Максимальные торы алгебры Франк*

М. И. КУЗНЕЦОВ
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: kuznets-1349@yandex.ru

О. А. МУЛЯР
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
e-mail: mylyar@mail.ru

УДК 512.554.31

Ключевые слова: простые алгебры Ли характеристики 3, алгебры Франк, автоморфизмы, максимальные торы, подалгебра Картана, 1-сечения.

Аннотация

Для исключительной простой p-алгебры Ли серии Франк характеристики 3 получено полное описание классов сопряжённости максимальных торов и соответствующих 1-сечений. В частности, доказано, что все максимальные торы двумерны и являются подалгебрами Картана.

Abstract

M. I. Kuznetsov, O. A. Mulyar, Maximal tori of the Frank algebra, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 143—154.

A complete description of conjugate classes of maximal tori and corresponding 1-sections is obtained for the exceptional simple Lie p-algebra of characteristic 3 of the Frank series. In particular, it is proved that all maximal tori are two-dimensional and they are Cartan subalgebras.

Введение

В работе М. Франк [18] были построены две простые алгебры Ли S и T характеристики 3, имеющие размерность 10 и 18 соответственно. Они были реализованы как градуированные подалгебры $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots + L_r$ алгебры Ли $W(3:\mathbf{1})$ дифференцирований алгебры срезанных многочленов $\mathcal{O}(3:\mathbf{1})$ с разрешимой подалгеброй L_0. Если отождествить пространство L_{-1} с пространством алгебры срезанных многочленов $F[x]/(x^3)$, то $\rho(L_0) = \langle x\partial, \partial, x, 1\rangle$ для $L = S$, $\rho(L_0) = \langle x\partial, \partial, 1, x, x^2\rangle$ для $L = T$, где ρ — присоединённое представление L_0

*Работа выполнена в рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», проект НК-13П-13, контракт П945.

на L_{-1}. Простые алгебры Ли серии Франк T определяются как простые градуированные алгебры Ли $L = L_{-1} + L_0 + L_1 + \ldots$ с теми же компонентами L_{-1}, L_0, что и в алгебре T.

Алгебра Ли S изоморфна алгебре $L(1)$ из семейства $L(\varepsilon)$ глобальных деформаций алгебры Ли $\mathfrak{sp}(4)$, которое построил А. И. Кострикин [5]. Это же семейство встречается в [1] как семейство 10-мерных алгебр Ли, определяемых матрицей Картана, зависящей от параметра. Алгебра T была первой исключительной простой алгеброй Ли характеристики 3, т. е. простой алгеброй Ли, отличной от классической алгебры Ли (или её деформации) и от алгебры Ли картановского типа. Позднее были построены другие исключительные простые алгебры Ли характеристики три (см. [4, 13—15, 17]). Следующая теорема [6] показывает, что алгебра Ли S и алгебры серии T занимают особое место среди простых алгебр Ли (см. также [7]).

Теорема. *Пусть $\mathcal{L}$ — простая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем F характеристики $p > 2$, $\mathcal{L}_0$ — максимальная подалгебра в $\mathcal{L}$, действующая неприводимо на $\mathcal{L}/\mathcal{L}_0$. Если $\mathcal{L}_0$ — разрешимая алгебра Ли, то либо $\mathcal{L}$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2)$ или алгебре Цассенхауза $W(1:m)$, либо $p = 3$ и $\mathcal{L}$ является алгеброй Ли серии T или $\mathcal{L} \cong S$.*

Б. Ю. Вейсфейлер [24] (для $p > 5$) и С. М. Скрябин [21] (для $p > 3$ при некоторых предположениях о подалгебре $\mathcal{L}_0$) доказали, что условие неприводимости $\mathcal{L}_0$-модуля $\mathcal{L}/\mathcal{L}_0$ в теореме может быть опущено.

Реализация алгебр серии T в виде градуированной подалгебры глубины 2 контактной алгебры Ли картановского типа от трёх переменных была получена в [16]. Такую градуировку глубины 2 и соответствующую ей фильтрацию будем называть контактными или стандартными. Было показано, что алгебры серии T зависят от одного натурального параметра [14, 16]. С. М. Скрябин [13] построил геометрическую реализацию алгебр Франк $T(m)$. Как показано в [12], максимальная подалгебра $L_{(0)}$ в $T(m)$, которая является нулевым членом фильтрации контактного типа, инвариантна относительно автоморфизмов. Отсюда следует инвариантность контактной фильтрации в $T(m)$. В [9] найдены дифференцирования и группы автоморфизмов алгебр $T(m)$. А. А. Ладилова [11] доказала жёсткость относительно фильтрованных деформаций алгебр Ли $T(m)$ с градуировкой контактного типа.

Исследование максимальных торов и корневых разложений простых p-алгебр Ли играет важную роль в классификации простых алгебр Ли. Максимальные торы p-алгебр Ли картановских типов W, S, H были описаны С. П. Дёмушкиным [2, 3] (невычислительные доказательства, приведённые в [23], получены в [19, 20]). Х. Штраде [23] описал максимальные торы контактной p-алгебры Ли. С. М. Скрябин [22] исследовал классы сопряжённости максимальных торов и корневые разложения в p-алгебре Меликяна $\mathfrak{g}(1, 1)$.

Алгебра $T(m)$ является p-алгеброй Ли, только когда $m = 1$. Пусть $L = T(1)$ — p-алгебра с фильтрацией $\{L_{(i)}\}$ контактного типа. Тор $\mathfrak{t}$ в L назовём *согласованным с фильтрацией*, если $\mathfrak{t} \cap L_{(i)}$ является p-подалгеброй для любого i. Назовём тор $\mathfrak{t}$ тором *общего положения*, если $\mathfrak{t} \cap L_{-1}$ не является p-подалгеброй. Торы алгебры Франк изучались в [10], однако там описаны только торы, согласованные с фильтрацией. В настоящей работе даётся полное описание классов сопряжённости максимальных торов в p-алгебре Франк $L = T(1)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Все максимальные торы p-алгебры Франк $T(1)$ двумерны и являются подалгебрами Картана. Классы сопряжённости максимальных торов общего положения образуют параметрическое семейство. Если максимальный тор не является тором общего положения, то он согласован с фильтрацией. Существует четыре класса сопряжённости максимальных торов, согласованных с фильтрацией.*

Представители классов сопряжённости максимальных торов найдены в соответствующих разделах, полный список представителей приведён в теореме 4. Кроме того, в работе приведена информация о строении 1-сечений относительно максимальных торов из различных классов сопряжённости. В разделе 1 собраны необходимые сведения об алгебрах Франк и их автоморфизмах.

1. Предварительные сведения

Всюду в дальнейшем основное поле F предполагается алгебраически замкнутым характеристики $p = 3$. Мы будем использовать реализацию алгебр Франк $T(m)$, построенную в [13]. Алгебра $L = T(m)$ имеет $\mathbb{Z}_2$-градуировку:

$$L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}},$$

где $L_{\bar{0}} = W \oplus (\mathrm{sl}(U) \otimes \mathcal{O})$, $L_{\bar{1}} = U \otimes \Omega^1$, U — векторное пространство размерности 2, $\mathcal{O} = \mathcal{O}(1:m)$ — алгебра разделённых степеней, $W = W(1:m)$ — алгебра Витта, состоящая из специальных дифференцирований алгебры $\mathcal{O}$, Ω^1 — пространство дифференциальных 1-форм. Зафиксируем на U невырожденную билинейную кососимметрическую форму. Определим линейный оператор $T_{uu'} \in \mathrm{sl}(U)$ для $u, u' \in U$ по правилу

$$T_{uu'}(v) = \langle u, v\rangle u' + \langle u', v\rangle u, \quad v \in U.$$

Умножение в алгебре L определяется следующим образом.

1. Умножение в подалгебре $L_{\bar{0}}$ является стандартным умножением в полупростой алгебре.
2. Умножение $L_{\bar{0}} \times L_{\bar{1}} \to L_{\bar{1}}$ определяется по правилу
$$[f\partial + G \otimes g,\, u \otimes h\, dx] = u \otimes \partial(fh)\, dx + G(u) \otimes gh\, dx,$$
где $f, g, h \in \mathcal{O}$, $u \in U$, $G \in \mathrm{sl}(U)$.
3. Умножение $L_{\bar{1}} \times L_{\bar{1}} \to L_{\bar{0}}$ определяется так:
$$[u \otimes f\, dx,\, u' \otimes g\, dx] = \langle u, u'\rangle fg\partial + T_{uu'} \otimes (f\partial g - g\partial f)$$
для $f, g \in \mathcal{O}$, $u, u' \in U$.

Алгебра L имеет $\mathbb{Z}$-градуировку контактного типа, называемую также стандартной:

$$L = L_{-2} \oplus L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1 \oplus \ldots,$$

где

$$\begin{aligned} L_{2i} &= \left\langle x^{(i+1)}\partial,\, E \otimes x^{(i)},\, F \otimes x^{(i)},\, H \otimes x^{(i)} \right\rangle, \quad i \geqslant -1, \quad x^{(-1)} = 0, \\ L_{2i+1} &= \langle e_1 \otimes x^{(i+1)}\, dx,\, e_2 \otimes x^{(i+1)}\, dx \rangle, \qquad\qquad i \geqslant -1. \end{aligned}$$

Здесь $\{e_1, e_2\}$ — симплектический базис в U, $\mathrm{sl}(U) = \mathrm{sl}(2) = \langle E, H, F \rangle$, где $\{E, H, F\}$ — стандартный базис алгебры $\mathrm{sl}(2)$.

Автоморфизм φ алгебры $L = L_{\bar 0} \oplus L_{\bar 1}$ будем называть *геометрическим,* если $\varphi(L_{\bar i}) = L_{\bar i}$, $i \in \mathbb{Z}_2$. Подгруппу геометрических автоморфизмов обозначим через $\mathrm{Aut}_{\bar 0} L$.

Напомним, что из инвариантности стандартной максимальной подалгебры $L_{(0)}$ следует инвариантность стандартной фильтрации алгебры L (см. [12]).

Следующая теорема доказана в [9].

Теорема 1. *Группа* $\mathrm{Aut}_{\bar 0} L$ *является полупрямым произведением подгрупп* $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ *и* $Q \cong \mathrm{Aut}\, W$, *где* $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ — *подгруппа* $\mathcal{O}$*-линейных на* $L_{\bar 1}$ *автоморфизмов.* □

Группа $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ действует на L следующим образом: ограничение на $L_{\bar 1}$ присоединённого представления $L_{\bar 0}$ является точным, поэтому $L_{\bar 0}$ можно рассматривать как подалгебру Ли в $\mathrm{gl}(L_{\bar 1})$, группа $\mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ действует на свободном $\mathcal{O}$-модуле $L_{\bar 1}$ с базисом $\{e_i \otimes dx,\ i = 1, 2\}$ стандартным образом как группа $\mathcal{O}$-линейных отображений, а на $L_{\bar 0} \subset \mathrm{gl}(L_{\bar 1})$ — сопряжениями: $\varphi(l_{\bar 0}) = \varphi l_{\bar 0} \varphi^{-1}$, $\varphi \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$.

Теперь напомним строение группы $\mathrm{Aut}\, L$ (см. [9]). Группа $\mathrm{Aut}\, L$ является полупрямым произведением подгруппы $\mathrm{Aut}_0 L$ автоморфизмов, сохраняющих $\mathbb{Z}$-градуировку, и подгруппы $\mathrm{Aut}_{(1)} L$ автоморфизмов, индуцирующих тождественное преобразование на $\mathrm{gr} L$. Группа $\mathrm{Aut}_0 L$ является подгруппой в группе геометрических автоморфизмов. Очевидно, действие Aut_0 на L_{-1} устанавливает изоморфизм $\mathrm{Aut}_0 L \cong \mathrm{GL}_2(F)$. Подгруппы

$$\mathrm{Aut}_{(i)} L = \{\varphi \in \mathrm{Aut}_{(1)} L \mid (\varphi - 1) L_{(j)} \subset L_{(j+i)},\ j \in \mathbb{Z}\}$$

образуют фильтрацию в $\mathrm{Aut}_{(1)} L$.

Теорема 2. *Пусть* $\{\mathrm{Aut}_{(i)} L\}_{i>0}$ — *стандартная фильтрация подгруппы* $\mathrm{Aut}_{(1)} L$, $\hat L_i = \mathrm{Aut}_{(i)} L / \mathrm{Aut}_{(i+1)} L$. *Если* $i \equiv 1(2)$ *или* $i \equiv 0(2)$, $i \neq 2(3^s - 1)$, *то* $\hat L_i \cong L_i$. *Если* $i = 2(3^s - 1)$, *то* $\hat L_i \equiv \mathrm{sl}(U) \otimes \mathcal{O}_i \subset L_i$. *В частности, если* $L = T(1)$, *то* $\hat L_i \cong L_i$ *для всех* $i > 0$. □

Алгебра $L = T(1)$ является ограниченной, p-операция определяется следующим образом:

$$\partial^3 = 0, \quad (x\partial)^3 = x\partial, \quad \bigl(x^{(2)}\partial\bigr)^3 = 0,$$
$$(H \otimes 1)^3 = H \otimes 1, \quad \bigl(H \otimes x^{(k)}\bigr)^3 = 0 \ \text{ для } \ k = 1, 2,$$
$$\bigl(G \otimes x^{(k)}\bigr)^3 = 0 \ \text{ для } \ k = 0, 1, 2, \quad G = E \ \text{ или } \ G = F.$$

Для вычислений нам понадобится формула Джекобсона для $p = 3$:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + \bigl[a, [a, b]\bigr] + \bigl[b, [b, a]\bigr].$$

В дальнейшем через $\wp$ обозначается отображение Артина—Шрейера $\wp(x) = x^p - x$, $x \in F$.

2. Орбиты тороидальных элементов в $T(1)$

Напомним, что элемент t p-алгебры Ли называется тороидальным, если $t^p = t$.

Теорема 3. *Пусть* $L = T(1)$, $t \in L$, $t^p = t$.

1. *Если* $\langle t\rangle + L_{(-1)} = L$, *то элемент* t *сопряжён элементу* $t_1 = (1 + x)\partial$,
$$C_L(t_1) = \langle y\partial,\, e_1 \otimes y^2\, dy,\, e_2 \otimes y^2\, dy,\, E \otimes 1,\, H \otimes 1,\, F \otimes 1\rangle,$$
где $y = 1 + x$.
2. *Если* $t \in L_{(-1)} \backslash L_{(0)}$, *то элемент* t *сопряжён элементу* $t_1 = \pm(e_1 \otimes dx + H \otimes 1)$,
$$C_L(t_1) = \bigl\langle t_1,\, x\partial - H \otimes 1,\, E \otimes 1,\, E \otimes x + e_1 \otimes x^{(2)}\, dx,$$
$$x^{(2)}\partial - H \otimes x - e_2 \otimes x^{(2)}\, dx,\, \partial + F \otimes 1 + e_2 \otimes\, dx\bigr\rangle.$$

Доказательство. Утверждение 1 можно доказать непосредственными вычислениями, используя приведённую выше информацию об автоморфизмах алгебр Франк. Другое доказательство можно получить, используя теорию усечённых коиндуцированных модулей (см. [8, 23]). В [9] доказана теорема 4.2, согласно которой элемент $t \in L = T(m)$, такой что $t \equiv \partial \pmod{L_{(-1)}}$, $t^{p^m} = 0$, сопряжён элементу ∂. Доказательство из [9] следует доказательству аналогичного утверждения в [22] и почти дословно переносится на случай $L = T(1)$ с заменой условия $t^{p^m} = 0$ на $t^p - t = 0$ и условия $t \equiv \partial \pmod{L_{(-1)}}$ на условие $\langle t\rangle + L_{(-1)} = L$.

Докажем утверждение 2. Пусть t — такой тороидальный элемент, что $t \in L_{(-1)} \setminus L_{(0)}$. Подходящим автоморфизмом из группы $\mathrm{SL}_2(F) \subset \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$ элемент t можно привести к виду

$$t = A_{\bar 1} + A_{\bar 0} + g\partial, \tag{1}$$
$$A_{\bar 1} = e_1 \otimes h_1\, dx + e_2 \otimes h_2\, dx, \quad h_1(0) = 1, \quad h_2(0) = 0, \quad g(0) = 0,$$
$$A_{\bar 0} \in \mathrm{sl}(2) \otimes \mathcal{O} = \mathrm{sl}_2(\mathcal{O}), \quad A_{\bar 0} = E \otimes f_1 + H \otimes f_2 + F \otimes f_3.$$

Действуя на t автоморфизмами вида

$$\varphi = 1 + \alpha \operatorname{ad}\bigl(e_2 \otimes x^{(i)}\bigr) + \ldots, \quad \alpha \in F, \quad i = 1, 2,$$

можно получить тороидальный элемент вида (1), такой что $g = 0$. Поэтому будем считать, что

$$t = A_{\bar{0}} + A_{\bar{1}}.$$

Применяя к t автоморфизм

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -h_1^{-1}h_2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}),$$

получим, что t сопряжён элементу $A_{\bar{1}} + A_{\bar{0}}$, где $A_{\bar{1}} = e_1 \otimes h_1\,dx$. Автоморфизм

$$\varphi = \begin{pmatrix} h_1^{-1} & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$$

переводит t в элемент $e_1 \otimes dx + A_{\bar{0}}$.

Пусть теперь $t = e_1 \otimes dx + A_{\bar{0}}$. Очевидно, p-операция на $\mathrm{sl}_2(\mathcal{O})$ получается расширением скаляров из p-операции на $\mathrm{sl}_2(F)$: $(a \otimes f)^p = a^p \otimes f^p$. Так как $(e_1 \otimes dx)^3 = 0$, то по формуле Джекобсона

$$t^3 = A_{\bar{0}}^3 + \bigl[e_1 \otimes dx, [e_1 \otimes dx, A_{\bar{0}}]\bigr] + \bigl[A_{\bar{0}}, [A_{\bar{0}}, e_1 \otimes dx]\bigr] = t.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{gathered} e_1 \otimes dx = \bigl[A_{\bar{0}}, [A_{\bar{0}}, e_1 \otimes dx]\bigr], \\ A_{\bar{0}} = A_{\bar{0}}^3 + \bigl[e_1 \otimes dx, [e_1 \otimes dx, A_{\bar{0}}]\bigr]. \end{gathered} \tag{2}$$

Если в $A_{\bar{0}} = E \otimes f_1 + H \otimes f_2 + F \otimes f_3$ коэффициент f_3 отличен от 0, то

$$\begin{gathered} [e_1 \otimes dx, A_{\bar{0}}] = -e_1 \otimes f_2\,dx - e_2 \otimes f_3\,dx, \\ \bigl[e_1 \otimes dx, [e_1 \otimes dx, A_{\bar{0}}]\bigr] = B_{\bar{0}} - f_3\partial, \quad B_{\bar{0}} \in \mathrm{sl}_2(\mathcal{O}). \end{gathered}$$

Из равенства (2) следует, что $f_3 = 0$ и $A_{\bar{0}} = E \otimes f_1 + H \otimes f_2$. Так как $\bigl[A_{\bar{0}}, [A_{\bar{0}}, e_1 \otimes dx]\bigr] = e_1 \otimes f_2^2\,dx$, из (2) получаем, что $f_2^2 = 1$, т. е. $f_2 = \varepsilon = \pm 1$, и следовательно, $A_{\bar{0}} = \varepsilon H \otimes 1 + E \otimes f_1$. Если $f_1 \neq 0$, то действуем на t автоморфизмом

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon f_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}).$$

Так как $\varphi(e_1 \otimes dx) = e_1 \otimes dx$, то получаем $\varphi(t) = e_1 \otimes dx + \varepsilon H \otimes 1$. Применяя к последнему элементу автоморфизм

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathcal{O}),$$

получаем элемент $\varepsilon(e_1 \otimes dx + H \otimes 1)$.

Централизаторы элементов вычисляются непосредственно. □

3. Максимальные торы алгебры Франк $T(1)$

Согласно [12] стандартная фильтрация $\{L_{(i)}\}$ алгебры Ли $L = T(1)$ инвариантна относительно автоморфизмов, поэтому торы, содержащиеся в различных подпространствах $L_{(i)}$, принадлежат различным классам сопряжённости. Кроме того, фильтрация алгебры L индуцирует фильтрацию тора и, следовательно, номера ненулевых однородных пространств ассоциированной градуировки являются инвариантами тора. Мы будем отмечать эти номера в обозначении тора. Например, $\mathfrak{t}_{-2,0}$ будет обозначать тор, который имеет индуцированную фильтрацию $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{(-2)} \supset \mathfrak{t}_{(-1)} = \mathfrak{t}_{(0)} \supset \mathfrak{t}_{(1)} = 0$. Отметим, что максимальные торы в L, согласованные со стандартной фильтрацией, найдены в [10].

3.1. Максимальные торы в $L_{(0)}$

Пусть $\mathfrak{t}$ — максимальный тор подалгебры $L_{(0)}$. Так как $L_{(0)}$ — p-подалгебра и $L(1)$ — p-идеал в $L(0)$, состоящий из p-нильпотентных элементов, проекция $\bar{\mathfrak{t}}$ тора $\mathfrak{t}$ в $L_0 = L_{(0)}/L_{(1)} \cong \mathrm{gl}(2)$ является максимальным тором в L_0. Поэтому тор $\mathfrak{t}$ двумерный. Так как все двумерные торы в $\mathrm{gl}(2)$ сопряжены, то с точностью до геометрических автоморфизмов из $\mathrm{SL}_2(F)$ можно считать, что $\bar{\mathfrak{t}} = \langle x\partial, H \otimes 1\rangle$. Этот тор обозначается через $\mathfrak{t}_0$. Так как все однородные дифференцирования положительной степени продолжаются до автоморфизмов алгебры Ли L, то автоморфизмами из унипотентной подгруппы $\mathrm{Aut}_{(1)}(L)$ тор $\mathfrak{t}$ можно перевести в тор $\mathfrak{t}_0$. Нетрудно убедиться, что $C_L(\mathfrak{t}_0) = \mathfrak{t}_0$, т. е. $\mathfrak{t}_0$ является максимальным тором и подалгеброй Картана в L.

3.2. Торы $\mathfrak{t} \subset L_{(-1)}$, $\mathfrak{t} \not\subset L_{(0)}$

Пусть $\mathfrak{t} \subset L_{(-1)}$, $\mathfrak{t} \not\subset L_{(0)}$. По второму утверждению теоремы 3 $\mathfrak{t}$ сопряжён тору, который содержит тороидальный элемент $t_1 = e_1 \otimes dx + H \otimes 1$. Так как нас интересуют классы сопряжённости торов, будем считать, что $t_1 \in \mathfrak{t}$. Из вида $C_L(t_1)$ (см. второе утверждение теоремы 3) получаем, что

$$\mathrm{solv}\big(C_L(t_1)\big) = \big\langle t_1,\, x^{(2)}\partial - H \otimes x - e_2 \otimes x^{(2)}\, dx - E \otimes 1,\, E \otimes x + e_1 \otimes x^{(2)}\, dx\big\rangle \,—$$

абелев идеал и $C_L(t_1)/\,\mathrm{solv}\big(C_L(t_1)\big) \cong \mathrm{sl}(2)$. Следовательно, любой максимальный тор в $C_L(t_1)$ является двумерным и совпадает со своим централизатором. Таким образом, $\dim \mathfrak{t} = 2$ и $\mathfrak{t}$ является подалгеброй Картана.

Предположим, что $\mathfrak{t} + L_{(0)} = L_{(-1)}$. Так как $\dim L_{-1} = 2$ и $[L_{-1}, L_{-1}] = L_{-2} \neq 0$, то $[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] \neq 0$, что невозможно. Отсюда следует, что $\mathfrak{t} \cap L_{(0)} \neq 0$. Так как $L_{(0)}$ — p-подалгебра, то $\mathfrak{t} \cap L_{(0)} = \langle t\rangle$ для некоторого тороидального элемента t. Таким образом, тор $\mathfrak{t}$ согласован со стандартной фильтрацией и $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{-1,0}$.

По [10] максимальный тор $\mathfrak{t}_{-1,0}$ сопряжён тору $\langle e_1 \otimes dx + H \otimes 1,\, x\partial - H \otimes 1\rangle$.

3.3. Торы $\mathfrak{t} \not\subset L_{(-1)}$

Пусть $\mathfrak{t}$ — максимальный тор в L, такой что $\mathfrak{t} \not\subset L_{(-1)}$. Согласно первому утверждению теоремы 3 можно считать, что $\mathfrak{t}$ содержит тороидальный элемент $t_1 = y\partial$, $y = 1 + x$, $\partial = \partial/\partial y = \partial/\partial x$. Очевидно, $\mathfrak{t} \subset C_L(t_1)$. Описание централизатора даётся в первом утверждении теоремы 3. Имеем

$$\operatorname{solv}\big(C_L(t_1)\big) = \langle t_1,\, e_i \otimes y^2\,dy,\, i = 1,2\rangle,$$
$$C_L(t_1)/\operatorname{solv}\big(C_L(t_1)\big) \cong \langle E \otimes 1,\, H \otimes 1,\, F \otimes 1\rangle \cong \mathrm{sl}(2).$$

Следовательно, любой максимальный тор в $C_L(t_1)$ двумерен и совпадает со своим централизатором. Так как $\mathfrak{t} \subset C_L(t_1)$, то $\dim \mathfrak{t} = 2$ и $\mathfrak{t}$ является подалгеброй Картана в L.

Пусть теперь $\mathfrak{t} = \langle t_1, t_2\rangle$, $t_2 \in C_L(t_1)$, t_2 — тороидальный элемент,

$$t_2 = \gamma y\partial + \bar{t}_2 + \alpha e_1 \otimes y^2\,dy + \beta e_2 \otimes y^2\,dy,$$

где $\bar{t}_2 \in \langle E\otimes 1,\, H\otimes 1,\, F\otimes 1\rangle$. Так как $\bar{t}_2$ — проекция t_2 в $C_L(t_1)/\operatorname{solv}\big(C_L(t_1)\big) = \mathrm{sl}(2) \otimes 1$, то $\bar{t}_2$ — тороидальный элемент в $\mathrm{sl}(2) \otimes 1$. Тороидальные элементы в $\mathrm{sl}(2)\otimes 1$ сопряжены. Поэтому существует геометрический автоморфизм из подгруппы $\mathrm{SL}_2(F) \subset \mathrm{SL}_2(\mathcal{O})$, который переводит элемент $\bar{t}_2$ в элемент $H\otimes 1$. Так как автоморфизмы из подгруппы $\mathrm{SL}_2(F)$ индуцированы линейными преобразованиями пространства $U = \langle e_1, e_2\rangle$ с постоянными коэффициентами, то автоморфизм не меняет элемент t_1. Таким образом, можно считать, что $\mathfrak{t} = \langle t_1, t_2\rangle$, где

$$t_2 = \gamma t_1 + H \otimes 1 + \alpha e_1 \otimes y^2\,dy + \beta e_2 \otimes y^2\,dy\,—$$

тороидальный элемент. Условие тороидальности t_2 означает, что γ удовлетворяет уравнению Артина—Шрейера $\wp(x) = \tau$, где $\tau = \alpha\beta$.

В случае когда $\tau = \alpha\beta = 0$, получаем два максимальных тора, согласованных с фильтрацией:

$$\mathfrak{t}_{-2,-1} = \langle t_1 = (1+x)\partial,\, t_2 = e_1 \otimes (1+x)^2\,dx + H \otimes 1\rangle,$$
$$\mathfrak{t}_{-2,0} = \langle t_1 = (1+x)\partial,\, t_2 = H \otimes 1\rangle.$$

Если $\tau \neq 0$, то с помощью автоморфизма $\psi \in \mathrm{SL}_2(F)$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

можно привести тор к виду $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(\tau) = \langle t_1, t_2\rangle$, где

$$t_1 = y\partial, \quad t_2 = \gamma y\partial + H \otimes 1 + e_1 \otimes y^2\,dy + \tau e_2 \otimes y^2\,dy, \quad \wp(\gamma) = \tau.$$

Таким образом, если $\tau \neq 0$, $\mathfrak{t} = \langle t_1, t_2\rangle$ является тором общего положения и определяется одним параметром $\tau \in F^*$. Очевидно, $\mathfrak{t}(-\tau)$ сопряжён тору $\langle t_1, -t_2\rangle = \mathfrak{t}(\tau)$.

Выясним, когда торы, соответствующие различным параметрам τ, сопряжены. Пусть $\pi\colon L \to L/L_{(-1)} = L_{-2}$ — каноническая проекция. Пространство L_{-2}

одномерно. Фиксируя базисный элемент ∂, отождествим L_{-2} с F. Решётка тороидальных элементов $\mathfrak{t}(\tau)_{\mathbb{F}_3} = \langle t_1, t_2\rangle_{\mathbb{F}_3}$ в $\mathfrak{t}(\tau)$ проектируется в двумерную решётку $\Gamma = \langle 1, \gamma\rangle_{\mathbb{F}_3}$ в F, где $\wp(\gamma) = \tau$. В силу инвариантности фильтрации $\{L_{(i)}\}$ группа автоморфизмов алгебры Ли L действует на факторе $L/L_{(-1)} \equiv F$ как группа подобий. Поэтому торы $\mathfrak{t}(\tau_i)$, $i = 1, 2$, сопряжены тогда и только тогда, когда решётки $\Gamma_i = \langle 1, \gamma_i\rangle_{\mathbb{F}_3}$ подобны, т. е. когда существует элемент $a \in F^*$, такой что $a\Gamma_1 = \Gamma_2$. Это возможно тогда и только тогда, когда $a = \lambda^{-1}$, $\lambda \in \Gamma_1^* = \Gamma_1 \setminus \{0\}$.

Таким образом, каждый тор общего положения сопряжён некоторому тору $\mathfrak{t}(\tau)$, $\tau \in F^*$. Существует не более восьми различных торов вида $\mathfrak{t}(\tau)$, сопряжённых между собой. Так как поле F бесконечно, существует бесконечное множество классов сопряжённости торов общего положения.

Замечание. Решётка $\Gamma(\tau)$ в F, соответствующая решётке $\mathfrak{t}(\tau)_{\mathbb{F}_3}$, является множеством корней p-многочлена

$$q_\tau(x) = \wp(x)(\wp(x) - \tau)(\wp(x) + \tau) = x^9 - (\tau^2 + 1)x^3 + \tau^2 x.$$

Так как каждая двумерная решётка в F подобна решётке $\langle 1, \gamma\rangle_{\mathbb{F}_3}$, то множество классов сопряжённости торов общего положения в L можно отождествить со множеством классов подобия двумерных решёток в F. Ставя в соответствие регулярному p-полиному $f(x) = a_0x + a_1x^3 + a_2x^9$, $a_0a_2 \neq 0$, его решётку корней, можно получить одномерное многообразие, параметризующее классы сопряжённости максимальных торов общего положения в L.

Соберём полученные результаты.

Теорема 4.

1. *Все максимальные торы p-алгебры Франк двумерны и являются подалгебрами Картана.*
2. *Если тор не является тором общего положения, то он согласован с фильтрацией. Любой максимальный тор, согласованный с фильтрацией, сопряжён одному из следующих торов*:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{t}_{-2,-1} = \langle t_1 = (1+x)\partial,\ t_2 = e_1 \otimes (1+x)^2\,dx + H \otimes 1\rangle,\\
&\mathfrak{t}_{-2,0} = \langle t_1 = (1+x)\partial,\ t_2 = H \otimes 1\rangle,\\
&\mathfrak{t}_{-1,0} = \langle t_1 = e_1 \otimes dx + H \otimes 1,\ t_2 = x\partial - H \otimes 1\rangle,\\
&\mathfrak{t}_{0,0} = \langle t_1 = x\partial,\ t_2 = H \otimes 1\rangle.
\end{aligned}$$

3. *Классы сопряжённости максимальных торов общего положения образуют параметрическое семейство. Любой максимальный тор общего положения сопряжён тору вида*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{t}(\tau) = \langle t_1 = (1+x)\partial,&\\
&t_2 = \gamma(1+x)\partial + H \otimes 1 + e_1 \otimes (1+x)^2\,dx + \tau e_2 \otimes (1+x)^2\,dx\rangle,
\end{aligned}$$

$\wp(\gamma) = \tau$, $\tau \in F^*$. $\square$

4. 1-сечения алгебры Франк относительно максимальных торов

Приведём результаты вычисления 1-сечений и их строение относительно всех максимальных торов алгебры Франк. Для базиса $\{t_1, t_2\}$ максимального тора $\mathfrak{t}$ (см. теорему 4) обозначим через $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ двойственный базис в $\mathfrak{t}^*$. Корень $\alpha = a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2$, $a, b \in \mathbb{F}_3$, будем обозначать через (a, b). Отметим, что все корневые пространства двумерны. Для 1-сечения $L(\alpha) = L_\alpha + \mathfrak{t} + L_{-\alpha}$ через $L[\alpha]$ обозначается фактор-алгебра $L(\alpha)/\operatorname{solv} L(\alpha)$, где $\operatorname{solv} L(\alpha)$ — разрешимый радикал подалгебры $L(\alpha)$. Информация о строении 1-сечений для каждого тора приведена в таблице. В строке $\operatorname{solv} L(\alpha)$ символ H используется для обозначения алгебры Гейзенберга, ab — для обозначения абелевой алгебры Ли. Отметим, что для тора $\mathfrak{t}(\tau)$ достаточно исследовать сечение $L(0,1) = C_L(t_1)$, так как по теореме 3 все тороидальные элементы тора общего положения сопряжены.

1-сечения относительно торов $\mathfrak{t}(\tau)$

α	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,-1)$
$L[\alpha]$	sl(2)	sl(2)	sl(2)	sl(2)
$\operatorname{solv} L(\alpha)$	H	H	H	H

1-сечения относительно торов $\mathfrak{t}_{-2,-1}$, $\mathfrak{t}_{-2,0}$

α	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,-1)$
$L[\alpha]$	sl(2)	sl(2)	sl(2)	sl(2)
$\operatorname{solv} L(\alpha)$	H	ab	H	H

1-сечения относительно тора $\mathfrak{t}_{-1,0}$

α	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,-1)$
$L[\alpha]$	sl(2)	0	sl(2)	sl(2)
$\operatorname{solv} L(\alpha)$	ab	$L(\alpha)$	ab	ab

1-сечения относительно тора $\mathfrak{t}_{0,0}$

α	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,-1)$
$L[\alpha]$	sl(2)	sl(2)	0	0
$\operatorname{solv}L(\alpha)$	ab	ab	$L(\alpha)$	$L(\alpha)$

Таким образом, все корни алгебры Франк относительно любого максимального тора либо классические, либо разрешимые.

Литература

[1] Вейсфейлер Б. Ю., Кац В. Г. Экспоненциалы в алгебрах Ли характеристики p // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1971. — Т. 35. — С. 762—788.

[2] Дёмушкин С. П. Подалгебры Картана простых p-алгебр Ли W_n и S_n // Сиб. мат. журн. — 1970. — Т. 11. — С. 310—325.

[3] Дёмушкин С. П. Подалгебры Картана простых неклассических p-алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1972. — Т. 36. — С. 915—932.

[4] Ермолаев Ю. Б. О семействе простых алгебр Ли над полем характеристики 3 // V Всесоюзный симпозиум по теории колец, алгебр и модулей. Тезисы сообщений. — Новосибирск, 1982. — С. 52—53.

[5] Кострикин А. И. Параметрическое семейство простых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1970. — Т. 34. — С. 744—756.

[6] Кузнецов М. И. Модулярные простые алгебры Ли с разрешимой максимальной подалгеброй // Мат. сб. — 1976. — Т. 101, вып. 1. — С. 77—86.

[7] Кузнецов М. И. Классификация простых градуированных алгебр Ли с неполупростой нулевой компонентой // Мат. сб. — 1989. — Т. 180, вып. 2. — С. 147—158.

[8] Кузнецов М. И. Усечённые индуцированные модули над транзитивными алгебрами Ли характеристики p // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1989. — Т. 53. — С. 557—589.

[9] Кузнецов М. И., Муляр О. А. Автоморфизмы алгебр Франк // Вестн. ННГУ. Сер. мат. — 2005. — Вып. 1 (3). — С. 64—75.

[10] Кузнецов М. И., Муляр О. А., Решетников Д. В. Торы алгебры Франк // Вестн. ННГУ. Сер. мат. — 2006. — Вып. 1 (4). — С. 49—58.

[11] Ладилова А. А. Фильтрованные деформации алгебр Франк // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2009. — № 8. — С. 53—56.

[12] Муляр О. А. Максимальные подалгебры алгебр Франк // Вестн. ННГУ. Сер. мат. — 2005. — Вып. 1 (3). — С. 109—113.

[13] Скрябин С. М. Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3 // Мат. сб. — 1992. — Т. 183, вып. 8. — С. 3—22.

[14] Чан Нам Зунг. О двух классах простых алгебр Ли над полем характеристики 3 // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1992. — № 2. — С. 12—15.

[15] Brown G. E. Properties of 29-dimensional simple Lie algebra of characteristic three // Math. Ann. — 1982. — Vol. 261. — P. 487—492.

[16] Brown G. E. A class of simple Lie algebras of characteristic three // Proc. Amer. Math. Soc. — 1989. — Vol. 107. — P. 901—905.

[17] Brown G. E. On the structure of some Lie algebras of Kuznetsov // Michigan Math. J. — 1992. — Vol. 39, no. 7. — P. 85—90.

[18] Frank M. S. A new simple Lie algebra of characteristic three // Proc. Amer. Math. Soc. — 1973. — Vol. 38. — P. 43—46.

[19] Kuznetsov M. I., Yakovlev V. A. Elementary proof of Demushkin's theorem on tori in special Lie p-algebras of Cartan type // Commun. Algebra. — 1997. — Vol. 25. — P. 3979—3983.

[20] Kuznetsov M. I., Yakovlev V. A. An elementary proof of Demushkin's theorem on tori in Hamiltonian Lie p-algebras // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 27. — P. 2779—2784.

[21] Skryabin S. M. On the structure of the graded Lie algebra associated with a noncontractible filtration // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 178—230.

[22] Skryabin S. M. Tori in the Melikian algebra // J. Algebra. — 2001. — Vol. 243. — P. 69—95.

[23] Strade H. Simple Lie Algebras over Fields of Positive Characteristic. I. Structure Theory. — Berlin: Walter de Gruyter, 2004. — (De Gruyter Exp. Math.; Vol. 38).

[24] Weisfeiler B. Ju. On subalgebras of simple Lie algebras of characteristic $p > 0$ // Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. — Vol. 286. — P. 471—503.