# Почти примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр малых рангов*

**А. В. КЛИМАКОВ, А. А. МИХАЛЁВ**
*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова*
e-mail: andrey.klimakov@gmail.com

УДК 512.554

**Ключевые слова:** свободные неассоциативные алгебры, примитивные элементы, почти примитивные элементы.

**Аннотация**

Пусть $K$ — поле, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра над полем $K$ с множеством $X$ свободных образующих. А. Г. Курош доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны. Подмножество $M$ ненулевых элементов алгебры $F(X)$ называется примитивным, если существует такое множество $Y$ свободных образующих алгебры $F(X)$, $F(X) = F(Y)$, что $M \subseteq Y$ (при этом $|Y| = |X| = n$). Ненулевой элемент $u$ алгебры $F(X)$ называется почти примитивным элементом, если $u$ не является примитивным элементом алгебры $F(X)$, но является примитивным элементом любой собственной подалгебры $H$ алгебры $F(X)$, содержащей элемент $u$. В данной работе получены критерии почти примитивности однородных элементов и построены алгоритмы проверки почти примитивности однородных элементов в свободных неассоциативных алгебрах ранга 1 и 2. Построены новые примеры почти примитивных элементов свободных неассоциативных алгебр ранга 3.

**Abstract**

*A. V. Klimakov, A. A. Mikhalev, Almost primitive elements of free nonassociative algebras of small ranks*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 127—141.

Let $K$ be a field, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, and let $F(X)$ be the free nonassociative algebra over the field $K$ with the set $X$ of free generators. A. G. Kurosh proved that subalgebras of free nonassociative algebras are free. A subset $M$ of nonzero elements of the algebra $F(X)$ is said to be primitive if there is a set $Y$ of free generators of $F(X)$, $F(X) = F(Y)$, such that $M \subseteq Y$ (in this case we have $|Y| = |X| = n$). A nonzero element $u$ of the free algebra $F(X)$ is said to be an almost primitive if $u$ is not a primitive element of the algebra $F(X)$, but $u$ is a primitive element of any proper subalgebra of $F(X)$ that contains it. In this article, for free nonassociative algebras of rank 1 and 2 criteria for homogeneous elements to be almost primitive are obtained and algorithms to recognize homogeneous almost primitive elements are constructed. New examples of almost primitive elements of free nonassociative algebras of rank 3 are constructed.

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ 09-01-00303, 08-01-00693, 11-01-00794.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2011/2012, том 17, № 1, с. 127—141.

# 1. Введение

Пусть $K$ — поле, $X$ — непустое множество, $\Gamma(X)$ — свободный группоид неассоциативных одночленов без единичного элемента в алфавите $X$: $X \subseteq \Gamma(X)$; если $u, v \in \Gamma(X)$, то $u \circ v \in \Gamma(X)$, где $u \circ v$ — формальное произведение неассоциативных слов. В частности, если $x, y, z \in X$, то $x \circ y = xy$, $(xy)z \circ xy = \big((xy)z\big)(xy)$, $x(xx) \neq (xx)x$.

Линейное пространство $F(X)$ над полем $K$ с базисными элементами из множества $\Gamma(X)$ и умножением

$$(\alpha \cdot a) \cdot (\beta \cdot b) = (\alpha\beta) \cdot (a \circ b)$$

для всех $\alpha, \beta \in K$, $a, b \in \Gamma(X)$ является *свободной неассоциативной $K$-алгеброй без единичного элемента с множеством $X$ свободных образующих*: если $A$ — $K$-алгебра без единичного элемента и $\xi\colon X \to A$ — некоторое отображение, то существует такой (единственный) гомоморфизм $K$-алгебр $\psi\colon F(X) \to A$, что $\psi(x) = \xi(x)$ для всех $x \in X$. Ясно, что алгебра $F(X)$ определяется данным универсальным свойством однозначно с точностью до изоморфизма $K$-алгебр. Алгебра $F(X)$ является свободной алгеброй с множеством $X$ свободных образующих в многообразии всех $K$-алгебр.

Определим функцию веса $\mu\colon X \to \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Рассмотрим свободную полугруппу $S(X)$ ассоциативных слов в алфавите $X$ и гомоморфизм снятия скобок $\tilde{}\colon \Gamma(X) \to S(X)$. Положим, что $\mu(x_1 \cdots x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(x_i)$ для $x_1, \ldots, x_n \in X$. Если $\mu(x) = 1$ для всех $x \in X$, то $\mu$ является обычной функцией длины слова, $\mu = \mu_X = \ell = \ell_X$. Если $a \in F(X)$, $a = \sum \alpha_i a_i$, $0 \neq \alpha_i \in K$, $a_i$ являются базисными одночленами, $a_j \neq a_s$ при $j \neq s$, то мы полагаем, что $\mu(a) = \max\limits_i\{\mu(\tilde{a}_i)\}$. Через $\hat{a}$ мы обозначим старшую часть элемента $a$: $\hat{a} = \sum\limits_{j,\ \mu(a_j)=\mu(a)} \alpha_j a_j$. Элемент $a \in F(X)$ называется однородным, если $a = \hat{a}$. Для функции длины (степени) элемента $\mu = \ell$ будем обозначать старшую часть элемента $a$ относительно функции длины (степени) через $a^\circ$.

Подмножество $M$ алгебры $F = F(X)$ называется независимым, если $M$ является множеством свободных образующих алгебры $F$, порождённой подмножеством $M$. Подмножество $M = \{a_i\}$ ненулевых элементов алгебры $F$ называется редуцированным, если для любого $i$ старшая часть $a_i^\circ$ элемента $a_i$ не принадлежит подалгебре алгебры $F$, порождённой множеством $\{a_j^\circ \mid j \neq i\}$.

Пусть $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq F$. Отображение $\theta\colon S \to S' \subseteq F$ называется элементарным преобразованием подмножества $S$, если либо $\theta$ — невырожденное линейное преобразование подмножества $S$, либо найдётся такое $\beta \in I$, что $\theta(s_\alpha) = s_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, $\alpha \neq \beta$, и

$$\theta(s_\beta) = s_\beta + f(\{s_\alpha \mid \alpha \neq \beta\}),$$

где $f$ — элемент свободной алгебры $F(Y)$, $Y = \{y_i \mid i \in I\}$, в котором сделана подстановка $y_i = s_i$ для всех $i \in I$.

Любое конечное множество элементов алгебры $F$ может быть приведено к редуцированному множеству с помощью конечного числа элементарных преобразований и, возможно, исключения нулевых элементов, и всякое редуцированное подмножество алгебры $F$ является независимым подмножеством. Кроме того, используя метод А. Г. Куроша, можно построить редуцированное множество образующих для всякой подалгебры алгебры $F$. Следовательно, всякая подалгебра свободной неассоциативной алгебры $F$ является свободной (см. [2]). Кроме того, старшая часть многочлена от редуцированного множества является многочленом от старших частей элементов этого множества, группа автоморфизмов алгебры $F$ конечного ранга ($|X| < \infty$) порождается элементарными автоморфизмами (см. также [1, 5, 9]).

Элемент $u$ алгебры $F(X)$ называется примитивным, если он является элементом некоторого множества свободных образующих алгебры $F(X)$. Подмножество $M$ различных ненулевых элементов алгебры $F(X)$ называется примитивным, если существует такое множество $Y$ свободных образующих алгебры $F(X)$, $F(X) = F(Y)$, что $M \subseteq Y$. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $F(X) = F(Y)$, $Y$ — множество свободных образующих алгебры $F(X)$, то $|Y| = |X| = n$.

Рангом элемента $u \in F = F(X)$ называется минимальное число свободных образующих из $X$, от которых может зависеть элемент $\varphi(u)$, где $\varphi$ пробегает группу автоморфизмов алгебры $F$ (другими словами, $\mathrm{rank}(u)$ — наименьший ранг свободного фактора алгебры $F$, содержащего элемент $u$).

Ненулевой элемент $u$ алгебры $F(X)$ называется почти примитивным элементом, если $u$ не является примитивным элементом алгебры $F(X)$, но является примитивным элементом любой собственной подалгебры $H$ алгебры $F(X)$, содержащей элемент $u$ ($u \in H$, $H \subseteq F(X)$, $0 \neq H \neq F(X)$).

Почти примитивные элементы в свободных группах рассматривались в [6—8, 12—14]. Изучение почти примитивных элементов свободных неассоциативных алгебр было начато в [11]. В частности, было показано, что элемент $xx$ является почти примитивным элементом алгебры $F(x)$, элементы $xy$, $xy + x$ являются почти примитивными элементами алгебры $F(x, y)$, если элемент является почти примитивным, то его ранг максимален. Более того, если алгебра $F(X)$ является свободным произведением своих собственных подалгебр $A$ и $B$, $F(X) = A * B$, $a$ — однородный почти примитивный элемент алгебры $A$, $b$ — однородный почти примитивный элемент алгебры $B$, то $a + b$ — почти примитивный элемент алгебры $F(X)$. Например, если $n = 2m$, то

$$x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2m-1}x_{2m} \text{ —}$$

почти примитивный элемент алгебры $F(X)$; если $n = 2m + 1$, то

$$x_1x_2 + x_3x_4 + \ldots + x_{2m-1}x_{2m} + x_{2m+1}x_{2m+1} \text{ —}$$

почти примитивный элемент алгебры $F(X)$.

В данной работе рассматриваются почти примитивные элементы малых весов в свободных неассоциативных алгебрах $F(x)$ и $F(x, y)$, подсчитывается их количество, получены критерии почти примитивности однородного элемента веса три и более (теоремы 1, 2), а также построены алгоритмы проверки почти примитивности однородных элементов произвольного веса в этих алгебрах. Для свободной неассоциативной алгебры ранга 3 построены новые примеры почти примитивных элементов.

## 2. Алгебра $F(x)$

Отметим свойства примитивных элементов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

**Предложение 1.** *Пусть $F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра с конечным множеством $X$ свободных образующих, $\{h_1, \ldots, h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих собственной подалгебры $H$ алгебры $F(X)$. Если элемент является примитивным в подалгебре $H$, то существует свободная образующая $h_i$ подалгебры $H$, входящая линейно в его представление. Если существует свободная образующая $h_i$ подалгебры $H$, входящая только линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре $H$. Если существует свободная образующая $h_i$ подалгебры $H$ такого же веса, что и сам элемент, входящая линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре $H$. Если существует свободная образующая $h_i$ подалгебры $H$, старшая часть которой входит только линейно в представление старшей части элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре $H$.*

**Предложение 2.** *Элемент $u \in F(x)$ является примитивным элементом алгебры $F(x)$ тогда и только тогда, когда $\ell(u) = 1$.*

**Предложение 3.** *Пусть $K$ — поле, $F(x)$ — свободная неассоциативная алгебра над полем $K$ с одной свободной образующей $x$. Тогда*

а) *всякий элемент $u \in F(x)$ веса 2 является почти примитивным элементом*;

б) *всякий элемент $u \in F(x)$ веса 3 является почти примитивным элементом.*

**Доказательство.** Пусть элемент $u$ из пунктов а) или б) принадлежит конечно порождённой подалгебре $H \subseteq F(x)$, $\{h_1, \ldots, h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих подалгебры $H$. По предложению 2 элемент $u$ не является примитивным элементом алгебры $F(x)$.

Докажем утверждение а). Поскольку $\ell(u) = 2$, то $u^\circ = xx$. Если в $u^\circ$ входит линейно старшая часть $h_i^\circ$ какой-нибудь образующей $h_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, то по предложению 1 элемент $u$ является примитивным элементом подалгебры $H$. В противном случае мы можем предполагать, что $u^\circ = h_1^\circ h_2^\circ$, т. е. $h_1^\circ = x$, значит, $h_1 = x$. Следовательно, $H = F(x)$ и $H$ не является собственной подалгеброй в $F(x)$.

Докажем утверждение б). Поскольку $\ell(u) = 3$, то $u^\circ = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$, где $u_1 = x(xx)$, $u_2 = (xx)x$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2 \in K$ отличен от нуля. Если в $u^{\circ}$ входит линейно какая-нибудь старшая часть образующей $h_i^{\circ}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, то по предложению 1 элемент $u$ является примитивным элементом подалгебры $H$. Иначе элемент $u^{\circ}$ принадлежит подалгебре, порождённой элементами $x$ и $xx$. Следовательно, $H = F(x)$ и $H$ не является собственной подалгеброй алгебры $F(x)$. $\square$

**Теорема 1 (критерий почти примитивности однородного элемента в свободной неассоциативной алгебре $\boldsymbol{F(x)}$).** *Однородный элемент $u \in F(x)$ веса $\ell(u) = m \geqslant 2$ является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда в разложение $u = u(x)$ входит одночлен вида $x \cdot A(x)$ или вида $B(x) \cdot x$, где $A(x)$, $B(x)$ — одночлены веса $\ell(A) = \ell(B) = m - 1$.*

**Доказательство.** Пусть однородный элемент $u$ веса $\ell(u) = m \geqslant 2$ почти примитивен. Если никакой одночлен вида $x \cdot A(x)$ или вида $B(x) \cdot x$, где $A$, $B$ — одночлены веса $\ell(A) = \ell(B) = m - 1$, не входит в разложение $u$, то имеет место равенство

$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j B_j,$$

где $(A_j, B_j)$ — различные пары одночленов веса больше единицы и $\ell(A_j) + \ell(B_j) = m$. Тогда $u$ не является примитивным элементом в собственной подалгебре

$$H = \operatorname{alg}\Big\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}\Big\}.$$

Действительно, приводя множество $\bigcup_j \{A_j, B_j\}$ к редуцированному множеству $M$, получаем, что $\ell(h) < \ell(u)$ для всех $h \in M$. Следовательно, старшая часть никакой свободной образующей подалгебры $H$ не входит линейно в представление элемента $u$. По предложению 1 $u$ не является примитивным элементом подалгебры $H$.

С другой стороны, если элемент $u \in H = \operatorname{alg}\{h_1, \ldots, h_k\} \subset F(x)$ содержит, без ограничения общности, одночлен вида $x \cdot A(x)$ и старшая часть $h_i^{\circ}$ никакой свободной образующей $h_i$, $1 \leqslant i \leqslant k$, не входит линейно в разложение $u$, то ввиду скобочной структуры имеет место равенство $x \cdot A(x) = h_1^{\circ} \cdot f(h_1^{\circ}, \ldots, h_k^{\circ})$, т. е. $x = h_1^{\circ}$, значит, $h_1 = x$. Следовательно, $H = F(x)$ и $H$ не является собственной подалгеброй в $F(x)$. $\square$

**Следствие.** *Существует алгоритм, распознающий почти примитивность однородного элемента $u \in F(x)$.*

**Доказательство.** Если $\ell(u) = 2, 3$, то по предложению 3 элемент $u$ является почти примитивным. Если $\ell(u) > 3$, то записываем элемент $u$ как линейную комбинацию базисных одночленов и проверяем наличие слагаемого вида $x \cdot A(x)$ или $B(x) \cdot x$. $\square$

**Следствие.** *Пусть $K$ — поле,* $\operatorname{char} K = p > 0$, $|K| = p^n$. *Количество однородных почти примитивных элементов веса $\ell = m \geqslant 3$ в $F(x)$ равно*

$$\#\mathrm{APE}\bigl(h, m, F(x)\bigr) = (p^n)^{2C(m-2)} - 1,$$

*где $C(m)$ — число Каталана — количество различных способов расставить неассоциативно скобки на ассоциативном слове $x_0 x_1 \ldots x_m$.*

**Доказательство.** Действительно, по теореме 1 необходимо и достаточно, чтобы в разложение элемента $u$ веса $\ell(u) = m \geqslant 3$ входил одночлен вида $x \cdot A(x)$ или вида $B(x) \cdot x$, которых ровно $2C(m-2)$ штук. $\square$

**Следствие (асимптотика).** *Пусть $K$ — поле, $|K| = p^n$. Отношение числа однородных почти примитивных элементов веса $m \geqslant 3$ ко всем однородным элементам веса $m \geqslant 3$ алгебры $F(x)$ равно*

$$\mathfrak{D}(m) = \frac{(p^n)^{2C(m-2)} - 1}{(p^n)^{C(m-1)} - 1} \sim \frac{1}{p^{n\left(\frac{2^{2m-3}}{\sqrt{\pi} m^{3/2}}\right)}}.$$

**Доказательство.** Утверждение непосредственно следует из асимптотической оценки для $m$-го числа Каталана

$$C(m) \sim \frac{2^{2m}}{\sqrt{\pi} m^{3/2}}. \qquad \square$$

## 3. Алгебра $F(x, y)$

**Предложение 4.** *Пусть $k, l \in \mathbb{N}$, $k \neq l$. Тогда элемент $u_{k,l}(x, y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^l$ является почти примитивным элементом алгебры $F(x, y)$.*

**Доказательство.** Для $u, v \in F(X)$ положим $(\operatorname{ad} u)(v) = uv$, $(v)(\operatorname{Ad} u) = vu$. Пусть, без ограничения общности, $k > l$. В этом случае $u^{\circ}_{k,l}(x, y) = (\operatorname{ad} x)^k(y)$. Пусть $\{h_1, \ldots, h_m\}$ — редуцированное множество свободных образующих собственной подалгебры $u \in H \subsetneq F(x, y)$. Если в представление старшей части $u^{\circ}$ входит линейно $h_i^{\circ}$ для некоторого $i$, то элемент $u$ примитивен в подалгебре $H$, в противном случае $x \in H$. В последнем случае рассмотрим такую весовую функцию $\tilde{\mu}$, что $\tilde{\mu}(x) = 1$, $\tilde{\mu}(y) = N > k$. Пусть $\{h'_1, \ldots, h'_m\}$ — редуцированное множество свободных образующих подалгебры $H$ относительно функции веса $\tilde{\mu}$. Тогда старшая часть элемента $u$ относительно весовой функции $\tilde{\mu}$ равна $(x)(\operatorname{Ad} y)^l$, и аналогично получаем или примитивность элемента $u$ в подалгебре $H$, или что $y \in H$. Во втором случае $x, y \in H$, значит, $H = F(x, y)$, что противоречит тому, что подалгебра $H$ собственная. $\square$

**Предложение 5.** *Пусть $K$ — поле, $F(x, y)$ — свободная неассоциативная алгебра над полем $K$ со свободными образующими $x$, $y$. Тогда*

а) *однородный элемент $u \in F(x, y)$ веса 2 является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда он не является «квадратом», т. е. не имеет места представление $u = \alpha zz$, где $z \in F(x, y)$, $\ell(z) = 1$, $0 \neq \alpha \in K$;*

б) *элемент* $u \in F(x, y)$ *веса* 2, *не являющийся примитивным, является почти примитивным элементом тогда и только тогда, когда не представляется в виде многочлена второй степени от элемента алгебры единичного веса, т. е. не имеет места представление* $u = \alpha zz + \beta z$, *где* $z \in F(x, y)$, $\ell(z) = 1$, $0 \neq \alpha \in K$, $\beta \in K$. *Это условие эквивалентно тому, что* $\operatorname{rank}(u) = 2$;

в) *однородный элемент* $u \in F(x, y)$ *веса* 3 *является почти примитивным тогда и только тогда, когда не имеет места представление* $u = \alpha zA + \beta Bz$, *где* $z \in F(x, y)$, $\ell(z) = 1$, *однородные элементы* $A, B \in F(x, y)$ *имеют вес* $\ell(A) = \ell(B) = 2$ *и хотя бы один из коэффициентов* $\alpha, \beta \in K$ *отличен от нуля*;

г) *однородный элемент* $u \in F(x, y)$ *веса* $\ell(u) = m > 3$ *является почти примитивным тогда и только тогда, когда не имеет места представление*

$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j A_j B_j + \alpha zC + \beta Dz,$$

*где* $(A_j, B_j)$ — *различные пары одночленов веса* $\ell(A_j) \geqslant 2$, $\ell(B_j) \geqslant 2$, $\ell(A_j) + \ell(B_j) = m$, $C$, $D$ — *однородные элементы веса* $\ell(C) = \ell(D) = m-1$, $z$ — *элемент веса* $\ell(z) = 1$ *и хотя бы один из коэффициентов* $\lambda_j, \alpha, \beta \in K$ *отличен от нуля*;

д) *всякий однородный элемент* $u \in F(x, y)$ *веса* $\ell(u) = m \geqslant 3$ *имеет следующее представление*:

$$u = u(x, y) = \left( \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j \Phi_j \Psi_j \right) + \\ + \big( \gamma_{(x,\lambda)} x \Lambda_x + \gamma_{(y,\lambda)} y \Lambda_y + \gamma_{(\eta,x)} N_x x + \gamma_{(\eta,y)} N_y y \big) = u_{\Phi\Psi} + \tilde{u}, \quad (1)$$

*где*

$$u_{\Phi\Psi} = \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j \Phi_j \Psi_j,$$

$$\tilde{u} = \gamma_{(x,\lambda)} x \Lambda_x + \gamma_{(y,\lambda)} y \Lambda_y + \gamma_{(\eta,x)} N_x x + \gamma_{(\eta,y)} N_y y$$

(*в случае* $\ell(u) = 3$ *предполагаем, что* $u_{\Phi\Psi} = 0$, $u = \tilde{u}$), $\big(\Phi_j(x, y), \Psi_j(x, y)\big)$ — *различные пары одночленов веса* $\ell(\Phi_j) \geqslant 2$, $\ell(\Psi_j) \geqslant 2$, $\ell(\Phi_j) + \ell(\Psi_j) = m$, $\Lambda_x$, $\Lambda_y$, $N_x$, $N_y$ — *однородные элементы веса* $\ell(\Lambda_x) = \ell(\Lambda_y) = \ell(N_x) = \ell(N_y) = m - 1$, $\gamma_j$, $\gamma_{(x,\lambda)}$, $\gamma_{(y,\lambda)}$, $\gamma_{(\eta,x)}$, $\gamma_{(\eta,y)} \in K$. *Тогда почти примитивность элемента* $u$ *в алгебре* $F(x, y)$ *эквивалентна почти примитивности элемента* $\tilde{u}$ *в алгебре* $F(x, y)$.

**Доказательство.** Пусть элемент $u$ из пунктов а)—д) принадлежит конечно порождённой подалгебре $H \subseteq F(x)$, $\{h_1, \ldots, h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих подалгебры $H$.

Докажем утверждение а). Пусть элемент $u$ не является примитивным в $H$. Тогда никакой элемент $h_i^\circ$ не входит линейно в представление элемента $u^\circ$. Так как $\ell(u)=2$ и элемент $u$ однородный, то имеет место следующее представление элемента $u$ через элементы единичного веса:

$$u=u^\circ=\sum_{\substack{i,j\in\mathcal{H}_1,\\ \lambda_{ij}\neq 0}}\lambda_{ij}h_ih_j,\quad \text{где}\quad \mathcal{H}_\nu=\{i\mid \ell(h_i)=\ell(h_i^\circ)=\nu\}\subset\{1,\dots,k\}.$$

Тогда если $|\mathcal{H}_1|\geqslant 2$, то ввиду редуцированности множества свободных образующих из любых двух различных свободных образующих $h_{i_1}$, $h_{i_2}$, где $i_1,i_2\in\mathcal{H}_1$, можно получить $\{x,y\}$, значит, $H=\operatorname{alg}\{h_1,\dots,h_k\}=\operatorname{alg}\{x,y\}=F(x,y)$ не является собственной подалгеброй. Остаётся случай $|\mathcal{H}_1|=1$, когда элемент $u$ имеет вид $u=\gamma_{i_1i_1}h_{i_1}h_{i_1}$, где $\{i_1\}=\mathcal{H}_1$, $\ell(h_{i_1})=1$, $0\neq\gamma_{i_1i_1}\in K$.

С другой стороны, элемент $\alpha zz$, где $z$ — элемент веса $\ell(z)=1$, $0\neq\alpha\in K$, не примитивен в подалгебре $H=\operatorname{alg}\{z\}\subsetneq F(x,y)$ по предложению 1.

Докажем утверждение б). Пусть элемент $u$ не является примитивным в $H$. Тогда никакой элемент $h_i^\circ$ не входит линейно в представление старшей части $u^\circ$. Так как $\ell(u)=2$, то имеет место представления элемента $u$ через элементы единичного веса:

$$u=\sum_{\substack{i,j\in\mathcal{H}_1,\\ \lambda_{ij}\neq 0}}\lambda_{ij}h_ih_j+\sum_{\substack{t\in\mathcal{H}_1,\\ \beta_t\neq 0}}\eta_th_t.$$

Тогда при $|\mathcal{H}_1|\geqslant 2$ подалгебра $H$ не является собственной, а при $|\mathcal{H}_1|=1$ элемент $u$ имеет вид $u=\lambda_{i_1i_1}h_{i_1}h_{i_1}+\eta_{i_1}h_{i_1}$, где $\{i_1\}=\mathcal{H}_1$, $\ell(h_1)=1$, $0\neq\lambda_{i_1i_1}\in K$, $\eta_{i_1}\in K$, и не является примитивным в $H$.

С другой стороны, элемент $u=\alpha zz+\beta z$, $\ell(z)=1$, $0\neq\alpha\in K$, $\beta\in K$, не является примитивным в подалгебре $H=\operatorname{alg}\{z\}\subsetneq F(x,y)$ по предложению 2, поскольку $\ell(u)=2$.

Заметим, что элемент $u$ не имеет вид $u=\alpha zz+\beta z$, $\ell(z)=1$, $0\neq\alpha\in K$, $\beta\in K$, тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}(u)=2$. Так как $u\in F(x,y)$, то $\operatorname{rank}(u)\leqslant 2$, значит, элемент $u\in F(x,y)$ веса 2, не являющийся примитивным, является почти примитивным тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank}(u)=2$.

Докажем утверждение в). Пусть однородный элемент $u$ не является примитивным в $H$. Тогда никакая старшая часть $h_i^\circ$ не входит линейно в представление $u^\circ$. Так как $\ell(u^\circ)=3$ и $|\mathcal{H}_1|=1$ (при $|\mathcal{H}_1|\geqslant 2$ подалгебра $H$ совпадает с алгеброй $F(x,y)$ и поэтому не является собственной подалгеброй), имеем

$$u=u^\circ=\lambda_1(h_{i_1}h_{i_1})h_{i_1}+\lambda_2h_{i_1}(h_{i_1}h_{i_1})+\sum_{\substack{t\in\mathcal{H}_2,\\ \eta_{ti_1}\neq 0}}\eta_{ti_1}h_t^\circ h_{i_1}+\sum_{\substack{t\in\mathcal{H}_2,\\ \eta_{i_1t}\neq 0}}\eta_{i_1t}h_{i_1}h_t^\circ,$$

где $\{i_1\}=\mathcal{H}_1$ и хотя бы один из коэффициентов $\eta_{ti_1}$, $\eta_{i_1t}$, $\lambda_1$, $\lambda_2\in K$ отличен от нуля. Тогда элемент $u$ имеет вид

$$u=u^\circ=h_{i_1}\Biggl(\lambda_2(h_{i_1}h_{i_1})+\sum_{\substack{t\in\mathcal{H}_2,\\ \eta_{i_1t}\neq 0}}\eta_{i_1t}h_t^\circ\Biggr)+\Biggl(\lambda_1(h_{i_1}h_{i_1})+\sum_{\substack{t\in\mathcal{H}_2,\\ \eta_{ti_1}\neq 0}}\eta_{ti_1}h_t^\circ\Biggr)h_{i_1}=$$
$$=h_{i_1}A^\star+B^\star h_{i_1},$$

где
$$A^\star = \lambda_2 h_{i_1}^2 + \sum_{\substack{t\in\mathcal{H}_2,\\ \eta_{i_1 t}\neq 0}} \eta_{i_1 t} h_t^\circ, \quad B^\star = \lambda_1 h_{i_1}^2 + \sum_{\substack{t\in\mathcal{H}_2,\\ \eta_{t i_1}\neq 0}} \eta_{t i_1} h_t^\circ h_{i_1},$$
элемент $h_{i_1} = h_{i_1}^\circ$ имеет вес $\ell(h_{i_1}) = 1$, $A^\star$, $B^\star$ — однородные элементы веса 2 или 0, причём хотя бы один из них отличен от нуля.

С другой стороны, элемент $u = \alpha z A + \beta B z$, где $z$ — элемент веса $\ell(z) = 1$, $A$, $B$ — однородные элементы веса $\ell(A) = \ell(B) = 2$ и хотя бы один из коэффициентов $\alpha, \beta \in K$ отличен от нуля, не является примитивным в подалгебре $H = \mathrm{alg}\{z, A, B\} \subsetneq F(x,y)$ по предложению 1.

Докажем утверждение г). Пусть однородный элемент $u$ не является примитивным в $H$. Тогда никакая старшая часть $h_i^\circ$ не входит линейно в представление $u^\circ$. Так как $\ell(u^\circ) = \ell(u) = m \geqslant 3$ и $|\mathcal{H}_1| = 1$ (при $|\mathcal{H}_1| \geqslant 2$ подалгебра $H$ совпадает с алгеброй $F(x,y)$ и не является собственной подалгеброй), то элемент $u$ имеет вид
$$\begin{aligned} u = u^\circ = \sum_{\lambda_j\neq 0} \lambda_j A_j^\star(h_1,\dots,h_k) B_j^\star(h_1,\dots,h_k) + \\ + \eta_{i_1 c} h_{i_1} C^\star(h_1,\dots,h_k) + \eta_{d i_1} D^\star(h_1,\dots,h_k) h_{i_1} = \\ = \sum_{\lambda_j\neq 0} \lambda_j A_j^\star B_j^\star + \eta_{i_1 c} h_{i_1} C^\star + \eta_{d i_1} D^\star h_{i_1}, \end{aligned}$$
где $\{i_1\} = \mathcal{H}_1$, $(A_j^\star, B_j^\star)$ — различные пары одночленов алгебры $F(x,y)$ веса $\ell(A_j^\star) \geqslant 2$, $\ell(B_j^\star) \geqslant 2$, $\ell(A_j^\star) + \ell(B_j^\star) = m$, $C^\star$, $D^\star$ — однородные элементы алгебры $F(x,y)$ веса $\ell(C^\star) = \ell(D^\star) = m-1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j$, $\eta_{i_1 c}$, $\eta_{d i_1} \in K$ отличен от нуля.

С другой стороны, элемент
$$u = \sum_{\lambda_j\neq 0} \lambda_j A_j B_j + \alpha z C + \beta D z,$$
где $(A_j, B_j)$ — различные пары одночленов веса $\ell(A_j) \geqslant 2$, $\ell(B_j) \geqslant 2$, $\ell(A_j) + \ell(B_j) = m$, $C$, $D$ — однородные элементы веса $\ell(C) = \ell(D) = m-1$, $z$ — элемент веса $\ell(z) = 1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j$, $\alpha$, $\beta \in K$ отличен от нуля, не является примитивным в подалгебре
$$H = \mathrm{alg}\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}, C, D, z\right\} \subsetneq F(x,y).$$
Действительно, приводя множество $\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}, C, D, z\right\}$ к редуцированному множеству $M$, имеем $\ell(h) < \ell(u)$ для всех $h \in M$. Следовательно, старшая часть свободной образующей подалгебры $H$ не может входить линейно в представление однородного элемента $u$. По предложению 1 $u$ не является примитивным элементом подалгебры $H$.

Утверждение д) следует из пункта г). $\square$

**Следствие.** *Пусть* $K$ — *поле,* $\operatorname{char} K = p > 0$, $|K| = p^n$. *Тогда*

а) *число* $\#\mathrm{APE}\big(h, 2, F(x,y)\big)$ *однородных почти примитивных веса* 2 *равно* $p^{4n} - p^{2n}$;

б) *число* $\#\mathrm{APE}\big(h, 3, F(x,y)\big)$ *однородных почти примитивных веса* 3 *равно* $(p^{4n}-1)\big((p^{8n}+1)(p^{4n}+1)-(p^n+1)(p^{4n}+p^{3n}+p^{2n}+p^n+1)\big)$.

**Доказательство.** Докажем утверждение а). Всего имеется

$$\#\{h, 2\} = (p^n)^4 - 1 = p^{4n} - 1$$

однородных элементов веса 2, так как любой элемент веса 2 имеет вид

$$\lambda_{xx}xx + \lambda_{xy}xy + \lambda_{yx}yx + \lambda_{yy}yy,$$

где хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Различных однородных элементов веса 2 вида $\alpha zz$ имеется

$$\begin{aligned}\#\{u = \alpha zz\} = \#\{u = \alpha(\lambda_x x + \lambda_y y)^2\} = \#\{u = \alpha(x + \lambda_y y)^2\} + \#\{u = \alpha yy\} = \\ = (p^n-1)p^n + (p^n-1) = (p^n-1)(p^n+1) = p^{2n} - 1,\end{aligned}$$

так как

$$\alpha(\lambda_x x + \lambda_y y)^2 = \alpha\lambda_x^2\left(x + \frac{\lambda_y}{\lambda_x}y\right)^2$$

при $\lambda_x \neq 0$ и

$$\alpha(\lambda_y y)^2 = \alpha\lambda_y^2 yy$$

при $\lambda_y \neq 0$. Значит,

$$\#\mathrm{APE}\big(h, 2, F(x,y)\big) = \#\{h, 2\} - \#\{u = \alpha zz\} = (p^{4n}-1) - (p^{2n}-1) = p^{4n} - p^{2n}.$$

Докажем утверждение б). Всего имеется

$$\#\{h, 3\} = (p^n)^{16} - 1 = p^{16n} - 1$$

однородных элементов веса 3. Различных однородных элементов веса 3 вида $\alpha zA + \beta Bz$, где $\ell(z) = 1$, $\ell(A) = \ell(B) = 2$, имеется

$$\#\{u = \alpha zA + \beta Bz\} = \#\{u = \alpha\tilde{z}\tilde{A} + \beta\tilde{B}\tilde{z}\},$$

где $\tilde{z} = x + \lambda_y y$ или $z = y$, $\tilde{A} = xx + \lambda_{xy}xy + \lambda_{yx}yx + \lambda_{yy}yy$, или $\tilde{A} = xy + {} + \lambda_{yx}yx + \lambda_{yy}yy$, или $\tilde{A} = yx + \lambda_{yy}yy$, или $\tilde{A} = yy$, $\tilde{B}$ имеет вид, аналогичный $\tilde{A}$, а из $\alpha$, $\beta$ хотя бы один не нулевой. Значит,

$$\begin{aligned}&\#\{u = \alpha\tilde{z}\tilde{A} + \beta\tilde{B}\tilde{z}\} = \#\{u = \alpha(\tilde{z}\tilde{A} + \beta\tilde{B}\tilde{z}),\ \alpha \neq 0\} + \#\{\alpha\tilde{B}\tilde{z},\ \alpha \neq 0\} = \\ &\quad = (p^n-1)(p^n+1)(p^{3n}+p^{2n}+p^n+1)(p^n)(p^{3n}+p^{2n}+p^n+1) + \\ &\quad + (p^n-1)(p^{3n}+p^{2n}+p^n+1)(p^n+1) = \\ &\quad = (p^n+1)(p^{4n}-1)(p^{4n}+p^{3n}+p^{2n}+p^n+1).\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}
\#\mathrm{APE}\big(h,3,F(x,y)\big) &= \#\{h,3\} - \#\{u=\alpha zA+\beta Bz\} = \\
&= (p^{16n}-1)-(p^n+1)(p^{4n}-1)(p^{4n}+p^{3n}+p^{2n}+p^n+1) = \\
&= (p^{4n}-1)\big((p^{8n}+1)(p^{4n}+1)-(p^n+1)(p^{4n}+p^{3n}+p^{2n}+p^n+1)\big). \qquad \square
\end{aligned}$$

**Теорема 2 (критерий почти примитивности однородного элемента в свободной неассоциативной алгебре $F(x,y)$).** *Однородный элемент $u\in F(x,y)$ веса $\ell(u)=m\geqslant 3$, имеющий вид (1), является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует такого коэффициента пропорциональности $\theta\in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y$, $N_x \overset{\theta}{\sim} N_y$ ($\Lambda_x=\theta\Lambda_y$, $N_x=\theta N_y$ или $\theta\Lambda_x=\Lambda_y$, $\theta N_x=N_y$).*

**Доказательство.** Воспользуемся утверждением д) предложения 5 и будем проверять представимость ненулевого элемента

$$\begin{aligned}
\tilde u &= \gamma_{(x,\lambda)}x\Lambda_x+\gamma_{(y,\lambda)}y\Lambda_y+\gamma_{(\eta,x)}N_x x+\gamma_{(\eta,y)}N_y y = \\
&= x\Big(\sum\varepsilon_j^{\Lambda_x}M_j\Big)+y\Big(\sum\varepsilon_j^{\Lambda_y}M_j\Big)+\Big(\sum\varepsilon_j^{N_x}M_j\Big)x+\Big(\sum\varepsilon_j^{N_y}M_j\Big)y,
\end{aligned}$$

где $M_j=M_j(x,y)$ — одночлены веса $\ell(M_j)=m-1$ с различной скобочной структурой (их всего $\mathfrak{L}=2^{m-1}C(m-2)$) с фиксированным упорядочиванием, в виде $\tilde u=\alpha zC+\beta Dz$ методом неопределённых коэффициентов (если $\tilde u=0$, то элемент $u$, очевидно, не является почти примитивным). Без ограничения общности будем считать, что коэффициенты $\gamma_{(x,\lambda)}$, $\gamma_{(y,\lambda)}$, $\gamma_{(\eta,x)}$, $\gamma_{(\eta,y)}$, $\alpha$, $\beta$ уже учтены в представлениях $\Lambda_x$, $\Lambda_y$, $N_x$, $N_y$, $C$, $D$ соответственно. Пусть

$$\begin{cases}
z=k_x x+k_y y,\\
C=\sum a_jM_j,\\
D=\sum b_jM_j,
\end{cases}$$

где $k_x$, $k_y$, $\{a_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}\in K$ — неизвестные переменные в количестве $2+2\mathfrak{L}$, причём хотя бы одна переменная из $k_x$, $k_y$ и хотя бы одна из $\{a_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$ должны быть отличны от нуля (так как $\tilde u\neq 0$). Тогда имеем уравнение, которое нам надо решить, с известной левой частью:

$$\begin{aligned}
&x\Lambda_x+y\Lambda_y+N_x x+N_y y=\tilde u=zC+Dz \iff \\
&\quad\iff x\Lambda_x+y\Lambda_y+N_x x+N_y y=\tilde u=(k_x x+k_y y)C+D(k_x x+k_y y)\iff \\
&\quad\iff x(k_xC-\Lambda_x)+y(k_yC-\Lambda_y)+(k_xD-N_x)x+(k_yD-N_y)y=0\iff \\
&\quad\iff \begin{cases}
k_xC-\Lambda_x=0,\\
k_yC-\Lambda_y=0,\\
k_xD-N_x=0,\\
k_yD-N_y=0
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
k_x(a_1,\dots,a_{\mathfrak{L}})^{\mathrm t}-(\varepsilon_1^{\Lambda_x},\dots,\varepsilon_{\mathfrak{L}}^{\Lambda_x})^{\mathrm t}=0,\\
k_y(a_1,\dots,a_{\mathfrak{L}})^{\mathrm t}-(\varepsilon_1^{\Lambda_y},\dots,\varepsilon_{\mathfrak{L}}^{\Lambda_y})^{\mathrm t}=0,\\
k_x(b_1,\dots,b_{\mathfrak{L}})^{\mathrm t}-(\varepsilon_1^{N_x},\dots,\varepsilon_{\mathfrak{L}}^{N_x})^{\mathrm t}=0,\\
k_y(b_1,\dots,b_{\mathfrak{L}})^{\mathrm t}-(\varepsilon_1^{N_y},\dots,\varepsilon_{\mathfrak{L}}^{N_y})^{\mathrm t}=0,
\end{cases}
\end{aligned}$$

где $(\ldots)^{\mathrm{t}}$ — вектор-столбец коэффициентов — элемент линейного пространства $K^{\mathfrak{L}}$. Приравнивая покомпонентно, получаем систему уравнений на неизвестные переменные $k_x, k_y \in K$ и $\{a_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}, \{b_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}} \in K$ при известных $\{\varepsilon_j^{\Lambda_x}\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$, $\{\varepsilon_j^{\Lambda_y}\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$, $\{\varepsilon_j^{N_x}\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$, $\{\varepsilon_j^{N_y}\}_{j=1}^{\mathfrak{L}} \in K$:

$$\forall 1 \leqslant j \leqslant \mathfrak{L}\colon \quad \begin{cases} k_x a_j - \varepsilon_j^{\Lambda_x} = 0, \\ k_y a_j - \varepsilon_j^{\Lambda_y} = 0, \\ k_x b_j - \varepsilon_j^{N_x} = 0, \\ k_y b_j - \varepsilon_j^{N_y} = 0 \end{cases} \iff \forall 1 \leqslant j \leqslant \mathfrak{L}\colon \quad \left\{ \begin{aligned} &\left.\begin{aligned} k_x\varepsilon_j^{\Lambda_y} - k_y\varepsilon_j^{\Lambda_x} = 0, \\ k_x\varepsilon_j^{N_y} - k_y\varepsilon_j^{N_x} = 0, \end{aligned}\right\} \\ &\left.\begin{aligned} k_x a_j - \varepsilon_j^{\Lambda_x} = 0, \\ k_y a_j - \varepsilon_j^{\Lambda_y} = 0, \\ k_x b_j - \varepsilon_j^{N_x} = 0, \\ k_y b_j - \varepsilon_j^{N_y} = 0, \end{aligned}\right\} \end{aligned} \right.$$

причём хотя бы одна из переменных $k_x$, $k_y$ и хотя бы одна из переменных $\{a_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$, $\{b_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}$ должны быть отличны от нуля. Если верхняя подсистема (первые два уравнения) имеет только тривиальное нулевое решение $k_x = 0$, $k_y = 0$, то все $\Lambda_x$, $\Lambda_y$, $N_x$, $N_y$ равны 0, что следует из нижней подсистемы (оставшихся четырёх уравнений). Нетрудно убедиться, что верхняя подсистема имеет нетривиальное решение $(k_x, k_y)$ тогда и только тогда, когда существует $\theta \in K$, такое что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y$, $N_x \overset{\theta}{\sim} N_y$, тогда же из нижней подсистемы можно получить нетривиальное решение $(\{a_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}}, \{b_j\}_{j=1}^{\mathfrak{L}})$. Таким образом, критерием несуществования нетривиального решения системы (а значит, непредставимости $\tilde{u}$ в виде $\tilde{u} = \alpha z C + \beta D z$) является несуществование такого коэффициента пропорциональности $\theta \in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y$, $N_x \overset{\theta}{\sim} N_y$. $\square$

**Следствие.** *Существует алгоритм, распознающий почти примитивные однородные элементы алгебры* $F(x, y)$.

**Доказательство.** Воспользуемся теоремой 2. Нам надо выяснить, существует ли такой коэффициент пропорциональности $\theta \in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y$, $N_x \overset{\theta}{\sim} N_y$. Это алгоритмически проверяется покомпонентным сравнением элементов $(\varepsilon_1^{\Lambda_x}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{\Lambda_x})$ и $(\varepsilon_1^{\Lambda_y}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{\Lambda_y})$, а также $(\varepsilon_1^{N_x}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{N_x})$ и $(\varepsilon_1^{N_y}, \ldots, \varepsilon_{\mathfrak{L}}^{N_y})$. $\square$

**Предложение 6.** *Пусть* $k, l \in \mathbb{N}$. *Тогда элемент* $u_{k,l}(x, y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^l$ *является почти примитивным элементом алгебры* $F(x, y)$.

**Доказательство.** Пусть $k = l$. Тогда элемент $u$ является однородным относительно функции веса $\ell$ и по теореме 2 элемент $u$ является почти примитивным в $F(x, y)$. Случай $k \neq l$ был рассмотрен в предложении 4. $\square$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. Продемонстрируем на примере почти примитивного элемента $u_{k,k}(x, y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^k$ свободной неассоциативной алгебры $F(x, y)$ работу алгоритма распознавания почти примитивности однородного элемента в алгебре $F(x, y)$.

Элемент
$$u_{k,k}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^k$$
представляется в виде
$$u_{k,k}(x,y) = x\Lambda_x + y\Lambda_y + N_x x + N_y y,$$
где
$$\Lambda_x = (\operatorname{ad} x)^{k-1}(y), \quad \Lambda_y = 0, \quad N_x = 0, \quad N_y = (x)(\operatorname{Ad} y)^{k-1}.$$

Пусть упорядочивание неассоциативных одночленов с учётом скобок задано следующим образом: считаем, что $x > y$ и $m_1(x,y) > m_2(x,y)$, если $\widetilde{m}_1(x,y) >_{\mathrm{lex}} \widetilde{m}_2(x,y)$ или $\widetilde{m}_1(x,y) =_{\mathrm{lex}} \widetilde{m}_2(x,y)$ и $m_1(x,y) >_{()} m_2(x,y)$, где $m_1(x,y)$, $m_2(x,y)$ — неассоциативные одночлены, $\widetilde{\ }$ — гомоморфизм снятия скобок, $>_{()}$ — зафиксированное упорядочивание скобок.

Тогда
$$\varepsilon^{\Lambda_x} = (0,\ldots,0,1_i,0,\ldots,0), \quad \varepsilon^{\Lambda_y} = (0,\ldots,0),$$
$$\varepsilon^{N_x} = (0,\ldots,0), \quad \varepsilon^{N_y} = (0,\ldots,0,1_j,0,\ldots,0),$$
где
$$m_i(x,y) = \Lambda_x = (\operatorname{ad} x)^{k-1}(y) > N_y = (x)(\operatorname{Ad} y)^{k-1} = m_j(x,y),$$
т. е. $i \neq j$. Покомпонентно сравнивая $\varepsilon^{\Lambda_x}$ и $\varepsilon^{\Lambda_y}$, получаем, что единственно возможное значение — $\theta = 0$, что противоречит тому, что $\varepsilon_j^{N_x}\theta = 0 \neq 1 = \varepsilon_j^{N_y}$. Поэтому однородный элемент $u_{k,k}(x,y)$ является почти примитивным.

# 4. Алгебра $F(x,y,z)$

**Предложение 7.** *Элемент* $u = xy + \big(\ldots\big((xz)z\big)\ldots\big)z = xy + (x)(\operatorname{Ad} z)^t$ *при* $t \geqslant 2$ *является почти примитивным в свободной неассоциативной алгебре* $F(x,y,z)$.

**Доказательство.** Элемент $u$ не является примитивным в алгебре $F(x,y,z)$, поскольку не содержит ни одной линейной компоненты $x$, $y$ или $z$. Пусть элемент $u$ принадлежит подалгебре $H$, порождённой редуцированным множеством $\{h_1,\ldots,h_k\}$ свободных образующих. Если какая-то старшая часть $h_i^\circ$ входит линейно в представление старшей части $u^\circ = (x)(\operatorname{Ad} z)^t$, то образующая $h_i$ входит только линейно в представление элемента $u$, обеспечивая его примитивность в подалгебре $H$. В противном случае $h_1 = h_1^\circ = z$, $h_2^\circ = (x)(\operatorname{Ad} z)^t$, $s < t$. Пусть $h_2 = h_2^\circ + h_2^*$. Тогда положим
$$u' = u - (h_2)(\operatorname{Ad} h_1)^{t-s} = xy + (h_2^*)(\operatorname{Ad} h_1)^{t-s} \in H.$$
Затем для записи элемента $u'$ от свободных образующих $\{h_1,\ldots,h_k\}$ получим элементы $u''$ и т. д. На каждом шаге этой цепочки получаем новое $u^{(m+1)}$ или только линейное вхождение некоторой образующей $h_i$ в элемент $u^{(m)}$, а значит, примитивность элемента $u$ в подалгебре $H$. В конце получим $u^{(n)} = xy$ и

$x, y \in H$, а с учётом того, что $z \in H$, имеем $H = F(x, y, z)$, что противоречит собственности подалгебры $H$. $\square$

Отметим, что элемент $u = xy + (x)(\operatorname{Ad} z)^t$, $t > 1$, является примером почти примитивного элемента в алгебре $F(X)$, $X = \{x, y, z\}$, $|X| = 3$, старшая часть которого не является почти примитивным элементом в алгебре $F(X)$.

**Теорема 3.** *Пусть $n > 2$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда*

а) *пусть элемент $u \in F(X)$ не является примитивным элементом в $F(X)$, но старшая часть $u^\circ$ является примитивным элементом в любой собственной подалгебре, порождённой однородными образующими, $u^\circ \in H^\circ \subsetneq F(X)$. Тогда элемент $u$ является почти примитивным элементом в $F(X)$*;

б) *в обратную сторону утверждение* а) *верно для однородных элементов*;

в) *существует неоднородный элемент в $F(x, y)$, для которого в обратную сторону утверждение* а) *неверно.*

**Доказательство.** Докажем утверждение а). Пусть элемент $u$ не является почти примитивным. Тогда существуют собственная подалгебра $H = \operatorname{alg}\{h_1, \ldots, h_k\}$ с редуцированным множеством свободных образующих, в которой элемент $u$ не является примитивным. Рассмотрим подалгебру $H^\circ = \operatorname{alg}\{h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ\} \subset F(X)$ с редуцированным множеством свободных образующих и покажем, что в ней элемент $u^\circ$ не является примитивным. Во-первых, подалгебра $H^\circ$ является собственной, так как существует $v$, такой что $\ell(v) = 1$, $v \notin H$, следовательно, $v \notin H^\circ$. Во-вторых, так как $u \in H$, то $u = f(h_1, \ldots, h_k)$, но тогда найдётся $g$, такой что $u^\circ = g(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ)$, значит, $u^\circ \in H^\circ$. Наконец, $u^\circ$ не примитивен в $H^\circ$, так как в противном случае существует старшая часть $h_j^\circ$, входящая линейно в представление элемента $u^\circ$. Но тогда образующая $h_j$ входит только линейно в представление элемента $u$ в подалгебре $H$, а значит, $u$ является примитивным элементом подалгебры $H$ по предложению 1. Но по условию теоремы элемент $u^\circ$ является примитивным элементом в любой собственной подалгебре, порождённой однородными образующими, а значит, примитивен в подалгебре $H^\circ$. Противоречие.

Утверждение б) очевидно.

Докажем утверждение в). Рассмотрим элемент $u = x^2y + x$. Тогда элемент $u^\circ = x^2y$ не является примитивным в $\operatorname{alg}\{x^2, y\}$. Пусть $u \in H = \operatorname{alg}\{h_1, \ldots, h_k\} \subsetneq F(X)$ с редуцированным множеством свободных образующих $\{h_1, \ldots, h_k\}$. Тогда если никакая старшая часть $h_i^\circ$ не входит линейно в $u$, то без ограничения общности возможны два случая. В первом случае, когда $h_1^\circ = x^2$, $h_2^\circ = y$, имеем $h_1 = x^2 + \alpha x + \beta y$, $h_2 = y$. Тогда $H \ni u' = (h_1 - \beta h_2)h_2 - u = \alpha xy - x$. Если в $u'^\circ$ линейно входит $h_3^\circ$, то $h_3$ входит только линейно в $u$, значит, элемент $u$ примитивный. В противном случае $\{x, y\} \subset H$, поэтому $H = F(X)$. Во втором случае, когда $(h_1h_2)h_3 = (xx)y$, имеем $h_1 = x$, $h_3 = y$, поэтому $H = F(X)$. Противоречие. Следовательно, $u$ является примитивным элементом в $H$, поэтому $u$ — почти примитивный элемент в $F(X)$. $\square$

**Гипотеза.** Для любого $n \geqslant 2$ существует неоднородный элемент в $F(X)$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, для которого утверждение пункта а) теоремы 3 в обратную сторону неверно. Возможно, таким элементом является $\big(\ldots\big((x_1^2 x_2)x_3\big)\ldots\big)x_n + x_1$.

## Литература

[1] Артамонов В. А., Михалёв А. А., Михалёв А. В. Автоморфизмы свободных алгебр шрайеровых многообразий // Совр. пробл. мат. и мех. — 2009. — Т. 4, № 3. — С. 39—57.

[2] Курош А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Мат. сб. — 1947. — Т. 20. — С. 239—262.

[3] Михалёв А. А., Михалёв А. В., Чеповский А. А., Шампаньер К. Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 171—192.

[4] Шампаньер К. Алгоритмы реализации ранга и примитивности систем элементов свободных неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 4. — С. 1229—1238.

[5] Bokut L. A., Kukin G. P. Algorithmic and Combinatorial Algebra. — Dordrecht: Kluwer, 1994.

[6] Brunner A. M., Burns R. G., Oates-Williams S. On almost primitive elements of free groups with an application to Fuchsian groups // Can. J. Math. — 1993. — Vol. 45. — P. 225—254.

[7] Comerford L. P. Generic elements of free groups // Arch. Math. (Basel). — 1995. — Vol. 65, no. 3. — P. 185—195.

[8] Fine B., Rosenberger G., Spellman D., Stille M. Test words, generic elements and almost primitivity // Pacific J. Math. — 1999. — Vol. 190. — P. 277—297.

[9] Mikhalev A. A., Shpilrain V., Yu J.-T. Combinatorial Methods. Free Groups, Polynomials, and Free Algebras. — Berlin: Springer, 2004.

[10] Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., Yu J.-T. Automorphic orbits of elements of free non-associative algebras // J. Algebra. — 2001. — Vol. 243. — P. 198—223.

[11] Mikhalev A. A., Yu J.-T. Primitive, almost primitive, test, and $\Delta$-primitive elements of free algebras with the Nielsen—Schreier property // J. Algebra. — 2000. — Vol. 228. — P. 603—623.

[12] Rosenberger G. Alternierende Produkte in freien Gruppen // Pacific J. Math. — 1978. — Vol. 78. — P. 243—250.

[13] Rosenberger G. Über Darstellungen von Elementen und Untergruppen in freien Produkten // Proc. of Groups — Korea 1983. — Berlin: Springer, 1984. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1098). — P. 142—160.

[14] Rosenberger G. A property of subgroups of free groups // Bull. Austral. Math. Soc. — 1991. — Vol. 43. — P. 269—272.