# Классификация матричных подалгебр длины 1

**О. В. МАРКОВА**
*Московский государственный университет*
*им. М. В. Ломоносова*
e-mail: ov_markova@mail.ru

УДК 512.643

**Ключевые слова:** функция длины, матричные алгебры, нильпотентные алгебры.

**Аннотация**

Длиной конечной системы порождающих конечномерной алгебры над произвольным полем называется наименьшее неотрицательное целое число $k$, такое что слова длины, не большей $k$, порождают данную алгебру как векторное пространство. Длиной алгебры называется максимум длин её систем порождающих. В настоящей работе получена классификация матричных подалгебр длины 1 с точностью до сопряжённости. В частности, описаны все возможные и максимальные по включению коммутативные матричные подалгебры длины 1.

**Abstract**

*O. V. Markova, Classification of matrix subalgebras of length* 1, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 169—188.

We define the length of a finite system of generators of a given algebra $\mathcal{A}$ as the smallest number $k$ such that words of length not greater than $k$ generate $\mathcal{A}$ as a vector space, and the length of the algebra is the maximum of the lengths of its systems of generators. In this paper, we obtain a classification of matrix subalgebras of length 1 up to conjugation. In particular, we describe arbitrary commutative matrix subalgebras of length 1, as well as those that are maximal with respect to inclusion.

## 1. Введение

Кольцо $\mathcal{A}$, являющееся также векторным пространством над полем $\mathbb{F}$, называется *алгеброй* над $\mathbb{F}$ или $\mathbb{F}$-*алгеброй*, если для любого $\lambda \in \mathbb{F}$ и любых $a, b \in \mathcal{A}$ выполняются равенства $\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$. Алгебра называется *конечномерной*, если соответствующее векторное пространство имеет конечную размерность над $\mathbb{F}$. Алгебра называется *конечно порождённой*, если в ней существует такое конечное подмножество $\mathcal{S} = \{a_1, \ldots, a_k\}$ (называемое *системой порождающих*), что каждый элемент алгебры является линейной комбинацией конечного числа произведений элементов из $\mathcal{S}$, включая пустое произведение, равное единичному элементу. Легко убедиться, что любая конечномерная алгебра порождается своим базисом, т. е. является конечно порождённой. Понятия теории колец и алгебр, использующиеся в статье, можно найти, например, в [5].

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2011/2012, том 17, № 1, с. 169—188.

Важную роль в изучении конечномерных алгебр играет такой инвариант алгебры, как *длина*. Определим её согласно [16].

Пусть $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ — непустое конечное множество (алфавит). Конечные последовательности букв из $B$ назовём словами. Пусть $B^*$ обозначает множество всех слов в алфавите $B$, $F_B$ — свободную полугруппу над алфавитом $B$, т. е. $B^*$ с операцией конкатенации.

**Определение 1.1.** *Длина* слова $b_{i_1} \ldots b_{i_t}$, где $b_{i_j} \in B$, равна $t$. Будем считать 1 (пустое слово) словом от элементов $B$ *длины* 0.

**Обозначение 1.2.** Пусть $B^i$ обозначает множество всех слов в алфавите $B$ длины, не большей $i$, $i \geqslant 0$. Пусть $B^{=i}$ обозначает множество всех слов в алфавите $B$ длины, равной $i$, $i \geqslant 1$.

**Замечание 1.3.** Произведения элементов из порождающего множества $\mathcal{S}$ можно рассматривать как образы элементов свободной полугруппы $F_{\mathcal{S}}$ при естественном гомоморфизме. Их также можно называть словами от образующих и использовать естественные обозначения $\mathcal{S}^i$ и $\mathcal{S}^{=i}$.

**Обозначение 1.4.** Положим $\mathcal{S}^0 = \{1_{\mathcal{A}}\}$, если алгебра $\mathcal{A}$ содержит единицу $1_{\mathcal{A}}$, иначе положим $\mathcal{S}^0 = \varnothing$.

**Обозначение 1.5.** Положим $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{S}^i \rangle$, где $\langle S \rangle$ обозначает линейную оболочку (множество всех конечных линейных комбинаций с коэффициентами из $\mathbb{F}$) множества $S$. Заметим, что $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = \langle 1_{\mathcal{A}} \rangle = \mathbb{F}$ для алгебр с единицей и $\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) = 0$ иначе. Пусть также $\mathcal{L}(\mathcal{S}) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ обозначает линейную оболочку всех слов в алфавите $\{a_1, \ldots, a_k\}$.

**Замечание 1.6.** Так как $\mathcal{S}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}$, то $\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathcal{S})$. Из определения $\mathcal{S}^i$ для $i, j > 0$ получаем, что

$$\mathcal{S}^{i+j} = \mathcal{S}^i \mathcal{S}^j \cup \mathcal{S}^1,$$
$$\mathcal{L}_{i+j}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_i(\mathcal{S}) \mathcal{L}_j(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle,$$
$$\mathcal{L}_0(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{L}_h(\mathcal{S}) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}.$$

Тогда из конечномерности $\mathcal{A}$ получаем, что найдётся такой номер $h$, что $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$.

**Определение 1.7.** *Длиной системы порождающих* $\mathcal{S}$ называется наименьшее неотрицательное целое число $k$, для которого $\mathcal{L}_k(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{k+1}(\mathcal{S})$. Обозначим длину системы порождающих $\mathcal{S}$ через $\mathrm{l}(\mathcal{S})$.

**Замечание 1.8.** Если для некоторого $h \geqslant 0$ выполнено $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$, то

$$\mathcal{L}_{h+2}(\mathcal{S}) = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \langle \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \mathcal{L}_h(\mathcal{S}) + \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) \rangle = \mathcal{L}_{h+1}(\mathcal{S})$$

и также $\mathcal{L}_i(\mathcal{S}) = \mathcal{L}_h(\mathcal{S})$ для всех $i \geqslant h$. Значит, длина $\mathrm{l}(\mathcal{S})$ определена корректно. Поскольку $\mathcal{S}$ является системой порождающих для $\mathcal{A}$, то верно $\mathcal{L}_h(\mathcal{S}) = \mathcal{L}(\mathcal{S}) = \mathcal{A}$.

**Определение 1.9.** *Длиной алгебры* $\mathcal{A}$ назовём величину $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = \max\limits_{\mathcal{S}} \mathrm{l}(\mathcal{S})$, где максимум берётся по всем системам порождающих этой алгебры.

**Определение 1.10.** Слово $v \in \mathcal{S}^{=j}$ называется *сократимым над* $\mathcal{S}$, если найдётся такой номер $i < j$, что $v \in \mathcal{L}_i(\mathcal{S})$ (т. е. $v$ представляется в виде линейной комбинации слов меньшей длины).

**Определение 1.11.** Слово $v \in \mathcal{S}^j$ называется *несократимым над* $\mathcal{S}$, если оно не является сократимым.

**Обозначение 1.12.** Пусть $a \in \mathcal{A}$ и $\deg a$ обозначает степень минимального многочлена элемента $a$ над полем $\mathbb{F}$. Из конечномерности алгебры $\mathcal{A}$ следует, что для любого $a \in \mathcal{A}$ справедлива оценка $\deg a \leqslant \dim \mathcal{A}$. Тогда положим

$$\begin{gathered}\mathrm{m}(\mathcal{S}) = \max\{\deg w,\ w \in \mathcal{S}\},\\ \mathrm{m}(\mathcal{S}^*) = \max\{\deg w,\ w \in \mathcal{S}^*\},\\ \mathrm{m}(\mathcal{A}) = \max_{\mathcal{S}} \mathrm{m}(\mathcal{S}) = \max_{a \in \mathcal{A}}\{\deg a\}.\end{gathered}$$

**Обозначение 1.13.** Пусть $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ обозначает линейное пространство матриц размера $m \times n$ над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ обозначает алгебру матриц порядка $n$ над полем $\mathbb{F}$, $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$ — алгебру диагональных матриц порядка $n$ над полем $\mathbb{F}$, $E$, $E_n$ — единичную матрицу в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, $O$, $O_n$, $O_{m \times n}$ — нулевые матрицы в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ и $\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{F})$ соответственно, $E_{i,j}$ — $(i,j)$-ю матричную единицу, т. е. матрицу с 1 на $(i,j)$-м месте и 0 на остальных.

Изучение коммутативных матричных подалгебр является классической областью исследований, берущей начало в работе И. Шура [18]. Здесь можно отметить такие направления исследований, как изучение возможных значений размерности максимальных (по включению) коммутативных матричных подалгебр, вопросы построения и классификации. Эти направления активно развиваются в течение последнего столетия, достаточно упомянуть работу Н. Джекобсона [13], монографию Д. А. Супруненко и Р. И. Тышкевич [6], а также работы [9—11, 14, 15, 19].

В [17], например, было установлено, что длина любой коммутативной подалгебры алгебры матриц порядка $n$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ не больше $n-1$, т. е. для коммутативных подалгебр получена линейная относительно порядка матриц верхняя оценка длины. В [12] показано, что эта оценка справедлива в случае произвольного поля и является точной.

Таким образом, можно говорить о коммутативных подалгебрах $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ длины $n-1$ как о коммутативных подалгебрах *максимальной длины*. Кроме того, в [3, 12] охарактеризован класс подалгебр, для которых эта оценка достигается. В частности, установлено, что максимальные по длине коммутативные подалгебры в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ являются также максимальными по включению.

Приложения функции длины возникают, например, в вычислительных методах теории матриц: длина определяет сложность некоторых рациональных процедур (см., например, [1, 7]). Поэтому интерес для исследований представляют также алгебры, длина которых близка к минимальной.

Вообще говоря, минимальное возможное значение функции длины — 0. Это значение достигается в случае, когда алгебра нулевая или совпадает с основным полем. Таким образом, среди алгебр длины, близкой к минимальной, первый нетривиальный объект для изучения — множество алгебр длины 1.

Заметим, что, хотя в общем случае функция длины не монотонна при переходе к подалгебрам (см., например, [4]), на множестве алгебр длины 1 монотонность есть (лемма 2.1).

В работе описаны с точностью до сопряжения подалгебры в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ длины 1 над произвольными полями. Как следствие получено описание коммутативных (в частности, максимальных по включению) матричных подалгебр длины 1.

## 2. Свойства алгебр длины 1

В этом разделе собраны некоторые общие результаты об алгебрах длины 1.

**Лемма 2.1.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$ над $\mathbb{F}$ и $\mathcal{A}'$ — произвольная подалгебра в $\mathcal{A}$. Если $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$, то $\mathrm{l}(\mathcal{A}') \leqslant 1$.*

**Доказательство.** Предположим, что существует подалгебра $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ длины $\mathrm{l}(\mathcal{B}) \geqslant 2$, и приведём это утверждение к противоречию.

Обозначим $n = \dim \mathcal{A}$, $m = \dim \mathcal{B}$ и $k = \mathrm{l}(\mathcal{B})$. Пусть $\mathcal{S}_1$ — система порождающих для алгебры $\mathcal{B}$ длины $\mathrm{l}(\mathcal{S}_1) = k$.

Из условия $k > 1$ получаем, что $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_1) < m$. Пусть $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{S}_1^k$ — базис $\mathcal{B}$. Существуют элементы $B_{m+1}, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$, такие что $B_1, \ldots, B_n$ образуют базис $\mathcal{A}$. Тогда множество $\mathcal{S}_2 = \{B_{m+1}, \ldots, B_n, S \mid S \in \mathcal{S}_1\}$ будет системой порождающих алгебры $\mathcal{A}$. Также получаем, что $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_2) \leqslant \dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}_1) + n - m < m + n - m = n$, т. е. $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \geqslant \mathrm{l}(\mathcal{S}_2) > 1$. Противоречие. $\square$

**Следствие 2.2.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей $1_{\mathcal{A}}$ над $\mathbb{F}$. Если $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$, то для любого элемента $A \in \mathcal{A}$ справедливо $\deg A \leqslant 2$.*

**Доказательство.** Предположим, что существует элемент $A \in \mathcal{A}$, такой что $\deg A = k \geqslant 3$. Пусть $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ — подалгебра, порождённая элементом $A$. По построению $\mathrm{l}(\mathcal{A}') = k - 1 \geqslant 2$. Но $\mathrm{l}(\mathcal{A}') \leqslant 1$ по лемме 2.1. Противоречие. $\square$

**Лемма 2.3.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A}$ с единицей $1_{\mathcal{A}}$ длины $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$, такую что минимальный многочлен любого её элемента $A$ имеет вид $(t - \lambda_A)^{i_A}$, $i_A = 1, 2$, $\lambda_A \in \mathbb{F}$. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна.*

**Доказательство.** Покажем, что $AB = BA$ для любых $A, B \in \mathcal{A}$.

Если $\dim\langle 1_{\mathcal{A}}, A, B\rangle \leqslant 2$, то коммутирование элементов $A$, $B$ очевидно.

Пусть $\dim\langle 1_{\mathcal{A}},\, A,\, B\rangle = 3$. Положим $A_1 = A - \lambda_A 1_{\mathcal{A}}$, $A_2 = B - \lambda_B 1_{\mathcal{A}}$. Для завершения доказательства леммы достаточно проверить, что коммутируют элементы $A_1$ и $A_2$.

Имеем
$$A_1^2 = A_2^2 = 0, \quad \dim\langle 1_{\mathcal{A}},\, A_1,\, A_2\rangle = 3.$$

Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, порождённую элементами $1_{\mathcal{A}}$, $A_1$, $A_2$. Тогда $\dim \mathcal{A}' \geqslant 3$, $\mathcal{A} \ncong \mathbb{F}$, следовательно, применяя лемму 2.1, получаем, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}') = 1$.

Множество $\mathcal{S} = \{1_\mathcal{A}, A_1, A_2\}$ является системой порождающих алгебры $\mathcal{A}'$, и $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = 1$, следовательно, множество $\mathcal{S}$ образует базис алгебры $\mathcal{A}'$. Тогда для $i \neq j \in \{1, 2\}$ получаем

$$A_i A_j = \alpha_{i,i} A_i + \alpha_{i,j} A_j + \gamma_{i,j} 1_\mathcal{A}.$$

Покажем, что $A_i A_j = 0$.

Предположим, что $\gamma_{i,j} \neq 0$. Имеем

$$0 = (A_i^2) A_j = A_i (A_i A_j) = \alpha_{i,i} A_i^2 + \alpha_{i,j} A_i A_j + \gamma_{i,j} A_i = \alpha_{i,j} A_i A_j + \gamma_{i,j} A_i,$$

$$0 = A_i (A_j^2) = (A_i A_j) A_j = \alpha_{i,i} A_i A_j + \alpha_{i,j} A_j^2 + \gamma_{i,j} A_j = \alpha_{i,i} A_i A_j + \gamma_{i,j} A_j.$$

При этом по условию $\gamma_{i,j} A_i \neq 0$ и $\gamma_{i,j} A_j \neq 0$, откуда следует, что $\alpha_{i,i} \neq 0$ и $\alpha_{i,j} \neq 0$. Тогда получаем, что

$$\alpha_{i,i}^{-1} \gamma_{i,j} A_j = A_i A_j = \alpha_{i,j}^{-1} \gamma_{i,j} A_i,$$

противоречие с линейной независимостью $A_i$, $A_j$.

Значит, $\gamma_{i,j} = 0$. Есть три возможности.

1. $\alpha_{i,i} = \alpha_{i,j} = 0$. Тогда $A_i A_j = \alpha_{i,i} A_i + \alpha_{i,j} A_j = 0$.
2. $\alpha_{i,j} \neq 0$. Тогда $0 = (A_i^2) A_j = A_i (A_i A_j) = \alpha_{i,i} A_i^2 + \alpha_{i,j} A_i A_j = \alpha_{i,j} A_i A_j$.
3. $\alpha_{i,i} \neq 0$. Тогда $0 = A_i (A_j^2) = (A_i A_j) A_j = \alpha_{i,i} A_i A_j + \alpha_{i,j} A_j^2 = \alpha_{i,i} A_i A_j$.

Таким образом, $A_1 A_2 = A_2 A_1 = 0$. □

**Лемма 2.4.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A} = \mathbb{F} 1_\mathcal{A} + J(\mathcal{A})$ — локальная $\mathbb{F}$-алгебра длины $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$. Тогда $N = N\big(J(\mathcal{A})\big) = 2$.*

**Доказательство.** Заметим, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}) \neq 0$, следовательно, $\mathcal{A} \ncong \mathbb{F}$ и $J(\mathcal{A}) \neq$ $\neq \{0\}$.

Для доказательства леммы необходимо показать, что $AB = 0$ для всех $A, B \in J(\mathcal{A})$.

Если хотя бы один из сомножителей $A$ или $B$ равен нулю, то $AB = 0$. Пусть $A, B \in J(\mathcal{A})$, $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Предположим, что $A$ и $B$ линейно зависимы. В этом случае $B = \beta A$. Согласно следствию 2.2 если $A \in J(\mathcal{A})$ и $A \neq 0$, то $\deg A = 2$, значит, $A^2 = 0$. Таким образом, $AB = \beta A^2 = 0$.

Предположим, что $A$ и $B$ линейно независимы. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$, порождённую элементами $1_\mathcal{A}$, $A$, $B$. Тогда $\dim \mathcal{A}' \geqslant 3$, $\mathcal{A} \ncong \mathbb{F}$, следовательно, применяя лемму 2.1, получаем, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}') = 1$. Множество $\mathcal{S} = \{1_\mathcal{A}, A, B\}$ является системой порождающих алгебры $\mathcal{A}'$, и $\mathrm{l}(\mathcal{S}) = 1$, следовательно, множество $\mathcal{S}$ образует базис алгебры $\mathcal{A}'$. Тогда $AB = \alpha_1 A + \alpha_2 B + \alpha_3 1_\mathcal{A}$. Элемент $AB$ принадлежит $J(\mathcal{A})$, поэтому $\alpha_3 = 0$.

Есть три возможности.

1. $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Тогда $AB = \alpha_1 A + \alpha_2 B = 0$.
2. $\alpha_2 \neq 0$. Тогда $0 = (A^2) B = A(AB) = \alpha_1 A^2 + \alpha_2 AB = \alpha_2 AB$.
3. $\alpha_1 \neq 0$. Тогда $0 = A(B^2) = (AB)B = \alpha_1 AB + \alpha_2 B^2 = \alpha_1 AB$. □

**Следствие 2.5.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A} = \mathbb{F} 1_\mathcal{A} + J(\mathcal{A})$ — локальная $\mathbb{F}$-алгебра длины $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна.*

## 3. Матричные алгебры длины 1

В данном разделе описаны с точностью до сопряжения подалгебры в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ длины 1 над произвольными полями. Как следствие получено описание коммутативных (в частности, максимальных по включению) матричных подалгебр длины 1.

Заметим, что из леммы 2.4 следует, что радикал локальной подалгебры $\mathcal{A}$ в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ вида $\mathcal{A} = \mathbb{F}E_n + J(\mathcal{A})$ длины $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$ имеет индекс нильпотентности 2. Поэтому при описании данного вида алгебр возможно использовать следующую классификацию коммутативных нильпотентных подалгебр в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 2.

**Теорема 3.1 [6, гл. 2, теорема 7].** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная нильпотентная подалгебра в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ индекса нильпотентности 2. Тогда существуют $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, и $V \subseteq \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F})$ — ненулевое подпространство, такие что $\mathcal{A}$ сопряжена с алгеброй*

$$\mathcal{A}_n(m,V) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} O_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & O_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; Z \in V \right\}.$$

*Во множестве всех максимальных коммутативных нильпотентных подалгебр в $\mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ имеется ровно $n-1$ несопряжённая алгебра индекса нильпотентности 2.*

**Лемма 3.2.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $n > m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим алгебру*

$$\mathcal{DB}_n(m,V) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & yE_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{F},\ Z \in V \right\} \subset \mathrm{M}_n(\mathbb{F}),$$

*где $V \subseteq \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F})$ — произвольное подпространство. Тогда $\mathrm{l}\big(\mathcal{DB}_n(m,V)\big) = 1$.*

**Доказательство.** Возьмём произвольные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_m & Z_1 \\ O_{(n-m)\times m} & \alpha_2 E_{n-m} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \beta_1 E_m & Z_2 \\ O_{(n-m)\times m} & \beta_2 E_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{DB}_n(m,V).$$

Имеем

$$(A - \alpha_1 E)(B - \beta_2 E) = 0.$$

Тогда, раскрывая скобки и перенося все слагаемые, кроме первого, в правую часть, получаем

$$AB = \beta_2 A + \alpha_1 B - \alpha_1 \beta_2 E.$$

Таким образом, в любой системе порождающих алгебры $\mathcal{DB}_n(m,V)$ все слова длины 2 сократимы в смысле определения 1.10. Следовательно, получаем верхнюю оценку $\mathrm{l}\big(\mathcal{DB}_n(m,V)\big) \leqslant 1$.

С другой стороны, алгебра $\mathcal{DB}_n(m,V)$ не изоморфна полю, поэтому $\mathrm{l}\big(\mathcal{DB}_n(m,V)\big) = 1$. □

Перейдём к доказательству основной теоремы.

**Теорема 3.3.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$ и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — подалгебра, содержащая единичную матрицу. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из следующих подалгебр*:

1) $\mathcal{B}_n(m, V) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & xE_{n-m} \end{array} \right) \middle| \; x \in \mathbb{F},\ Z \in V \right\}$, *где* $V \subseteq \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F})$ — *ненулевое подпространство*;

2) $\mathcal{DB}_n(m, V) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & yE_{n-m} \end{array} \right) \middle| \; x, y \in \mathbb{F},\ Z \in V \right\}$, *где* $V \subseteq \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F})$ — *произвольное подпространство*;

3) $$\mathcal{C}_k(\alpha, \beta) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{\alpha,\beta}(a,b) & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & C_{\alpha,\beta}(a,b) & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & C_{\alpha,\beta}(a,b) \end{pmatrix} \middle| \; C_{\alpha,\beta}(a,b) = \begin{pmatrix} a & -\beta b \\ b & a - \alpha b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{F} \right\},$$ *где* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, *многочлен* $x^2 + \alpha x + \beta$ *неприводим над* $\mathbb{F}$, $n = 2k$.

*Алгебры типов* 1)—3) *не сопряжены друг с другом.*

**Доказательство.** Достаточность. Равенство $\mathrm{l}\big(\mathcal{DB}_n(m, V)\big) = 1$ проверено в лемме 3.2.

Алгебра $\mathcal{B}_n(m, V)$ является локальной, $J\big(\mathcal{B}_n(m, V)\big)$ состоит из тех матриц, у которых $x = 0$. Тогда $N\Big(J\big(\mathcal{B}_n(m, V)\big)\Big) = 2$ и $\mathrm{l}\big(\mathcal{B}_n(m, V)\big) \leqslant 1$ согласно [4, теорема 5]. Алгебра $\mathcal{B}_n(m, V)$ не изоморфна полю, поэтому $\mathrm{l}\big(\mathcal{B}_n(m, V)\big) = 1$.

Алгебра $\mathcal{C}_k(\alpha, \beta)$ имеет размерность 2, поэтому $\mathrm{l}\big(\mathcal{C}_k(\alpha, \beta)\big) = 1$.

Необходимость. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — произвольная подалгебра, содержащая единичную матрицу, и $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$. Согласно следствию 2.2 минимальные многочлены элементов алгебры $\mathcal{A}$ могут иметь степени 1 и 2. Пусть $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{A}$ — подмножество элементов степени 2. Поскольку алгебра $\mathcal{A}$ не изоморфна полю, то $\mathcal{S}_2$ непусто. Рассмотрим три случая.

I. Пусть минимальный многочлен любого элемента $B \in \mathcal{S}_2$ приводим над $\mathbb{F}$ и имеет один корень кратности 2.

Заметим, что по лемме 2.3 алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна. Также любая матрица $A \in \mathcal{A}$ имеет одно собственное значение $\lambda(A) \in \mathbb{F}$ кратности $n$. Следовательно, $A = \lambda(A)E + A_0$, где $A_0 \in \mathcal{A}$ — нильпотентная матрица. Таким образом, коммутативная алгебра $\mathcal{A}$ является локальной. Радикал Джекобсона $J(\mathcal{A})$ имеет вид $\{A - \lambda(A)E \mid A \in \mathcal{A}\}$, и $J(\mathcal{A})$ нильпотентен. По лемме 2.4 индекс нильпотентности радикала $N = 2$. Значит, $J(\mathcal{A})$ удовлетворяет условиям теоремы 3.1. Тогда существуют $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, ненулевое подпространство $V \subseteq \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F})$ и невырожденная матрица $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, такие что

$$T^{-1}J(\mathcal{A})T = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} O_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & O_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; Z \in V \right\}.$$

Так как $\mathcal{A} = \mathbb{F}E + J(\mathcal{A})$, то $T^{-1}\mathcal{A}T = \mathbb{F}E + T^{-1}J(\mathcal{A})T = \mathcal{B}_n(m,V)$.

II. Пусть существует матрица $A \in \mathcal{S}_2$, минимальный многочлен которой приводим над $\mathbb{F}$ и имеет два различных корня $\gamma$ и $\delta$. Покажем, что $\mathcal{A}$ сопряжена с алгеброй $\mathcal{DB}_n(m,V)$.

Действительно, у матрицы $A$ ровно два различных собственных значения $\gamma$ и $\delta$ из поля $\mathbb{F}$, причём в жордановой форме матрицы $A$ все клетки имеют размер $1\times 1$. Пусть $\gamma$ как собственное число $A$ имеет кратность $m$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Тогда по теореме о жордановой нормальной форме найдётся такая невырожденная матрица $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, что

$$A_2 = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \gamma E_m & 0 \\ 0 & \delta E_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\mathcal{A}_T = T^{-1}\mathcal{A}T = \{T^{-1}AT \mid A \in \mathcal{A}\}$. Очевидно, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}_T) = \mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$.

Имеем

$$E'_m = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & O_{n-m} \end{pmatrix} = (\gamma-\delta)^{-1}(A_2 - \delta E) \in \mathcal{A}_T$$

и

$$E'_{n-m} = \begin{pmatrix} O_m & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix} = E - E'_m \in \mathcal{A}_T.$$

В случае когда $\dim \mathcal{A}_T = 2$, получаем, что $\mathcal{A}_T = \langle E, E'_m \rangle = \mathcal{DB}_n(m,0)$.

Далее будем предполагать, что $\dim \mathcal{A}_T \geqslant 3$. Рассмотрим произвольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_m & A_1 \\ A_2 & A_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T.$$

Имеем

$$E'_m A E'_m = \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ 0 & O_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T,$$

$$E'_{n-m} A E'_{n-m} = \begin{pmatrix} O_m & 0 \\ 0 & A_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T,$$

$$E'_m A E'_{n-m} = \begin{pmatrix} O_m & A_1 \\ 0 & O_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T,$$

$$E'_{n-m} A E'_m = \begin{pmatrix} O_m & 0 \\ A_2 & O_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T.$$

1. Предположим, что матрица $A_m$ нескалярная, и приведём это утверждение к противоречию. Действительно, если $A_m \neq \alpha_m E_m$, то $\deg E'_m A E'_m \geqslant \deg A_m \geqslant 2$. Но $E'_m A E'_m \in \mathcal{A}_T$, т. е. $\deg E'_m A E'_m \leqslant 2$. Значит, $\deg E'_m A E'_m = \deg A_m = 2$

и 0 является корнем минимального многочлена матрицы $A_m$. Рассмотрим семейство матриц
$$\left\{C(\lambda) = \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ 0 & \lambda E_{n-m} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{F}\right\} \subseteq \mathcal{A}_T.$$

а) Пусть минимальный многочлен матрицы $A_m$ имеет корень $\zeta \neq 0$. Поскольку $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$, то существует $\eta \in \mathbb{F}$, $\eta \neq 0$, $\eta \neq \zeta$. Тогда матрица $C(\eta)$ принадлежит $\mathcal{A}_T$ и имеет три различных собственных значения: 0, $\zeta$, $\eta$, т. е. $\deg\big(C(\eta)\big) \geqslant 3$, противоречие.

б) Если минимальный многочлен матрицы $A_m$ равен $t^2$, то матрица $C(1)$ принадлежит $\mathcal{A}_T$ и её минимальный многочлен равен $t^2(t-1)$, т. е. $\deg\big(C(1)\big) = 3$, противоречие.

Таким образом, $A_m = \alpha_m E_m$ для некоторого $\alpha_m \in \mathbb{F}$.

2. Аналогично $A_{n-m} = \alpha_{n-m} E_{n-m}$.

Матрица
$$\tilde{A} = E'_m A E'_{n-m} + E'_{n-m} A E'_m = \begin{pmatrix} O_m & A_1 \\ A_2 & O_{n-m} \end{pmatrix}$$
принадлежит $\mathcal{A}_T$, значит, матрица
$$\tilde{A}^2 = \begin{pmatrix} A_1 A_2 & 0 \\ 0 & A_2 A_1 \end{pmatrix}$$
принадлежит $\mathcal{A}_T$. Следовательно, по доказанному выше $A_1 A_2 = \alpha_{1,2} E_m$, $A_2 A_1 = \alpha_{2,1} E_{n-m}$.

3. Предположим, что одновременно выполнено $A_1 \neq 0$ и $A_2 \neq 0$, и приведём это утверждение к противоречию. Действительно, рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}_T$,
$$\mathcal{A}' = \left\langle E, E'_m, \begin{pmatrix} O_m & A_1 \\ 0 & O_{n-m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_m & 0 \\ A_2 & O_{n-m} \end{pmatrix} \right\rangle.$$
Из доказанного ранее следует, что матрицы
$$E, \quad E'_m, \quad \begin{pmatrix} O_m & A_1 \\ 0 & O_{n-m} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} O_m & 0 \\ A_2 & O_{n-m} \end{pmatrix}$$
образуют базис алгебры $\mathcal{A}'$. Возьмём подмножество $\mathcal{S} = \{E'_m, \tilde{A}\} \subset \mathcal{A}'$. Тогда $\dim \mathcal{L}_1(\mathcal{S}) = 3 < 4 = \dim \mathcal{A}'$,
$$E'_m \tilde{A} = \begin{pmatrix} O_m & A_1 \\ 0 & O_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^2,$$
$$\mathcal{A}' \supseteq \mathcal{L}_2(\mathcal{S}) \supseteq \langle E, E'_m, \tilde{A}, E'_m \tilde{A} \rangle = \left\langle E, E'_m, \begin{pmatrix} O_m & A_1 \\ 0 & O_{n-m} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O_m & 0 \\ A_2 & O_{n-m} \end{pmatrix} \right\rangle = \mathcal{A}'.$$
Значит, множество $\mathcal{S}$ является системой порождающих алгебры $\mathcal{A}'$ длины 2. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}') \geqslant \mathrm{l}(\mathcal{S}) = 2$, противоречие с леммой 2.1.

Таким образом, мы получили, что для любой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} A_m & A_1 \\ A_2 & A_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T$$

справедливо $A_m = \alpha_m E_m$, $A_{n-m} = \alpha_{n-m} E_{n-m}$, $A_1 = 0$ или $A_2 = 0$.

Предположим, что существуют матрицы $B, C \in \mathcal{A}_T$,

$$B = \begin{pmatrix} \beta_m E_m & B_1 \\ B_2 & \beta_{n-m} E_{n-m} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \gamma_m E_m & C_1 \\ C_2 & \gamma_{n-m} E_{n-m} \end{pmatrix},$$

такие что $B_1 \neq 0$, $B_2 = 0$ и $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$. Тогда

$$D = E'_m B E'_{n-m} + E'_{n-m} C E'_m = \begin{pmatrix} 0 & B_1 \\ C_2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T.$$

Противоречие с доказанным выше.

Следовательно, для любой матрицы $A \in \mathcal{A}_T$ выполнено либо $A_2 = 0$, что означает, что существует ненулевое подпространство $V \subseteq \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F})$, такое что $\mathcal{A}_T = T^{-1}\mathcal{A}T = \mathcal{DB}_n(m, V)$, либо $A_1 = 0$, в этом случае существует ненулевое подпространство $V' \subseteq \mathrm{M}_{(n-m),m}(\mathbb{F})$, такое что

$$\mathcal{A}_T = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & O_{m\times(n-m)} \\ \hline Z' & yE_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{F},\ Z' \in V' \right\}.$$

Обозначим

$$U_k = \sum_{i=1}^{k} E_{i,k-i+1} \in \mathrm{M}_k(\mathbb{F}).$$

Тогда $U_k^{-1} = U_k$,

$$U_n \begin{pmatrix} \alpha_m E_m & 0 \\ A_2 & \alpha_{n-m} E_{n-m} \end{pmatrix} U_n = U_n \begin{pmatrix} O_{m\times(n-m)} & \alpha_m U_m \\ \alpha_{n-m} U_{n-m} & A_2 U_m \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \alpha_{n-m} E_{n-m} & U_{n-m} A_2 U_m \\ O_{m\times(n-m)} & \alpha_m E_m \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$U_n^{-1} \mathcal{A}_T U_n = (TU_n)^{-1} \mathcal{A} (TU_n) = \mathcal{DB}_n(n-m, W),$$

где

$$W = U_{n-m} V' U_m = \{U_{n-m} Z' U_m \mid Z' \in V'\} -$$

подпространство в $\mathrm{M}_{(n-m),m}(\mathbb{F})$.

III. Остаётся случай, когда минимальные многочлены всех матриц из $\mathcal{S}_2$ либо имеют один корень в $\mathbb{F}$ кратности 2, либо неприводимы над $\mathbb{F}$, причём существует матрица $A \in \mathcal{A}$, минимальный многочлен которой неприводим над $\mathbb{F}$.

Пусть $\mu_A(t) = t^2 + \alpha t + \beta$ — минимальный многочлен матрицы $A$. В этом случае из делимости характеристического многочлена матрицы $A$ на минимальный получаем, что $\chi_A(t) = \big(\mu_A(t)\big)^k$, $\deg \chi_A(t) = n = k \deg \mu_A(t) = 2k$. Следовательно, $n = 2k$ — чётное число. Покажем, что в этом случае алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с $\mathcal{C}_k(\alpha,\beta)$.

Матрица $A$ сопряжением над $\mathbb{F}$ приводится к нормальной форме Фробениуса (см., например, [8, теорема 16.15]), т. е. существует невырожденная матрица $S \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$, такая что

$$A_S = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} C_{\alpha,\beta}(0,1) & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & C_{\alpha,\beta}(0,1) & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & C_{\alpha,\beta}(0,1) \end{pmatrix}.$$

Обозначим

$$\mathcal{A}_S = S^{-1}\mathcal{A}S = \{S^{-1}ZS \mid Z \in \mathcal{A}\}.$$

По построению $\mathrm{l}(\mathcal{A}_S) = \mathrm{l}(\mathcal{A})$, $A_S, E \in \mathcal{A}_S$, поэтому также $\mathcal{C}_k(\alpha,\beta) \subseteq \mathcal{A}_S$.

Теперь осталось показать, что любой элемент алгебры $\mathcal{A}_S$ принадлежит алгебре $\mathcal{C}_k(\alpha,\beta)$.

Пусть $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{A}_S$. Рассмотрим подалгебру $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}_S$, порождённую матрицами $E$, $A_S$, $B$. По построению $\mathcal{A}' \ncong \mathbb{F}$, следовательно, по лемме 2.1 $\mathrm{l}(\mathcal{A}') = 1$. Это равенство, в частности, означает, что существуют коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{F}$, такие что

$$A_S B = \gamma_1 A_S + \gamma_2 B + \gamma_3 E. \tag{1}$$

Матричное равенство (1) эквивалентно $k^2$ равенствам для блоков размера $2 \times 2$. Рассмотрим диагональный и внедиагональный случаи.

Пусть $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, k$, $i \neq j$. Положим

$$A_2 = A_2(i) = \begin{pmatrix} (A_S)_{2i-1,2i-1} & (A_S)_{2i-1,2i} \\ (A_S)_{2i,2i-1} & (A_S)_{2i,2i} \end{pmatrix} = C_{\alpha,\beta}(0,1).$$

Отметим, что характеристический многочлен матрицы $A_2$ равен $\mu_A(t)$ и, значит, неприводим над $\mathbb{F}$, поэтому матрица $A_2 - \gamma_2 E_2$ обратима при любом $\gamma_2 \in \mathbb{F}$.

Рассмотрим $i$-ю диагональную подматрицу матрицы $B$:

$$B_2(i) = \begin{pmatrix} b_{2i-1,2i-1} & b_{2i-1,2i} \\ b_{2i,2i-1} & b_{2i,2i} \end{pmatrix}.$$

Для диагональных блоков из равенства (1) получаем, что

$$A_2 B_2(i) = \gamma_1 A_2 + \gamma_2 B_2(i) + \gamma_3 E_2,$$

или

$$(A_2 - \gamma_2 E_2) B_2(i) = \gamma_1 A_2 + \gamma_3 E_2.$$

Из теоремы Гамильтона—Кэли следует, что

$$\begin{aligned}(A_2 - \gamma_2 E_2)^{-1} &= \big(\det(A_2 - \gamma_2 E_2)\big)^{-1}(\mathrm{tr}(A_2 - \gamma_2 E_2)E_2 - A_2 + \gamma_2 E_2) = \\ &= -\big(\mu_A(\gamma_2)\big)^{-1}\big((\gamma_2 + \alpha)E_2 + A_2\big) = C_{\alpha,\beta}(a', b'),\end{aligned}$$

где
$$a' = -\big(\mu_A(\gamma_2)\big)^{-1}(\gamma_2+\alpha), \quad b' = -\big(\mu_A(\gamma_2)\big)^{-1}.$$
Таким образом,
$$B_2(i) = (A_2-\gamma_2E_2)^{-1}(\gamma_1A_2+\gamma_3E_2) = C_{\alpha,\beta}(a',b')C_{\alpha,\beta}(\gamma_3,\gamma_1) = \\ = C_{\alpha,\beta}(a'\gamma_3-\beta b'\gamma_1, b'\gamma_3+a'\gamma_1-\alpha\gamma_1) = C_{\alpha,\beta}(a,b),$$
$$a = -\big(\mu_A(\gamma_2)\big)^{-1}\big((\gamma_2+\alpha)\gamma_3-\beta\gamma_1\big), \quad b = -\big(\mu_A(\gamma_2)\big)^{-1}(\gamma_3+\gamma_2\gamma_1).$$

Рассмотрим $(i,j)$-ю подматрицу матрицы $B$, находящуюся на пересечении строк $2i-1$, $2i$ и столбцов $2j-1$, $2j$:
$$B_2(i,j) = \begin{pmatrix} b_{2i-1,2j-1} & b_{2i-1,2j} \\ b_{2i,2j-1} & b_{2i,2j} \end{pmatrix}.$$
Для внедиагональных блоков из равенства (1) получаем, что
$$A_2B_2(i,j) = \gamma_2B_2(i,j),$$
или
$$(A_2-\gamma_2E_2)B_2(i,j) = O_2.$$
Следовательно,
$$B_2(i,j) = (A_2-\gamma_2E_2)^{-1}O_2 = O_2.$$

Таким образом, матрица $B$ имеет вид
$$B = \begin{pmatrix} C_{\alpha,\beta}(a,b) & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & C_{\alpha,\beta}(a,b) & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & C_{\alpha,\beta}(a,b) \end{pmatrix},$$
где
$$a = -\big(\mu_A(\gamma_2)\big)^{-1}\big((\gamma_2+\alpha)\gamma_3-\beta\gamma_1\big), \quad b = -\big(\mu_A(\gamma_2)\big)^{-1}(\gamma_3+\gamma_2\gamma_1), \\ B = aE_n + bA_S \in \mathcal{C}_k(\alpha,\beta).$$

Минимальный многочлен произвольного элемента алгебры сохраняется при изоморфизме, поэтому алгебры из пунктов I, II, III попарно неизоморфны, а значит, и не являются сопряжёнными. □

**Теорема 3.4.** *Пусть* $n\in\mathbb{N}$, $n\geqslant 2$. *Пусть* $\mathcal{A}\subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F}_2)$ — *подалгебра, содержащая единичную матрицу. Тогда* $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{A}$ *сопряжена с одной из следующих подалгебр*:

1) $\mathcal{B}_n(m,V) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & xE_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; x\in\mathbb{F}_2,\ Z\in V \right\}$, *где* $V \subseteq \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F}_2)$ — *ненулевое подпространство*;

2) $\mathcal{DB}_n(m,V) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & yE_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; x,y \in \mathbb{F}_2,\ Z \in V \right\}$, *где* $V \subseteq \subseteq \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F}_2)$ — *произвольное подпространство*;

3) $\mathcal{D}_{3,n}(m,r) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c|c} xE_m & O_{m\times r} & O_{m\times(n-m-r)} \\ \hline O_{r\times m} & yE_r & O_{r\times(n-m-r)} \\ \hline O_{(n-m-r)\times m} & O_{(n-m-r)\times r} & zE_{n-m-r} \end{array} \right) \;\middle|\; x,y,z \in \in \mathbb{F}_2 \right\}$, *где* $m,r \in \mathbb{N}$, $m+r<n$;

4) $\mathcal{C}_k(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{1,1}(a,b) & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & C_{1,1}(a,b) & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & C_{1,1}(a,b) \end{pmatrix} \;\middle|\; C_{1,1}(a,b) = = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix},\ a,b \in \mathbb{F}_2 \right\}$, *где* $n = 2k$.

*Алгебры типов* 1)—4) *не сопряжены друг с другом.*

**Доказательство.** Достаточность. Равенство

$$\mathrm{l}\big(\mathcal{DB}_n(m,V)\big) = \mathrm{l}\big(\mathcal{B}_n(m,V)\big) = \mathrm{l}\big(\mathcal{C}_k(1,1)\big) = 1$$

проверено в теореме 3.3.

Алгебра $\mathcal{D}_{3,n}(m,r)$ изоморфна алгебре диагональных матриц $\mathrm{D}_3(\mathbb{F}_2)$, поэтому $\mathrm{l}\big(\mathcal{D}_{3,n}(m,r)\big) = \mathrm{l}\big(\mathrm{D}_3(\mathbb{F}_2)\big)$. При этом $\mathrm{l}\big(\mathrm{D}_3(\mathbb{F}_2)\big) = [\log_2 3] = 1$ согласно [2, теорема 6.1].

Необходимость. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — произвольная подалгебра, содержащая единичную матрицу, и $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$. Согласно следствию 2.2 минимальные многочлены элементов алгебры $\mathcal{A}$ могут иметь степени 1 и 2. Пусть $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{A}$ — подмножество элементов степени 2. Поскольку алгебра $\mathcal{A}$ не изоморфна полю, то $\mathcal{S}_2$ непусто. Рассмотрим три случая.

I. Пусть минимальный многочлен любого элемента $B \in \mathcal{S}_2$ приводим над $\mathbb{F}_2$ и имеет один корень кратности 2.

В доказательстве пункта I теоремы 3.3 не использовано ограничение на поле, поэтому и в данном случае получаем, что существуют $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, и ненулевое подпространство $V \subseteq \mathrm{M}_{m,n-m}(\mathbb{F}_2)$, такие что алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с алгеброй $\mathcal{B}_n(m,V)$.

II. Пусть существует матрица $A \in \mathcal{S}_2$, минимальный многочлен которой приводим над $\mathbb{F}_2$ и имеет два различных корня в $\mathbb{F}_2$: 0 и 1. Покажем, что $\mathcal{A}$ сопряжена либо с алгеброй $\mathcal{DB}_n(m,V)$, либо с алгеброй $\mathcal{D}_{3,n}(m,r)$.

Действительно, матрица $A$ имеет ровно два различных собственных значения 0 и 1, причём в жордановой форме матрицы $A$ все клетки имеют размер

$1 \times 1$. Пусть 1 как собственное число $A$ имеет кратность $m$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Тогда по теореме о жордановой нормальной форме найдётся такая невырожденная матрица $T \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}_2)$, что

$$E'_m = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & O_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\mathcal{A}_T = T^{-1}\mathcal{A}T = \{T^{-1}AT \mid A \in \mathcal{A}\}$. Очевидно, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}_T) = \mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$.

Имеем, что $E'_m \in \mathcal{A}_T$ и

$$E'_{n-m} = \begin{pmatrix} O_m & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix} = E - E'_m \in \mathcal{A}_T.$$

В случае когда $\dim \mathcal{A}_T = 2$, получаем, что $\mathcal{A}_T = \langle E, E'_m \rangle = \mathcal{DB}_n(m, 0)$.

Далее будем предполагать, что $\dim \mathcal{A}_T \geqslant 3$. Рассмотрим произвольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_m & A_1 \\ A_2 & A_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T.$$

Имеем

$$E'_m A E'_m = \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ 0 & O_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T,$$
$$E'_{n-m} A E'_{n-m} = \begin{pmatrix} O_m & 0 \\ 0 & A_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T,$$
$$E'_m A E'_{n-m} = \begin{pmatrix} O_m & A_1 \\ 0 & O_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T,$$
$$E'_{n-m} A E'_m = \begin{pmatrix} O_m & 0 \\ A_2 & O_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T.$$

1. Если матрицы $A_m$ и $A_{n-m}$ скалярны для любой матрицы $A \in \mathcal{A}_T$, то, рассуждая, как в пункте II.3 доказательства теоремы 3.3, получим, что существуют $m \in \mathbb{N}$, $m < n$, и ненулевое подпространство $V \subseteq \mathrm{M}_{m,n-m}(\mathbb{F}_2)$, такие что алгебра $\mathcal{A}_T$ сопряжена с алгеброй $\mathcal{DB}_n(m, V)$.

2. Остаётся рассмотреть случай, когда хотя бы одна из матриц $A_m$ и $A_{n-m}$ не является скалярной.

а) Предположим, что матрица $A_m$ нескалярная. Покажем, что в этом случае существуют $r, s \in \mathbb{N}$, $r + s = m$, такие что алгебра $\mathcal{A}_T$ сопряжена с алгеброй $\mathcal{D}_{3,n}(r, s)$. Действительно, если $A_m \neq \alpha_m E_m$, то $\deg E'_m A E'_m \geqslant \deg A_m \geqslant 2$. Но $E'_m A E'_m \in \mathcal{A}_T$, т. е. $\deg E'_m A E'_m \leqslant 2$. Значит, $\deg E'_m A E'_m = \deg A_m = 2$ и 0 является корнем минимального многочлена матрицы $A_m$.

Если бы минимальный многочлен матрицы $A_m$ был равен $t^2$, то

$$C(1) = \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_T,$$

минимальный многочлен этой матрицы равен $t^2(t-1)$, т. е. $\deg\bigl(C(1)\bigr) = 3$, противоречие.

Таким образом, минимальный многочлен матрицы $A_m$ имеет степень 2 и 0 — его корень кратности 1. Значит, 1 также его корень кратности 1, так как других элементов в $\mathbb{F}_2$ нет. Таким образом, минимальный многочлен матрицы $A_m$ равен $t(t-1)$. Тогда по теореме о жордановой нормальной форме найдутся невырожденная матрица $S_m \in \mathrm{M}_m(\mathbb{F}_2)$ и число $r \in \mathbb{N}$, $r < m$, такие что

$$S_m^{-1} A_m S_m = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & O_{m-r} \end{pmatrix}.$$

Возьмём

$$S = \begin{pmatrix} S_m & 0 \\ 0 & E_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{F}_2).$$

Обозначим $\mathcal{A}_S = S^{-1}\mathcal{A}_T S = \{S^{-1}AS \mid A \in \mathcal{A}_T\}$. Очевидно, что $\mathrm{l}(\mathcal{A}_S) = \mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$.

Имеем, что $S^{-1}E'_m S = E'_m \in \mathcal{A}_S$ и $S^{-1}E'_{n-m}S = E'_{n-m} \in \mathcal{A}_S$;

$$A_S = S^{-1}AS = S^{-1}\begin{pmatrix} A_m & A_1 \\ A_2 & A_{n-m} \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} S_m^{-1}A_m S_m & S_m^{-1}A_1 \\ A_2 S_m & A_{n-m} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} S_m^{-1}A_m S_m & \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 & A_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_S;$$
$$E'_r = E'_m A_S E'_m = \begin{pmatrix} E_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_S;$$

$E'_s = E'_m - E'_r \in \mathcal{A}_S$.

Рассмотрим произвольную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} B_r & B_{r\times s} & B_{r\times(n-m)} \\ B_{s\times r} & B_s & B_{s\times(n-m)} \\ B_{(n-m)\times r} & B_{(n-m)\times s} & B_{n-m} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}_S.$$

Покажем, что матрица $B_{n-m}$ скалярная для любой матрицы $B \in \mathcal{A}_S$. Действительно, если это не так, то из соображений симметрии получаем, что минимальный многочлен матрицы $B_{n-m}$, как и минимальный многочлен матрицы $A_m$, равен $t(t-1)$. В этом случае подалгебра алгебры $\mathcal{A}_S$, порождённая матрицами $E$, $E'_m$, $E'_m A_S E'_m$, $E'_{n-m}BE'_{n-m}$, изоморфна алгебре $\mathrm{D}_4(\mathbb{F}_2)$ длины $\mathrm{l}\bigl(\mathrm{D}_4(\mathbb{F}_2)\bigr) = [\log_2 4] = 2$ согласно [2, теорема 6.1]. Противоречие с леммой 2.1.

Покажем, что матрица $B_j$, где $j = r, s$, скалярная для любой матрицы $B \in \mathcal{A}_S$. Действительно, если это не так, то так же, как и для $B_{n-m}$, получаем, что минимальный многочлен матрицы $B_j$ равен $t(t-1)$. В этом случае подалгебра алгебры $\mathcal{A}_S$, порождённая матрицами $E$, $E'_jBE'_j$, $E'_{m-j}$, $E'_{n-m}$, изоморфна алгебре $\mathrm{D}_4(\mathbb{F}_2)$. Противоречие с леммой 2.1.

Покажем, что $B_{j\times(m-j)} = 0$, где $j = r, s$, для любой матрицы $B \in \mathcal{A}_S$. Рассмотрим матрицу $B_1 = E'_jBE'_{m-j} + E'_{n-m} \in \mathcal{A}_S$. Матрица $B_1$ верхнетреугольная при $j=r$ и нижнетреугольная при $j=s$ с 0 и 1 на диагонали, поэтому согласно следствию 2.2 $B_1(B_1-E_n)=0$. С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} O_r & B_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & E_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & B_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & E_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} O_r & B_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ B_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & E_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ B_{s\times r} & E_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} O_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ B_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $B_{r\times(n-m)}=0$, $B_{(n-m)\times r}=0$ для любой матрицы $B\in\mathcal{A}_S$. Рассмотрим матрицы

$$B_2=E'_rBE'_{n-m}+E'_r+E'_{n-m},\ B_3=E'_{n-m}BE'_r+E'_r+E'_{n-m}\in\mathcal{A}_S.$$

Матрица $B_2$ верхнетреугольная, матрица $B_3$ нижнетреугольная с 0 и 1 на диагонали, поэтому согласно следствию 2.2 $B_2(B_2-E_n)=B_3(B_3-E_n)=0$. С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times s} & B_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & E_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_r & O_{r\times s} & B_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & E_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} O_r & O_{r\times s} & B_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ B_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & E_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & E_s & O_{s\times(n-m)} \\ B_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} O_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ B_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что $B_{s\times(n-m)}=0$, $B_{(n-m)\times s}=0$ для любой матрицы $B\in\mathcal{A}_S$. Рассмотрим матрицы

$$B_4=E'_sBE'_{n-m}+E'_r,\ B_5=E'_{n-m}BE'_s+E'_r\in\mathcal{A}_S.$$

Матрица $B_4$ верхнетреугольная, матрица $B_5$ нижнетреугольная с 0 и 1 на диагонали, поэтому согласно следствию 2.2 $B_4(B_4-E_n)=B_5(B_5-E_n)=0$. С другой стороны,

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & B_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & E_s & B_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & E_{n-m} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} O_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & B_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & B_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & E_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & B_{(n-m)\times s} & E_{n-m} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} O_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & O_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & B_{(n-m)\times s} & O_{n-m} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, любая матрица $B \in \mathcal{A}_S$ имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} \beta_1 E_r & O_{r\times s} & O_{r\times(n-m)} \\ O_{s\times r} & \beta_2 E_s & O_{s\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times r} & O_{(n-m)\times s} & \beta_3 E_{n-m} \end{pmatrix}, \quad \beta_i \in \mathbb{F}_2,$$

$E'_r$, $E'_s$, $E'_{n-m} \in \mathcal{A}_S$, значит,

$$\mathcal{A}_S = \mathcal{D}_{3,n}(r,s).$$

б) Предположим, что матрица $A_{n-m}$ нескалярная. Сопряжением алгебры $\mathcal{A}_T$ матрицей

$$S_2 = \sum_{i=1}^{m} E_{i,n-m+i} + \sum_{j=1}^{n-m} E_{j+m,j}$$

поменяем блоки $A_m$ и $A_{n-m}$ местами. Тогда в соответствии с доказанным в пункте II.2 а) существует индекс $t \in \mathbb{N}$, $t < n-m$, такой что алгебра $S_2^{-1}\mathcal{A}_T S_2$ сопряжена с алгеброй $\mathcal{D}_{3,n}(t, n-m-t)$.

III. Остаётся случай, когда минимальные многочлены всех матриц из $\mathcal{S}_2$ либо имеют один корень в $\mathbb{F}$ кратности 2, либо неприводимы над $\mathbb{F}$, причём существует матрица $A \in \mathcal{A}$, минимальный многочлен которой неприводим над $\mathbb{F}$. Пусть $\mu_A(t) = t^2 + \alpha t + \beta$ — минимальный многочлен матрицы $A$.

В доказательстве пункта III теоремы 3.3 не использовано ограничение на поле, поэтому и в данном случае получаем, что алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с $\mathcal{C}_k(\alpha,\beta)$. Но над $\mathbb{F}_2$ существует единственный неприводимый многочлен степени 2: $t^2+t+1$. Поэтому $\alpha=\beta=1$, $\mathcal{A}$ сопряжена с $\mathcal{C}_k(1,1)$.

Минимальный многочлен произвольного элемента алгебры сохраняется при изоморфизме, поэтому алгебры из пунктов I, II.1, III попарно неизоморфны и алгебры из пунктов I, II.2, III попарно неизоморфны, а значит, и не являются сопряжёнными.

Алгебры $\mathcal{DB}_n(m,0)$ и $\mathcal{D}_{3,n}(r,s)$ не являются изоморфными, поскольку их размерности не совпадают.

Алгебры $\mathcal{DB}_n(m,V)$ при $\dim V \geqslant 1$ и $\mathcal{D}_{3,n}(r,s)$ не являются изоморфными. Действительно, алгебра $\mathcal{D}_{3,n}(r,s)$ коммутативна, но при $V \neq 0$ существует элемент $v \in V$, $v \neq 0$, следовательно, алгебра $\mathcal{DB}_n(m,V)$ некоммутативна, так как

$$\begin{pmatrix} O_m & v \\ O_{(n-m)\times m} & O_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_m & O_{m\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times m} & O_{n-m} \end{pmatrix} = O_n \neq \begin{pmatrix} O_m & v \\ O_{(n-m)\times m} & O_{n-m} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} E_m & O_{m\times(n-m)} \\ O_{(n-m)\times m} & O_{n-m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O_m & v \\ O_{(n-m)\times m} & O_{n-m} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Как следствие теорем 3.3 и 3.4 получаем описание коммутативных матричных алгебр длины 1.

**Теорема 3.5.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathbb{F} \neq \mathbb{F}_2$, и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — коммутативная подалгебра, содержащая единичную матрицу. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из следующих подалгебр*:

1) $\mathcal{B}_n(m,V) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & xE_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; x \in \mathbb{F},\ Z \in V \right\}$, *где* $V \subseteq \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F})$ — *ненулевое подпространство*;

2) $\mathcal{D}_n(m) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & O_{m\times(n-m)} \\ \hline O_{(n-m)\times m} & yE_{n-m} \end{array} \right) \;\middle|\; x, y \in \mathbb{F} \right\}$;

3) $\mathcal{C}_k(\alpha,\beta) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{\alpha,\beta}(a,b) & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & C_{\alpha,\beta}(a,b) & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & C_{\alpha,\beta}(a,b) \end{pmatrix} \;\middle|\; C_{\alpha,\beta}(a,b) = \begin{pmatrix} a & -\beta b \\ b & a-\alpha b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{F} \right\}$, *где* $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, *многочлен* $x^2+\alpha x+\beta$ *неприводим над* $\mathbb{F}$, $n = 2k$.

*Алгебры типов* 1)—3) *не сопряжены друг с другом.*

**Доказательство.** По теореме 3.3 алгебра $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из алгебр $\mathcal{B}_n(m,V)$, $\mathcal{DB}_n(m,V)$, $\mathcal{C}_k(\alpha,\beta)$. Алгебры $\mathcal{B}_n(m,V)$ и $\mathcal{C}_k(\alpha,\beta)$ коммутативны. Поэтому остаётся показать, что алгебра $\mathcal{DB}_n(m,V)$ коммутативна тогда и только тогда, когда $V = 0$.

Достаточность. Алгебра $\mathcal{DB}_n(m,0) = \mathcal{D}_n(m)$ содержится в коммутативной алгебре $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$, поэтому также коммутативна.

Необходимость установлена в доказательстве теоремы 3.4. □

**Следствие 3.6.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F}_2)$ — коммутативная подалгебра, содержащая единичную матрицу. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ сопряжена с одной из следующих подалгебр:*

1) $\mathcal{B}_n(m,V) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & xE_{n-m} \end{array} \right) \middle| \ x \in \mathbb{F}_2,\ Z \in V \right\}$, *где* $V \subseteq \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F}_2)$ — *ненулевое подпространство*;

2) $\mathcal{D}_n(m) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & O_{m\times(n-m)} \\ \hline O_{(n-m)\times m} & yE_{n-m} \end{array} \right) \middle| \ x, y \in \mathbb{F}_2 \right\}$;

3) $\mathcal{D}_{3,n}(m,r) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c|c} xE_m & O_{m\times r} & O_{m\times(n-m-r)} \\ \hline O_{r\times m} & yE_r & O_{r\times(n-m-r)} \\ \hline O_{(n-m-r)\times m} & O_{(n-m-r)\times r} & zE_{n-m-r} \end{array} \right) \middle| \ x, y, z \in \mathbb{F}_2 \right\}$, *где* $m, r \in \mathbb{N}$, $m + r < n$;

4) $\mathcal{C}_k(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{1,1}(a,b) & O_2 & \dots & O_2 \\ O_2 & C_{1,1}(a,b) & \dots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O_2 & O_2 & \dots & C_{1,1}(a,b) \end{pmatrix} \middle| \ C_{1,1}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{F}_2 \right\}$, *где* $n = 2k$.

*Алгебры типов* 1)—4) *не сопряжены друг с другом.*

**Следствие 3.7.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \mathrm{M}_n(\mathbb{F})$ — максимальная коммутативная подалгебра, содержащая единичную матрицу. Тогда $\mathrm{l}(\mathcal{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда существует $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant m \leqslant n-1$, такое что $\mathcal{A}$ сопряжена с алгеброй*

$$\mathcal{B}_n(m) = \left\{ \left( \begin{array}{c|c} xE_m & Z \\ \hline O_{(n-m)\times m} & xE_{n-m} \end{array} \right) \middle| \ x \in \mathbb{F},\ Z \in \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F}) \right\}.$$

**Доказательство.** Воспользуемся теоремой 3.5 и следствием 3.6.

Заметим, что алгебры $\mathcal{D}_n(m)$ и $\mathcal{D}_{3,n}(m,r)$ не являются максимальными, так как содержатся в максимальной коммутативной алгебре $\mathrm{D}_n(\mathbb{F})$. Алгебра $C_k(\alpha,\beta)$ не является максимальной, так как её можно пополнить матрицей $E_{1,3} + E_{2,4}$.

Как показано в [6, гл. 2], алгебра $\mathcal{B}_n(m,V)$ максимальна в том и только в том случае, когда $V = \mathrm{M}_{m,(n-m)}(\mathbb{F})$. □

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность А. Э. Гутерману и А. В. Михалёву за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

## Литература


[1] Альпин Ю. А., Икрамов Х. Д. Об унитарном подобии матричных семейств // Мат. заметки. — 2003. — Т. 74, № 6. — С. 815—826.

[2] Маркова О. В. Вычисление длин матричных подалгебр специального вида // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 4. — С. 165—197.

[3] Маркова О. В. Характеризация коммутативных матричных подалгебр максимальной длины над произвольным полем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2009. — № 5. — С. 53—55.

[4] Маркова О. В. О некоторых свойствах функции длины // Мат. заметки. — 2010. — Т. 87, № 1. — С. 83—91.

[5] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[6] Супруненко Д. А., Тышкевич Р. И. Перестановочные матрицы. — М.: УРСС, 2003.

[7] Al'pin Yu. A., Ikramov Kh. D. Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria // Linear Algebra Appl. — 2000. — Vol. 313. — P. 155—161.

[8] Brown W. C. Matrices over Commutative Rings. — New York: Marcel Dekker, 1993.

[9] Brown W. C., Call F. W. Maximal commutative subalgebras of $n \times n$ matrices // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21 (12). — P. 4439—4460.

[10] Courter R. C. The dimension of maximal commutative subalgebras of $K_n$ // Duke Math. J. — 1965. — Vol. 32. — P. 225—232.

[11] Gerstenhaber M. On dominance and varieties of commuting matrices // Ann. Math. — 1961. — Vol. 73, no. 2. — P. 324—348.

[12] Guterman A. E., Markova O. V. Commutative matrix subalgebras and length function // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 430. — P. 1790—1805.

[13] Jacobson N. Schur's theorems on commutative matrices // Bull. Am. Math. Soc. — 1944. — Vol. 50. — P. 431—436.

[14] Laffey T. J. The minimal dimension of maximal commutative subalgebras of full matrix algebras // Linear Algebra Appl. — 1985. — Vol. 71. — P. 199—212.

[15] Laffey T. J., Lazarus S. Two-generated commutative matrix subalgebras // Linear Algebra Appl. — 1991. — Vol. 147. — P. 249—273.

[16] Pappacena C. J. An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra // J. Algebra. — 1997. — Vol. 197. — P. 535—545.

[17] Paz A. An application of the Cayley—Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables // Linear and Multilinear Algebra. — 1984. — Vol. 15. — P. 161—170.

[18] Schur I. Zur Theorie der vertauschbären Matrizen // J. Reine Angew. Math. — 1905. — Bd. 130. — S. 66—76.

[19] Youngkwon Song. A construction of maximal commutative subalgebra of matrix algebras // J. Korean Math. Soc. — 2003. — Vol. 40, no. 2. — P. 241—250.