Топологический радикал Джекобсона колец. II

С. Т. ГЛАВАЦКИЙ, А. В. МИХАЛЁВ, В. В. ТЕНЗИНА
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: serge@cnit.msu.ru

УДК 512.556+512.552

Ключевые слова: топологические кольца, радикал Джекобсона, топологически примитивные кольца, топологически артиновы кольца.

Аннотация

В данной работе при исследовании топологического радикала Джекобсона используются топологически примитивные кольца и кольца, обладающие точным топологически неприводимым модулем и ограниченные этим модулем. Изучается топологический радикал Джекобсона для некоторых классов колец: топологически артиновых слева колец, колец с базисом окрестностей нуля из идеалов, компактных колец, ограниченных, в узком смысле линейно компактных колец.

Abstract

S. T. Glavatsky, A. V. Mikhalev, V. V. Tenzina, The topological Jacobson radical of rings. II, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 53—64.

In this paper, topologically primitive rings and rings possessing a faithful topologically irreducible module and being bounded by this module are considered for the investigation of properties of their topological Jacobson radical. We investigate the topological Jacobson radical in some classes of topological rings such as left topologically Artinian rings, topological rings possessing a basis of neighborhoods of zero consisting of ideals, compact rings, bounded strictly linearly compact rings.

1. Введение

Данная статья является продолжением исследования топологического радикала Джекобсона и его связей со свойствами топологических колец (см. [2]). В настоящей статье, если не оговаривается отдельно, под модулем мы подразумеваем левый модуль.

Напомним, что *топологическим радикалом Джекобсона* топологического кольца R мы называем множество всех элементов кольца, аннулирующих всякий топологически неприводимый R-модуль.

Во втором разделе статьи определяются топологически примитивные кольца и идеалы. Изучаются свойства топологически примитивных колец, которые далее применяются для вычисления топологического радикала Джекобсона. Показывается, что топологический радикал Джекобсона, с одной стороны, содержит

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 1, с. 53—64.

пересечение всех замкнутых первичных идеалов (предложение 2), а с другой стороны, лежит в пересечении всех замкнутых примитивных идеалов (следствие 1).

В третьем разделе рассматриваются кольца, обладающие точным топологически неприводимым модулем и ограниченные этим модулем. Такие кольца оказываются полезными при доказательстве некоторых утверждений этого раздела: в предкомпактном кольце R радикал $\operatorname{top} J(R)$ содержит все топологически квазирегулярные слева левые идеалы (предложение 7); всякое примитивное компактное кольцо конечно (предложение 8); в компактном кольце топологический радикал Джекобсона является пересечением всех замкнутых примитивных идеалов, а следовательно, содержит радикал Джекобсона (теорема 1).

В четвёртом разделе топологически артиново слева кольцо определяется как кольцо, удовлетворяющее условию обрыва убывающих цепей, состоящих из замкнутых левых идеалов. Теорема 2 показывает, что топологический радикал Джекобсона топологически артинова слева кольца нильпотентен. Выясняется, что для топологически артиновых слева колец понятия первичности и топологической примитивности совпадают. Пусть R — топологическое кольцо, а $\widehat{\operatorname{top} J}(R)$ — множество всех элементов из этого кольца, аннулирующих все топологически неприводимые R-модули M, такие что само кольцо R M-ограниченное. Если кольцо R топологически артиново слева и ограниченное справа, то идеал $\widehat{\operatorname{top} J}(R)$ нильпотентен. В конце этого раздела доказывается, что если топологически артиново слева кольцо R ограниченное, то фактор-кольцо $R/\operatorname{top} J(R)$ является дискретным артиновым слева полупростым кольцом (теорема 5).

В последнем, пятом, разделе рассматриваются свойства топологического радикала Джекобсона колец с базисом окрестностей нуля из идеалов (предложение 14) и ограниченных, в узком смысле линейно компактных колец (предложение 15). В теореме 6 доказывается, что топологический радикал Джекобсона компактного кольца топологически нильпотентен.

2. Топологически примитивные идеалы

В [7] идеал P топологического кольца R называется *топологически примитивным*, если существует правый регулярный идеал ρ, максимально замкнутый, такой что $P = (\rho : R) = \{x \in R\colon Rx \subset \rho\}$. Далее в статье мы всегда будем использовать более широкое определение топологически примитивного идеала.

Определение 1. Назовём топологическое кольцо R *топологически примитивным слева* (*справа*), если существует топологически неприводимый точный левый (правый) R-модуль M.

Определение 2. Назовём замкнутый идеал I топологического кольца R *топологически примитивным слева* (*справа*) *идеалом*, если кольцо R/I топологически примитивно слева (справа).

Очевидно, что любой топологически примитивный в смысле работы [7] идеал является топологически примитивным справа идеалом. Обратное неверно (см. пример 1).

Далее под топологически примитивным кольцом будет всегда подразумеваться топологически примитивное слева кольцо, а под топологически примитивным идеалом — топологически примитивный слева идеал.

Предложение 1. *Топологически примитивное кольцо первично.*

Доказательство. Пусть R — кольцо, а M — топологически неприводимый точный R-модуль. Пусть идеалы B, C кольца R таковы, что $BC = \{0\}$. Предположим, что $C \neq \{0\}$. Тогда $CM \neq \{0\}$, что следует из точности модуля M. А из топологической неприводимости модуля M следует, что $[CM] = M$. Так как $B(CM) = \{0\}$, то $BM = B[CM] = \{0\}$. Так как модуль M точен, то $B = \{0\}$. Следовательно, кольцо R первично. □

Из предложения 1 очевидным образом получается следующий результат.

Предложение 2. *Пусть R — топологическое кольцо. Тогда $\operatorname{top} J(R)$ содержит пересечение всех замкнутых первичных идеалов.*

Лемма 1. *Идеал топологически примитивного кольца — топологически примитивное кольцо в индуцированной топологии.*

Доказательство. Пусть R — топологически примитивное кольцо. Следовательно, оно обладает точным топологически неприводимым R-модулем M. Пусть A — некоторый двусторонний идеал в R. Так как модуль M точный, то $AM \neq \{0\}$. Из леммы 1 работы [2] следует, что M — топологически неприводимый A-модуль, являющийся к тому же точным. Таким образом, A также топологически примитивное кольцо. □

Несложно заметить, что верен следующий результат.

Лемма 2. *Топологически примитивное кольцо является топологически примитивным в более сильной топологии.*

Напомним (см., например, [3]), что топологическое кольцо R, не содержащее собственных замкнутых идеалов, такое что $R^2 \neq \{0\}$, называется *топологически простым*.

Предложение 3. *Пусть R — топологически простое кольцо. Если кольцо R обладает нулевым топологическим радикалом Джекобсона, то оно топологически примитивно.*

Доказательство. В силу топологической простоты кольца R для любого топологически неприводимого R-модуля M либо $\operatorname{Ann}_R(M) = \{0\}$, либо $\operatorname{Ann}_R(M) = R$. Так как $\operatorname{top} J(R) = \{0\}$, то найдётся такой топологически неприводимый R-модуль M, что $\operatorname{Ann}_R(M) = \{0\}$. Но тогда по определению кольцо R топологически примитивно. □

Заметим, что всякое топологически простое коммутативное кольцо топологически примитивно, так как $\{0\}$ в таком кольце является правым максимально-замкнутым регулярным идеалом.

Пример 1. Приведём пример топологически примитивного кольца, не являющегося топологически примитивным в смысле работы [7]. Пусть θ — трансцендентное действительное число. В качестве кольца R рассмотрим $\mathbb{Q}[\theta]$ с дискретной топологией. В этом кольце идеал $\{0\}$ не является максимально замкнутым правым регулярным идеалом, так как R не простое (например, $\theta\mathbb{Q}[\theta]$ — идеал в R). Таким образом, R не будет топологически примитивным кольцом в смысле работы [7]. Докажем, что топологический R-модуль $M = \mathbb{Q}[\theta]$ с интервальной топологией топологически неприводим и точен. Точность очевидна. Топологическая неприводимость следует из того, что кольцо $\mathbb{Q}[\theta]$ с интервальной топологией топологически просто (см. [3, 1.4.17]).

Пример 2. Покажем, что кольцо целых чисел с дискретной топологией является топологически примитивным. Воспользуемся иррациональной обмоткой тора. Рассмотрим в качестве топологического $\mathbb{Z}$-модуля M кольцо целых чисел с топологией τ, определяемой базисом окрестностей нуля $\{V_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, где

$$V_\varepsilon = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{найдётся такое } k \in \mathbb{Z}, \text{ что } |n\sqrt{2} - k| < \varepsilon\}.$$

Из определения сразу же получаем, что для любого $\varepsilon > 0$

1) $V_\varepsilon = -V_\varepsilon$;
2) $V_\varepsilon + V_\varepsilon \subseteq V_{2\varepsilon}$.

Тогда (M, τ) — топологическая абелева группа, а следовательно, топологический модуль над кольцом $\mathbb{Z}$. Докажем, что топология τ хаусдорфова. Пусть n — ненулевое целое число. Пусть целое число k таково, что $k < n\sqrt{2} < k+1$. Определим $\varepsilon = \min\{n\sqrt{2} - k,\, k + 1 - n\sqrt{2}\}/2$. Тогда $n \notin V_\varepsilon$.

Теперь докажем, что модуль M топологически неприводим. В аддитивной группе $\mathbb{Z}$ любая подгруппа имеет вид $a\mathbb{Z}$ для некоторого натурального числа a. Возьмём произвольное положительное ε. Тогда $a\mathbb{Z} + V_\varepsilon = \mathbb{Z}$.

Предложение 4. *Примитивное топологическое кольцо обладает точным неприводимым топологическим модулем.*

Доказательство. Пусть R — примитивное топологическое кольцо. Тогда существует точный неприводимый R-модуль M (над кольцом R с дискретной топологией). Зафиксируем некоторый ненулевой элемент m из модуля M и для любой окрестности V нуля из кольца рассмотрим множество Vm. Докажем, что множества такого вида определяют базис окрестностей нуля в M для некоторой топологии τ, относительно которой M становится топологическим R-модулем. Во-первых, докажем, что M — топологическая группа относительно сложения. Действительно, существует окрестность V_1 нуля из R, такая что $V_1 - V_1 \subset V$. Тогда $V_1 m - V_1 m \subset Vm$. Во-вторых, докажем непрерывность умножения. Найдётся окрестность V_2 нуля из R, такая что $V_2 \cdot V_2 \subset V$. В таком случае $V_2 \cdot V_2 m \subset Vm$. Пусть x — некоторый элемент модуля M. Так как $Rm = M$, то существует такой элемент t кольца, что $tm = x$. Пусть окрестность V_3 нуля такова, что $V_3t \subseteq V$. Тогда $V_3x \subseteq (V_3t)m \subseteq Vm$. Пусть r — некоторый элемент кольца. Тогда найдётся такая окрестность V_4 нуля из R, что $rV_4 \subset V$. Отсюда получаем, что $rV_4m \subset Vm$. Поэтому модуль M в топологии τ является топологическим и, очевидно, топологически неприводимым R-модулем. $\square$

Следствие 1. *Пусть R — топологическое кольцо. Тогда идеал $\operatorname{top} J(R)$ лежит в пересечении всех замкнутых примитивных идеалов.*

Из следствия 1 получаем, что если кольцо R дискретно, то $\operatorname{top} J(R) \subseteq J(R)$.

3. Кольцо, обладающее точным топологически неприводимым модулем и ограниченное этим модулем

Определение 3. Пусть M — топологический R-модуль. Кольцо R называется *M-ограниченным*, если для любой окрестности W нуля модуля M найдётся окрестность W_1 нуля в M, такая что $R \cdot W_1 \subset W$.

Предложение 5. *Пусть M — точный топологически неприводимый R-модуль и при этом кольцо R является M-ограниченным кольцом. Тогда модуль M дискретен, а кольцо R примитивно. Более того, в R существует такое семейство открыто-замкнутых левых идеалов, что их пересечение равно нулю.*

Доказательство. Пусть W — окрестность нуля из модуля, не совпадающая с M. Существует такая окрестность W_1 нуля в M, что $W_1 + W_1 \subset W$. Так как кольцо R является M-ограниченным, то найдётся такая окрестность W_2 нуля в M, что $R \cdot W_2 \subset W_1$. Если модуль M не дискретен, то в W_2 найдётся ненулевой элемент w_2. Тогда по предложению 5 работы [2] получаем, что $Rw_2 \neq \{0\}$. Но тогда

$$M = [Rw_2] \subseteq [R \cdot W_2] \subset [W_1] \subset W_1 + W_1 \subset W.$$

Получили противоречие. Таким образом, модуль M дискретен.

Для каждого элемента $m \in M$ определим замкнутый левый идеал кольца $F_m = \{x \in R\colon xm = 0\}$. Найдётся такая окрестность нуля V_m, что $V_m m = \{0\}$. Следовательно, левый идеал F_m также является открытым. Заметим, что $\bigcap\limits_{m \in M} F_m = \{0\}$. $\square$

Предложение 6. *Пусть R — предкомпактное кольцо. Тогда для любого топологического R-модуля M само кольцо является M-ограниченным.*

Доказательство. Пусть W — некоторая окрестность нуля в модуле M. Существует такая окрестность W_1 нуля в M, что $W_1 + W_1 \subset W$. Также можно найти окрестность нуля V в кольце R и окрестность нуля $\tilde{W}$ в модуле M, такие что $V \cdot \tilde{W} \subset W_1$.

Так как кольцо R предкомпактно, то найдётся конечный набор элементов $\{a_i\}_{i=1}^n$ из R, такой что

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} (a_i + V).$$

Для каждого $i = \overline{1, n}$ найдётся такая окрестность U_i нуля в модуле M, что $a_i U_i \subset W_1$. Определим множество

$$U = \left(\bigcap_{i=1}^{n} U_i \right) \cap \tilde{W}.$$

Оно, очевидно, является окрестностью нуля в M.

Пусть $r \in R$. Существует такое $i \in \{1, \ldots, n\}$, что $r \in (a_i + V)$. Тогда

$$r \cdot U \subset (a_i + V) \cdot U \subset a_i U + V \cdot U \subset W_1 + W_1 \subset W.$$

Итак, $R \cdot U \subset W$. □

Предложение 7. *В предкомпактном кольце R радикал $\operatorname{top} J(R)$ содержит все топологически квазирегулярные слева левые идеалы.*

Для доказательства этого утверждения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть M — топологически неприводимый R-модуль и при этом кольцо R является M-ограниченным кольцом. Тогда модуль M аннулирует все топологически квазирегулярные слева левые идеалы кольца R.*

Доказательство. Пусть I — топологически квазирегулярный слева левый идеал кольца. Предположим, что $IM \neq \{0\}$. Тогда существует такой элемент $m \in M$, что $Im \neq \{0\}$. Поэтому $[Im] = M$.

Пусть W — окрестность нуля модуля M. Тогда найдётся такая окрестность нуля W_1 в M, что $W_1 + R \cdot W_1 + W_1 \subset W$. Выберем такую окрестность V нуля в кольце R, что $-Vm \subset W_1$.

Так как $M = Im + W_1 \cap \{-W_1\}$, то найдутся элемент r из I и элемент w_1 из $W_1 \cap \{-W_1\}$, такие что $-m = rm + w_1$. Выберем $s \in I$ так, что $r + s + sr \in V$. Тогда

$$(r + s + sr)m = -w_1 - m + sm - sw_1 - sm = -w_1 - m - sw_1.$$

Получаем, что

$$m = -w_1 - sw_1 - (r + s + sr)m \in W_1 + R \cdot W_1 - Vm \subset W.$$

Но так как W — произвольная окрестность нуля в M, то $m = 0$. Следовательно, $IM = \{0\}$. □

Доказательство предложения 7. Доказываемое утверждение немедленно следует из предложения 6 и леммы 3. □

Следующее утверждение является ранее известным фактом (следствие теоремы 16 из [4]), но здесь доказывается иным способом.

Предложение 8. *Примитивное компактное кольцо конечно.*

Доказательство. Пусть R — примитивное компактное кольцо. Из предложения 4 следует, что существует точный неприводимый топологический R-модуль M. По предложению 6 кольцо R является M-ограниченным. Воспользовавшись предложением 5, получаем, что модуль M дискретен. Существует элемент $m \in M$, такой что $Rm \neq \{0\}$, а следовательно, $Rm = M$. Отображение $f\colon R \to M$, определяемое для всякого $r \in R$ как $f(r) = rm$, непрерывно. Поэтому модуль M, как непрерывный образ компактного множества, также компактен. Итак, поскольку модуль M компактен и дискретен, он состоит из конечного числа элементов, скажем $m_1, \ldots, m_n$, где n — натуральное число. Для каждого $i = \overline{\{1, n\}}$ определим идеал $V_i := \{r \in R\colon rm_i = 0\}$. Он является прообразом открытого множества, поэтому открыт. Но тогда множество $\{0\} = \bigcap\limits_{i=\overline{\{1,n\}}} V_i$ открыто. Следовательно, компактное кольцо R дискретно и, таким образом, конечно. □

Предложение 9. *Предкомпактное топологически примитивное кольцо примитивно.*

Доказательство. Пусть кольцо R предкомпактно, а M — топологически неприводимый точный R-модуль. Тогда по предложению 6 кольцо R является M-ограниченным кольцом. Отсюда по предложению 5 получаем, что кольцо R примитивно. □

Теорема 1. *В компактном кольце топологический радикал Джекобсона является пересечением всех замкнутых примитивных идеалов и, следовательно, содержит радикал Джекобсона.*

Доказательство. Утверждение следует из того факта, что в компактном кольце идеал топологически примитивен тогда и только тогда, когда он замкнут и примитивен (предложения 9 и 4). □

Следствие 2. *В компактном Q_l-кольце R с левой единицей радикал Джекобсона совпадает с топологическим радикалом Джекобсона.*

Доказательство. Утверждение очевидным образом вытекает из предложения 6 работы [2] и теоремы 1. □

Пример 3. Приведём пример предкомпактного кольца R, такого что $\operatorname{top} J(R) \neq J(R)$. В качестве R можно взять кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ с p-адической топологией. Тогда $\operatorname{top} J(R) = p\mathbb{Z}$, а $J(R) = \{0\}$.

4. Топологическая артиновость

Определение 4. Назовём кольцо *топологически артиновым слева* (*справа*), если оно удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей, состоящих из замкнутых левых (правых) идеалов.

Теорема 2. *Пусть R — топологически артиново слева кольцо. Тогда* $\operatorname{top} J(R)$ *— нильпотентный идеал.*

Доказательство. Пусть $J = \operatorname{top} J(R)$. Рассмотрим убывающую цепочку замкнутых идеалов $J \supseteq [J^2] \supseteq \ldots \supseteq [J^n] \supseteq \ldots$. Тогда найдётся такое натуральное число n, что $[J^n] = [J^{n+1}] = \ldots = [J^{2n}]$. Докажем, что $J^n = \{0\}$. Рассмотрим двусторонний замкнутый идеал $W = \big\{x \in R \mid J^n x = \{0\}\big\}$. Если $W \supseteq [J^n]$, то $J^n \cdot [J^n] = \{0\}$, но в таком случае $J^n \cdot J^n = \{0\}$, т. е. $J^n = \{0\}$.

Пусть теперь $W \supsetneq [J^n]$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $R \to \bar{R} = R/W$. Тогда $[J^n] \to [\bar{J^n}] \neq \{0\}$. Так как $[J^n] \subseteq \operatorname{top} J(R)$ и естественный гомоморфизм непрерывен, то, применяя предложение 3 работы [2], получаем, что $[\bar{J^n}] \subseteq \operatorname{top} J(\bar{R})$. Очевидно, что кольцо $\bar{R}$ топологически артиново слева. Следовательно, существует минимально замкнутый левый идеал $\bar{\rho} \neq \{0\}$ кольца $\bar{R}$, лежащий в $[\bar{J^n}]$. Рассмотрим $\bar{\rho}$ как левый топологический модуль над $\bar{R}$. Тогда либо $\bar{R}\bar{\rho} = \{0\}$, либо $\bar{\rho}$ топологически $\bar{R}$-неприводим. В любом случае $[\bar{J^n}]\bar{\rho} = \{\bar{0}\}$. Поэтому $[J^n]\rho \subseteq W$. Следовательно, $J^n[J^n]\rho = \{0\}$. В таком случае $J^{2n}\rho = \{0\}$. Тогда $[J^{2n}]\rho = \{0\}$. Таким образом, получаем $[J^n]\rho = \{0\}$. Итак, $\rho \subseteq W$, что противоречит тому, что $\bar{\rho} \neq \{0\}$. □

В качестве следствия этой теоремы получаем следующий результат.

Предложение 10. *Пусть R — топологически простое кольцо, являющееся топологически артиновым слева. Тогда кольцо R топологически примитивно.*

Доказательство. Докажем, что $\operatorname{top} J(R) = \{0\}$. Пусть это не так, т. е. $R = \operatorname{top} J(R)$. По теореме 2 радикал $\operatorname{top} J(R) = R$ нильпотентен. Пусть натуральное число n таково, что $R^n = \{0\}$, но $R^{n-1} \neq \{0\}$. Обозначим $I = \big\{r \in R \mid rR = \{0\}\big\}$. Тогда замкнутый идеал I, содержащий ненулевой идеал R^{n-1}, совпадает с R. Поэтому $R^2 = \{0\}$. Получили противоречие с топологической простотой кольца. Итак, $\operatorname{top} J(R) = \{0\}$. Тогда по предложению 3 кольцо R является топологически примитивным. □

Оказывается, что в предложении 10 топологическую простоту кольца можно заменить на первичность.

Предложение 11. *Топологически артиново слева первичное кольцо R является топологически примитивным кольцом.*

Доказательство. Пусть ρ — минимально замкнутый левый идеал в R. Так как кольцо R первично, то $R\rho \neq \{0\}$. Следовательно, левый идеал ρ можно рассматривать как топологически неприводимый R-модуль. Пусть $A = \big\{x \in R\colon x\rho = \{0\}\big\}$. Тогда $A\rho = \{0\}$. Из первичности кольца R получаем, что $A = \{0\}$. Таким образом, кольцо R обладает точным топологически неприводимым R-модулем. □

Предложение 12. *Пусть R — топологически артиново слева кольцо. Тогда пересечение всех замкнутых первичных идеалов кольца R совпадает с* $\operatorname{top} J(R)$, *а следовательно, нильпотентно.*

Доказательство. Этот результат следует из того, что, во-первых, всякое топологически артиново слева первичное кольцо является топологически примитивным кольцом (см. предложение 11), а во-вторых, топологический радикал Джекобсона топологически артинова слева кольца является нильпотентным идеалом (см. теорему 2). □

Пусть R — топологическое кольцо. Обозначим через $\widehat{\operatorname{top} J}(R)$ множество всех элементов из кольца R, аннулирующих все топологически неприводимые R-модули M, такие что само кольцо R является M-ограниченным.

Очевидно, что $\widehat{\operatorname{top} J}(R) \supseteq \operatorname{top} J(R)$. По лемме 3 идеал $\widehat{\operatorname{top} J}(R)$ содержит все топологически квазирегулярные слева левые идеалы в R.

Теорема 3. *Пусть R — топологически артиново слева и ограниченное справа кольцо. Тогда $\widehat{\operatorname{top} J}(R)$ — нильпотентный идеал.*

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 4. *Пусть $\varphi\colon R \to R'$ — непрерывный гомоморфизм колец и $\varphi(R) = R'$. Тогда $\varphi\big(\widehat{\operatorname{top} J}(R)\big) \subseteq \widehat{\operatorname{top} J}(R')$.*

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что найдётся элемент r из $\widehat{\operatorname{top} J}(R)$, такой что $\varphi(r) \notin \widehat{\operatorname{top} J}(R')$. Следовательно, существует топологически неприводимый R'-модуль M, такой что $\varphi(r)M \neq \{0\}$, а кольцо R' является M-ограниченным. По лемме 3 работы [2] модуль M, рассматриваемый естественным образом как R-модуль, — топологически неприводимый R-модуль. Так как кольцо R' является M-ограниченным, то для любой окрестности W нуля в M найдётся окрестность W_1 нуля в M, такая что $R' \cdot W_1 \subset W$. Тогда $\varphi^{-1}(R') \cdot W_1 \subset W$, т. е. кольцо R, являющееся прообразом R', также M-ограниченное. Поэтому $r \cdot M = \{0\}$ и, значит, $\varphi(r) \cdot M = \{0\}$, но это противоречит нашему предположению. □

Доказательство теоремы 3. Пусть $J = \widehat{\operatorname{top} J}(R)$. Рассмотрим убывающую цепочку замкнутых идеалов $J \supseteq [J^2] \supseteq \ldots \supseteq [J^n] \supseteq \ldots$. Найдётся такое натуральное число n, что $[J^n] = [J^{n+1}] = \ldots = [J^{2n}]$. Докажем, что $J^n = \{0\}$. Рассмотрим двусторонний замкнутый идеал $W = \big\{x \in R \mid J^n x = \{0\}\big\}$. Если $W \supseteq [J^n]$, то $J^n \cdot [J^n] = \{0\}$, но в таком случае $J^n \cdot J^n = \{0\}$, т. е. $J^n = \{0\}$.

Пусть $W \not\supseteq [J^n]$. Рассмотрим естественный гомоморфизм $R \to \bar{R} = R/W$. Тогда $[J^n] \to [\bar{J^n}] \neq \{0\}$. Так как $[J] \subseteq \widehat{\operatorname{top} J}(R)$ и естественный гомоморфизм непрерывен, то, применяя лемму 4, получаем, что $[\bar{J^n}] \subseteq \widehat{\operatorname{top} J}(\bar{R})$. Очевидно, что кольцо $\bar{R}$, так же как и R, топологически артиново слева, следовательно, существует минимально замкнутый левый идеал $\bar{\rho} \neq \{0\}$ кольца $\bar{R}$, лежащий в $[\bar{J^n}]$. Рассмотрим $\bar{\rho}$ как левый топологический модуль над $\bar{R}$. Тогда либо $\bar{R}\bar{\rho} = \{0\}$, либо $\bar{\rho}$ топологически $\bar{R}$-неприводим. Так как кольцо R ограничено R-модулем ρ (где ρ — прообраз $\bar{\rho}$ при естественном гомоморфизме), то R ограничено R-модулем $\bar{\rho}$ (если V и V_1 — окрестности нуля в R, такие что $R \cdot V_1 \subset V$, то $R \cdot (V_1 \cap \rho) \subset V \cap \rho$, а следовательно, $R \cdot (\bar{V_1} \cap \bar{\rho}) \subset \bar{V} \cap \bar{\rho}$). Итак, в обоих случаях $[\bar{J^n}]\bar{\rho} = \{\bar{0}\}$. Значит, $[J^n]\rho \subseteq W$. Следовательно, $J^n[J^n]\rho = \{0\}$. Тогда $J^{2n}\rho = \{0\}$ и $[J^{2n}]\rho = \{0\}$. Таким образом, получаем, что $[J^n]\rho = \{0\}$. Итак, $\rho \subseteq W$, что противоречит тому, что $\bar{\rho} \neq \{0\}$. $\square$

Следствие 3. *Пусть R — топологически артиново слева и ограниченное справа кольцо. Тогда сумма всех топологически квазирегулярных слева левых идеалов есть нильпотентный идеал.*

Заметим, что результат следствия совпадает с теоремой 3 из [6] с точностью до замены артиновости слева кольца на артиновость справа и ограниченности справа на ограниченность слева и замены суммы всех топологически квазирегулярных слева левых идеалов на сумму топологически квазирегулярных справа правых идеалов.

Предложение 13. *Пусть топологически артиново слева кольцо R обладает точным топологически неприводимым R-модулем M, для которого само кольцо является M-ограниченным. Тогда кольцо R топологически изоморфно дискретному кольцу всех матриц порядка n над некоторым телом для некоторого натурального n.*

Доказательство. По предложению 5 кольцо R примитивно, а топологический R-модуль M дискретен. По теореме плотности кольцо R является кольцом линейных преобразований пространства M над некоторым телом Δ. Предположим, что в M существует счётное число линейно независимых над Δ элементов, скажем $v_1, v_2, \ldots$. Для каждого натурального n определим замкнутый левый идеал $I_n = \{r \in R\colon rv_1 = 0, \ldots, rv_n = 0\}$. Тогда $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$. Из теоремы плотности следует, что включения строгие. Получили противоречие с тем, что кольцо топологически артиново слева. Итак, пространство M конечномерно. Заметим, что левые идеалы I_n открыты, так как модуль M дискретен. А так как этих идеалов конечное число, то $\{0\}$ является окрестностью нуля. Поэтому кольцо R дискретно, а следовательно, артиново слева. Так как R к тому же примитивно, то оно является кольцом всех матриц порядка n над некоторым телом для некоторого натурального n. $\square$

Теорема 4. *Пусть R — топологически артиново слева кольцо и $\widehat{\operatorname{top} J}(R) = 0$. Тогда кольцо R является дискретным артиновым слева полупростым кольцом.*

Доказательство. Так как кольцо R топологически артиново слева, то можно выбрать конечное число топологически неприводимых R-модулей $M_1, \ldots, M_n$, таких что
$$\bigcap_{k=1}^{n} \operatorname{Ann}_R(M_k) = \{0\}$$
и для всякого $k = \overline{\{1, n\}}$ кольцо R является M_k-ограниченным. По предложению 13 для каждого $k = \overline{\{1, n\}}$ фактор-кольцо $R/\operatorname{Ann}_R(M_k)$ дискретно и топологически изоморфно дискретному кольцу всех матриц порядка n над некоторым телом. Получаем, что само кольцо R дискретно. $\square$

Теорема 5. *Пусть R — ограниченное справа топологически артиново слева кольцо. Тогда идеал $\operatorname{top} J(R)$ нильпотентен, а кольцо $R/\operatorname{top} J(R)$ является дискретным артиновым слева полупростым кольцом.*

Доказательство. По теореме 3 идеал $\widehat{\operatorname{top} J}(R)$ нильпотентен и, следовательно, лежит в $\operatorname{top} J(R)$. Поэтому $\operatorname{top} J(R) = \widehat{\operatorname{top} J}(R)$. □

5. Топологический радикал Джекобсона для некоторых классов колец

Предложение 14. *Пусть R — топологическое кольцо с базисом окрестностей нуля из идеалов. Тогда $\operatorname{top} J(R)$ является топологически квазирегулярным слева и топологически квазирегулярным справа идеалом.*

Доказательство. Пусть V — окрестность нуля в R. По условию найдётся открытый идеал I, лежащий в V. Кольцо R/I дискретно. Поэтому $\operatorname{top} J(R/I) \subseteq J(R/I)$. Тогда $(\operatorname{top} J(R) + I)/I \subseteq \operatorname{top} J(R/I) \subseteq J(R/I)$. Следовательно, для любого $a \in \operatorname{top} J(R)$ найдётся элемент $b \in R$, такой что $(a + I) + (b + I) + (b + I)(a + I) = I$ и $(a + I) + (b + I) + (a + I)(b + I) = I$. Таким образом, $a + b + ba \in I \subseteq V$ и $a + b + ab \in I \subseteq V$. □

Напомним, что топологическое кольцо называется *линейно топологическим*, если оно обладает базисом окрестностей нуля из левых идеалов. Линейно топологическое кольцо R называется *линейно компактным*, если любой фильтр из классов вычетов по замкнутым левым идеалам имеет непустое пересечение в R. Линейно компактное кольцо называется *в узком смысле линейно компактным*, если любой непрерывный эпиморфизм кольца R на линейно топологическое кольцо $\bar{R}$ открыт.

Предложение 15. *Пусть R — ограниченное и в узком смысле линейно компактное кольцо. Тогда топологический радикал Джекобсона этого кольца Σ-нильпотентен.*

Доказательство. Кольцо R, являясь линейно топологическим и ограниченным, обладает базисом окрестностей нуля из идеалов (см. [4, лемма 9]). Пусть V — окрестность нуля в R. Тогда найдётся открытый идеал I, лежащий в V. Так как фактор-кольцо в узком смысле линейно компактного кольца R по открытому идеалу I удовлетворяет условию минимальности для левых идеалов (см. [5, с. 246]), то по теореме 2 идеал $\operatorname{top} J(R/I)$ нильпотентен. Таким образом, существует натуральное число n, такое что $\left(\operatorname{top} J(R/I)\right)^n = \{\bar{0}\}$. Так как $(\operatorname{top} J(R) + I)/I \subseteq \operatorname{top} J(R/I)$, то получаем, что $\left(\operatorname{top} J(R)\right)^n \subseteq I \subseteq V$. □

Предложение 16. *Пусть R — компактное вполне несвязное кольцо. Тогда топологический радикал Джекобсона этого кольца Σ-нильпотентен.*

Доказательство. Предложение 9 статьи [1] утверждает, что компактное вполне несвязное кольцо является ограниченным в узком смысле линейно компактным кольцом. Поэтому можно применить предложение 15. □

Теорема 6. *Пусть R — компактное кольцо с топологическим радикалом Джекобсона J. Тогда для любой окрестности U нуля в R найдётся натуральное число n, такое что $J^{(n)} \subseteq U$, где $J^{(n)} = \big\{ j_1 \cdot j_2 \cdot \ldots \cdot j_n \mid j_k \in J,\ k = \overline{\{1, n\}} \big\}$.*

Доказательство. Пусть C — компонента нуля кольца R, а V — окрестность нуля в R, такая что $V \cdot V \subseteq U$. Кольцо R/C компактно и вполне несвязно. Следовательно, по предложению 16 найдётся натуральное число m, такое что $\big(\operatorname{top} J(R/C)\big)^m \subseteq \bar{V}$. Но тогда $\big(\operatorname{top} J(R)\big)^m \subseteq C + V$. Так как в ограниченном локально компактном кольце $CR = RC = \{0\}$, то $(\operatorname{top} J(R)^m) \cdot (\operatorname{top} J(R)^m) \subseteq$ $\subseteq V \cdot V \subseteq U$. Следовательно, $J^{(2m)} \subseteq U$. □

Заметим, что последняя теорема и предложение 16 являются обобщением соответствующих утверждений из статьи И. Капланского [4] с той лишь разницей, что радикал Джекобсона заменён на содержащий его в классе компактных колец топологический радикал Джекобсона.

Литература

[1] Арнаутов В. И. Топологический радикал Бэра и разложение кольца // Сиб. мат. журн. — 1964. — Т. 5, № 6. — С. 1209—1227.

[2] Главацкий С. Т., Михалёв А. В., Тензина В. В. Топологический радикал Джекобсона колец. I // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 8. — С. 49—68.

[3] Arnautov V. I., Glavatsky S. T., Mikhalev A. V. Introduction to the Theory of Topological Rings and Modules. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[4] Kaplansky I. Topological rings // Amer. J. Math. — 1947. — Vol. 69. — P. 153—183.

[5] Leptin H. Linear kompakte Moduln und Ringe // Math. Z. — 1955. — Bd. 62. — S. 241—267.

[6] Weiss E. Boundedness in topological rings // Pacific J. Math. — 1956. — No. 1. — P. 149—158.

[7] Yood B. Closed prime ideals in topological rings // Proc. London Math. Soc. — 1972. — Vol. 24. — P. 307—323.