset c_0$ замкнуто и $\mathrm{m}(x,y) \cap M \neq \varnothing$, то $\mathrm{m}(x,y) \cap M$ $|\cdot|$-компактно. Как следствие, замкнутое $\mathrm{m}$-связное множество пространства $c_0$ монотонно линейно связно [1, предложение 6]. Также отметим, что из приведённого выше примера К. Франчетти и С. Роверси следует, что на $C[0,1]$ не существует ассоциированной нормы $|\cdot|$, относительно которой $\mathrm{m}(x,y)$ $|\cdot|$-компактно при любых $x$, $y$. В пространстве $C(Q)$ условие в) выполнено в том и только в том случае, если $Q$ конечно.

Отметим [14, утверждение 5.1], что если $M$ — $\mathrm{m}$-связное множество и множество $A \subset X$ таково, что $A = \mathrm{m}(A)$, то

$$M \cap A \ \mathrm{m}\text{-связно.} \tag{4}$$

Если $M \subset C(Q)$ — $\mathrm{m}$-связное множество, то $M \cap f^{-1}\big((-\infty, r]\big)$ и $f^{-1}(r)$ — $\mathrm{m}$-связные множества для любого $f \in \operatorname{ext} S^*$. Из этого утверждения следует, что шар $B(x,r)$ произвольного линейного нормированного пространства всегда монотонно линейно связен.

Стоит отметить и следующий результат А. Л. Брауна, К. Франчетти и С. Роверси (см. [2, лемма 4; 12; 14]). Пусть пространство $X$ удовлетворяет условиям $(*)$ и $(**)$, и пусть множество $\varnothing \neq M \subset X$ ограниченно компактно и $\mathrm{m}$-связно. Тогда множество $M$ $P$-ациклично (т. е. для любого $x \in X$ множество $P_M x$ ближайших точек из $M$ к $x$ ациклично (гомологически тривиально); по поводу определения ацикличности см. [6, 12]). Как следствие, такое множество всегда является солнцем [6, теорема 4.4]. Также отметим, что для любого $n \geqslant 3$ существует пример линейного нормированного пространства, в котором существует невыпуклое $P$-ацикличное солнце, не являющееся $\mathrm{m}$-связным (см. [14, с. 19]).

# 3. Вспомогательные утверждения. Чебышёвские центры и отделимость промежутков экстремальными гиперплоскостями

Напомним, что величина

$$\alpha(M) := \inf_{u \in X} \sup_{x \in M} \|x - u\|$$

называется *чебышёвским радиусом* множества $\varnothing \neq M \subset X$. Множеством решений (возможно, пустым) данной задачи на минимакс является множество

$$E(M) = \Big\{u \in X \mid \sup_{x\in M} \|x-u\| = \alpha(M)\Big\},$$

называемое *чебышёвским центром* множества $M$.

В 1968 г. В. Н. Замятин и М. И. Кадец показали, что произвольное ограниченное подмножество пространства $C(Q)$ всегда имеет непустой чебышёвский центр ($Q$ — произвольное топологическое пространство), и дали характеризацию (в случае нормального $Q$) чебышёвского центра $E(M)$ ограниченного множества $M \subset C(Q)$, которую мы сформулируем в ослабленном виде для случая компактных $M$ (см. [13, с. 50]). Пусть $M$ — компактное множество в $C(Q)$, $\alpha$ — чебышёвский радиус множества $M$. Тогда чебышёвский центр множества $M$ имеет следующий вид:

$$E(M) = \{y \in C(Q) \mid \Omega(t) - \alpha \leqslant y(t) \leqslant \omega(t) + \alpha\} \neq \varnothing, \tag{5}$$

где

$$\Omega(t) = \max_{x\in M} x(t), \quad \omega(t) = \min_{x\in M} x(t); \tag{6}$$

при этом $\alpha = \|\Omega - \omega\|/2$. В частности, $E(M) = E(\Omega, \omega) := E(\{\Omega, \omega\})$.

Нам потребуется утверждение об отделимости экстремальными гиперплоскостями интервалов и промежутков функций в пространствах с чебышёвской нормой (предложение A). Введём необходимые определения.

Пусть $f_1, f_2 \in C(Q)$, $Q$ — произвольное пространство. *Интервалом* $[\![f_1, f_2]\!]$ (ср. (3)) называется множество функций, лежащих между $f_1$ и $f_2$:

$$[\![f_1, f_2]\!] = \{f \in C(Q) \mid f(t) \in [f_1(t), f_2(t)] \text{ для всех } t \in Q\}.$$

Подмножество $M \subset C(Q)$ называется *промежутком* [5], если из того что $f, g \in$ $\in M$, следует, что $[\![f, g]\!] \subset M$. Согласно [5, теорема 1] подмножество $M \subset$ $\subset C(Q, \mathbb{R})$ является замкнутым промежутком, если и только если $M$ является множеством вида $[\![f_1, f_2]\!]$, где $f_1, f_2 \colon Q \to \bar{\mathbb{R}}$, $f_1$ полунепрерывна сверху на $K$, $f_2$ снизу и $f_1 \leqslant f_2$. По поводу аппроксимативных и геометрических свойств интервалов и промежутков функций в функциональных пространствах см. [5] и цитированную там литературу.

Напомним, что множества $\varnothing \neq M_1, M_2 \subset X$ называются *экстремально отделимыми*, если $\sup(f, M_1) \leqslant \inf(f, M_2)$ для некоторого $f \in \operatorname{ext} S^*$. В случае строгого неравенства отделимость называется *строгой*.

Следующее важное свойство экстремальной отделимости непересекающихся промежутков в $C(Q)$ может быть получено с использованием теоремы Гаркави—Замятина—Катетова о продолжении непрерывных функций [7, лемма 3].

**Предложение A.** *Любые два непересекающихся замкнутых промежутка в пространстве $C(Q)$ строго экстремально отделимы.*

Следующий результат нам потребуется при доказательстве предложения 1.

**Лемма 1.** *Пусть $X = C(Q)$. Предположим, что $u, v \in B$, $\|u - v\|/2 =: r < 1$. Тогда*
$$E(u,v) \cap B(0, 1-r) \neq \varnothing. \tag{7}$$

**Доказательство.** Рассуждая от противного, предположим, что
$$E(u,v) \cap B(0, 1-r) = \varnothing.$$

Согласно (5) множество $E(u,v)$ является замкнутым интервалом, а по предложению A непересекающиеся замкнутые интервалы $E(u,v)$ и $B(0,1-r)$ можно строго отделить экстремальной гиперплоскостью. Это означает, что найдётся такая точка $t \in Q$, что $\Omega(t) - r > 1 - r$ и $\omega(t) + r > 1 - r$ или $\Omega(t) - r < -1 + r$ и $\omega(t) + r < -1 + r$, где $\Omega$ и $\omega$ определены в (6). Получаем соответственно $\Omega(t) > 1$ или $\omega(t) < -1$, что невозможно, поскольку $\Omega, \omega \in B$, так как $u, v \in B$. Лемма 1 доказана. $\square$

Важным для наших целей свойством пространств с чебышёвской нормой является следующее утверждение.

**Предложение 1.** *Пусть $X = C(Q)$, $x, y \in B$, $x \neq y$. Тогда найдётся такая точка $z \in B$, что*
$$x, y \in B\left(z, \frac{\|x-y\|}{2}\right) \subset B. \tag{8}$$

**Доказательство.** Обозначим $r := \|u - v\|$, $r < 1$. В силу леммы 1 существует точка $\xi \in E(x,y) \cap B(0, 1-r)$. Тогда $x, y \in B(\xi, r)$. Поскольку $\|\xi\| \leqslant 1 - r$, то $B(\xi, r) \subset B$, что и требуется. $\square$

Отметим, что всегда имеет место следующее вложение [4, лемма 3.13]:
$$D_R(x,y) \subset D_r(x,y) \quad \text{для любых} \quad x, y \in X, \quad \|x-y\| \leqslant 2r, \quad r < R. \tag{9}$$

В пространстве $C(Q)$, однако, данные множества совпадают.

**Лемма 2.** *Пусть $X = C(Q)$, $x, y \in X$, $\|x - y\|/2 \leqslant r \leqslant R$ при некоторых $r$, $R$. Тогда $D_R(x,y) = D_r(x,y)$.*

**Доказательство.** Пусть $\|x - y\|/2 =: \delta$. Не ограничивая общности, положим $R = 1$. Тогда в силу (9) $D_1(x,y) \subset D_r(x,y)$. Покажем, что $D_1(x,y) = D_r(x,y)$. Ясно, что $D_1(x,y) \subset D_\delta(x,y)$. Предположим, что $D_1(x,y) \subsetneqq D_\delta(x,y)$. В этом случае при некоторых $\xi \in X$ и $v \in D_\delta(x,y)$ имеем $v \notin B(\xi, 1)$. В силу предложения 1 найдётся такая точка $z$, что $x, y \in B(z, \delta) \subset B(\xi, 1)$. Но в таком случае $x, y \in B(z, \delta) \not\ni v$, что невозможно, поскольку по условию $v \in D_\delta(x,y)$.

Итак, $D_1(x,y) = D_\delta(x,y)$. Теперь из (9) имеем, что $D_1(x,y) = D_r(x,y)$. Лемма 2 доказана. $\square$

Из леммы 2 и представления (2) вытекает следующее утверждение.

**Предложение 2.** *Пусть $X = C(Q)$, $R > 0$, $x, y \in C(Q)$, $\|x - y\| \leqslant 2R$. Тогда $D_R(x,y) = \mathrm{m}(x,y)$.*

# 4. Основные результаты. Монотонная линейная связность $R$-слабо выпуклых множеств

Ниже мы формулируем результаты о монотонной линейной связности и m-связности $R$-слабо выпуклых множеств в пространствах типа $C(Q)$.

Напомним, что связность $R$-слабо выпуклых множеств изучалась в [4, 8, 9, 15], причём данный вопрос рассматривался в основном в достаточно гладких или конечномерных пространствах. Отметим некоторые результаты (леммы 4.1, 4.13 и 4.17 из [4]; см. также [8, теорема 4.1]), собранные в следующем утверждении.

**Теорема A (М. В. Балашов, Г. Е. Иванов).** *Пусть $X$ — банахово пространство, и пусть $M \subset X$ — $R$-слабо выпуклое множество при некотором $R > 0$. Пусть также $x, y \in M$, $\|x - y\| < 2R$. Тогда*

а) *если множество $M \cap D_R(x, y)$ компактно, то оно связно*;

б) *если $X$ равномерно выпукло или $\dim X < \infty$, а множество $M$ замкнуто, то пересечение $M \cap D_R(x, y)$ линейно связно.*

В [4] (теоремы 2.7 и 2.9) доказаны следующие утверждения.

**Теорема B (М. В. Балашов, Г. Е. Иванов).** *Пусть банахово пространство $X$ равномерно выпукло или конечномерно. Пусть множество $M \subset X$ замкнуто и $R$-слабо выпукло при некотором $R > 0$. Тогда*

а) *для любых $r \in (0, R]$ и $x \in X$ множество $M \cap \mathring{B}(x, r)$ связно («ограниченная $\mathring{V}$-связность»)*;

б) *каждая связная компонента $A$ множества $M$ является линейно связным множеством, причём любые две точки множества $A$ можно соединить спрямляемой кривой, лежащей в $A$.*

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1 и 2, в которых для случая пространств $C(Q)$ мы усиливаем теоремы A и B, получая утверждения о m-связности и монотонной линейной связности $R$-слабо выпуклых множеств.

**Теорема 1.** *Пусть $\varnothing \neq M \subset C(Q)$ — $R$-слабо выпуклое множество при некотором $R > 0$. Тогда*

а) *$M \cap \mathring{B}(x, r)$ m-связно при любых $r \in (0, R]$ и $x \in C(Q)$*;

б) *$M \cap B(x, r')$ m-связно при любых $r' \in (0, R)$ и $x \in C(Q)$.*

*Дополнительно предположим, что $M$ ограниченно компактно. Тогда*

1) *любая компонента связности множества $M$ монотонно линейно связна*; *хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности не менее $2R$*;

2) *каждое из следующих множеств монотонно линейно связно*:

   в) *$M \cap \mathring{B}(x, r)$ при любых $r \in (0, R]$ и $x \in C(Q)$*;

   г) *$M \cap B(x, r')$ при любых $r' \in (0, R)$ и $x \in C(Q)$*;

д) $M \cap A$, *где* $A \subset C(Q)$, $\operatorname{diam} A < 2R$, *таково, что* $A = \mathrm{m}(A)$ *(в частности, множество* $M \cap \mathrm{m}(x, y)$ *монотонно линейно связно при любых* $x$, $y$, $\|x - y\| < 2R$*).*

Напомним, что множество $M \subset X$ называется *солнцем* (см., например, [6]), если для каждой точки $x \in X \setminus M$ существует такая точка $y \in P_M x$, что

$$y \in P_M[(1-\lambda)y + \lambda x] \quad \text{для всех} \quad \lambda \geqslant 0; \tag{10}$$

множество $M$ называется *строгим солнцем*, если для каждой точки $x \in X \setminus M$ множество $P_M x$ её ближайших точек из $M$ непусто и утверждение (10) выполнено для каждой точки $y \in P_M x$.

**Теорема 2 (характеризация $R$-слабо выпуклых множеств в пространстве $C(Q)$).** *Ограниченно компактное подмножество $M$ пространства $X = C(Q)$ является $R$-слабо выпуклым множеством при некотором $R > 0$, если и только если $M$ есть дизъюнктное объединение монотонно линейно связных солнц в пространстве $C(Q)$, причём хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности множества $M$ не менее $2R$.*

Напомним [1], что любое солнце в пространстве $c_0$ монотонно линейно связно и, обратно, любое аппроксимативно компактное $\mathrm{m}$-связное подмножество $c_0$ монотонно линейно связно и является солнцем. Исходя из этого, в пространстве $c_0$ от условия ограниченной компактности можно отказаться, усилив теорему 2 следующим образом.

**Теорема 2′.**

1. *Аппроксимативно компактное $R$-слабо выпуклое подмножество пространства $c_0$ есть дизъюнктное объединение монотонно линейно связных солнц в пространстве $c_0$, причём хаусдорфово расстояние между любыми компонентами связности не менее $2R$.*
2. *Любое дизъюнктное объединение $\mathrm{m}$-связных солнц в пространстве $c_0$ с хаусдорфовом расстоянием между любыми компонентами связности не менее $2R$ есть $R$-слабо выпуклое множество в $c_0$.*

Поскольку монотонно линейно связное множество в пространстве $C(Q)$ $R$-слабо выпукло при любом $R > 0$, а ограниченно компактное строгое солнце в $C(Q)$ монотонно линейно связно [2], то ограниченно компактное строгое солнце (в частности, ограниченно компактное чебышёвское множество) в пространстве $C(Q)$ $R$-слабо выпукло при любом $R > 0$. Также стоит отметить (ср. [3]), что если чебышёвское множество в пространстве $C(Q)$ $R$-слабо выпукло при каком-то $R > 0$, то оно является солнцем.

**Доказательство теоремы 1.** Докажем утверждение а). Пусть $u, v \in M \cap \mathring{B}(x, r)$. В силу леммы 2 и предложения 2

$$D_r(u, v) = D_R(u, v) = \mathrm{m}(u, v). \tag{11}$$

Поскольку по условию $M$ $R$-слабо выпукло, то из (1) следует, что $M \cap \mathring{B}(x, r)$ $\mathrm{m}$-связно. Утверждение б) доказывается аналогично.

Докажем утверждение 1). Пусть множество $M$ ограниченно компактно, и пусть $M'$, $M''$ — две произвольные компоненты связности множества $M$. Предположим, что найдутся $x \in M'$, $y \in M''$, такие что $\|x-y\| < 2R$. Как и ранее, $D_R(x,y) = \mathrm{m}(x,y)$. В силу (4) пересечение $M \cap \mathrm{m}(x,y)$ m-связно и (по лемме A) монотонно линейно связно. Это противоречит тому, что $x$ и $y$ лежат в разных компонентах связности множества $M$.

Рассмотрим теперь отдельную компоненту связности $M'$ множества $M$. По доказанному выше расстояние между любыми двумя компонентами связности не менее $2R$. Следовательно, поскольку по условию множество $M$ $R$-слабо выпукло, компонента $M'$ также $R$-слабо выпукла и, в силу (11), m-связна. Теперь монотонная линейная связность $M'$ вытекает из леммы A.

Докажем утверждение 2). Из предыдущих рассуждений следует, что если $M \cap \mathring{B}(x,r) \neq \varnothing$ (при некотором $r \in (0,R]$), то $M \cap \mathring{B}(x,r) = M' \cap \mathring{B}(x,r)$ для некоторой компоненты связности $M'$ множества $M$. По доказанному выше $M'$ монотонно линейно связно. В пространстве $C(Q)$ любой замкнутый шар имеет вид $\mathrm{m}(u,v)$ (см. (3)). Теперь утверждения г), д) следуют из (4). Утверждение в) есть следствие г). Теорема 1 доказана. □

**Доказательство теоремы 2.** По теореме 1 каждая компонента связности множества $M$ монотонно линейно связна. По теореме Франчетти—Роверси (см. [2, лемма 4]) ограниченно компактное m-связное множество $P$-ацикличчно, а по теореме Власова [6, теорема 4.4] каждое $P$-ацикличное ограниченно компактное подмножество банахова пространства является солнцем.

Докажем утверждение в обратную сторону. В силу (11) каждое монотонно линейно связное множество является $R$-слабо выпуклым множеством. Понятно, что любое дизъюнктное объединение таких множеств (при условии, что компоненты связности объединения отстоят друг от друга на расстояние не менее $2R$) снова является $R$-слабо выпуклым множеством. Теорема 2 доказана. □

## Литература

[1] Алимов А. Р. Связность солнц в пространстве $c_0$ // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 4. — С. 3—18.

[2] Алимов А. Р. Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Мат. сб. — 2006. — Т. 197, № 9. — С. 3—18.

[3] Алимов А. Р. Монотонно связное чебышёвское множество является солнцем // Труды междунар. конф., посвящённой 90-летию С. Б. Стечкина, Москва, МГУ—МИАН, 23—26 августа 2010 г. — С. 2—3.

[4] Балашов М. В., Иванов Г. Е. Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 23—66.

[5] Васильева А. А. Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — Т. 68, № 4. — С. 75—116.

[6] Власов Л. П. Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах // Успехи мат. наук. — 1973. — Т. 28, № 6. — С. 3—66.

[7] Гаркави А. Л., Замятин В. Н. Об условном чебышёвском центре ограниченного множества непрерывных функций // Мат. заметки. — 1975. — Т. 18, № 1. — С. 67—76.

[8] Иванов Г. Е. Множества, слабо выпуклые по Виалю и по Ефимову—Стечкину // Изв. РАН. Сер. мат. — 2005. — Т. 69, № 6. — С. 53—60.

[9] Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. — М.: Физматлит, 2006.

[10] Berens H., Hetzelt L. Die metrische Struktur der Sonnen in $\ell^\infty(n)$ // Aequationes Math. — 1984. — Vol. 27. — P. 274—287.

[11] Brosowski B., Deutsch F., Lambert J., Morris P. D. Chebychev sets which are not suns // Math. Ann. — 1974. — Vol. 212, no. 1. — P. 89—101.

[12] Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional // Math. Ann. — 1987. — Vol. 279. — P. 87—101.

[13] Cheney E. W. Multivariate Approximation Theory: Selected Topics. — Philadelphia: SIAM, 1986.

[14] Franchetti C., Roversi S. Suns, M-connected sets and P-acyclic sets in Banach spaces: Preprint No. 50139. — Inst. di Mat. Appl. «G. Sansone», 1988.

[15] Vial J.-Ph. Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Oper. Res. — 1983. — Vol. 8, no. 2. — P. 231—259.