Характеризация интегралов по всем радоновским мерам с помощью индексов ограниченности*

В. К. ЗАХАРОВ, А. В. МИХАЛЁВ, Т. В. РОДИОНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ttwrr@yandex.ru

УДК 517.987.1+517.518.1+517.982.3

Ключевые слова: радоновская мера, симметризуемые функции, равномерные функции, локально узкие функционалы, натуральные функционалы, индекс ограниченности функционала.

Аннотация

В статье рассматривается задача характеризации интегралов как линейных функционалов. Она восходит к известным результатам Ф. Рисса (1909 г.) и И. Радона (1913 г.) об интегральном представлении ограниченных линейных функционалов интегралами Римана—Стилтьеса на отрезке и интегралами Лебега на компакте в $\mathbb{R}^n$ соответственно. После работ И. Радона, М. Фреше и Ф. Хаусдорфа задача характеризации интегралов как линейных функционалов стала конкретизироваться как задача распространения теоремы Радона с $\mathbb{R}^n$ на более общие топологические пространства с радоновскими мерами. Эта задача оказалась трудной, её решение имеет долгую и богатую историю, поэтому естественно называть её проблемой Рисса—Радона—Фреше характеризации интегралов. Важные этапы её решения связаны с именами С. Банаха, С. Сакса, С. Какутани, П. Халмоша, Э. Хьюитта, Р. Эдвардса, Н. Бурбаки, В. К. Захарова, А. В. Михалёва и др. В данной статье проблема Рисса—Радона—Фреше решается в общем случае произвольных радоновских мер на хаусдорфовых пространствах. Решение даётся в виде параметрической теоремы с помощью нового понятия *индекса ограниченности функционала*. Из этой теоремы следуют как частные случаи известные результаты указанных выше авторов о характеризации радоновских интегралов для различных классов радоновских мер и топологических пространств.

Abstract

V. K. Zakharov, A. V. Mikhalev, T. V. Rodionov, The characterization of integrals with respect to arbitrary Radon measures by the boundedness indices, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 107—126.

The problem of characterization of integrals as linear functionals is considered in the paper. It starts from the familiar results of F. Riesz (1909) and J. Radon (1913) on integral representation of bounded linear functionals by Riemann—Stieltjes integrals on a segment and by Lebesgue integrals on a compact in $\mathbb{R}^n$, respectively. After works of J. Radon, M. Fréchet, and F. Hausdorff the problem of characterization of integrals as linear functionals took the particular form of the problem of extension of Radon's theorem from $\mathbb{R}^n$ to more general topological spaces with Radon measures. This problem

*Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00321) и грантов Президента РФ для молодых учёных и ведущих научных школ МК-833.2012.1, НШ-979.2012.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 1, с. 107—126.

has turned out difficult and its solution has a long and abundant history. Therefore, it may be naturally called the Riesz—Radon—Fréchet problem of characterization of integrals. The important stages of its solving are connected with such mathematicians as S. Banach, S. Saks, S. Kakutani, P. Halmos, E. Hewitt, R. E. Edwards, N. Bourbaki, V. K. Zakharov, A. V. Mikhalev, et al. In this paper, the Riesz—Radon—Fréchet problem is solved for the general case of arbitrary Radon measures on Hausdorff spaces. The solution is given in the form of a general parametric theorem in terms of a new notion of the *boundedness index of a functional*. The theorem implies as particular cases well-known results of the indicated authors characterizing Radon integrals for various classes of Radon measures and topological spaces.

Введение

Интерес к характеризации интегралов как линейных функционалов возник с появлением интегралов Римана—Стилтьеса (1894 г.). Поскольку эти интегралы являются чрезвычайно важными для математического анализа, Ж. Адамар (1903 г.) и М. Фреше (1904 г.) поставили и решали следующую естественную задачу: как охарактеризовать интегралы Римана—Стилтьеса среди всех линейных функционалов на пространстве $C[a,b]$ всех непрерывных функций на отрезке $[a,b]$?

Хорошо известное решение этой задачи было дано Ф. Риссом (1909 г.) [27]: пространство всех интегралов Римана—Стилтьеса на $C[a,b]$ совпадает с пространством $C[a,b]^{\sim}$ всех линейных ограниченных функционалов на $C[a,b]$.

С появлением интегралов Лебега—Радона задача характеризации интегралов как линейных функционалов получила дальнейшее развитие. И. Радон [26] доказал следующую теорему: пространство всех интегралов Лебега—Радона на пространстве $C(T)$ всех непрерывных на T функций для компактного подпространства T в $\mathbb{R}^n$ совпадает с пространством всех линейных ограниченных функционалов на $C(T)$.

М. Фреше ввёл понятие абстрактной меры и абстрактного интеграла Лебега и заметил, что почти все результаты работы И. Радона могут быть распространены на такие интегралы. Однако это не касалось вышеприведённой теоремы Радона, поскольку она относилась не к абстрактным, а к топологическим компактно-регулярным (радоновским) мерам. В 1914 г. вышла книга Ф. Хаусдорфа [20], в которой были заложены основы теории топологических пространств. После упомянутых работ И. Радона, М. Фреше и Ф. Хаусдорфа задача характеризации интегралов как линейных функционалов стала конкретизироваться как задача распространения теоремы Радона с $\mathbb{R}^n$ на более общие топологические пространства с радоновскими мерами. Эта задача оказалась трудной, её решение имеет долгую и богатую историю, поэтому её естественно называть проблемой Рисса—Радона—Фреше характеризации интегралов.

Первое существенное продвижение в решении этой проблемы было получено С. Банахом в 1937 г. Используя введённые М. Фреше абстрактные меры и топологическое свойство компактной регулярности, С. Банах обобщил теорему

Радона на случай компактного метрического пространства, тот же результат получен С. Саксом. В 1941 г. С. Какутани [25] обобщил результат С. Банаха и С. Сакса на произвольное компактное пространство: для любого компактного топологического пространства T пространство интегралов по всем ограниченным радоновским мерам на $C(T) = C_{\mathrm{b}}(T) = C_{\mathrm{c}}(T)$ совпадает с пространством всех ограниченных линейных функционалов на $C(T)$.

В попытке обобщить этот результат П. Халмош, Э. Хьюитт и Р. Эдвардс (1950—1953 гг.) охарактеризовали конус всех положительных радоновских интегралов на пространстве $C_{\mathrm{c}}(T)$ непрерывных функций с компактным носителем для локально компактного пространства T [17, 19, 21]. Отметим, что доказательство этой теоремы ничем принципиальным не отличалось от доказательства теоремы Какутани. Несущественность продвижения на локально компактные пространства и положительные неограниченные меры породила естественный интерес к обобщению теорем И. Радона, Банаха—Сакса—Какутани, Халмоша—Хьюитта—Эдвардса на:

1) более широкий класс топологических пространств;
2) более широкий класс «радоновских» мер.

Для пространства ограниченных непрерывных функций $C_{\mathrm{b}}(T)$ на тихоновском пространстве T Н. Бурбаки, опираясь на идеи Ю. В. Прохорова, охарактеризовали интегральное семейство ограниченных радоновских интегралов как линейное решёточное пространство всех узких ограниченных функционалов на $C_{\mathrm{b}}(T)$ (см. [1, гл. IX, § 5, п. 2; 18, 73G (e)]).

Для произвольного хаусдорфова пространства T и положительных радоновских мер проблема Рисса—Радона—Фреше была решена в работах [5—8]: для любого хаусдорфова пространства T конус интегралов по всем положительным радоновским мерам на пространстве $\mathrm{S}_{\mathrm{c}}(T)$ всех симметризуемых (метаполунепрерывных) функций с компактным носителем совпадает с конусом всех положительных тонких линейных функционалов на $\mathrm{S}_{\mathrm{c}}(T)$.

Все эти описания, данные с использованием пространств непрерывных или симметризуемых функций, различны и по форме и по доказательству. В связи с этим возникла потребность в получении объединяющей параметрической теоремы с функциональным пространством $A(T) \subset S(T)$ в качестве параметра, из которой все приведённые и упомянутые выше результаты о линейном радоновском представлении получались бы как непосредственные следствия (частные случаи). Сначала такая параметрическая теорема появились в [3, 4], а её окончательный вариант с полным доказательством опубликован в [13].

В данной статье вводятся понятия *индексов ограниченности функционала* и с помощью этого понятия и параметрической теоремы из [13] даётся решение проблемы Рисса—Радона—Фреше для общих радоновских мер (теорема 5). Эта теорема была анонсирована в [9, 12].

В частности, как следствие из общей теоремы 5 получается следующая теорема: для любого хаусдорфова пространства T семейство интегралов по всем радоновским мерам на пространстве $\mathrm{S_c}(T)$ совпадает с семейством всех точных линейных функционалов на $\mathrm{S_c}(T)$, у которых хотя бы один из индексов ограниченности конечен. Этот результат анонсировался в [10, 12].

В наиболее известном случае локально компактного пространства T из теоремы 5 получается следующая теорема: семейство интегралов по всем радоновским мерам на пространстве $C_c(T)$ совпадает с семейством всех точных линейных функционалов на $C_c(T)$, у которых хотя бы один из индексов ограниченности конечен. Этот результат является завершением линии Радона—Банаха—Сакса—Какутани—Халмоша—Хьюитта—Эдвардса, связанной с использованием при решении задачи характеризации интегралов функционального пространства $C_c(T)$, поскольку три последних автора ограничились лишь частным случаем положительных радоновских мер.

Однако последний результат не уменьшает значения предыдущего результата, поскольку для более общих (необязательно локально компактных) топологических пространств функциональное семейство $C_c(T)$ уже не может быть использовано из-за возможного «схлопывания» до единственной (нулевой) функции.

Отметим, что более полно история решения задачи характеризации интегралов изложена в обзорной статье [11].

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить всех участников семинаров по теории функций под руководством С. М. Никольского и Б. С. Кашина за интерес к работе и внимание.

1. Предварительные сведения

В работе использованы понятия и обозначения, принятые в современной теории классов и множеств (см., например, [24]). Отметим, что изложение ведётся в аксиоматике Неймана—Бернайса—Гёделя. Для удобства читателя приведём некоторые необходимые определения.

Переобозначение символа σ как τ обозначается через $\sigma \equiv \tau$ или $\tau \equiv \sigma$. Знакосочетание $\{t \mid \varphi(t)\}$ обозначает класс, состоящий из элементов x, таких что $\exists\, y(x \in y) \wedge \varphi(x)$, т. е. состоящий из множеств, обладающих свойством φ. Наряду с $\{t \mid t \in X \wedge \varphi(t)\}$ пишем также $\{t \in X \mid \varphi(t)\}$. Через $\{t \mid \varphi(t)\}$ определяются следующие теоретико-множественные понятия: $\varnothing \equiv \{t \mid t \neq t\}$, $\{x\} \equiv \{t \mid t = x\}$, $\{x, y\} \equiv \{t \mid t = x \vee t = y\}$, $(x, y) = \big\{\{x\}, \{x, y\}\big\}$ — упорядоченная пара, $\mathcal{P}(X) \equiv \{t \mid t \subset X\}$ — *полный ансамбль на* X, т. е. семейство всех подмножеств X. Любое непустое подмножество $\mathcal{E}$ множества $\mathcal{P}(X)$ будем называть *ансамблем на* X.

Натуральные числа определяются как следующие множества:

$$0 \equiv \varnothing, \quad 1 \equiv 0 \cup \{0\}, \quad 2 \equiv 1 \cup \{1\}, \ldots, \quad n+1 \equiv n \cup \{n\}, \ldots .$$

При таком определении одновременно имеют место два свойства: $m \subset n+1$ и $m \in n+1$ для всех $m \leqslant n$ (т. е. $m \subset n$). Множество всех натуральных чисел обозначается через ω, а всех ненулевых натуральных чисел — через $\mathbb{N}$.

Мы строго отличаем отображение $u\colon X \to Y$ из множества X в множество Y от его значения $y_x \equiv u(x) \in Y$ на элементе $x \in X$. Для отображения $u\colon X \to Y$ используется также индексное обозначение $u \equiv (y_x \in Y \mid x \in X)$, которое понимается как *коллекция* (семейство) элементов множества Y, индексированных элементами множества X. Множество членов $\{t \mid \exists x \in X\ (t = y_x)\}$ коллекции u обозначается через $\{y_x \in Y \mid x \in X\}$. Например, для трёхчленной коллекции $u \equiv (a_i \in \mathbb{N} \mid i \in 3)$, такой что $a_0 = 5$, $a_1 = 4$ и $a_2 = 5$, её множество членов является двухэлементным множеством $\{a_i \mid i \in 3\} = \{4, 5\}$. Для коллекции подмножеств $u \equiv (A_i \in \mathcal{P}(A) \mid i \in I)$ множества A определены операции объединения

$$\bigcup(A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid \exists i \in I\ (t \in A_i)\}$$

и пересечения

$$\bigcap(A_i \mid i \in I) \equiv \{t \mid \forall i \in I\ (t \in A_i)\}.$$

Если на множестве A определён порядок $\leqslant$, то на A определяются частичные бинарные операции *супремума*

$$a \vee b \in \bigl\{t \in A \mid (t \geqslant a) \wedge (t \geqslant b) \wedge \forall c \in A\ \bigl((c \geqslant a) \wedge (c \geqslant b) \Rightarrow c \geqslant t\bigr)\bigr\}$$

и *инфимума*

$$a \wedge b \in \bigl\{t \in A \mid (t \leqslant a) \wedge (t \leqslant b) \wedge \forall c \in A\ \bigl((c \leqslant a) \wedge (c \leqslant b) \Rightarrow c \leqslant t\bigr)\bigr\}.$$

Если A является решёточным линейным пространством, то $a \vee b$ и $a \wedge b$ существуют для любых $a, b \in A$. В этом случае $a = a_+ + a_-$ и $|a| = a_+ - a_-$, где $a_+ \equiv a \vee 0$, $a_- \equiv a \wedge 0$. Поэтому в A определены подмножества $A_+ \equiv \{a_+ \mid a \in A\}$ и $A_- \equiv \{a_- \mid a \in A\}$.

Пусть $(A, \leqslant)$ и $(B, \leqslant)$ — упорядоченные множества. Отображение $u\colon A \to B$ называется *монотонным* [*изотонным*], если выполнено $a \leqslant a' \Rightarrow ua \leqslant ua'$ $[a \leqslant a' \Leftrightarrow ua \leqslant ua']$. Ясно, что всякое изотонное отображение инъективно. Говорят, что отображение $u\colon A \to B$ *сохраняет порядковые границы*, если равенство $a = \sup(a_m \in A \mid m \in M)$ влечёт $ua = \sup(ua_m \in B \mid m \in M)$, а равенство $a' = \inf(a'_n \in A \mid n \in N)$ влечёт $ua' = \inf(ua'_n \in B \mid n \in N)$. Легко убедиться, что всякая изотонная биекция сохраняет порядковые границы.

Пусть $(A, \mathbb{R}; +, *)$ — математическая система с операцией $+\colon A \times A \to A$ и с композицией $*\colon \mathbb{R} \times A \to A$. Далее вместо $r * a$ будем писать просто ra. Подмножество K в A называется *конусом*, если для любых $a_1, a_2 \in K$ и любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ справедливо $r_1 a_1 + r_2 a_2 \in K$.

Пусть $(A, \mathbb{R}; +, *)$ и $(B, \mathbb{R}; +, *)$ — две математические системы указанного вида, в которых операции и композиции обозначены одинаковыми знаками. Пусть K и L — конусы в A и B соответственно. Отображение $u\colon K \to L$ назовём *конусно-линейным*, если для любых $a, a_1, a_2 \in K$ и любых $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ из равенства $a = r_1 a_1 + r_2 a_2$ следует равенство $ua = r_1 ua_1 + r_2 ua_2$.

Пусть T — множество, $\mathcal{E}$ — некоторый ансамбль на T. Через $\mathcal{E}_\sigma$, $\mathcal{E}_\delta$ и $\mathcal{E}_\eta$ обозначим ансамбли, состоящие из всех счётных объединений, всех счётных пересечений и всех конечных пересечений элементов ансамбля $\mathcal{E}$ соответственно. Всякое отображение $\varepsilon\colon \mathcal{E} \to \bar{\mathbb{R}} \equiv [-\infty, \infty]$ будем называть *оцениванием на* $\mathcal{E}$ [5].

Оценивание ε назовём *положительным*, если $\operatorname{rng}\varepsilon \equiv \{\varepsilon E \mid E \in \mathcal{E}\} \subset \bar{\mathbb{R}}_+ \equiv \equiv [0, \infty]$, *ограниченным*, если $\operatorname{rng}\varepsilon \subset [a, b] \subset \mathbb{R}$. Оценивание ε назовём *натуральным*, если $\varnothing \in \mathcal{E}$, $\varepsilon(\varnothing) = 0$ и $\operatorname{rng}\varepsilon$ лежит либо в $[-\infty, \infty[$, либо в $]-\infty, \infty]$.

Напомним, что аддитивный и мультипликативный ансамбль на T, замкнутый относительно разности, называется *кольцом*, а кольцо, содержащее T — *алгеброй*. Кольцо $\mathcal{N}$ называется *δ-кольцом*, если $\mathcal{N}_\delta = \mathcal{N}$; алгебра $\mathcal{M}$ называется *σ-алгеброй*, если $\mathcal{M}_\sigma = \mathcal{M}$.

Натуральное σ-аддитивное оценивание, определённое на некотором кольце, δ-кольце или σ-алгебре будем называть *мерой*, *узкой мерой* или *широкой мерой* соответственно.

Пусть $\mathcal{E}$ — произвольный ансамбль на T. Через $M(T, \mathcal{E})$ обозначим семейство всех *$\mathcal{E}$-измеримых* функций на T, т. е. таких функций на T, что $f^{-1}\big[]x, y[\big] \in \mathcal{E}$ для любого $]x, y[\subset \mathbb{R}$.

Для любой функции $f\colon T \to \mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty[$ и любой положительной широкой меры $\mu\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ *интегралом Лебега от функции f относительно меры μ* называется число

$$i_\mu(f) \equiv \int f\,d\mu \equiv \sup\Big\{\sum (\inf(f[M_i])\mu M_i \mid i \in I)\Big\} \in [0, \infty],$$

где супремум берётся по всем конечным разбиениям $(M_i \in \mathcal{M} \mid i \in I)$ множества T (см. [22, 12.2]).

Решёточное линейное пространство всех таких функций $f \in M(T, \mathcal{M})$, что $\int f_+\,d\mu < \infty$ и $\int (-f_-)\,d\mu < \infty$, где $f_+ \equiv f \vee 0$ и $f_- \equiv f \wedge 0$, обозначим через $\mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$. Для функции $f \in \mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ *интегралом от f относительно μ* называется число

$$i_\mu(f) \equiv \int f\,d\mu \equiv \int f_+\,d\mu - \int (-f_-)\,d\mu.$$

Для произвольной широкой меры μ рассмотрим *разложение Хана* (T_+, T_-) *множества T* [2, III.4.10]. Оно порождает *вариации* $v_+(\mu)\colon \mathcal{M} \to \bar{\mathbb{R}}_+ \equiv [0, \infty]$ и $v_-(\mu)\colon \mathcal{M} \to [-\infty, 0]$ *меры μ*, такие что $v_+(\mu)M = \mu(M \cap T_+)$ и $v_-(\mu)M = = \mu(M \cap T_-)$ для любого $M \in \mathcal{M}$. Они являются широкими мерами, и по крайней мере одна из них конечна. Для μ имеет место *разложение Жордана* $\mu = v_+(\mu) + v_-(\mu)$ [2, III.4.11].

Если μ — широкая мера и f — функция из пространства

$$\mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu) \equiv \mathrm{MI}\big(T, \mathcal{M}, v_+(\mu)\big) \cap \mathrm{MI}\big(T, \mathcal{M}, -v_-(\mu)\big),$$

то *интегралом от f относительно μ* называется число

$$i_\mu(f) \equiv \int f\,d\mu \equiv \int f\,d\big(v_+(\mu)\big) - \int f\,d\big(-v_-(\mu)\big).$$

Функционал

$$i_\mu\colon f \mapsto i_\mu f \equiv \int f\,d\mu$$

на $\mathrm{MI}(T, \mathcal{M}, \mu)$ называется *интегральным функционалом*, он линеен (см. [22, 19.17]).

2. Решёточные линейные пространства функций и линейные функционалы на них

Обозначим через $F(T)$ семейство всех функций $f\colon T \to \mathbb{R}$. Пусть $A(T) \subset \subset F(T)$ — некоторое функциональное решёточное линейное пространство на T. Через $A(T)_+$ и $A_\mathrm{b}(T)$ будем обозначать его подмножества, состоящие неотрицательных и ограниченных функций соответственно.

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово топологическое пространство с ансамблями $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}$ открытых, замкнутых, компактных и борелевских подмножеств соответственно. Через $A_\mathrm{c}(T)$ будем обозначать его подпространство $A(T)$, состоящее из функций с компактными носителями.

Функциональное семейство $A(T)$ называется *усекаемым* (или *со свойством Стоуна*), если условие $f \in A(T)$ влечёт $f \wedge \mathbf{1} \in A(T)$ (см. [18, 71D; 23, I.7.2]). Например, пространство $C(T, \mathcal{G}) = M(T, \mathcal{G})$ всех непрерывных функций и его подпространства $C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$, $C_\mathrm{c}(T, \mathcal{G})$ являются таковыми.

Будем говорить, что семейство $A(T)$ *огибает* [*σ-огибает*] *сверху* функцию $h \in F(T)$, если существует сеть $(f_m \in A(T) \mid m \in M)$ [последовательность $(f_m \in A(T) \mid m \in M \subset \omega)$], такая что $(f_m(t) \mid m \in M) \downarrow h(t)$ для любого $t \in T$. Будем говорить, что $A(T)$ *огибает* [*σ-огибает*] *снизу* функцию $g \in F(T)$, если $(f_m(t) \mid m \in M) \uparrow g(t)$ для любого $t \in T$.

Мы будем использовать следующее *свойство Дини* пространства $A(T)$:

(D) если сеть $(f_m \in A(T) \mid m \in M)$ сходится к функции $f \in A(T)$ поточечно, то эта сходимость является равномерной на каждом компактном множестве $C \in \mathcal{C}$.

По теореме Дини (см., например, [28, 19.3.5]) если $A(T)$ содержится в решёточном линейном пространстве $C(T, \mathcal{G})$ всех непрерывных функций на хаусдорфовом пространстве $(T, \mathcal{G})$, то $A(T)$ обладает свойством (D).

Функционал $\varphi\colon A(T) \to \mathbb{R}$ называется *ограниченным*, если

$$\sup\{|\varphi f| \mid f \in A(T) \wedge |f| \leqslant g\} < \infty$$

для каждого $g \in A(T)_+$. Множество всех ограниченных линейных функционалов на $A(T)$ обозначается через $A(T)^\sim$.

Для произвольного линейного функционала $\varphi\colon A(T) \to \mathbb{R}$ определим (*нижний* и *верхний*) *индексы ограниченности функционала*:

$$\underline{b}(\varphi) \equiv \inf\{\varphi f \mid f \in A(T)_+ \wedge f \leqslant \mathbf{1}\}, \quad \overline{b}(\varphi) \equiv \sup\{\varphi f \mid f \in A(T)_+ \wedge f \leqslant \mathbf{1}\}.$$

Ясно, что $-\infty \leqslant \underline{b}(\varphi) \leqslant \varphi(0) = 0$ и $0 = \varphi(0) \leqslant \overline{b}(\varphi) \leqslant \infty$.

Назовём линейный функционал $\varphi\colon A(T) \to \mathbb{R}$ *натуральным*, если хотя бы один из его индексов ограниченности конечен.

Функционал φ будем называть *равномерно ограниченным*, если он ограниченный и

$$\sup\{|\varphi f| \mid f \in A(T) \wedge |f| \leqslant \mathbf{1}\} < \infty.$$

Второе условие равносильно тому, что оба индекса ограниченности функционала конечны. Множество всех равномерно ограниченных линейных функционалов обозначим через $A(T)^{\circledtilde}$. Множества $A(T)^{\sim}$ и $A(T)^{\circledtilde}$ являются решёточными линейными пространствами.

Лемма 1 (Ф. Рисс, Л. Канторович). *Для любого ограниченного линейного функционала φ на $A(T)$ имеет место разложение $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$, где*

1) $\varphi_+, -\varphi_- \in A(T)^{\sim}_+$;
2) $\varphi_+ f \equiv \sup\{\varphi g \mid g \in A(T)_+ \wedge g \leqslant f\}$ *и* $\varphi_- f \equiv \inf\{\varphi h \mid h \in A(T)_+ \wedge h \leqslant f\}$ *для любого* $f \in A(T)_+$;
3) $\varphi_+ f \equiv \varphi_+(f_+) - \varphi_+(-f_-)$ *и* $\varphi_- f \equiv \varphi_-(f_+) - \varphi_-(-f_-)$ *для любого* $f \in A(T)$.

Доказательство этого утверждения можно найти в [28, 3.6.5].

Функционал φ на $A(T)$ называется *поточечно σ-непрерывным*, если для каждой последовательности $(f_m \in A(T) \mid m \in M \subset \omega)$ и каждой функции $f \in A(T)$ выполнение условия $(f_m(t) \mid m \in M) \to f(t)$ для каждого $t \in T$ влечёт выполнение $(\varphi f_m \mid m \in M) \to \varphi f$ (см. [23, гл. I, 8.1]). Если φ является поточечно σ-непрерывным, то φ является ограниченным (см. [18, 16H]).

Функционал φ на $A(T)$ называется *узким* [18, 73G (e)] или *со свойством Прохорова*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество $C \subset T$, что условия $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(T \setminus C)$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon$. Множество всех ограниченных узких линейных функционалов на $A(T)$ обозначим через $A(T)^{\pi}$, а его подмножество равномерно ограниченных функционалов обозначим через $A(T)^{\textcircled{\pi}}$.

Функционал φ на $A(T)$ назовём *локально узким* или *с локальным свойством Прохорова* [3,13], если для любых $G \in \mathcal{G}$, $u \in A(T)_+$ и $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество $C \subset G$, что условия $f \in A(T)$ и $|f| \leqslant \chi(G \setminus C) \wedge u$ влекут $|\varphi f| < \varepsilon$.

Функционал φ на $A(T)$ назовём *σ-точным*, если он является поточечно σ-непрерывным и локально узким. Как и все поточечно σ-непрерывные функционалы, σ-точные функционалы являются ограниченными. Множество всех σ-точных линейных функционалов на $A(T)$ будем обозначать через $A(T)^{\vartriangle}$, а его подмножество равномерно ограниченных функционалов через $A(T)^{\textcircled{\vartriangle}}$. Ясно, что эти пространства функционалов линейны и решёточны.

Пусть $\mathcal{M}$ — σ-алгебра на T и μ — (широкая) мера на $\mathcal{M}$. Функционал φ на $A(T)$ называется *представимым интегралом Лебега над измеримым пространством $(T, \mathcal{M}, \mu)$* или *интегрально представимым относительно меры μ*, если $A(T) \subset MI(T, \mathcal{M}, \mu)$ и $\varphi f = i_\mu f$ для всех $f \in A(T)$.

3. Радоновские меры на хаусдорфовом пространстве

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство. Широкую меру $\mu\colon \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}$ будем называть *борелевской мерой*. Борелевскую меру μ будем называть (*борелевско-*)*радоновской мерой на* $(T, \mathcal{G})$, если выполнены следующие условия:

1) $\mu C \in \mathbb{R}$ для любого $C \in \mathcal{C}$;
2) для любого $B \in \mathcal{B}$, такого что $\mu B \in \mathbb{R}$, и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset B$ и $|\mu B - \mu C| < \varepsilon$;
3) для любого $B \in \mathcal{B}$ такого, что $\mu B = \infty$ [соответственно $\mu B = -\infty$], и для любого $a \in \mathbb{R}$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset B$ и $\mu C > a$ [соответственно $\mu C < a$].

Такое определение общей радоновской меры впервые появилось в работе В. К. Захарова [3]. Для случая положительных мер совокупное свойство 2) & 3) равносильно свойству внутренней $\mathcal{C}$-регулярности (компактной регулярности), которое ранее использовалось при определении положительных радоновских мер (см., например, [18, 73A]).

Семейство всех радоновских мер обозначим через $\mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$. К сожалению, оно не является линейным пространством, поскольку в $\bar{\mathbb{R}}$ не определена операция $\infty - \infty$. Для обозначения соответствующих подсемейств положительных и ограниченных мер будем использовать нижние индексы 0 и $\flat$. Мы используем здесь нижний индекс 0, поскольку индекс $+$ зарезервирован для конусов положительных элементов решёточных линейных пространств.

Если $\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$, то интегральный функционал i_μ называется *радоновским интегралом*.

Лемма 2. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство с широкой мерой μ. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *μ — радоновская мера*;
2) *вариации $v_+(\mu)$ и $-v_-(\mu)$ меры μ являются положительными радоновскими мерами*;
3) *$\mu = \mu_1 - \mu_2$ для некоторых мер $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})_0$, по крайней мере одна из которых конечна*;
4) *мера μ конечна на компактных множествах и обладает следующими свойствами*:
   а) *для любого множества $B \in \mathcal{B}$, такого что $\mu B = \infty$ [$\mu B = -\infty$], и любого числа $\delta > 0$ найдётся такое компактное множество $C \subset B$, что $\mu C' > \delta$ [$\mu C' < -\delta$] для любого компактного множества C', удовлетворяющего условию $C \subset C' \subset B$*;
   б) *для любого множества $B \in \mathcal{B}$, такого что $\mu B \in \mathbb{R}$, и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое компактное множество $C \subset B$, что $|\mu B - \mu C'| < \varepsilon$ для любого компактного множества C', удовлетворяющего условию $C \subset C' \subset B$.*

Лемма 2 анонсирована в [4] и доказана в [13].

Пусть меры μ и ν обе являются или положительными, или ограниченными на σ-алгебре $\mathcal{M}$. Тогда для них определены следующие операции:

1) $(\mu+\nu)M \equiv \mu M + \nu M$;
2) $(r\mu)M \equiv r\mu M$ для любого $r \in \mathbb{R}$;
3) $(\mu \vee \nu)M \equiv \sup\{\mu L + \nu N \mid L, N \in \mathcal{M} \,\&\, L \cup N = M \,\&\, L \cap N = \varnothing\}$;
4) $(\mu \wedge \nu)M \equiv \inf\{\mu L + \nu N \mid L, N \in \mathcal{M} \,\&\, L \cup N = M \,\&\, L \cap N = \varnothing\}$.

Если мера μ является ограниченной, то справедливы равенства $v_+(\mu) = \mu_+ \equiv \equiv \mu \vee \mathbf{0}$ и $v_-(\mu) = \mu_- \equiv \mu \wedge \mathbf{0}$ (см. [23, VIII.1.3, VIII.2.3]).

С помощью леммы 2 легко доказывается следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство. Тогда*

1) *если $\mu, \nu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})_0$ и $x, y \in \mathbb{R}_+$, то $x\mu + y\nu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})_0$;*
2) *$\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ является решёточным линейным подпространством*;
3) *$\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})_0 = \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})_+$.*

Для конечных мер можно дать другое, эквивалентное, определение радоновской меры.

Как отмечалось выше, для произвольной широкой меры μ имеет место разложение Жордана $\mu = v_+(\mu) + v_-(\mu)$, где хотя бы одна из вариаций конечна. Для конечной меры μ конечны обе вариации, поэтому можно определить её *полную вариацию* $|\mu| \equiv v_+(\mu) - v_-(\mu)$.

Предложение 2. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, μ — конечная борелевская мера на нём. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *$\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$;*
2) *для каждого $B \in \mathcal{B}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $C \in \mathcal{C}$ и $G \in \mathcal{G}$, что $C \subset B \subset G$ и $|\mu|(G \setminus C) < \varepsilon$.*

Это предложение доказано в [13].

Следствие 1. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — компактное пространство, μ — конечная борелевская мера на нём. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *$\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$;*
2) *для каждого $B \in \mathcal{B}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $F \in \mathcal{F}$ и $G \in \mathcal{G}$, что $F \subset B \subset G$ и $|\mu|(G \setminus F) < \varepsilon$.*

Именно свойство 2) лежало в основе определения конечной радоновской меры на компактном пространстве, которым пользовались И. Радон, С. Банах, С. Сакс и С. Какутани (см. [28, 18.2.1]). При обобщении их определения на случай конечной меры на некомпактном пространстве естественно было заменить аппроксимацию замкнутыми подмножествами аппроксимацией компактными подмножествами, что и отражено в предложении 2. Понятие же произвольной, т. е. необязательно конечной и необязательно положительной, радоновской меры было введено в [3, 4].

4. Симметризуемые функции

Пусть $(T, \mathcal{G})$ — топологическое пространство. Рассмотрим мультипликативный ансамбль $\mathcal{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathcal{G} \wedge F \in \mathcal{F}\}$ всех симметризуемых множеств $K \equiv G \cap F$ (см. [30]).

Функцию $f\colon T \to \mathbb{R}$ назовём *симметризуемой* [30], если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное покрытие $(K_i \in \mathcal{K} \mid i \in I)$ множества T, такое что колебание $\omega(f, K_i) \equiv \sup\{|f(s) - f(t)| \mid s, t \in K_i\}$ меньше ε для любого $i \in I$. Симметризуемые функции являются частным случаем равномерных функций (о них см. [5, 14]) — равномерными относительно ансамбля $\mathcal{K}$.

Пространство $S(T, \mathcal{G})$ всех симметризуемых функций на $(T, \mathcal{G})$ является линейным и решёточным [14], содержит единицу $\mathbf{1}$, а потому является и усекаемым. Ясно, что $\mathrm{S_b}(T, \mathcal{G}) = S(T, \mathcal{G})$.

На хаусдорфовом пространстве $(T, \mathcal{G})$ рассмотрим также семейство $\mathrm{SC^l_b}(T, \mathcal{G})$ всех ограниченных полунепрерывных снизу функций f, т. е. функций, для которых $f^{-1}\big[\,]x, \infty[\,\big] \in \mathcal{G}$ для каждого $x \in \mathbb{R}$. Так как это семейство не является линейным пространством, Ф. Хаусдорф [15, 38.1] рассмотрел решёточное линейное пространство $\mathrm{SC_b}(T, \mathcal{G}) \equiv \{f - g \mid f, g \in \mathrm{SC^l_b}(T, \mathcal{G})\}$. Элементы из $\mathrm{SC_b}(T, \mathcal{G})$ естественно назвать *ограниченными полунепрерывными функциями*. Отметим, что $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ совпадает с равномерным замыканием пространства $\mathrm{SC_b}(T, \mathcal{G})$ (см. [5, 30]).

В работе [14] доказано, что семейство $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ является действительно новым по сравнению с пространствами измеримых функций, т. е. для некоторых $(T, \mathcal{G})$ оно не совпадает ни с каким семейством $\mathrm{M_b}(T, \mathcal{E})$ ограниченных функций, измеримых относительно ансамбля $\mathcal{E}$.

Скажем, что семейство $A(T)$ *обладает свойством* (E) $[(\mathrm{E}_\sigma)]$, если выполнены следующие три условия:

(i) для любых $G \in \mathcal{G}$ и $u \in A(T)_+$ семейство $A(T)$ огибает [σ-огибает] снизу функцию $\chi(G) \wedge u$;

(ii) для любых $F \in \mathcal{F}$, $C \in \mathcal{C}$ и $u \in A(T)_+$ семейство $A(T)$ огибает [σ-огибает] сверху функции $\chi(F) \wedge u$ и $\chi(C)$;

(iii) для любого $G \in \mathcal{G}$ и любого компактного подмножества $C \subset G$ найдётся такая функция $v \in A(T)$, что $\chi(C) \leqslant v \leqslant \chi(G)$.

Ясно, что свойство (E_σ) является более сильным, чем свойство (E). Покажем, что интересующие нас пространства $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$, $\mathrm{S_c}(T, \mathcal{G})$, $C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$ и $C_\mathrm{c}(T, \mathcal{G})$ обладают этими свойствами.

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения*:

1) *если* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство, то* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$ *и* $\mathrm{S_c}(T, \mathcal{G})$ *обладают свойством* (E_σ);
2) *если* $(T, \mathcal{G})$ — *тихоновское пространство, то* $C_\mathrm{b}(T, \mathcal{G})$ *обладает свойством* (E);

3) *если* $(T, \mathcal{G})$ *— локально компактное пространство, то* $C_{\mathrm{c}}(T, \mathcal{G})$ *обладает свойством* (E).

Эта лемма была анонсирована в [4] и доказана в [13].

5. Функциональное описание интегралов по положительным радоновским мерам

В [13] (теорема 5.4) было дано следующее функциональное описание положительных радоновских интегралов.

Теорема 1 (параметрическая теорема о функциональном описании положительных радоновских интегралов). *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ *— хаусдорфово пространство,* $A(T)$ *— усекаемое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$. *Пусть* $A(T)$ *обладает свойством* (E_σ) *или свойством* (E) & (D). *Тогда*

1) *для каждого положительного* σ*-точного линейного функционала* φ *существует единственная положительная радоновская мера* μ*, такая что* φ *представи́м интегралом Лебега над измеримым пространством* $(T, \mathcal{B}, \mu)$ *и* $\mu C = \inf\{\varphi f \mid f \in A(T) \wedge f \geqslant \chi(C)\}$ *для всякого компактного множества* C;
2) *если, кроме того, функционал* φ *равномерно ограниченный, то мера* μ *ограниченная*;
3) *отображение* $V\colon \varphi \mapsto \mu_0$ *есть биекция из* $(A(T)^{\vartriangle})_+$ *на семейство мер* $\mathfrak{RM}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0 \equiv \{\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})_0 \mid A(T) \subset \mathrm{MI}(T, \mathcal{B}, \mu)\}$;
4) *отображение* $V_{\mathrm{b}} \equiv V|(A(T)^{\circledS})_+$ *есть биекция из* $(A(T)^{\circledS})_+$ *на* $\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})_+$.

Докажем, что биекции V и V_{b} обладают также следующими дополнительными свойствами.

Предложение 3. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ *— хаусдорфово пространство,* $A(T)$ *— усекаемое решёточное линейное подпространство в* $\mathrm{S}(T, \mathcal{G})$. *Пусть* $A(T)$ *обладает свойством* (E_σ) *или свойством* (E) & (D). *Тогда отображения* V *и* V_{b} *конусно-линейны, изотонны и сохраняют порядковые границы.*

Это предложение доказано в [13].

6. Решёточная линейная оболочка семейства радоновских мер. Продолжение радоновских интегралов на оболочку

Поскольку семейство $\mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})_0$ всех положительных радоновских мер не является линейным пространством, а всего лишь конусом, в [5, 7] была построена его решёточная линейная оболочка — пространство $\mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ всех радоновских бимер. Вложим семейство $\mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$ всех радоновских мер в это пространство.

Напомним, что подмножество P из T называется *предкомпактным* (*относительно компактным*), если $\operatorname{cl} P$ является компактным, т. е. P содержится в некотором компактном множестве. Подансамбль ансамбля $\mathcal{B}(T,\mathcal{G})$, состоящий из всех предкомпактных борелевских множеств, обозначим через $\mathcal{B}_\mathrm{c} \equiv \mathcal{B}_\mathrm{c}(T,\mathcal{G})$. Он является δ-кольцом.

Конечная узкая мера $\mu\colon \mathcal{B}_\mathrm{c}(T,\mathcal{G}) \to \mathbb{R}$ названа в [5] *узкой* (*борелевско-*)*радоновской мерой на* $(T,\mathcal{G})$, если для любого $B \in \mathcal{B}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое $C \in \mathcal{C}$, что $C \subset B$ и $|\mu B - \mu C| < \varepsilon$. Подробнее об узких радоновских мерах можно прочитать в [5, II.1].

Триплет $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$, состоящий из мер μ, μ_1 и μ_2 на $(T,\mathcal{G})$, называется *радоновским триплетом на хаусдорфовом пространстве* $(T,\mathcal{G})$, если выполнены три условия:

1) $\mu_1\colon \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ и $\mu_2\colon \mathcal{B} \to \bar{\mathbb{R}}_+$ — положительные широкие радоновские меры;
2) $\mu\colon \mathcal{B}_c \to \bar{\mathbb{R}}$ — узкая радоновская мера;
3) $\mu B = \mu_1 B - \mu_2 B$ для каждого $B \in \mathcal{B}_c$.

Если μ_1 и μ_2 являются ограниченными, то триплет β назовём *ограниченным*.

Множество всех радоновских триплетов на $(T,\mathcal{G})$ обозначим через $\mathfrak{R}(T,\mathcal{G})$. Подсемейство ограниченных радоновских триплетов обозначим через $\mathfrak{R}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})$.

Радоновские триплеты $\beta \equiv (\mu, \mu_1, \mu_2)$ и $\gamma \equiv (\nu, \nu_1, \nu_2)$ назовём *эквивалентными* ($\beta \sim \gamma$), если $\mu|\mathcal{B}_\mathrm{c}(T,\mathcal{G}) = \nu|\mathcal{B}_\mathrm{c}(T,\mathcal{G})$. Класс эквивалентности в $\mathfrak{R}(T,\mathcal{G})$ радоновского триплета β обозначим через $\bar{\beta} \equiv \theta\beta$. Множество всех классов $\bar{\beta}$ для всех радоновских триплетов $\beta \in \mathfrak{R}(T,\mathcal{G})$ обозначим через $\mathfrak{RB}(T,\mathcal{G})$.

Любой элемент $\mathfrak{m} \equiv \bar{\beta}$ из $\mathfrak{RB}(T,\mathcal{G})$ будем называть (как это было сделано в [5]) *радоновской бимерой*. Если $\beta \in \mathfrak{R}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})$, то $\mathfrak{m} \equiv \bar{\beta}$ будем называть *ограниченной радоновской бимерой*. Семейство всех ограниченных радоновских бимер обозначим через $\mathfrak{RB}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})$.

В качестве нулевого элемента в $\mathfrak{RB}(T,\mathcal{G})$ возьмём элемент $O = \theta(\zeta, \zeta_1, \zeta_2)$, где ζ — нулевая мера на $\mathcal{B}(T,\mathcal{G})$, ζ_1 и ζ_2 — нулевые меры на $\mathcal{B}_\mathrm{c}(T,\mathcal{G})$.

В [5, II.2] для радоновских бимер определены операции сложения и умножения на действительные числа, а также бинарное отношение порядка $\leqslant$ и доказана корректность этих определений. Там же доказано следующее предложение.

Предложение 4. *Пусть $(T,\mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство. Тогда семейства $\mathfrak{RB}(T,\mathcal{G})$ и $\mathfrak{RB}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})$ являются решёточными линейными пространствами.*

Теперь укажем на связь между положительными радоновскими мерами и положительными радоновскими бимерами. Для каждой меры $\mu \in \mathfrak{RM}(T,\mathcal{G})_0$ возьмём узкую положительную радоновскую меру $\mu_f \equiv \mu|\mathcal{B}_\mathrm{c}$, радоновский триплет $\beta \equiv (\mu_f, \mu, 0)$ и положительную радоновскую бимеру $\mathfrak{m} \equiv \bar{\beta}$. Эта процедура определяет отображение $E^0\colon \mathfrak{RM}(T,\mathcal{G})_0 \to \mathfrak{RB}(T,\mathcal{G})_+$, такое что $E^0\mu \equiv \mathfrak{m}$. Если $\mu \in \mathfrak{RM}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})_+$, то $E^0\mu \in \mathfrak{RB}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})_+$. Поэтому мы можем определить отображение $E^0_\mathrm{b}\colon \mathfrak{RM}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})_+ \to \mathfrak{RB}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})_+$, полагая $E^0_\mathrm{b} \equiv E^0|\mathfrak{RM}_\mathrm{b}(T,\mathcal{G})_+$.

Теорема 2. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство. Тогда*

1) *отображения*
$$E^0 \colon \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})_0 \to \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+, \quad E^0_{\mathrm{b}} \colon \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})_+ \to \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})_+$$
являются биекциями;
2) *отображения* E^0 *и* E^0_{b} *конусно-линейны, изотонны и сохраняют порядковые границы*;
3) *для каждой бимеры* $\mathfrak{m} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ *существуют единственные меры* $\mu', \mu'' \in \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})_0$, *такие что* $\mathfrak{m} = E^0\mu' - E^0\mu''$, $E^0\mu' = \mathfrak{m}_+$ *и* $E^0\mu'' = -\mathfrak{m}_-$; *если бимера* $\mathfrak{m}$ *ограниченная, то меры* μ' *и* μ'' *тоже ограниченные.*

Эта теорема доказана в [5, II.2].

Меры μ' и μ'' назовём *родительскими положительными радоновскими мерами радоновской бимеры* $\mathfrak{m}$ и обозначим через $p'(\mathfrak{m})$ и $p''(\mathfrak{m})$ соответственно.

Рассмотрим продолжение вложения E^0 на множество всех радоновских мер.

Пусть μ — радоновская мера. По лемме 2 $\mu = \mu_1 - \mu_2$ для некоторых положительных радоновских мер μ_1 и μ_2, хотя бы одна из которых конечна. Рассмотрим радоновский триплет $\beta \equiv (\mu|\mathcal{B}_{\mathrm{c}}, \mu_1, \mu_2)$. Если $\mu = \nu_1 - \nu_2$ для каких-то других положительных радоновских мер ν_1 и ν_2, то $(\mu|\mathcal{B}_{\mathrm{c}}, \nu_1, \nu_2) \sim \beta$. Поэтому мы можем корректно определить отображение $E \colon \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G}) \to \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$, полагая $E\mu \equiv \theta\beta$. Из определений отображений E^0 и E следует, что $E\mu = E^0\mu$ для $\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})_0$, т. е. E является продолжением E^0.

Назовём бимеру $\mathfrak{m}$ *существенной бимерой*, если она не является образом какой-либо радоновской меры при этом отображении, т. е. если $\mathfrak{m} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G}) \setminus E[\mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})]$. Иными словами, бимера является существенной, если её нельзя представить никакой функцией множеств.

Если $\mu \in \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$, то $E\mu \in \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$. Следовательно, корректно определено отображение $E_{\mathrm{b}} \equiv E|\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}) \colon \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}) \to \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$. Ясно, что оно является продолжением отображения E^0_{b}.

Теорема 3. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство.*

1. *Если* $\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$ *и* $\mu = \mu_1 - \mu_2$ *для некоторых положительных радоновских мер* μ_1 *и* μ_2, *хотя бы одна из которых конечна, то* $E\mu = E^0\mu_1 - E^0\mu_2$.
2. *Если* $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$, $x, y \in \mathbb{R}$, *меры* $x\mu$ *и* $y\nu$ *принимают бесконечные значения одного и того же знака,* $\lambda = x\mu + y\nu$, *то* $E\lambda = xE\mu + yE\nu$ (*свойство линейности*).
3. *Отображение* E *инъективно, изотонно и сохраняет порядковые границы.*

Эта теорема доказана в [13].

Следствие 2. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$. *Тогда* $E\mu = E^0\big(v_+(\mu)\big) - E^0\big(-v^-(\mu)\big)$ *для всякой меры* $\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$.

Следствие 3. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство. Тогда*

1) *отображение* $E_{\mathrm{b}} \colon \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}) \to \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ *биективно, изотонно и сохраняет порядковые границы*;

2) E_{b} *является изоморфизмом данных решёточных линейных пространств*;
3) $E_{\mathrm{b}}\mu = E^0_{\mathrm{b}}(\mu_+) - E^0_{\mathrm{b}}(-\mu_-)$ *для всякой меры* $\mu \in \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$.

Эти следствия также доказаны в [13].

Отметим, что изоморфизм E_{b} совпадает с изоморфизмом F_{b} из [7].

Предложение 4 и теоремы 2 и 3 показывают, что радоновские бимеры образуют естественную решёточную линейную оболочку для семейства всех широких радоновских мер.

Более того, ниже мы увидим, что отображения E^0, E и E_{b} сохраняют интеграл Лебега.

Предложение 5. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство. Тогда если* $\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$ *и* $\mathfrak{m} \equiv \theta\bigl(\mu|\mathcal{B}_{\mathrm{c}}, v_+(\mu), -v_-(\mu)\bigr)$, *то* $p'(\mathfrak{m}) = v_+(\mu)$, $p''(\mathfrak{m}) = -v_-(\mu)$.

Следствие 4. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$. *Тогда* $p'(E\mu) = v_+(\mu)$ *и* $p''(E\mu) = -v_-(\mu)$.

Следствие 5. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство и* $\mu \in \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$. *Тогда* $p'(E_{\mathrm{b}}\mu) = v_+(\mu)$ *и* $p''(E_{\mathrm{b}}\mu) = -v_-(\mu)$.

Доказательства предложения 5 и его следствий можно найти в [13].

Для каждой борелевско-радоновской меры μ рассмотрим семейство $\mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) \equiv \mathrm{MI}(T, \mathcal{B}(T, \mathcal{G}), \mu)$ всех *борелевских μ-интегрируемых функций*. Теперь для каждой радоновской бимеры $\mathfrak{m}$ можно рассмотреть семейство $\mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m}) \equiv \mathrm{BI}\bigl(T, \mathcal{G}, p'(\mathfrak{m})\bigr) \cap \mathrm{BI}\bigl(T, \mathcal{G}, p''(\mathfrak{m})\bigr)$ всех *борелевских функций, интегрируемых* (*по Лебегу*) *относительно бимеры* $\mathfrak{m}$.

Число

$$i_{\mathfrak{m}} \equiv \int f\, dp'(\mathfrak{m}) - \int f\, dp''(\mathfrak{m})$$

называется *интегралом* (*Лебега*) *от функции* $f \in \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})$ *относительно бимеры* $\mathfrak{m}$ и обозначается через $\int f\, d\mathfrak{m}$ [5, II.3].

Предложение 6. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ — *хаусдорфово пространство. Тогда для каждой меры* $\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$ *имеем* $\mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) = \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, E\mu)$ *и любой функции* $f \in \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu)$ *справедливо равенство*

$$\int f\, d\mu = \int f\, dE\mu.$$

Это предложение доказано в [13].

Таким образом, вложение $E\colon \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G}) \rightarrowtail \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$, а следовательно, и биекция $E^0 = E|\mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})_0\colon \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})_0 \twoheadrightarrow \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})_+$ и изоморфизм $E_{\mathrm{b}} \equiv E|\mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})\colon \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G}) \twoheadrightarrow \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ сохраняют интеграл Лебега. Это показывает, что радоновский интеграл по бимере $\mathfrak{m} \mapsto i_{\mathfrak{m}}$ является естественным продолжением радоновского интеграла $\mu \mapsto i_\mu$.

7. Функциональное описание интегралов по всем радоновским мерам

Теорема 1 даёт функциональное описание интегралов по положительным радоновским мерам. В связи с этим возникает естественная задача функционального описания интегралов по всем радоновским мерам.

В то время как семейство $A(T)^{\vartriangle}$ всех σ-точных функционалов является линейным пространством, семейство $\mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$ всех радоновских мер не является таковым (см. раздел 3). Поэтому сначала нужно найти подходящее интегральное представление для произвольного σ-точного функционала.

Продолжение радоновского интеграла, построенное в предыдущем разделе, позволяет расширить интегральное представление положительных σ-точных функционалов из раздела 5 на решёточное линейное пространство всех σ-точных функционалов.

Продолжим биекцию $V\colon (A(T)^{\vartriangle})_+ \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathfrak{RM}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0$ из теоремы 1 до изоморфизма линейных решёточных пространств. Для этого рассмотрим множество

$$\mathfrak{RB}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big) \equiv \{\mathfrak{m} \in \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G}) \mid A(T) \subset \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mathfrak{m})\}$$

всех таких радоновских бимер $\mathfrak{m}$, что все функции из $A(T)$ $\mathfrak{m}$-интегрируемы.

Если $\mu \in \mathfrak{RM}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0$, то по предложению 6 $\int f\,d\mu = \int f\,dE^0\mu$ для каждой функции $f \in \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, \mu) = \mathrm{BI}(T, \mathcal{G}, E^0\mu)$. Следовательно, $E^0\mu \in \mathfrak{RB}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_+$ и $\int f\,d\mu = \int f\,dE^0\mu$ для каждой $f \in A(T)$. Отсюда следует, что можно рассмотреть композицию отображений

$$E^0 \circ V\colon (A(T)^{\vartriangle})_+ \rightarrowtail \mathfrak{RB}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_+.$$

Нетрудно убедиться, что $E^0_{\mathrm{b}} \circ V_{\mathrm{b}}\colon (A(T)^{\circledvartriangle})_+ \rightarrowtail \mathfrak{RB}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})_+$.

Следующая теорема об интегральном представлении всех σ-точных функционалов доказана в [13] (теорема 5.7).

Теорема 4. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ — усекаемое решёточное линейное подпространство в $S(T, \mathcal{G})$. Пусть $A(T)$ обладает свойством (E_σ) или свойством $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. Тогда отображение $E^0 \circ V$ единственным образом продолжается до изоморфизма $J\colon A(T)^{\vartriangle} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathfrak{RB}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ решёточных линейных пространств. При этом $J\varphi = E^0\big(V(\varphi_+)\big) - E^0\big(V(-\varphi_-)\big)$ для каждого $\varphi \in A(T)^{\vartriangle}$ и $\varphi f = \int f\,dJ\varphi = \int f\,dV(\varphi_+) - \int f\,dV(-\varphi_-)$ для всякой функции $f \in A(T)$ и каждого $\varphi \in A(T)^{\vartriangle}$.*

Итак, каждый σ-точный функционал представляется интегралом по некоторой радоновской бимере. Теорема 4 и понятие натурального функционала из раздела 2 позволяют получить полное решение сформулированной выше задачи.

Семейство всех натуральных σ-точных функционалов на пространстве $A(T)$ будем обозначать через $(A(T)^{\vartriangle})_{\mathrm{nat}}$.

Теорема 5 (параметрическая теорема о функциональном описании всех радоновских интегралов). *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство, $A(T)$ —*

усекаемое решёточное линейное подпространство в $S(T, \mathcal{G})$, *обладающее свойством* (E_σ) *или свойством* $(\mathrm{E})\,\&\,(\mathrm{D})$. *Пусть* $\varphi \in A(T)^\Delta$. *Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) *функционал* φ *натуральный*;
2) *существует* (*единственная*) *радоновская мера* μ, *такая что* $E\mu = J\varphi$.

Более того, $\varphi f = \int f\,d\mu$ *для всех* $f \in A(T)$ *и биективное отображение* $I\colon \varphi \mapsto \mu$ *из* $(A(T)^\Delta)_{\mathrm{nat}}$ *на* $\mathfrak{RM}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ *сохраняет все линейные и решёточные структуры, наследуемые семейством функционалов и семейством мер из их решёточных линейных оболочек.*

Доказательство. Мы будем использовать взаимно-однозначные отображения $E\colon \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G}) \rightarrowtail \mathfrak{RB}(T, \mathcal{G})$ из теоремы 3, $J\colon A(T)^\Delta \twoheadrightarrow \mathfrak{RB}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)$ из теоремы 4 и $V\colon (A(T)^\Delta)_+ \twoheadrightarrow \mathfrak{RM}\big(T, \mathcal{G}, A(T)\big)_0$ из теоремы 1.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Рассмотрим вариации $v_+(\mu)$ и $v_-(\mu)$ меры μ. По лемме 2 $\mu_1 \equiv v_+(\mu)$ и $\mu_2 \equiv -v_-(\mu)$ являются положительными радоновскими мерами и хотя бы одна из них конечна. По определению $\varphi f = \int f\,d\mu \equiv$ $\equiv \int f\,d\mu_1 - \int f\,d\mu_2$ для всех $f \in A(T)$.

Пусть μ_1 конечна. Тогда если $f \in A(T)_+$ и $f \leqslant \mathbf{1}$, то

$$\varphi f \leqslant \int f\,d\mu_1 \leqslant \int \mathbf{1}\,d\mu_1 = \mu_1(T) < \infty,$$

т. е. $\overline{b}(\varphi) < \infty$.

Пусть μ_2 конечна. Тогда если $f \in A(T)_+$ и $f \leqslant \mathbf{1}$, то

$$\varphi f \geqslant -\int f\,d\mu_2 \geqslant -\int \mathbf{1}\,d\mu_2 = -\mu_2(T) = v_-(T) > -\infty,$$

т. е. $\underline{b}(\varphi) > -\infty$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Рассмотрим функционалы φ_+ и φ_- из леммы 1, такие что $\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$. Из леммы 1.2 работы [13] следует, что $\varphi_+, -\varphi_- \in (A(T)^\Delta)_+$. Определим положительные радоновские меры $\mu_1 \equiv V(\varphi_+)$ и $\mu_2 \equiv V(-\varphi_-)$.

Пусть $\overline{b}(\varphi) < \infty$. Покажем, что μ_1 конечна. По лемме 1

$$\varphi_+ f = \sup\{\varphi g \mid g \in A(T)_+ \wedge g \leqslant f\}.$$

Поэтому для любой функции $f \in A(T)_+$, такой что $f \leqslant \mathbf{1}$, имеем

$$\varphi_+ f \leqslant \sup\{\varphi g \mid g \in A(T)_+ \wedge g \leqslant \mathbf{1}\} = \overline{b}(\varphi) < \infty.$$

Для каждого $C \in \mathcal{C}$ по свойству (E) или (E_σ) найдётся такая функция $f \in A(T)$, что $\chi(C) \leqslant f \leqslant \chi(T) = \mathbf{1}$. Тогда по теореме 1

$$\mu_1 C = \int \chi(C)\,d\mu_1 \leqslant \int f\,d\mu_1 = \varphi_+ f \leqslant \overline{b}(\varphi) < \infty.$$

Следовательно,

$$\mu_1 B = \sup\{\mu_1 C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset B\} \leqslant \overline{b}(\varphi) < \infty$$

для любого $B \in \mathcal{B}$ в силу компактной регулярности положительной радоновской меры μ_1.

Пусть теперь $\underline{b}(\varphi) > -\infty$. Покажем, что μ_2 конечна. По лемме 1 $\varphi_- f = \inf\{\varphi h \mid h \in A(T)_+ \wedge h \leqslant f\}$. Поэтому для любой функции $f \in A(T)_+$ из $f \leqslant \mathbf{1}$ следует, что

$$\varphi_- f \geqslant \inf\{\varphi h \mid h \in A(T)_+ \wedge h \leqslant \mathbf{1}\} = \underline{b}(\varphi) > -\infty.$$

Как и в предыдущем случае, для произвольного $C \in \mathcal{C}$ берём такую функцию $f \in A(T)$, что $\chi(C) \leqslant f \leqslant \mathbf{1}$, и имеем

$$\mu_2 C = \int \chi(C)\, d\mu_2 \leqslant \int f\, d\mu_2 = -\varphi_- f \leqslant -\underline{b}(\varphi) < \infty.$$

Поэтому

$$\mu_2 B = \sup\{\mu_2 C \mid C \in \mathcal{C} \wedge C \subset B\} \leqslant -\underline{b}(\varphi) < \infty$$

для каждого $B \in \mathcal{B}$.

Итак, хотя бы одна из мер, μ_1 или μ_2, конечна, поэтому определена мера $\mu \equiv \mu_1 - \mu_2$, причём $\mu \in \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$ по лемме 2. Тогда согласно теоремам 3 и 4 $E\mu = E^0\mu_1 - E^0\mu_2 = J\varphi$. Более того, μ — единственная мера, для которой $E\mu = J\varphi$, так как отображение E инъективно. Наконец, с учётом предложения 6 имеем

$$\varphi f = \int f\, dJ\varphi = \int f\, dE\mu = \int f\, d\mu.$$

Согласно теореме 3 и предложению 6 отображение E инъективно, изотонно, сохраняет линейные и решёточные структуры и сохраняет интеграл. Из предыдущих рассуждений следует, что I является «сужением» изоморфизма J из теоремы 4 в том смысле, что $E \circ I = J$. Следовательно, поскольку изоморфизм J сохраняет все линейные и решёточные структуры, отображение I тоже их сохраняет. □

Следствие 6. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство. Тогда отображение $I\colon (S_c(T, \mathcal{G})^\vartriangle)_{\mathrm{nat}} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$ является биекцией и сохраняет все линейные и решёточные структуры, при этом $\varphi f = \int f\, dI\varphi$.*

Следствие 7. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство. Тогда отображение $I\colon S(T, \mathcal{G})^\vartriangle \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ является изоморфизмом решёточных линейных пространств, при этом $\varphi f = \int f\, dI\varphi$.*

Следствие 8 (теорема Бурбаки). *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — тихоновское пространство. Тогда $I\colon C_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})^\pi \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}_{\mathrm{b}}(T, \mathcal{G})$ является изоморфизмом решёточных линейных пространств, при этом $\varphi f = \int f\, dI\varphi$.*

Следствие 9. *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — локально компактное пространство. Тогда $I\colon (C_c(T, \mathcal{G})^\sim)_{\mathrm{nat}} \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$ является биекцией и сохраняет все линейные и решёточные структуры, при этом $\varphi f = \int f\, dI\varphi$.*

Следствие 10 (теорема Радона—Банаха—Сакса—Какутани). *Пусть пространство $(T, \mathcal{G})$ компактно. Тогда $I\colon C(T, \mathcal{G})^\sim \rightarrowtail\!\!\!\twoheadrightarrow \mathfrak{RM}(T, \mathcal{G})$ является изоморфизмом решёточных линейных пространств, при этом $\varphi f = \int f\, dI\varphi$.*

Литература

[1] Бурбаки Н. Интегрирование. Меры на компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах. — М.: Наука, 1977.

[2] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: Изд. иностр. лит., 1962.

[3] Захаров В. К. Проблема характеризации радоновских интегралов // Докл. РАН. — 2002. — Т. 385, № 6. — С. 735—737.

[4] Захаров В. К. Проблема Рисса—Радона характеризации интегралов и слабая компактность радоновских мер // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. — 2005. — Т. 248. — С. 106—116.

[5] Захаров В. К., Михалёв А. В. Интегральное представление для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 4. — С. 1135—1172.

[6] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема интегрального представления для радоновских мер на произвольном хаусдорфовом пространстве // Докл. РАН. — 1998. — Т. 360, № 1. — С. 13—15.

[7] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства // Изв. РАН. Сер. мат. — 1999. — Т. 63, № 5. — С. 37—82.

[8] Захаров В. К., Михалёв А. В. Проблема общего радоновского представления для произвольного хаусдорфова пространства. II // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 6. — С. 3—18.

[9] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Проблема Рисса—Радона—Фреше характеризации радоновских интегралов: ограниченные меры; положительные меры; бимеры; общие радоновские меры // Современные проблемы математики, механики и их приложений. Материалы междунар. конф., посв. 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего. — М.: Университетская книга, 2009. — С. 91—92.

[10] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Описание интегралов по всем радоновским мерам на произвольном хаусдорфовом пространстве // Современные проблемы теории функций и их приложения. Материалы 15-й Саратовской зимней школы, посвящённой 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ. — Саратов: СГУ, 2010. — С. 76—77.

[11] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Проблема Рисса—Радона—Фреше характеризации интегралов // Успехи мат. наук. — 2010. — Т. 65, № 4. — С. 153—178.

[12] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Проблема характеризации общих радоновских интегралов // Докл. РАН. — 2010. — Т. 433, № 6. — С. 731—735.

[13] Захаров В. К., Михалёв А. В., Родионов Т. В. Описание радоновских интегралов как линейных функционалов // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 8. — С. 87—161.

[14] Захаров В. К., Родионов Т. В. Класс равномерных функций и его соотношение с классом измеримых функций // Мат. заметки. — 2008. — Т. 84, № 6. — С. 809—824.

[15] Хаусдорф Ф. Теория множеств. — М.: УРСС, 2004.

[16] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.

[17] Edwards R. E. A theory of Radon measures on locally compact spaces // Acta Math. — 1953. — Vol. 89. — P. 133—164.

[18] Fremlin D. H. Topological Riesz Spaces and Measure Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1974.

[19] Halmos P. R. Measure Theory. — Princeton: Van Nostrand, 1950.

[20] Hausdorff F. Grundzüge der Mengenlehre. — Leipzig: Weit, 1914.

[21] Hewitt E. Integration on locally compact spaces. I // Univ. of Washington Publ. Math. — 1952. — Vol. 3. — P. 71—75.

[22] Hewitt E., Stromberg K. Real and Abstract Analysis. — Berlin: Springer, 1965.

[23] Jacobs K. Measure and Integral. — New York: Academic Press, 1978.

[24] Jech T. Set Theory. — Berlin: Springer, 2002. — (Springer Monographs Math.).

[25] Kakutani S. Concrete representation of abstract (M)-spaces // Ann. Math. (2). — 1941. — Vol. 42. — P. 994—1024.

[26] Radon J. Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen // Sitzungsber. Math.-Natur. Kl. Akad. Wiss. Wien. — 1913. — Vol. 122. — P. 1295—1438.

[27] Riesz F. Sur les opérations fonctionelles linéaires // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1909. — Vol. 149. — P. 974—977.

[28] Semadeni Z. Banach Spaces of Continuous Functions. — Warszawa: PWN, 1971.

[29] Sierpiński W. Sur les fonctions développables en séries absolument convergentes de fonctions continues // Fund. Math. — 1921. — Vol. 2. — P. 15—27.

[30] Zakharov V. K. Alexandrovian cover and Sierpińskian extension // Studia Sci. Math. Hungar. — 1989. — Vol. 24, no. 2-3. — P. 93—117.