Нормальное строение унипотентной подгруппы групп лиева типа и её экстремальные подгруппы*

В. М. ЛЕВЧУК
Сибирский федеральный университет, Красноярск
e-mail: levchuk@lan.krasu.ru

Г. С. СУЛЕЙМАНОВА
Хакасский технический институт
Сибирского федерального университета, Абакан
e-mail: suleymanova@list.ru

УДК 512.5

Ключевые слова: группа лиева типа, унипотентная подгруппа, экстремальная подгруппа, большая абелева подгруппа.

Аннотация

Исследуется нормальное строение унипотентного радикала U подгруппы Бореля группы лиева типа над полем. Описаны максимальные абелевы нормальные подгруппы в U. Это даёт новое решение задачи Паркера—Раули об экстремальных подгруппах в U и описание в конечных группах U больших нормальных (по доказанному, и нормальных больших) абелевых подгрупп.

Abstract

V. M. Levchuk, G. S. Suleimanova, The normal structure of the unipotent subgroup in Lie type groups and its extremal subgroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 155—169.

We study the normal structure of the unipotent radical U of a Borel subgroup in a Lie type group over a field K. Thus, all maximal Abelian normal subgroups in U are described. This gives a new solution of C. Parker and P. Rowley's problem about extremal subgroups in U and the description in finite groups U of the large normal (and, as proved, also normal large) Abelian subgroups.

Введение

Пусть G — группа лиева типа над полем K. Мы исследуем вопросы, изучавшиеся с 1970-х годов, связанные с нормальным строением унипотентного радикала U подгруппы Бореля в G.

Автоморфизмы и характеристические подгруппы группы U описал Дж. Гиббс [20] при $\operatorname{char} K \neq 2, 3$; тогда верхний и нижний центральные ряды совпадают с её стандартным центральным рядом $U = U_1 \supset U_2 \supset \ldots$ [30, 31]. Для

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00717).

произвольного поля K они описаны в [6] вместе с решением проблемы (1.5) из обзора [3] (обобщения см. в [9, 22, 23]). Нормальные подгруппы группы U тесно связаны с идеалами ассоциированного кольца Ли [7, 11, 14, 24]. В [6] используется и описание из [4] максимальных абелевых нормальных подгрупп унитреугольных групп $\mathrm{UT}(n, K)$.

Теоремы 2.3, 2.4, 2.6 о нормальном строении групп U в разделе 2 и [8] опираются на понятие углов и фрейма подмножества в U. В разделе 3 описаны максимальные абелевы нормальные подгруппы в U. К. Паркер и П. Раули [26] называют абелеву нормальную подгруппу A в U *экстремальной*, если $A \nsubseteq U_2$, т. е., согласно [8], существует простой угол в A. С целью применения в ревизии классификации конечных простых групп и к симплектическим амальгамам [29] они выявляют в [26—29] группы U с экстремальной подгруппой и возможные простые углы таких подгрупп. Как следствие основных теорем раздела 3 и [8] получаем новое решение задачи Паркера—Раули; для групп U типа D_4 и ${}^2\mathrm{D}_4$ известное решение уточняется теоремой 4.1.

В разделе 4 мы рассматриваем приложения к проблеме описания больших абелевых и нормальных больших абелевых подгрупп конечных групп U. Для исключительного типа эта проблема записана в обзоре А. С. Кондратьева [3, проблема (1.6)]. Напомним, что для произвольного теоретико-группового свойства $\mathcal{P}$ всякая $\mathcal{P}$-подгруппа наивысшего порядка в конечной группе называется *большой $\mathcal{P}$-подгруппой*.

Список больших нормальных абелевых подгрупп в U (теорема 4.2) дают основные теоремы раздела 3 и [8]. Тот же список составляют нормальные большие абелевы подгруппы в U по лемме 4.3; её мы получаем, используя метод А. И. Мальцева [10], развивавшийся Е. П. Вдовиным [2]. (Большая нормальная $\mathcal{P}$-подгруппа конечной группы не обязана быть большой $\mathcal{P}$-подгруппой, как показывают примеры.) Это позволяет уточнить порядки из [2, таблица 4] больших абелевых подгрупп в U (см. замечание 2).

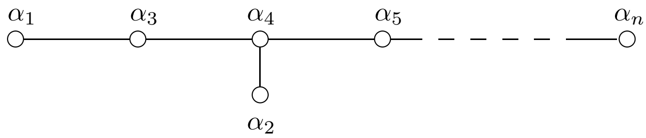
В теоремах 4.4 и 4.5 авторы исследуют вопрос (см. [21, § 1; 25]), какая часть больших абелевых подгрупп группы U сопряжена в группе G с нормальной подгруппой из U.

1. Предварительные замечания

Группу Шевалле $\Phi(K)$ над полем K, ассоциированную с системой корней Φ, порождают всевозможные корневые элементы $x_r(t)$ ($r \in \Phi$, $t \in K$). Её унипотентную подгруппу U порождают корневые подгруппы $X_r = x_r(K)$, соответствующие корням r из фиксированной (произвольно) положительной системы корней Φ^+ [19]. Пусть $\Pi = \Pi(\Phi) \subseteq \Phi^+$ есть базис $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ системы Φ и

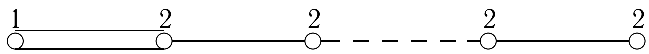
$$p(\Phi) = \max\{(r, r)/(s, s) \mid r, s \in \Pi\}.$$

Графом Кокстера системы Φ называют [12, V.12] граф, вершины которого соответствуют простым корням, причём вершины, соответствующие $r, s \in \Pi$, соединены $4(r,s)^2/(|r|\cdot|s|)^2$ рёбрами. Так,

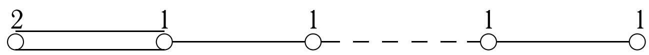
E_n: 

$(n = 6, 7, 8)$ —

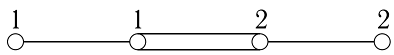
граф Кокстера системы корней типа E_n. Согласно [12, V.15] граф Кокстера даёт *схему Дынкина*, если приписать число $p(\Phi)$ или 1 вершине, соответствующей длинному или короткому корню $r \in \Pi$ соответственно (см. [1, VI.4.2]). (Р. Картер [19, § 3.4] выделяет из двух понятий «схема Дынкина» только понятие, совпадающее с понятием графа Кокстера из [12].) Таким образом, схемы Дынкина систем типа B_n и C_n с одинаковыми графами Кокстера и типа F_4 есть соответственно

B_n: 

$(n \geqslant 2)$,

C_n: 

$(n \geqslant 2)$,

F_4: 

.

Графовый автоморфизм τ группы Шевалле $\Phi(K)$ определяют, когда Φ — система корней с симметрией порядка $m = 2$ или $m = 3$ графа Кокстера и её продолжением $^{-}$ до подстановки Φ, причём $\tau(X_r) = X_{\bar r}$ $(r \in \Phi)$. Скрученная группа ${}^m\Phi(K)$ есть централизатор в группе $\Phi(K)$ её *скручивающего автоморфизма* θ порядка m, т. е. композиции τ и нетривиального автоморфизма $\sigma\colon t \to \bar t$ $(t \in K)$ поля K с условием $p(\Phi)\cdot\sigma^m = 1$.

При $p(\Phi) = 1$ существует гомоморфизм ζ решётки корней системы Φ на решётку такой системы корней, что $\zeta(r) = \zeta(s)$ тогда и только тогда, когда $r = s$, или $\bar r = s$, или $\bar s = r$. Если $m = 2$ и Φ типа D_{n+1}, A_{2n-1}, A_{2n}, E_6 или $(m,\Phi) = (3,\mathrm{D}_4)$, то $\zeta(\Phi)$ есть система корней соответственно типа B_n, C_n, BC_n (см. [12, V.16]), F_4 или G_2 (см. [19, замечание 13.3.8] и [5, леммы 7 и 8]).

Корневые элементы группы ${}^m\Phi(K)$ обычно выбирают в подгруппах $X_S^1 = {}^m\Phi(K)\cap\langle X_r \mid r \in S\rangle$ для определённых классов эквивалентности S в Φ [13, 19]. Мы поставим в соответствие корневым множествам $^{-}$-орбиты. Соответствие дано в [19, предложение 13.6.4] для классов S типа A_1, $\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_1$ или $\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_1\times\mathrm{A}_1$. В остальных случаях класс S есть объединение $^{-}$-орбит с представителями r и $r+\bar r$ для Φ типа A_{2n}, B_2 или F_4, а для типа G_2 ещё с $2r+\bar r$. В обозначениях [19, предложение 13.6.4] полагаем $\alpha(K) = X_R$ и $\beta(K) = X_{2R}$, если S типа B_2, а для S типа G_2, кроме того, $\gamma(K) = X_{3R}$. Для класса $S = \{r, \bar r, r+\bar r\}$ типа A_2 полагаем $x_{r+\bar r}\bigl(\ker(1+\sigma)\bigr) = X_{2R}$ с $2R = \zeta(r+\bar r)$, а при $R = \zeta(r)$ через X_R обозначаем фиксированную систему представителей

$x_R(t) = x_r(t)x_{\bar{r}}(\bar{t})x_{r+\bar{r}}(\tilde{t})$ (с определённым преобразованием $\tilde{}$ поля K) смежных классов подгруппы X_{2R} в X_S^1.

Итак, $\bar{}$-орбита любого корня $r \in \Phi$ однозначно определяет корневое множество X_α скрученной группы. Множество всех таких α обозначаем через ${}^m\Phi$. Скажем, что α первого типа, если порядок орбиты равен 1; в остальных случаях имеем $X_\alpha = x_\alpha(K)$. Выбирая все α с $r \in \Pi(\Phi)$, получаем базу $\Pi({}^m\Phi)$ системы ${}^m\Phi$. При $p(\Phi) = 1$ имеем ${}^m\Phi = \zeta(\Phi)$ и $\Pi({}^m\Phi) = \zeta\big(\Pi(\Phi)\big)$. Так, для типа ${}^3\mathrm{D}_4$ и $r, q = \bar{q} \in \Pi(\Phi)$ имеем

$$\begin{aligned} &X_a = x_a(K), && a = \zeta(r) \quad (x_a(t) = x_r(t)x_{\bar{r}}(\bar{t})x_{\bar{\bar{r}}}(\bar{\bar{t}}),\ t \in K),\\ &X_b = x_q\big(\ker(1-\sigma)\big), && b = \zeta(q) \quad (x_b(t) = x_q(t),\ t = \bar{t}). \end{aligned}$$

Как и в [6], через $G(K)$ обозначаем группу лиева типа, ассоциированную с системой $G = {}^m\Phi$ или $G = \Phi$. Через G^+ обозначаем множество *положительных корней* относительно фиксированной базы $\Pi = \Pi(G)$ в G. Тогда $U = UG(K) = \langle X_s \mid s \in G^+\rangle$.

Высотой

$$r = \sum_{\alpha \in \Pi} c_\alpha \alpha \in G$$

называют число

$$\mathrm{ht}(r) = \sum_{\alpha \in \Pi} c_\alpha.$$

Обозначая *максимальный корень* в G^+ через ρ, число $h = h(G) = \mathrm{ht}(\rho) + 1$ называем *числом Кокстера*. Согласно [19, теорема 5.3.3] и [6] подгруппы

$$U_i = \langle X_r \mid r \in G^+,\ \mathrm{ht}(r) \geqslant i\rangle, \quad 1 \leqslant i \leqslant h,$$

образуют *стандартный центральный ряд* группы U. При G типа ${}^2\mathrm{F}_4$, ${}^2\mathrm{B}_2$, ${}^2\mathrm{G}_2$ или ${}^2\mathrm{A}_{2n}$, имеем $h = 9$, $h = 3$, $h = 4$ или $h = 2n$ соответственно. Число Кокстера и максимальный корень для различных систем корней можно найти в [1, таблицы I—IX].

Известно, что любой элемент $\gamma \in U$ однозначно записывается как произведение корневых элементов $x_r(\gamma_r)$ ($r \in G^+$), расположенных согласно (произвольно) фиксированному упорядочению корней [13, лемма 18] (каноническое разложение). Коэффициент γ_r называем *r-проекцией* элемента γ. Коэффициенты всех $\gamma \in H$ составляют r-проекцию множества $H \subseteq U$.

В K-алгебре Ли с базисом Шевалле $\{e_r\ (r \in \Phi), \ldots\}$ [19, § 4.4] выберем подалгебру $N\Phi(K)$ с базисом $\{e_r \mid r \in \Phi^+\}$. Полагая

$$\pi(\gamma) = \sum_{r \in \Phi^+} \gamma_r e_r \quad (\gamma \in U\Phi(K)),$$

$$\alpha \circ \beta = \pi\big(\pi^{-1}(\alpha)\pi^{-1}(\beta)\big) \quad (\alpha, \beta \in N\Phi(K)),$$

мы определяем присоединённую группу $(N\Phi(K), \circ)$, изоморфную группе $U\Phi(K)$. В [6, 9] группа $UG(K)$, где $G = {}^m\Phi$, $p(\Phi) = 1$, также представлена присоединённой группой естественного K_σ-модуля $NG(K)$.

2. Нормальное строение

Исследуем нормальное строение определённых групп $U = UG(K)$.

Пусть $\{r\}^+$ при $r \in G$ есть совокупность $s \in G^+$ с неотрицательными коэффициентами в линейном выражении $s - r$ через базу Π. Положим

$$T(r) = \langle X_s \mid s \in \{r\}^+ \rangle, \quad Q(r) = \langle X_s \mid s \in \{r\}^+ \setminus \{r\}.$$

Если $H \subseteq T(r_1)T(r_2)\cdots T(r_m)$ и включение нарушается при любой замене $T(r_i)$ на $Q(r_i)$, то назовём $\{r_1, r_2, \ldots, r_m\} = \mathcal{L}(H)$ *множеством углов для* H. Когда s-проекция любого элемента из H равна произведению r-проекции на фиксированный скаляр, отличный от 0, назовём r, s *связанными в* H, а при $p, r+p, s+p \in G^+$ мы также называем их *p-связанными*.

Фреймом для $H \subseteq U$ назовём такое множество $\mathcal{F}(H)$, что

$$\mathcal{F}(H) \subseteq \prod_{s \in \mathcal{L}(H)} X_s, \quad \mathcal{F}(H) = H \bmod \prod_{s \in \mathcal{L}(H)} Q(s).$$

Ясно, что элементы из H дают фрейм $\mathcal{F}(H)$, если в их канонических разложениях отбросить все сомножители с $r \notin \mathcal{L}(H)$. Линейные методы в исследовании нормального строения U позволяет применять представление π группы U в $NG(K)$ (см. раздел 1). Фреймы в $N\Phi(K)$ определяем, полагая $\mathcal{F}\bigl(\pi(H)\bigr) = \pi\bigl(\mathcal{F}(H)\bigr)$.

Лемма 2.1. *Пусть $H \subseteq U\Phi(K)$, $\pi(H)$ — подгруппа аддитивной или присоединённой групп кольца Ли $N\Phi(K)$ и $p \in \Phi^+$. Тогда $\pi\bigl(\mathcal{F}([H, X_p])\bigr)$ есть K-подмодуль в $N\Phi(K)$, совпадающий с $\mathcal{F}(\pi(H) * Ke_p)$.*

Структурные константы c_{rs} базиса Шевалле определяют лиевы произведения $e_r * e_s = c_{rs}e_{r+s}$. В силу коммутаторной формулы Шевалле $[X_r, X_s] = x_{r+s}(c_{rs}K) \bmod Q(r+s)$. Используя соотношения из [6, § 4 (I)] и [9, теорема 2], приходим к следующей лемме.

Лемма 2.2. *Пусть $U = UG(K)$ и $r, s, r+s \in G^+$. Тогда $[X_r, X_s] = X_{r+s} \bmod Q(r+s)$ или $G = \Phi$, $c_{rs}K = p(\Phi)!\,K = 0$ и $[X_r, X_s] \subseteq Q(r+s)$.*

Можно показать, что $|\mathcal{L}([H, X_s])| \leqslant 3$. Если $\mathcal{L}(H) = \{r\}$, $s, r+s \in G^+$ и $[H, X_s] \neq X_{r+s} \mod Q(r+s)$, то либо $G = \Phi$ и применима лемма 2.2, либо G — группа скрученного типа, r-проекция H порождает 1-мерный K_σ-модуль и s первого типа. Для некоторых типов полное описание H даёт следующая теорема из [8].

Теорема 2.3. *Подгруппа H группы $UG(K)$ типа B_n, C_n для $2K = K$ или типа A_n, ${}^2\mathrm{A}_m$ нормальна тогда и только тогда, когда для любого её угла r и $p \in \Pi(G)$ с $r + p \in G$ имеем либо $\mathcal{F}([H, X_p])Q(r+p) \subseteq H$, либо $G = \mathrm{B}_n$ и в $[H, X_p]$ два угла q-связаны для некоторого $q \in \Pi(G)$, в $[H, X_q]$ два угла связаны и $\mathcal{F}([H, X_p])\mathcal{F}([H, X_q])Q(r+p, r+p+q) \subset H$.*

Более сложное нормальное строение имеют группы U типа D_n и ${}^2\mathrm{D}_n$ [8, 15, 32]. Для них существуют максимальные абелевы нормальные подгруппы M, такие что вес коммутаторов $\Big[[\ldots[[M,U],U]\ldots],U\Big]$, не порождаемых корневыми подгруппами, неограничено растёт вместе с n [8, теоремы 3 и 5]. Однако справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть U есть группа типа E_n или классического типа над полем K. Если $2K=K$, то подгруппа H нормальна в U тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}([H,X_p])\subseteq H$ при любом $p\in\Pi$. Для типа D_n (или ${}^2\mathrm{D}_n$) если $H\trianglelefteq U$ и $\mathcal{F}([H,X_p])\nsubseteq H$, то существуют простые углы r, $\bar r$ (соответственно $\zeta(r)$) и p-связанный угол в H с проекциями H порядка 2 на эти углы.*

Для групп U классического типа максимальные абелевы нормальные подгруппы перечислены в [8] с использованием описания в [6] централизаторов $C\big(T(r)\big)$ подгрупп $T(r)$. Для группы $U\mathrm{A}_n(K)$ (т. е. группы U типа A_n), изоморфной унитреугольной группе $\mathrm{UT}(n+1,K)$, они были перечислены ранее в [4, теорема 3] (случай конечного поля K нечётного порядка рассмотрен в [33, теорема 7]).

Лемма 2.5. *С точностью до сопряжения диагональным автоморфизмом всякая максимальная абелева нормальная подгруппа группы $U\mathrm{A}_n(K)$ есть либо $T(p)$, либо*

$$\alpha(K)\Big(C\big(T(r)\big)\cap C\big(T(r')\big)\Big),\quad \alpha(t)=x_r(t)x_{r'}(t)\ \ (t\in K),\quad r+r'=\rho, \tag{1}$$

либо при $2K=0$, $n\geqslant 3$ дополнительно

$$\beta(K)\Big(C\big(T(r)\big)\cap C\big(T(r')\big)\Big)\{x_r(t)x_{r'}(t)x_{r+p}(ct)\mid t\in K\}\quad (c\in K),$$
$$\beta(t)=x_{r+p}(t)x_{r'+p}(t),\quad r+r'+p=\rho, \tag{2}$$

для подходящих $r,r'\in\Phi^+$ и простого корня p.

Подмножество Ψ в Φ^+ называем *нормальным*, если $\{s\}^+\subseteq\Psi$ для всех $s\in\Psi$ и, следовательно, $X_\Psi=\langle X_r\mid r\in\Psi\rangle\trianglelefteq U\Phi(K)$. Подмножество Ψ в Φ^+ называем, следуя А. И. Мальцеву [10], *коммутативным* или *абелевым*, если $r+s\notin\Phi$ для всех $r,s\in\Psi$. В этом случае X_Ψ есть прямое произведение корневых подгрупп. При $H\subseteq UG(K)$ положим

$$\Psi(H)=\{r\in G^+\mid H\cap X_r\neq 1\}.$$

Совокупность углов каждого элемента из H, не лежащих в $\Psi(H)$, и сумм таких углов в G^+ обозначаем через $\hat\Psi(H)$. Для подгрупп H вида (1) или (2) выполнено $\hat\Psi(H)=\{r,r',\rho\}$ или $\hat\Psi(H)=\{r,r',r+p,r'+p,\rho\}$ соответственно.

Нормальное замыкание M_0 в группе $U\mathrm{D}_n(K)$ подгруппы $\alpha(K)$ с простыми углами r и $r'=\bar r$ абелево при $2K=0$, и $\hat\Psi(M_0)=\{r\}^+\cup\{r'\}^+$. Когда $n=4$, существуют такие $p,q\in\Pi(\Phi)$, что M_0 имеет вид

$$\alpha(K)\beta(K)\Big(C\big(T(r)\big)\cap C\big(T(r')\big)\Big)\{x_{r+p+q}(t)x_{r'+p+q}(t)\mid t\in K\}. \tag{3}$$

Теорема 2.6. *Пусть M — максимальная абелева нормальная подгруппа группы $U = U\Phi(K)$, $p(\Phi)!\,K = K$. Тогда $\Psi = \Psi(M)$ — абелево нормальное подмножество и $X_\Psi \subseteq M$. При $M \neq X_\Psi$ с точностью до сопряжения диагональным автоморфизмом либо $X_{\hat{\Psi}} \simeq \mathrm{UT}(3, K)$ и M имеет вид* (1), *либо $2K = 0$, $p(\Phi) = 1$ и $X_{\hat{\Psi}} \cap M$ имеет p-связанные углы для простого корня p, причём имеются следующие возможности*:

а) *M имеет вид* (2) *и $X_p X_{\hat{\Psi}} \simeq \mathrm{UT}(4, K)$,*

б) *$U = U\mathrm{D}_4(2) = X_{\hat{\Psi}} X_p$,*

в) *M имеет вид M_0 для типа D_n или* (3) *для типа E_m,*

г) *U типа D_n или E_m и M вида*

$$\{x_{r_1}(t)x_{r_2}(t)x_{r_3}(t)x_{r_2+p}(ct) \mid t \in K\}\{x_{r_1+p}(t)x_{r_2+p}(t) \mid t \in K\} \times \\ \times \{x_{r_1+q}(t)x_{r_3+q}(t) \mid t \in K\}X_\Psi \quad (4)$$

для некоторых $s \in \Psi$, $r_1, r_2, r_3 \in \hat{\Psi}$, простых p, $q \neq p$ и $c \in K$.

3. Максимальные абелевы нормальные подгруппы

Перечислим максимальные абелевы нормальные подгруппы групп U исключительного типа. Для случая лиева ранга, не превосходящего 2, доказана следующая теорема.

Теорема 3.1. *В группе U ранга, не превосходящего 2, все максимальные абелевы нормальные подгруппы исчерпываются следующими подгруппами*:

а) *$\langle\gamma\rangle U_2$ ($\gamma \in U \setminus U_2$) при $G = {}^2\mathrm{B}_2$;*

б) *U_2 при $G = {}^2\mathrm{G}_2$ или $G = \mathrm{G}_2$, $3K = 0$;*

в) *U_3 при $G = \mathrm{G}_2$, если $6K = K$, и, кроме того, $\beta_c(K) \cdot U_4$ ($c \in K$), если $2K = 0$, а при $|K| = 2$ также $\langle\alpha\rangle \times \langle\beta_1(1)\rangle$, где*

$$\alpha = x_a(1)x_{2a+b}(1), \quad \beta_c(t) = x_{a+b}(t)x_{2a+b}(tc);$$

г) *U_3 при $G = {}^3\mathrm{D}_4$ и, если $2K = 0$, с точностью до сопряжения диагональным автоморфизмом подгруппы $\beta_c(K_\sigma)x_{2a+b}(K^{1+\sigma}) \cdot U_4$ ($c \in K$), а при $|K_\sigma| = 2$ также*

$$\langle\alpha\rangle \times \langle\beta_1(1)\rangle \times x_{2a+b}(K^{1+\sigma}).$$

По теореме 2.6 для групп U типа E_m нам достаточно перечислить максимальные коммутативные нормальные подмножества систем корней Φ типа E_m (с точностью до симметрии для типа E_6) и корни, характеризующие подгруппы (1)—(4). Соответственно выбору ранга $m = 6$, $m = 7$ или $m = 8$ число Кокстера равно 12, 18 или 30 (см. [1, таблицы V—VII]; простые корни α_i ($1 \leqslant i \leqslant m$) и граф Кокстера см. в разделе 1). Положим

$$a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4 + e\alpha_5 + \ldots + f\alpha_m = (ac[db]'e \cdots f) = \begin{matrix} acde\ldots f \\ b \end{matrix}.$$

А. Максимальные коммутативные нормальные подмножества

Тип E_6:

$$\{\alpha_1\}^+, \quad \{\tilde{\mu}_4\}^+,$$

где $\tilde{\mu}_4 = (01[21]'10)$ (максимальный корень подсистемы типа D_4 с корнем α_4),

$$\{11[10]'11\}^+ \cup \{\tilde{\mu}_4 + \alpha_1\}^+ \cup \{\tilde{\mu}_4 + \alpha_6\}^+, \quad \{11[10]'10\}^+ \cup \{01[21]'21\}^+.$$

Тип E_7:

$$\{\alpha_7\}^+, \quad \{12[32]'210\}^+ \cup \{00[11]'111\}^+, \quad \{12[21]'100\}^+,$$
$$\{12[31]'210\}^+ \cup \{01[21]'111\}^+, \quad \{01[21]'210\}^+, \quad \{11[21]'210\}^+ \cup \{01[21]'211\}^+,$$
$$\{12[21]'210\}^+ \cup \{12[21]'111\}^+ \cup \{01[21]'211\}^+, \quad \{12[21]'110\}^+ \cup \{01[21]'221\}^+.$$

Тип E_8:

$$\{12[32]'2100\}^+, \quad \{12[31]'3210\}^+, \quad \{12[32]'3210\}^+ \cup \{12[31]'3211\}^+,$$
$$\{12[32]'2210\}^+ \cup \{12[31]'3321\}^+, \quad \{12[42]'3210\}^+ \cup \{12[31]'2221\}^+,$$
$$\{13[42]'3210\}^+ \cup \{12[21]'2221\}^+, \quad \{23[42]'3210\}^+ \cup \{11[21]'2221\}^+,$$
$$\{12[32]'3210\}^+ \cup \{12[32]'2221\}^+ \cup \{12[31]'3221\}^+, \quad \{01[21]'2221\}^+.$$

Б. Корни r, определяющие подгруппы (1)

Тип E_6:

$$(11[11]'00), \quad (11[11]'10), \quad \tilde{\mu}_4.$$

Тип E_7:

$$(11[10]'111), \quad (12[21]'100), \quad (12[21]'110),$$
$$(11[21]'210), \quad (11[21]'111), \quad (11[11]'111).$$

Тип E_8:

$$(12[32]'2111), \quad (12[32]'2211), \quad (12[31]'3211), \quad (12[32]'3211),$$
$$(12[21]'2221), \quad (11[21]'2221), \quad (01[21]'2221).$$

В. Пары $\{r, p\}$, определяющие подгруппы (2)

Тип E_6:

$$\{(11[11]'00), \alpha_5\}, \quad \{(11[11]'10), \alpha_6\}, \quad \{(11[11]'10), \alpha_4\}.$$

Тип E_7:

$$\{(12[21]'110), (11[21]'111)\}, \quad \{(12[21]'100), (11[21]'211)\},$$
$$\{(12[21]'110), (11[21]'210)\}, \quad \{(11[21]'210), (11[21]'111)\},$$
$$\{(12[21]'210), (11[11]'111)\}, \quad \{(12[31]'210), (11[10]'111)\}.$$

Тип E_8:

$$\{(12[31]'3221),\,(12[32]'2111)\},\quad \{(12[31]'3211),\,(12[32]'2211)\},$$
$$\{(12[31]'2221),\,(12[31]'3211)\},\quad \{(12[31]'2221),\,(12[32]'2211)\},$$
$$\{(12[21]'2221),\,(12[32]'3211)\},\quad \{(11[21]'2221),\,(12[42]'3211)\}.$$

Г. Углы $\{r, r'\}$, определяющие подгруппу (3)
с q-связанными углами в коммутаторе $[M, X_p]$

$$\{(11[10]'10),\,(01[10]'11)\},$$
$$\{(01[21]'210),\,(01[21]'111)\},\quad \{(12[31]'3210),\,(12[32]'2210)\}$$

для типов E_6, E_7 и E_8 соответственно.

Д. Попарно p- или q-связанные углы $\{r_1, r_2, r_3\}$ подгрупп (4)

$$\{(11[11]'10),\,\tilde{\mu}_4,\,(01[11]'11)\}$$

для типа E_6,

$$\{(12[21]'110),\,(11[21]'210),\,(11[21]'111)\}$$

для типа E_7,

$$\{(12[31]'2221),\,(12[31]'3211),\,(12[32]'2211)\}$$

для типа E_8.

Оставшиеся группы U типа ${}^2\mathrm{E}_6$, F_4, ${}^2\mathrm{F}_4$ ассоциируются с системой корней Φ типа F_4 (см. раздел 1). Нам потребуется её представление из [6].

Согласно [1, таблицы I—IV] и [6] положительные корни систем типа A_{n-1}, B_n, C_n, BC_n или D_n выражаются через ортонормированный базис ε_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ евклидова пространства как

$$\varepsilon_i - m\varepsilon_j = p_{i,mj}, \quad 1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n, \quad m = 0, 1, -1.$$

В частности,

$$\mathrm{C}_n^+ = \{p_{iv} \mid 0 < |v| \leqslant i \leqslant n,\ v \neq i\}.$$

Для системы типа B_n полагаем

$$\varepsilon_i - m\varepsilon_j = q_{i,mj},$$

и поэтому

$$\mathrm{B}_n^+ = \{q_{ij} \mid 0 \leqslant |j| < i \leqslant n\}.$$

Как и в [6] (см. там диаграмму), систему F_4^+ представляем как объединение $\mathrm{C}_4^+ \cup \mathrm{B}_4^+$ с заданным пересечением и явной симметрией $^-$:

$$\mathrm{B}_4^+ \cap \mathrm{C}_4^+ = \{p_{i,-i} = q_{i+1i},\ q_{i0} = p_{i+1i}\ (i = 1, 3);$$
$$p_{j,-j} = q_{j,1-j},\ q_{j0} = p_{j,1-j}\ (j = 2, 4)\};$$

$\bar{p}_{ij} = q_{ij}$, $\bar{q}_{ij} = p_{ij}$ $(1 \leqslant |j| < i \leqslant 4)$.

В группах $U\mathrm{F}_4(K)$ и $U^2\mathrm{E}_6(K)$ выделим следующие подгруппы, где $F = K$ и $F = K_\sigma$ соответственно:

$$T(q_{43})U_6, \quad T(p_{4,-1})T(q_{3,-2}), \quad T(p_{4,-1})\{x_{q_{3,-2}}(t)x_{q_{42}}(t) \mid t \in F\}; \tag{5}$$

$$T(p_{42})X_{q_{43}}, \quad T(p_{42})X_{p_{43}}, \quad T(p_{3,-2}), \quad T(p_{3,-2})^\tau, \quad T(q_{3,-2})X_{p_{41}}X_{p_{3,-2}}; \tag{6}$$

$$\{x_{p_{3,-2}}(t)x_{p_{42}}(t) \mid t \in K\}S, \quad S = T(q_{43})T(p_{41}) \quad \text{или} \quad S = T(q_{3,-2})X_{p_{41}}; \tag{7}$$

$$\{x_{q_{3,-2}}(t)x_{q_{42}}(t) \mid t \in K\}T(p_{4,-1})X_{p_{41}}S, \quad S = X_{p_{43}}X_{p_{42}} \quad \text{или} \quad X_{p_{3,-2}}; \tag{8}$$

$$\langle x_{p_{43}}(1)x_{q_{43}}(d)\rangle\, T(p_{42}) \quad (d \in K^*); \tag{9}$$

$$[\langle x_{p_{3,-2}}(t)x_{p_{42}}(t) \mid t \in K\rangle \times \langle x_{q_{3,-2}}(t)x_{q_{42}}(dt) \mid t \in K\rangle]\; T(p_{4,-1})X_{p_{41}}. \tag{10}$$

Рассмотрим «корневые элементы» группы $U^2\mathrm{F}_4(K)$ (см. раздел 1). Пусть $r = q_{ij}$. Положим $R_{ij}(t) = x_r(t)x_{\bar r}(\bar t)$, если $(i,j) = (2,-1)$, $(3,2)$, $(3,-2)$ или $i = 4$, $j \in \{-3,-2,-1,1,2\}$. При $(i,j) = (2,1)$, $(3,1)$, $(3,-1)$, $(4,3)$ согласно [19] $\{r, \bar r, r + \bar r, r + 2\bar r\}$ есть класс типа B_2. Положим $R_{ij}(t) = x_{\bar r}(\bar t)x_r(t)x_{r+\bar r}(t\bar t)$ $(t \in K)$. Согласно [6, § 4 (I)] подгруппу U_i в $U^2\mathrm{F}_4(K)$ порождают элементы $R_{ij}(t)$, соответствующие столбцам с номерами не меньше i в следующей таблице:

$$\begin{array}{cccccccc} R_{21} & R_{2,-1} & R_{3,-1} & R_{3,-2} & & & & \\ R_{32} & R_{31} & R_{43} & R_{42} & R_{41} & R_{4,-1} & R_{4,-2} & R_{4,-3}. \end{array}$$

Теорема 3.2. *Максимальные абелевы нормальные подгруппы в группах $U\mathrm{F}_4(K)$ и $U^2\mathrm{E}_6(K)$ с точностью до сопряжения диагональным автоморфизмом исчерпываются подгруппами* (5) *при $2K = K$. Если $2K = 0$, то они исчерпываются подгруппами* (6)—(10) *и соответственно* (5), $\big(T(p_{3,-2}) \cap E_6(K_\sigma)\big)U_7$, *а также*

$$\{x_{p_{41}}(t)x_{p_{4,-1}}(ft) \mid t \in F\}x_{p_{4,-1}}(K_\sigma)T(q_{43})U_7 \quad (f \in K \setminus K_\sigma). \tag{11}$$

В группе $U^2\mathrm{F}_4(K)$ их исчерпывают подгруппы

$$\langle R_{43}(1)\rangle R_{42}(K)U_5, \quad \{R_{3,-2}(t)R_{42}(ct) \mid t \in K\}U_5 \ \ (c \in K). \tag{12}$$

4. Экстремальные и большие абелевы подгруппы

Нормальная абелева подгруппа A группы $U = UG(K)$ в [26] названа *экстремальной*, если $A \not\subseteq U_2$, т. е. в обозначениях [19, § 8.1] $A \not\subseteq U_p$, $U_p = \langle X_r \mid r \in G^+,\ r \neq p\rangle$ для некоторого $p \in \Pi(G)$. Это означает, что A имеет простой угол $p \in \Pi(G)$.

С целью приложений к симплектическим амальгамам [29] и ревизии классификации конечных простых групп К. Паркер и П. Раули [26—28] изучают группы U, имеющие экстремальные подгруппы, и простые углы в таких подгруппах (группы U типа G_2 не рассматриваются).

Укажем уточнённый результат для групп U типов D_4 и ${}^2\mathrm{D}_4$. Согласно [27, теорема 1.2], если группа $U^2\mathrm{D}_4(K)$ имеет экстремальную подгруппу с двумя простыми углами, то $2K = 0$. Пример из [26, с. 396, 397] (и теорема 1.3 там же) даёт экстремальную подгруппу группы $U\mathrm{D}_4(K)$ над любым полем K характеристики 2, имеющую три простых угла.

Покажем, что для выбранных групп имеем $|K|=4$ и $|K|=2$ соответственно. Пусть Φ — система корней типа D_4. Для симметрии $^-$ порядка 3 её графа Кокстера зафиксируем простые корни $q=\bar{q}$, r, $\bar{r}$, $\bar{\bar{r}}$ и корень $s=q+r+\bar{r}+\bar{\bar{r}}$. Тогда группы $U\mathrm{D}_4(K)$ и $U^2\mathrm{D}_4(K)$ содержат элемент

$$\vartheta=x_r(1)x_{\bar{r}}(1)x_{\bar{\bar{r}}}(1)x_{s-r}(1)x_{s-\bar{r}}(1)x_{s-\bar{\bar{r}}}(1). \tag{13}$$

Теорема 4.1. *Нормальное замыкание элемента* (13) *в группах $U\mathrm{D}_4(2)$ и $U^2\mathrm{D}_4(4)$ является экстремальной подгруппой с тремя или двумя простыми углами соответственно. Группы $U\mathrm{D}_4(K)$, $|K|>2$, и $U^2\mathrm{D}_4(K)$, $|K|>4$, не содержат экстремальных подгрупп, имеющих не менее трёх или двух простых углов соответственно.*

Найденное описание максимальных абелевых нормальных подгрупп групп U (теорема 5 в [8] для классических типов, теоремы 2.6 (вместе с пунктами А—Д в разделе 3), 3.1 и 3.2 для исключительных типов) дают новое решение проблемы К. Паркера и П. Раули.

Далее рассмотрим приложения к проблеме описания больших абелевых и нормальных больших абелевых подгрупп конечных групп U. Для исключительного типа она записана в обзоре [3, проблема (1.6)].

Напомним, что для произвольного теоретико-группового свойства $\mathcal{P}$ всякая $\mathcal{P}$-подгруппа наивысшего порядка в конечной группе называется *большой $\mathcal{P}$-подгруппой*. Непосредственно из теорем о максимальных абелевых нормальных подгруппах в U вытекает следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть U — конечная группа $UG(K)$ исключительного типа. Тогда большие нормальные абелевы подгруппы в U исчерпываются следующими подгруппами*:

а) $\langle\alpha\rangle\times\langle\beta_1(1)\rangle$ *в* $U\mathrm{G}_2(2)$, U_3 *и* $\beta_c(K)U_4$ *в* $U\mathrm{G}_2(K)$, $2K=0$, $|K|>2$;

б) U_3 *в* $U\mathrm{G}_2(K)$, $6K=K$, *и* U_2 *при* $3K=0$, $G=\mathrm{G}_2$ *или* $G={}^2\mathrm{G}_2$;

в) U_3 *в* $U^3\mathrm{D}_4(K)$, $2K=K$, *и* $T(q_{43})U_6$ *при* $2K=K$, $G=\mathrm{F}_4$ *или* $G={}^2\mathrm{E}_6$;

г) *с точностью до сопряжения диагональным автоморфизмом* $\beta_c(K_\sigma)x_{2a+b}(K^{1+\sigma})\cdot U_4$ *и* U_3 *в* $U^3\mathrm{D}_4(K)$, $2K=0$, $|K_\sigma|>2$,

$$\langle\alpha\rangle\times\langle\beta_1(1)\rangle\times x_{2a+b}(K^{1+\sigma}) \quad \textit{в} \quad U^3\mathrm{D}_4(8), \tag{14}$$

$T(p_{3,-2})^\tau$, $X_{p_{43}}T(p_{42})$, $X_{p_{43}}X_{p_{42}}X_{p_{41}}\{x_{q_{3,-2}}(t)x_{q_{42}}(t)\mid t\in K\}T(p_{4,-1})$, $T(p_{3,-2})$, $X_{q_{43}}T(p_{42})$, $\{x_{p_{3,-2}}(t)x_{p_{42}}(t)\mid t\in K\}X_{q_{43}}T(p_{41})$ *в* $U\mathrm{F}_4(K)$ *при* $2K=0$ *и, кроме того,* $\langle x_{p_{43}}(1)x_{q_{43}}(1)\rangle T(p_{42})$ *при* $|K|=2$,

$$\big(T(p_{3,-2})\cap E_6(K_\sigma)\big)U_7 \quad \textit{в} \quad U^2\mathrm{E}_6(K),\ 2K=0; \tag{15}$$

д) $\langle R_{43}(c)\rangle R_{42}(K)U_5$ $(c\neq 0)$ *при* $G={}^2\mathrm{F}_4$, $\langle\gamma\rangle U_2$ $(\gamma\in U\setminus U_2)$ *при* $G={}^2\mathrm{B}_2$;

е) $T(\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+3\alpha_4+2\alpha_5+\alpha_6)$ *в* $U\mathrm{E}_8(K)$, $T(\alpha_7)$ *в* $U\mathrm{E}_7(K)$ *и, наконец,* $T(\alpha_1)$ *и* $T(\alpha_6)$ *в* $U\mathrm{E}_6(K)$.

Замечание 1. В конечной группе большая нормальная $\mathcal{P}$-подгруппа не всегда есть нормальная большая $\mathcal{P}$-подгруппа. Так, в конечной группе $\mathrm{SL}(n, K)$ нет нормальных больших циклических подгрупп, хотя её центр — большая нормальная циклическая подгруппа.

Наивысший порядок абелевых подгрупп в U обозначают через $\mathbf{a}(U)$. Ассоциируя каноническое разложение элементов из U с упорядочением корней, согласованным с функцией высоты корней [19, лемма 5.3.1], обозначим через $\mathcal{L}_1(M)$ совокупность первых углов всех элементов произвольной подгруппы M в U. Тогда $|M| \leqslant \prod\limits_{r \in \mathcal{L}_1(M)} |X_r| \leqslant |K|^{|\mathcal{L}_1(M)|}$.

Для абелевой подгруппы M группы $U\Phi(K)$ множество $\mathcal{L}_1(M)$ согласно [2] является *p-абелевым*, т. е. по лемме 2.2 $e_r * e_s = 0$ $(r, s \in \Psi)$ в подалгебре $N\Phi(K)$ с характеристикой p основного поля. Если $p(\Phi)!\,K = K$, то p-абелевы множества в Φ^+ абелевы, и их наивысшие порядки найдены в [10]; при $p(\Phi)!\,K = 0$ наивысшие порядки указаны в [2]. В силу теоремы 4.2 и [8, 9] отсюда следует, что порядки больших нормальных абелевых подгрупп групп U равны $\mathbf{a}(U)$ для групп $U\Phi(K)$ и классического типа, а также для групп скрученного типа, когда $|X_r| = |K|$ для всех r. Для оставшихся групп U типов ${}^3\mathrm{D}_4$ и ${}^2\mathrm{E}_6$ используем сходную схему с гомоморфизмом ζ. Таким образом устанавливается следующая лемма.

Лемма 4.3. *В конечной группе $UG(K)$ нормальные большие абелевы подгруппы — это в точности большие нормальные абелевы подгруппы.*

Замечание 2. Теорема 4.2 и лемма 4.3 уточняют известные значения $\mathbf{a}(U)$. Точнее говоря, при вычислении порядков $\mathbf{a}(U)$ в [2] выпали большие абелевы подгруппы а) порядка 2^4 группы $U\mathrm{G}_2(2)$ из теоремы 4.2, подгруппы (14) порядка 2^6 в $U^3\mathrm{D}_4(8)$ и, наконец, подгруппы (15) порядка $|K_\sigma|^{13}$ в $U^2\mathrm{E}_6(K)$, $2K = 0$ (согласно [2], $\mathbf{a}(U) = 2^3$, $\mathbf{a}(U) = 2^5$ и $\mathbf{a}(U) = |K_\sigma|^{12}$ соответственно).

В заключение авторы исследуют следующий вопрос, отмечавшийся в [21, § 1] и [25]: какая часть больших абелевых подгрупп группы U сопряжена в $G(K)$ с нормальной подгруппой из U? С учётом [9] установлена следующая теорема.

Теорема 4.4. *В конечной группе U либо каждая большая абелева подгруппа $G(K)$-сопряжена с нормальной подгруппой в U, либо найдётся нормальная большая абелева подгруппа, не являющаяся экстремальной, и $G = \mathrm{G}_2$, $G = {}^3\mathrm{D}_4$, $G = \mathrm{F}_4$, $G = {}^2\mathrm{E}_6$ или $G = \mathrm{E}_8$.*

Г. С. Сулейманова завершила исследование вопроса для типа F_4 (случай $2K = K$ см. в [16]). Как и в [1, таблица VIII], через $abcd$ обозначаем корень $a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 + d\alpha_4$ системы корней типа F_4 с простыми корнями α_1, α_2, α_3, α_4. Выделим в группе U типа F_4 следующие подгруппы:

$$\begin{gathered}\{x_{0011}(t)x_{1221}(c_1t) \mid t \in K\}\{x_{0111}(t)x_{1121}(c_2t) \mid t \in K\} \\ \{x_{1111}(t)x_{0121}(c_3t) \mid t \in K\}X_{1231}T(0122) \quad (c_1, c_2, c_3 \in K),\end{gathered} \tag{16}$$

$$\{x_{0111}(t)x_{1121}(ct) \mid t \in K\}$$
$$\{x_{1111}(t)x_{0121}(dt) \mid t \in K\}X_{0122}U_6 \quad (c, d \in K^*,\ c \neq d). \tag{17}$$

Теорема 4.5. *В группе Шевалле G типа F_4 над конечным полем K каждая большая абелева подгруппа унипотентной подгруппы U сопряжена в G либо с нормальной подгруппой в U, либо, когда $2K = 0$, с одной из подгрупп* (16), (17) *или её графово-симметричным образом. Подгруппы* (16), (17) *не сопряжены в G с нормальной в U подгруппой.*

Литература

[1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли (главы IV—VI). — М.: Мир, 1972.

[2] Вдовин Е. П. Большие абелевы унипотентные подгруппы конечных групп Шевалле // Алгебра и логика. — 2001. — Т. 40, № 5. — С. 523—544.

[3] Кондратьев А. С. Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. — 1986. — Т. 41, № 1 (247). — С. 57—96.

[4] Левчук В. М. Связи унитреугольной группы с некоторыми кольцами // Алгебра и логика. — 1976. — Т. 15, № 5. — С. 558—578.

[5] Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 4. — С. 509—525.

[6] Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. — 1990. — Т. 29, № 2. — С. 141—161; № 3. — С. 315—338.

[7] Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Нормальное строение присоединённой группы в радикальных кольцах $R_n(K, J)$ // Сиб. мат. журн. — 2002. — Т. 43, № 2. — С. 419—437.

[8] Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Нормальное строение унипотентной подгруппы группы лиева типа и смежные вопросы // Докл. РАН. — 2008. — Т. 419, № 5. — С. 595—598.

[9] Левчук В. М., Сулейманова Г. С. Автоморфизмы и нормальное строение унипотентных подгрупп финитарных групп Шевалле // Тр. ИММ. — 2009. — Т. 15, № 2. — С. 133—142.

[10] Мальцев А. И. Коммутативные подалгебры полупростых алгебр Ли // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1945. — Т. 9, № 4. — С. 291—300.

[11] Мартынова Л. А. Нормальное строение и автоморфизмы унипотентных подгрупп групп лиевых типов: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 1994.

[12] Серр Ж.-П. Алгебры Ли и группы Ли. — М.: Мир, 1969.

[13] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир,1975.

[14] Сулейманова Г. С. Структурные описания и связи нильпотентных матричных групп и ассоциированных с ними колец: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Красноярск: КГУ, 2002.

[15] Сулейманова Г. С. Нормальное строение и абелевы нормальные подгруппы унипотентной подгруппы симплектической группы // Владикавказский мат. журн. — 2008. — Т. 10, № 1. — С. 79—83.

[16] Сулейманова Г. С. О сопряжённости в группе Шевалле больших абелевых подгрупп унипотентной подгруппы // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, № 7. — С. 205—216.

[17] Barry M. J. J. Large Abelian subgroups of Chevalley groups // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. — 1979. — Vol. 27, no. 1. — P. 59—87.

[18] Barry M. J. J., Wong W. J. Abelian 2-subgroups of finite symplectic groups in characteristic 2 // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. — 1982. — Vol. 33, no. 3. — P. 345—350.

[19] Carter R. Simple Groups of Lie Type. — New York: Wiley and Sons, 1972.

[20] Gibbs J. Automorphisms of certain unipotent groups // J. Algebra. — 1970. — Vol. 14, no. 2. — P. 203—228.

[21] Gupta C. K., Levchuk V. M., Ushakov Yu.Yu. Hypercentral and monic automorphisms of classical algebras, rings and groups // Журн. СФУ. Мат. и физ. — 2008. — Т. 1, № 4. — С. 280—290.

[22] Kuzucuoglu F., Levchuk V. M. The automorphism group of certain radical rings // J. Algebra. — 2001. — Vol. 243. — P. 473—485.

[23] Kuzucuoglu F., Levchuk V. M. Isomorphism of certain locally nilpotent finitary groups and associated rings // Acta Appl. Math. — 2004. — Vol. 82, no. 2. — P. 169—181.

[24] Levchuk V. M. Chevalley groups and their unipotent subgroups // in: *Proc. of the Int. Conf. on Algebra Dedicated to the Memory of A. I. Mal'cev, held at Akademgorodok, Novosibirsk, USSR, Aug. 21—26, 1989*, Part 1. — Providence: Amer. Math. Soc., 1992. — (Contemp. Math.; Vol. 131). — P. 227—242.

[25] Levchuk V. M., Suleymanova G. S., Voitenko T. Yu. Some questions for the unipotent subgroup of the Chevalley group // Тезисы докл. междунар. конф. «Алгебра и её приложения», Красноярск, 2007. — С. 168—169.

[26] Parker C., Rowley P. Extremal subgroups in Chevalley groups // J. London Math. Soc. — 1997. — Vol. 55, no. 2. — P. 387—399.

[27] Parker C., Rowley P. Extremal subgroups in twisted Lie type groups // J. Reine Angew. Math. — 1998. — Vol. 498. — P. 135—152.

[28] Parker C., Rowley P. Unique node extremal subgroups in Chevalley groups // Commun. Algebra. — 2003. — Vol. 31, no. 7. — P. 3471—3486.

[29] Parker C., Rowley P. Symplectic Amalgams. — London: Springer, 2002. — (Springer Monographs Math.).

[30] Spitznagel E. I. Terminality of the maximal unipotent groups of Chevalley groups // Math. Z. — 1968. — Vol. 103, no. 2. — P. 112—116.

[31] Spitznagel E. I. Structure and terminality of the maximal unipotent groups of Steinberg groups // J. Math. — 1969. — Vol. 13, no. 2. — P. 400—405.

[32] Suleimanova G. S., Yakoby V. V. The normal structure of the unipotent subgroup of a Chevalley group of type E_6, E_7, E_8 // Журн. СФУ. Мат. и физ. — 2008. — Т. 1, № 2. — С. 152—157.

[33] Weir A. J. Sylow p-subgroups of the general linear group over finite fields of characteristic p // Proc. Amer. Math. Soc. — 1955. — Vol. 6, no. 3. — P. 454—464.

[34] Wong W. J. Abelian unipotent subgroups of finite orthogonal groups // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. — 1982. — Vol. 32, no. 2. — P. 223—245.

[35] Wong W. J. Abelian unipotent subgroups of finite unitary and symplectic groups // J. Aust. Math. Soc. Ser. A. — 1982. — Vol. 33, no. 2. — P. 331—344.