Алгебраическая и логическая геометрии универсальных алгебр (унифицированный подход)

А. Г. ПИНУС
Новосибирский государственный технический университет
e-mail: ag.pinus@gmail.com

УДК 512.57

Ключевые слова: универсальные алгебры, алгебраическая геометрия, логическая геометрия, конгруэнции свободных алгебр.

Аннотация

В работе на основе понятий условного терма и неявной операции предлагается метод унификации подходов к изучению алгебраических и логически определимых подмножеств универсальных алгебр с помощью конгруэнций свободных алгебр. Приводится обзор результатов автора по данной тематике.

Abstract

A. G. Pinus, The algebraic and logical geometries of universal algebras (*a unified approach*), Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 189—204.

Using the congruences of free algebras as well as the concepts of a conditional term and an implicit operation, a unifying method for studying algebraic and logically definable subsets of universal algebras is suggested. An overview of the results of the author in this field of research is included.

1.

Основные понятия алгебраической геометрии универсальных алгебр введены в работах Б. И. Плоткина 1990-х годов [20, 23, 32—36] и связаны с проблемами классификации универсальных алгебр, в том числе по решёткам их алгебраических множеств (совокупностей решений термальных уравнений). Одновременно с этим в статьях Г. Баумслага, А. Г. Мясникова и В. Н. Ремесленникова [22, 30] подобные проблемы рассматривались с точки зрения классификации групп (а в ряде других работ — и иных классических алгебр, см. [1—5, 24, 28, 29, 37]). В дальнейшем в работах Б. И. Плоткина [21, 38], А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова и Э. Ю. Данияровой [25, 26] рассматривались проблемы классификации универсальных алгебр на основе строения решёток их формульных подмножеств (логическая геометрия алгебр). В этом случае, однако, приходилось

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 1, с. 189—204.

отказываться от основного инструмента исследования решёток алгебраических множеств алгебр — ядер гомоморфизмов свободных алгебр. Б. И. Плоткиным для исследования решёток формульных подмножеств универсальных алгебр был предложен механизм, связанный с гомоморфизмами алгебр Линденбаума в булевы алгебры подмножеств степеней основных множеств классифицируемых алгебр. Работы же В. Н. Ремесленникова с соавторами были основаны на использовании понятий классической теории моделей.

На основе разработанной мною в 1990-х годах теории условных термов мне удалось унифицировать подходы к изучению решёток алгебраических и формульных подмножеств универсальных алгебр, сведя изучение решёток формульных подмножеств к изучению ядер гомоморфизмов свободных алгебр (как это было изначально в алгебраической геометрии универсальных алгебр). Обобщая этот подход, на основе понятия неявной операции над категорией универсальных алгебр удаётся получить результаты, связанные с алгебраической и логической геометриями этих алгебр как частные случаи неявной геометрии универсальных алгебр. Изложению этих подходов, а также ряда результатов, естественным образом возникающих при этом изложении, и посвящена данная статья.

Напомним некоторые основные понятия и результаты алгебраической геометрии универсальных алгебр (см., к примеру, [20, 33, 36]).

2.

Пусть V — некоторое фиксированное многообразие универсальных алгебр сигнатуры σ, $\mathcal{F}_V(X)$ — V-свободная порождённая множеством X алгебра. Для любой алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle \in V$ пусть $V(\mathcal{F}_V(X); \mathfrak{A})$ — совокупность всех гомоморфизмов алгебры $\mathcal{F}_V(X)$ в алгебру $\mathfrak{A}$, рассматриваемая (при естественном отождествлении гомоморфизма $\mu \in V(\mathcal{F}_V(n); \mathfrak{A})$ с кортежем $\bar{a} = \langle \mu(x_1), \ldots, \mu(x_n) \rangle$, в случае когда $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$) как аффинное пространство A^n над A. Гомоморфизмы μ — точки этого пространства $V(\mathcal{F}_V(X); \mathfrak{A}) = A^n$.

Для любой системы равенств

$$T = \{s_i(\bar{x}_i) = t_i(\bar{y}_i) \mid i \in I\},$$

где $\bar{x}_i, \bar{y}_i \subseteq X$, s_i, t_i — термы от соответствующих переменных ($T \subseteq \mathcal{F}_V(X) \times \mathcal{F}_V(X)$), точка $\mu\colon \mathcal{F}_V(X) \to \mathfrak{A}$ есть *решение системы уравнений* T, если

$$\mu\big(s_i(\bar{x}_i)\big) = s_i^{\mathfrak{A}}\big(\mu(\bar{x}_i)\big) = t_i^{\mathfrak{A}}\big(\mu(\bar{x}_i)\big) = \mu\big(t_i(\bar{y}_i)\big)$$

для любых $s_i(\bar{x}_i) = t_i(\bar{y}_i) \in T$, т. е. если $T \subseteq \ker \mu$.

Ставя в соответствие множеству $B \subseteq V(\mathcal{F}_V(X); \mathfrak{A})$ отношение $B' \subseteq \mathcal{F}_V(X) \times \mathcal{F}_V(X)$ и отношению $T \subseteq \mathcal{F}_V(X) \times \mathcal{F}_V(X)$ множество $T' \subseteq V(\mathcal{F}_V(X); \mathfrak{A})$,

$$T \to T'_{\mathfrak{A}} = \{\mu\colon \mathcal{F}_V(X) \to \mathfrak{A} \mid T \subseteq \ker \mu\},$$

$$B \to B' = \bigcap_{\mu \in B} \ker \mu,$$

получаем соответствие Галуа между бинарными отношениями (системами равенств) на алгебре $\mathcal{F}_V(X)$ и множествами точек пространства $V(\mathcal{F}_V(X);\mathfrak{A}) = A^n$.

Конгруэнция T алгебры $\mathcal{F}_V(X)$ называется $\mathfrak{A}$-*замкнутой*, если $T = B'$ для некоторого $B \subseteq V(\mathcal{F}_V(X);\mathfrak{A})$. Множество $B \subseteq V(\mathcal{F}_V(X);\mathfrak{A})$ называется $\mathfrak{A}$-*замкнутым* или *алгебраическим множеством* пространства $V(\mathcal{F}_V(X);\mathfrak{A}) = A^n$, если $B = T'_{\mathfrak{A}}$ для некоторого $T \subseteq \mathcal{F}_V(X) \times \mathcal{F}_V(X)$.

Это соответствие Галуа индуцирует *операции замыкания* $B \to B''_{\mathfrak{A}} = (B')'_{\mathfrak{A}}$ и $T \to T''_{\mathfrak{A}} = (T'_{\mathfrak{A}})'$ на подмножествах пространства $V(\mathcal{F}_V(X);\mathfrak{A}) = A^n$ и на решётке $\operatorname{Con}\mathcal{F}_V(X)$.

Легко заметить, что, в частности, конгруэнция $\theta \in \operatorname{Con}\mathcal{F}_V(X)$ $\mathfrak{A}$-замкнута ($\theta''_{\mathfrak{A}} = \theta$) тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{F}_V(X)/\theta$ аппроксимируется подалгебрами алгебры $\mathfrak{A}$.

3.

V-алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ называются *геометрически эквивалентными* ($\mathfrak{A}_1 \overset{\Delta}{\sim} \mathfrak{A}_2$) тогда и только тогда, когда $T''_{\mathfrak{A}_1} = T''_{\mathfrak{A}_2}$ для любого бинарного отношения T на алгебре $\mathcal{F}_V(n)$ при любом натуральном n.

Определение 1 [11]. V-алгебра $\mathfrak{A}_1$ *геометрически тоньше*, чем V-алгебра $\mathfrak{A}_2$ ($\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta} \mathfrak{A}_2$) тогда и только тогда, когда для любого $n \in \omega$ и для любого $T \subseteq \mathcal{F}_V(n) \times \mathcal{F}_V(n)$ имеет место включение $T''_{\mathfrak{A}_1} \subseteq T''_{\mathfrak{A}_2}$ (или, что эквивалентно, $\operatorname{Con}^{\Delta}_{\mathfrak{A}_2}\mathcal{F}_V(n) \subseteq \operatorname{Con}^{\Delta}_{\mathfrak{A}_1}\mathcal{F}_V(n)$). Здесь $\operatorname{Con}^{\Delta}_{\mathfrak{A}}\mathcal{F}_V(n)$ — семейство всех $\mathfrak{A}$-замкнутых конгруэнций алгебры $\mathcal{F}_V(n)$.

Совокупность $\operatorname{Con}^{\Delta}_{\mathfrak{A}}\mathcal{F}_V(n)$ образует полную решётку относительно теоретико-множественного включения $\subseteq$. Эта решётка двойственна решётке $\operatorname{Alg}_n\mathfrak{A}$ (относительно $\subseteq$) всех алгебраических подмножеств пространства $A^n = V(\mathcal{F}_V(n);\mathfrak{A})$.

Эквивалентность $\overset{\Delta}{\sim}$ — это эквивалентность, порождённая на V квазипорядком $\leqslant^{\Delta}$.

Под ∞-*квазитождеством* будем понимать $L_{\infty,\omega}$-формулу вида

$$\forall\,\bar{x}\Bigl(\mathop{\&}_{i\in I} s_i(\bar{x}) = t_i(\bar{x}) \to s(\bar{x}) = t(\bar{x})\Bigr),$$

где $s_i(\bar{x})$, $t_i(\bar{x})$, $s(\bar{x})$, $t(\bar{x})$ — σ-термы от переменных $\bar{x} = x_1,\ldots,x_n$.

Теорема 1 [11]. *Для любых V-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ отношение $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta} \mathfrak{A}_2$ имеет место тогда и только тогда, когда любое ∞-квазитождество, истинное на алгебре $\mathfrak{A}_1$, истинно и на $\mathfrak{A}_2$.*

Следствие 1 [11]. *Для V-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ отношение $\mathfrak{A}_1 \overset{\Delta}{\sim} \mathfrak{A}_2$ равносильно совпадению их ∞-квазиэквациональных теорий.*

Теорема 2 [11]. *Любое ∞-квазитождество, истинное на $\mathfrak{A}_1$, истинно и на $\mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда любая конечно порождённая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}_2$ изоморфно вложима в некоторую прямую степень алгебры $\mathfrak{A}_1$.*

Следствие 2 [11]. *Для V-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ отношение $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta} \mathfrak{A}_2$ имеет место тогда и только тогда, когда любая конечно порождённая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}_2$ изоморфно вложима в некоторую прямую степень алгебры $\mathfrak{A}_1$.*

4.

Отступление 1. В связи с теоремой 1 представляют интерес классы алгебр, аксиоматизируемые некоторой системой ∞-квазитождеств (∞-*квазимногообразия*).

Пусть $\varinjlim \mathcal{K}$ — совокупность прямых пределов прямых спектров вложимости $\mathcal{K}$-алгебр, а I, S, P — стандартные операторы над классами универсальных алгебр.

Теорема 3 [15]. *Класс $\mathcal{K}$ алгебр сигнатуры σ является ∞-квазимногообразием тогда и только тогда, когда $I\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, $S\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, $P\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$, $\varinjlim \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$.*

Теорема 4 [15]. *Для любого класса $\mathcal{K}$ σ-алгебр $Q_\infty(\mathcal{K}) = \varinjlim ISP(\mathcal{K})$. Здесь $Q_\infty(\mathcal{K})$ — наименьшее ∞-квазимногообразие, включающее в себя класс $\mathcal{K}$.*

5.

Отступление 2. Многообразие V назовём *геометрически полным*, если любые неодноэлементные V-алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ геометрически эквивалентны (т. е. любая конечно порождённая V-алгебра изоморфно вложима в некоторую прямую степень любой неодноэлементной V-алгебры).

Следствие 3 [18]. *Многообразие V геометрически полно тогда и только тогда, когда все его конечно порождённые подпрямо неразложимые V-алгебры изоморфно вложимы друг в друга.*

Геометрически полными являются многообразия булевых алгебр, дистрибутивных решёток, элементарных p-групп (для простых p).

Любое геометрически полное многообразие является минимальным квазимногообразием. Обратное неверно. Однако если многообразие содержит конечную неодноэлементную подалгебру и является минимальным квазимногообразием, то оно геометрически полное.

Алгебру $\mathfrak{A}$ назовём *финитарно слабо эквационально компактной*, если для любого натурального n и любой финитно выполнимой в $\mathfrak{A}$ системы уравнений $\{t'_i(\bar{x}) = t''_i(\bar{x}) \mid i \in \omega\}$ (здесь $\bar{x} = x_1, \ldots, x_n$, t'_i, t''_i — термы сигнатуры σ) эта система выполнима в $\mathfrak{A}$.

Утверждение 1 [18]. *Для геометрически полного многообразия любая его алгебра финитарно эквационально компактна.*

Теорема 5 [18]. *Для многообразия V, включающего в себя некоторую неодноэлементную конечную алгебру, следующие условия эквивалентны*:

1) *V геометрически полно*;
2) *V порождается некоторой конечной алгеброй $\mathfrak{A}$, которая строго проста (проста и не содержит неодноэлементных подалгебр), $\mathfrak{A}$ — единственная подпрямо неразложимая V-алгебра и $\mathfrak{A}$ вложима в любую неодноэлементную подалгебру алгебры $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$.*

Утверждение 2 [18]. *Любое геометрически полное многообразие либо полупросто, либо является многообразием с единицей (т. е. любая V-алгебра содержит одноэлементную подалгебру).*

6.

Теорема 6 (аналог теоремы Левенгейма—Сколема—Тарского [11]). *Для любого многообразия V не более чем счётной сигнатуры, для любой неодноэлементной V-алгебры $\mathfrak{A}$, для любого кардинала $k \geqslant 2^{\aleph_0}$ существует V-алгебра $\mathfrak{A}_k$, такая что $\mathfrak{A} \overset{\Delta}{\sim} \mathfrak{A}_k$ и $|\mathfrak{A}_k| = k$.*

Ограничение $k \geqslant 2^{\aleph_0}$ существенно.

Квазиупорядоченную совокупность $\left\langle V; \leqslant^{\Delta} \right\rangle$ назовём *геометрической квазишкалой многообразия V*, частично упорядоченное множество $\left\langle V/\overset{\Delta}{\sim}; \leqslant^{\Delta} \right\rangle$ — *геометрической шкалой многообразия V*.

Утверждение 3 [11]. *Если V — многообразие с единицей и в V существуют k попарно не вложимых друг в друга подпрямо неразложимых V-алгебр, то в шкале $\left\langle V/\overset{\Delta}{\sim}; \leqslant^{\Delta} \right\rangle$ существуют 2^k несравнимых элементов.*

Следствие 4 [11]. *Для любого многообразия V с единицей шкала $\left\langle V/\overset{\Delta}{\sim}; \leqslant^{\Delta} \right\rangle$ изоморфна частично упорядоченному множеству $\langle P(IV_{\mathrm{fgsi}})/{\sim}; \leqslant^{\mathrm{e}}_m \rangle$. Здесь $\sim$ — эквивалентность, порождённая квазипорядком $\leqslant^{\mathrm{e}}_m$, IV_{fgsi} — совокупность типов изоморфизма конечно порождённых подпрямо неразложимых V-алгебр, $\leqslant^{\mathrm{e}}$ — отношение вложимости на IV_{fgsi}, а отношение $\leqslant_m$ определяется на множестве $P(A)$ всех подмножеств квазиупорядоченного множества $\langle A; \leqslant \rangle$ следующим образом: для $B, C \subseteq A$ $B \leqslant_m C$ тогда и только тогда, когда для любого $b \in B$ существует $c \in C$, такой что $b \leqslant c$.*

Следствие 5 [11]. *Шкала $\left\langle V/\overset{\Delta}{\sim}; \leqslant^{\Delta} \right\rangle$ линейна тогда и только тогда, когда линейно упорядоченным является множество $\langle IV_{\mathrm{fgsi}}; \leqslant^{\mathrm{e}} \rangle$. При этом порядковый тип $\left\langle V/\overset{\Delta}{\sim}; \leqslant^{\Delta} \right\rangle$ равен $1 + \alpha^{\mathrm{d}} + 1$, где α^{d} — порядковый тип дедекиндова пополнения порядкового типа множества $\langle IV_{\mathrm{fgsi}}; \leqslant^{\mathrm{e}} \rangle$.*

Замечание. Геометрические шкалы Морита-эквивалентных многообразий изоморфны. Обратное неверно (например, можно рассмотреть многообразия булевых алгебр и дистрибутивных решёток).

7.

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с геометрией формульных подмножеств универсальных алгебр (с логической геометрией алгебр).

Предварительно напомним основные понятия теории условных термов.

Условием сигнатуры σ называется конечная система равенств и неравенств вида

$$\tau(\bar{x}) = \begin{cases} t_1^1(\bar{x}) =^{i_1} t_1^2(\bar{x}), \\ \dots \\ t_n^1(\bar{x}) =^{i_n} t_n^2(\bar{x}), \end{cases}$$

где $t_j^i(\bar{x})$ — некоторые термы сигнатуры σ, $i_j \in \{0,1\}$ и $=^1$ есть обычное равенство, а $=^0$ — его отрицание.

Конечное множество условий $\{\tau_1(\bar{x}), \dots, \tau_k(\bar{x})\}$ является *полной системой условий*, если формула $\bigvee\limits_{i=1}^{k} \tau_i(\bar{x})$ тождественно истинна на любой алгебре, в то время как при $p \neq q \leqslant k$ формулы $\tau_p(\bar{x}) \,\&\, \tau_q(\bar{x})$ невыполнимы.

Понятие *условного терма* определяется индукцией по сложности этого терма:

а) любая переменная и константа сигнатуры σ есть условный терм;
б) если $t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x})$ — совокупность условных термов и $f(x_1, \dots, x_n) \in \sigma$, то $f\big(t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x})\big)$ также условный терм;
в) если $t_1(\bar{x}), \dots, t_n(\bar{x})$ — условные термы и $\{\tau_1(\bar{x}), \dots, \tau_n(\bar{x})\}$ — полная система условий, то

$$t(\bar{x}) = \begin{cases} \tau_1(\bar{x}) \to t_1(\bar{x}), \\ \dots \\ \tau_n(\bar{x}) \to t_n(\bar{x}) \end{cases}$$

также условный терм.

Для любого условного терма $t(\bar{x})$ на любой алгебре $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ естественным образом определяется соответствующая *условно термальная функция*. В случае когда условный терм $t(\bar{x})$ строится по правилу в), для любых элементов $\bar{a}, b \in \mathfrak{A}$ $t(\bar{a}) = b$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A} \models \tau_i(\bar{a})$ и $t_i(\bar{a}) = b$ для некоторого $i \leqslant n$.

Условно термальные функции на алгебре $\mathfrak{A}$ являются в определённом смысле кусочно термальными.

Если $\mathfrak{A}$ конечна или равномерно локально конечна, то функция f на $\mathfrak{A}$ условно термальна тогда и только тогда, когда она коммутирует со всеми внутренними изоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$.

Более подробную информацию об условно термальных функциях можно найти в [7, 8].

Через $\mathrm{CT}(\sigma)$ обозначим совокупность всех условно термальных функций сигнатуры σ от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Пусть

$$\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n) = \mathcal{F}_V\big(\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \mathrm{CT}_n(\sigma)\big).$$

Для любых $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle \in V$ и $\bar{a} = a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$ пусть $\mu_{\bar{a}}$ — гомоморфизм алгебры $\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$ в $\mathfrak{A}$, такой что $\mu_{\bar{a}}(x_i) = a_i$, $\mu_{\bar{a}}\big(t(x_1, \ldots, x_n)\big) = t(\bar{a})$ для $t \in \mathrm{CT}_n(\sigma)$. Мы будем отождествлять кортеж $\bar{a} \in A^n$ с гомоморфизмом $\mu_{\bar{a}}$. Тем самым (как и выше для случая алгебраической геометрии) мы получаем *соответствие Галуа* между подмножествами пространства A^n и бинарными отношениями на алгебре $\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$: для $B \subseteq A^n$ пусть $B'_{\mathrm{c}} \in \mathrm{Con}\,\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$, здесь $B'_{\mathrm{c}} = \bigcap\limits_{\bar{a}\in B} \ker \mu_{\bar{a}}$; для $T \subseteq \mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n) \times \mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$ пусть

$$T'_{\mathfrak{A},\mathrm{c}} = \{\bar{a} \in A^n \mid T \subseteq \ker \mu_{\bar{a}}\}.$$

Так мы получаем операции замыкания на решётке $\mathrm{Con}\,\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$

$$\theta \to (\theta'_{\mathfrak{A},\mathrm{c}})'_{\mathrm{c}} = \theta''_{\mathfrak{A},\mathrm{c}}$$

и на подмножествах пространства A^n

$$B \to (B'_{\mathrm{c}})'_{\mathfrak{A},\mathrm{c}} = B''_{\mathfrak{A},\mathrm{c}}.$$

Подмножество $B \subseteq A^n$ назовём *условно алгебраическим*, если $B = B''_{\mathfrak{A},\mathrm{c}}$. Любое алгебраическое множество является, в частности, условно алгебраическим. Совокупность всех условно алгебраических подмножеств пространства A^n мы обозначим как $\mathrm{C\,Alg}_n\,\mathfrak{A}$, при этом $\langle \mathrm{C\,Alg}_n\,\mathfrak{A}; \subseteq\rangle$ — полная решётка.

Конгруэнцию $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$ назовём $\mathfrak{A}$-c-*замкнутой*, если $\theta = \theta''_{\mathfrak{A},\mathrm{c}}$. Пусть $\mathrm{Con}^{\Delta,\mathrm{c}}_V\,\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$ — решётка всех $\mathfrak{A}$-c-замкнутых конгруэнций алгебры $\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$. Решётка $\mathrm{Con}^{\Delta,\mathrm{c}}_V\,\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$ двойственна решётке $\mathrm{C\,Alg}_n\,\mathfrak{A}$.

Формальное равенство двух условных термов назовём *условным уравнением*.

Совокупность решений любого условного уравнения определяется некоторой бескванторной формулой логики первого порядка, и обратно, любое множество элементов алгебры $\mathfrak{A}$, определимое бескванторной формулой $\Phi(\bar{x})$, истинной на всех идемпотентах алгебры $\mathfrak{A}$ (это значит, что она истинна на всех кортежах вида $\langle a, \ldots, a\rangle$, где a — любой идемпотент алгебры $\mathfrak{A}$), является множеством решений некоторого условного уравнения.

Определение 2 [14]. Для V-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ *условная геометрия алгебры* $\mathfrak{A}_1$ *тоньше, чем условная алгебраическая геометрия алгебры* $\mathfrak{A}_2$ ($\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}} \mathfrak{A}_2$), если для любой $\theta \in \mathrm{Con}\,\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$ имеет место неравенство $\theta''_{\mathfrak{A}_1,\mathrm{c}} \leqslant \theta''_{\mathfrak{A}_2,\mathrm{c}}$ или, что эквивалентно, $\mathrm{Con}^{\Delta,\mathrm{c}}_{\mathfrak{A}_2}\,\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n) \subseteq \mathrm{Con}^{\Delta,\mathrm{c}}_{\mathfrak{A}_1}\,\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$.

Пусть $\overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim}$ — эквивалентность, порождённая квазипорядком $\leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}$.

Лемма 1 [14]. *Для любой $\mathfrak{A} \in V$ $\mathfrak{A}$-c-замкнутые конгруэнции на $\mathcal{F}^{\mathrm{c}}_V(n)$ определимы своими ограничениями на множество $\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \mathrm{CT}_n(\sigma)$.*

Условное ∞-*квазитождество* — это формула вида
$$\forall\,\bar{x}\ \left(\mathop{\&}_{i=1}^{\infty} t'_i(\bar{x}) = t''_i(\bar{x}) \to q(\bar{x}) = p(\bar{x})\right),$$
где t'_i, t''_i, p, q — условные термы.

Лемма 2 [14]. *Для любого многообразия V и любых V-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}} \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда любое условное ∞-квазитождество, истинное на $\mathfrak{A}_1$, истинно и на $\mathfrak{A}_2$.*

Теорема 7 [14]. *Для любых V-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}} \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда любая неодноэлементная конечно порождённая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}_2$ вложима в алгебру $\mathfrak{A}_1$.*

Замечание. $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}} \mathfrak{A}_2$ $\big(\mathfrak{A}_1 \overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim} \mathfrak{A}_2\big) \to \mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta} \mathfrak{A}_2$ $\big(\mathfrak{A}_1 \overset{\Delta}{\sim} \mathfrak{A}_2\big)$.

Следствие 6 [14]. *Для любой V-алгебры $\mathfrak{A}$ конечной или счётной сигнатуры и для любого кардинала k, такого что $2^{\aleph_0} \leqslant k \leqslant |\mathfrak{A}|$, существует алгебра $\mathfrak{A}_k$ из V, такая что $|\mathfrak{A}_k| = k$ и $\mathfrak{A}_k \overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim} \mathfrak{A}$.*

В общем случае невозможно повышать мощность алгебры, сохраняя отношение $\overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim}$.

Следствие 7 [14]. *Для любой бесконечной алгебры $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры из некоторого локально конечного многообразия V и для любого кардинала $k \geqslant 2^{\aleph_0}$ существует V-алгебра $\mathfrak{A}_k$, такая что $|\mathfrak{A}_k| = k$ и $\mathfrak{A}_k \overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim} \mathfrak{A}$.*

Квазипорядок $\big\langle V; \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}\big\rangle$ назовём *условно геометрической квазишкалой* многообразия V, а частичный порядок $\Big\langle V/\overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim}; \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}\Big\rangle$ — *условно геометрической шкалой* многообразия V.

Подмножество B квазипорядка $\langle A; \leqslant\rangle$ называется *идеалом* в $\langle A; \leqslant\rangle$, если

1) для любых $a \in A$, $b \in B$ из $a \leqslant b$ вытекает включение $a \in B$;

2) для любых $a, b \in B$ существует $c \in B$, такой что $a, b \leqslant c$.

Пусть $\langle IA; \subseteq\rangle$ — семейство всех идеалов квазипорядка $\langle A; \leqslant\rangle$, частично упорядоченное отношением $\subseteq$.

Для любого класса алгебр $\mathcal{K}$ пусть $J\mathcal{K}$ — класс всех типов изоморфизма $\mathcal{K}$-алгебр и $\leqslant_{\mathrm{e}}$ — отношение вложимости на $J\mathcal{K}$.

Теорема 8 [14]. *Для любого многообразия V условно геометрическая шкала $\Big\langle V/\overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim}; \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}\Big\rangle$ двойственна порядку $1 + \langle IJV_{\mathrm{fg}}; \subseteq\rangle$, здесь V_{fg} — совокупность всех конечно порождённых V-алгебр.*

8.

Отступление 3 (примеры). На основе теоремы 8 и некоторых моих результатах о скелетах вложимости дискриминаторных многообразий (см. [6, 31]) мы получаем следующие утверждения.

Теорема 9 [16]. *Для любого дискриминаторного многообразия V конечной сигнатуры, не являющегося локально конечным*

1) *любое счётное частично упорядоченное множество изоморфно вложимо в шкалу* $\left\langle V/\overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim}; \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}\right\rangle$;
2) *в* $\left\langle V/\overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim}; \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}\right\rangle$ *существуют* $2^{\aleph_0}$ *попарно несравнимых элементов.*

Теорема 10 [16]. *Для любого конечно порождённого дискриминаторного многообразия V конечной или счётной сигнатуры шкала* $\left\langle V/\overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim}; \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}\right\rangle$ *не содержит бесконечных множеств попарно несравнимых элементов и не содержит бесконечных возрастающих цепей.*

Теорема 11 [16]. *Для нетривиального полупростого (либо локально конечного) конгруэнц-дистрибутивного многообразия V его шкала* $\left\langle V/\overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim}; \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}\right\rangle$ *линейна тогда и только тогда, когда V порождено некоторой квазипримальной алгеброй $\mathfrak{A}$ без нетривиальных неодноэлементных подалгебр, для которой её одноэлементные подалгебры сопряжены автоморфизмами. В этом случае* $\left\langle V/\overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim}; \leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}\right\rangle \cong \omega^*$.

9.

Определение 3. *Элементарное условие* сигнатуры σ — это любая элементарная формула этой сигнатуры. На этой основе определяются понятия *полной системы элементарных условий*, *элементарно-условного терма*, *элементарно-условно термальной функции* по аналогии с определением полной системы условий, условного терма, условно термальной функции, определённых выше на основе понятия условия (см. [7, 8]).

Пусть $\mathrm{ECT}_n(\sigma)$ — совокупность всех элементарных условных термов (е-условных термов) от переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть $\mathcal{F}_V^{\mathrm{ec}}(n) = \mathcal{F}_V\big(\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \mathrm{ECT}_n(\sigma)\big)$.

По аналогии с понятием условно алгебраического множества для алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$-условно замкнутой конгруэнции определяется (см. [14]) понятие е-*условно алгебраического множества* в пространстве A^n и понятие $\mathfrak{A}$-е-с-*замкнутой конгруэнции* на алгебре $\mathcal{F}_V^{\mathrm{ec}}(n)$.

Тем самым мы получаем двойственные решётки: $\mathrm{EC\,Alg}_n\,\mathfrak{A}$ — е-условно алгебраических множеств пространства A^n и $\mathrm{Con}_V^{\Delta,\mathrm{ec}}\,\mathcal{F}_V^{\mathrm{ec}}(n)$ — $\mathfrak{A}$-е-с-замкнутых конгруэнций алгебры $\mathcal{F}_V^{\mathrm{ec}}(n)$.

Лемма 3 [14]. *Все е-условно алгебраические множества пространства A^n для V-алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ определимы в $\mathfrak{A}$ некоторой (конечной либо бесконечной) совокупностью элементарных формул, истинных на идемпотентных элементах алгебры $\mathfrak{A}$. Верно и обратное.*

По аналогии с отношениями $\leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}$ ($\overset{\Delta,\mathrm{c}}{\sim}$) определяются отношения $\leqslant^{\Delta,\mathrm{ec}}$ ($\overset{\Delta,\mathrm{ec}}{\sim}$) на многообразии V.

e-*условное* ∞-*квазитождество* — это формула вида

$$\forall\, \bar{x}\ \left(\mathop{\&}_{i\in I} t_i'(\bar{x}) = t_i''(\bar{x}) \to q(\bar{x}) = p(\bar{x})\right),$$

где t_i', t_i'', q, p — e-условные термы.

Лемма 4 [14]. *Для любых V-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,\mathrm{ec}} \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда любое* e-*условное ∞-квазитождество, истинное на алгебре $\mathfrak{A}_1$, истинно и на алгебре $\mathfrak{A}_2$.*

Теорема 12 [14]. *Для любых V-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,\mathrm{ec}} \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_2$ одноэлементна или для любого кортежа элементов $\bar{a}_2$ из $\mathfrak{A}_2$ в $\mathfrak{A}_1$ существует кортеж $\bar{a}_1$, имеющий в $\mathfrak{A}_1$ тот же элементарный тип, что и $\bar{a}_2$ в $\mathfrak{A}_2$.*

Следствие 8 [14]. *Для любой универсальной алгебры $\mathfrak{A}$ конечной или счётной сигнатуры существует некоторая алгебра $\mathfrak{A}'$, $\overset{\Delta,\mathrm{ec}}{\sim}$-эквивалентная алгебре $\mathfrak{A}$ и такая, что $|\mathfrak{A}'| \leqslant 2^{\aleph_0}$.*

Квазипорядок $\langle V; \leqslant^{\Delta,\mathrm{ec}}\rangle$ назовём e-*условно геометрической квазишкалой* многообразия V, а частичный порядок $\left\langle V/\overset{\Delta,\mathrm{ec}}{\sim}; \leqslant^{\Delta,\mathrm{ec}}\right\rangle$ — e-*условно геометрической шкалой* V.

10.

Явный параллелизм изучения решёток $\operatorname{Alg}_n \mathfrak{A}$, $\mathrm{C}\operatorname{Alg}_n \mathfrak{A}$, $\mathrm{EC}\operatorname{Alg}_n \mathfrak{A}$ и двойственных им решёток $\operatorname{Con}^{\Delta} \mathfrak{A}$, $\operatorname{Con}^{\Delta,\mathrm{c}} \mathfrak{A}$, $\operatorname{Con}^{\Delta,\mathrm{ec}} \mathfrak{A}$ конгруэнций свободных алгебр подсказывает возможность рассмотрения их как частных случаев более общей ситуации.

Мы предложим подобное рассмотрение на основе понятия неявной операции на категориях универсальных алгебр.

11.

Понятие *неявной операции* было введено в работе [27] С. Эйленберга и М. П. Шутценберже о псевдомногообразиях полугрупп. В [12] это понятие обобщается на любые категории универсальных алгебр. Пусть $\mathcal{K}$ — некоторый класс универсальных алгебр фиксированной сигнатуры σ и $\bar{\mathcal{K}}$ — категория, объекты которой — $\mathcal{K}$-алгебры, а морфизмы — гомоморфизмы одних $\mathcal{K}$-алгебр в другие (все или часть). Напомним определение n-арной неявной операции f на категории $\bar{\mathcal{K}}$: это семейство n-арных функций $f_{\mathfrak{A}}$ на основных множествах $\mathcal{K}$-алгебр $\mathfrak{A}$, которые коммутируют с $\bar{\mathcal{K}}$-морфизмами. Для любых $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathcal{K}$, для любого $\varphi \in \operatorname{Mor}(\bar{\mathcal{K}})$, $\varphi\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$, для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$

$$\varphi\bigl(f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n)\bigr) = f_{\mathfrak{B}}\bigl(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)\bigr),$$

и для любой $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ и для любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{A}$

$$f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_n) \in \langle \{a_1, \ldots, a_n\} \rangle_{\mathfrak{A}}.$$

Здесь $\langle B \rangle_{\mathfrak{A}}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{A}$, порождённая множеством $B \subseteq \mathfrak{A}$.

Через $\mathrm{IF}_n(\bar{\mathcal{K}})$ обозначим совокупность всех n-арных неявных операций на категории $\bar{\mathcal{K}}$. Очевидно, что все термальные операции являются неявными операциями для любой категории $\bar{\mathcal{K}}$.

Если $\mathcal{K}$ — некоторое многообразие, а $\mathrm{Mor}(\bar{\mathcal{K}})$ — совокупность всех гомоморфизмов $\mathcal{K}$-алгебр в $\mathcal{K}$-алгебры, то $\bar{\mathcal{K}}$-неявные операции — это термальные операции.

Если $\mathcal{K}$ — некоторый универсальный класс алгебр и $\mathrm{Mor}(\bar{\mathcal{K}})$ — совокупность всех изоморфных вложений $\mathcal{K}$-алгебр в $\mathcal{K}$-алгебры, то $\bar{\mathcal{K}}$-неявные операции описываются бесконечными аналогами условных термов (см. [9]).

Если $\mathcal{K}$ — некоторое *псевдомногообразие* (некоторый класс конечных алгебр, замкнутый относительно подалгебр, гомоморфных образов и конечных прямых произведений), а $\mathrm{Mor}(\bar{\mathcal{K}})$ — совокупность всех гомоморфизмов $\mathcal{K}$-алгебр в $\mathcal{K}$-алгебры, то $\bar{\mathcal{K}}$-неявные операции описываются бесконечными аналогами позитивно условных термов на $\mathcal{K}$ (см. [10]).

Если $\mathcal{K}$ — некоторый *псевдоуниверсальный класс* (некоторый класс конечных алгебр, замкнутый относительно подалгебр и изоморфизмов), а $\mathrm{Mor}(\bar{\mathcal{K}})$ — совокупность всех изоморфных вложений $\mathcal{K}$-алгебр в $\mathcal{K}$-алгебры, то $\bar{\mathcal{K}}$-неявные операции описываются бесконечными аналогами условных термов на $\mathcal{K}$ (см. [9]).

12.

Пусть $V = V(\mathcal{K})$ — многообразие, порождённое классом $\mathcal{K}$, и $\mathcal{F}_V(Y)$ — V-свободная Y-порождённая алгебра. Через $\mathcal{F}_V^{\bar{\mathcal{K}}}(n)$ (для $n \in \omega$) обозначим алгебру $\mathcal{F}_V\big(\{x_1, \ldots, x_n\} \cup \mathrm{IF}_n(\bar{\mathcal{K}})\big)$. Для любой $\mathcal{K}$-алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ кортеж $\bar{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ элементов из $\mathfrak{A}$ естественным образом отождествляем с гомоморфизмом $\varphi_{\bar{a}}$ алгебры $\mathcal{F}_V^{\bar{\mathcal{K}}}(n)$ в алгебру $\mathfrak{A}$:

$$\varphi_{\bar{a}}(x_i) = a_i, \quad \varphi_{\bar{a}}(f) = f_{\mathfrak{A}}\big(\varphi_{\bar{a}}(x_1), \ldots, \varphi_{\bar{a}}(x_n)\big) \ \text{ для } \ f \in \mathrm{IF}_n(\bar{\mathcal{K}}).$$

Следуя стандартным подходам алгебраической геометрии универсальных алгебр, строим соответствие Галуа между подмножествами пространства A^n и семейством бинарных отношений на алгебре $\mathcal{F}_V^{\bar{\mathcal{K}}}(n)$: для $B \subseteq A^n \longrightarrow B'_{\bar{\mathcal{K}}} \in \mathrm{Con}\, \mathcal{F}_V^{\bar{\mathcal{K}}}(n)$ и $B'_{\mathcal{K}} = \bigcap\limits_{\bar{a} \in B} \ker \varphi_{\bar{a}}$; для $T \subseteq \mathcal{F}_V^{\bar{\mathcal{K}}}(n) \times \mathcal{F}_V^{\bar{\mathcal{K}}}(n) \longrightarrow T'_{\mathfrak{A}, \bar{\mathcal{K}}} \subseteq A^n$ и $T'_{\mathfrak{A}, \bar{\mathcal{K}}} = \{\bar{a} \in A^n \mid T \subseteq \ker \varphi_{\bar{a}}\}$.

Отображения $\theta \to (\theta'_{\mathfrak{A}, \bar{\mathcal{K}}})'_{\bar{\mathcal{K}}} = \theta''_{\mathfrak{A}, \bar{\mathcal{K}}}$ и $B \to (B'_{\bar{\mathcal{K}}})'_{\mathfrak{A}, \bar{\mathcal{K}}} = B''_{\mathfrak{A}, \bar{\mathcal{K}}}$ определяют операции замыкания на решётке $\mathrm{Con}\, \mathcal{F}_V^{\bar{\mathcal{K}}}(n)$ и на совокупности подмножеств пространства A^n. Подмножество $B \subseteq A^n$ назовём *$\bar{\mathcal{K}}$-неявно алгебраическим множеством* для алгебры $\mathfrak{A}$, если $B = B''_{\mathfrak{A}, \bar{\mathcal{K}}}$. Если $\mathcal{K}$ — некоторое многообразие и $\mathrm{Mor}(\bar{\mathcal{K}})$ — все гомоморфизмы $\mathcal{K}$-алгебр в $\mathcal{K}$-алгебры, то все алгебраические множества пространства A^n являются $\bar{\mathcal{K}}$-неявно алгебраическими множествами, верно и обратное. Пусть $\bar{\mathcal{K}}\operatorname{Alg}_n\mathfrak{A}$ — совокупность (полная решётка) всех $\bar{\mathcal{K}}$-неявных алгебраических подмножеств пространства A^n.

Пусть $\operatorname{Con}^{\bar{\mathcal{K}}}_{\mathfrak{A}}\mathcal{F}^{\bar{\mathcal{K}}}_V(n)$ — совокупность (полная решётка, не являющаяся подрешёткой решётки $\operatorname{Con}\mathcal{F}^{\bar{\mathcal{K}}}_V(n)$) всех $\mathfrak{A}$-$\bar{\mathcal{K}}$-замкнутых конгруэнций (конгруэнций, замкнутых относительно операции $\theta\to\theta''_{\mathfrak{A},\bar{\mathcal{K}}}$) алгебры $\mathcal{F}^{\bar{\mathcal{K}}}_V(n)$.

Решётки $\bar{\mathcal{K}}\operatorname{Alg}_n\mathfrak{A}$ и $\operatorname{Con}^{\bar{\mathcal{K}}}_{\mathfrak{A}}\mathcal{F}^{\bar{\mathcal{K}}}_V(n)$ двойственны.

Под $\bar{\mathcal{K}}$-неявным уравнением будем понимать формальное равенство двух $\bar{\mathcal{K}}$-неявных операций. Множество решений подобного $\bar{\mathcal{K}}$-неявного уравнения $f=g$ в $\mathcal{K}$-алгебре $\mathfrak{A}$ — это, естественно,

$$\{\bar{a}\in A^n \mid f_{\mathfrak{A}}(\bar{a})=g_{\mathfrak{A}}(\bar{a})\}.$$

Как правило, множество решений подобного $\bar{\mathcal{K}}$-неявного уравнения в алгебре $\mathfrak{A}$ может быть определено некоторыми формулами какого-либо логического языка. Для многообразий $\mathcal{K}$ (с соответствующими морфизмами) — это атомные формулы. Для универсальных классов (с соответствующими морфизмами) — бескванторные $L_{\infty,\omega}$-формулы, истинные на одноэлементных алгебрах. Для псевдомногообразий (с соответствующими морфизмами) — бесконечные дизъюнкции бесконечных конъюнкций отрицаний атомных формул с одной атомной формулой. Для псевдоуниверсальных классов (с соответствующими морфизмами) — бескванторные $L_{\infty,\omega}$-формулы, истинные на одноэлементной алгебре.

Формулу

$$\forall\, x_1,\dots,x_n\left(\mathop{\&}_{i\in I} f_i(x_1,\dots,x_n)=g_i(x_1,\dots,x_n)\to h(x_1,\dots,x_n)=k(x_1,\dots,x_n)\right),$$

где f_i, g_i, h, k — $\bar{\mathcal{K}}$-неявные операции, определим как *$\bar{\mathcal{K}}$-неявное ∞-квазитождество*.

По аналогии с отношениями $\leqslant^{\Delta}$, $\leqslant^{\Delta,\mathrm{c}}$, $\leqslant^{\Delta,\mathrm{ec}}$ (сравнения алгебраических геометрий, условно алгебраических геометрий, элементарно условно алгебраических геометрий) $\mathcal{K}$-алгебр $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ определим отношение $\leqslant^{\Delta,\bar{\mathcal{K}}}$ (сравнения $\bar{\mathcal{K}}$-неявных алгебраических геометрий $\mathcal{K}$-алгебр) на классе $\mathcal{K}$:

$$\mathfrak{A}_1\leqslant^{\Delta,\bar{\mathcal{K}}}\mathfrak{A}_2\iff\operatorname{Con}^{\bar{\mathcal{K}}}_{\mathfrak{A}_2}\mathcal{F}^{\bar{\mathcal{K}}}_V(n)\subseteq\operatorname{Con}^{\bar{\mathcal{K}}}_{\mathfrak{A}_1}\mathcal{F}^{\bar{\mathcal{K}}}_V(n)\iff$$
$$\iff T''_{\mathfrak{A}_1,\bar{\mathcal{K}}}\subseteq T''_{\mathfrak{A}_2,\bar{\mathcal{K}}}\ \text{ для любых }\ T\subseteq\mathcal{F}^{\bar{\mathcal{K}}}_V(n)\times\mathcal{F}^{\bar{\mathcal{K}}}_V(n).$$

Лемма 5 [17]. *Для категории $\bar{\mathcal{K}}$ универсальных алгебр и любых $\mathcal{K}$-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ отношение $\mathfrak{A}_1\leqslant^{\Delta,\bar{\mathcal{K}}}\mathfrak{A}_2$ истинно тогда и только тогда, когда любое $\bar{\mathcal{K}}$-неявное ∞-квазитождество, истинное на $\mathfrak{A}_1$, будет истинно и на $\mathfrak{A}_2$.*

Эта лемма влечёт различные следствия для различных категорий алгебр.

Теорема 13 [17]. *Для любого многообразия V и любых V-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_1\leqslant^{\Delta}\mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда любая конечно порождённая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}_2$ вложима в некоторую прямую степень алгебры $\mathfrak{A}_1$.*

Эта теорема следует из леммы 5, поскольку отрицание $\bar{\mathcal{K}}$-неявного ∞-квазитождества (для рассматриваемой категории $\bar{\mathcal{K}} = \bar{V}$) эквивалентно некоторой формуле вида $\exists x_1, \ldots, x_n$ некоторая конъюнкция (возможно, бесконечная) атомных формул и одного отрицания подобной атомной формулы.

Теорема 14 [17]. *Для универсального класса $\mathcal{K}$ и любых $\mathcal{K}$-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,c} \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда $|\mathfrak{A}_2| = 1$ или любая конечно порождённая подалгебра алгебры $\mathfrak{A}_2$ вложима в алгебру $\mathfrak{A}_1$.*

Теорема 15 [17]. *Для любого псевдомногообразия $\mathcal{K}$ и любых $\mathcal{K}$-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,\bar{\mathcal{K}}} \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда алгебра $\mathfrak{A}_2$ вложима в некоторую прямую степень алгебры $\mathfrak{A}_1$.*

Следствие 9 [17]. *Для любого псевдомногообразия $\mathcal{K}$ и любых алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ из $\mathcal{K}$ $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,\bar{\mathcal{K}}} \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta} \mathfrak{A}_2$.*

Теорема 16 [17]. *Для любого псевдоуниверсального класса $\mathcal{K}$ и любых $\mathcal{K}$-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,\bar{\mathcal{K}}} \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда или $\mathfrak{A}_2$ одноэлементна, или $\mathfrak{A}_2$ вложима в алгебру $\mathfrak{A}_1$.*

Следствие 10 [17]. *Для любого псевдоуниверсального класса $\mathcal{K}$ и любых $\mathcal{K}$-алгебр $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$: $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,\bar{\mathcal{K}}} \mathfrak{A}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_1 \leqslant^{\Delta,c} \mathfrak{A}_2$.*

13.

Наконец, рассмотрим некоторые вопросы «близости» алгебраических геометрий универсальных алгебр: отношение $\overset{\Delta}{\sim}$ и некоторые вариации этого отношения.

Две алгебры $\mathfrak{A}_1 = \langle A_1; \sigma_1 \rangle$, $\mathfrak{A}_2 = \langle A_2; \sigma_2 \rangle$ назовём *геометрически тождественными*, если существует биекция φ множества A_1 на A_2, такая что $\varphi(\mathrm{Alg}_n \mathfrak{A}_1) = \mathrm{Alg}_n \mathfrak{A}_2$ для любого $n \in \omega$.

Алгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ назовём *геометрически схожими*, если для любого натурального n решётки $\mathrm{Alg}_n \mathfrak{A}_1$ и $\mathrm{Alg}_n \mathfrak{A}_2$ изоморфны.

Напомним, что алгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ *геометрически эквивалентны* ($\mathfrak{A}_1 \overset{\Delta}{\sim} \mathfrak{A}_2$), если для некоторого многообразия V $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in V$ и для любого $n \in \omega$ $\mathrm{Con}^{\Delta}_{\mathfrak{A}_1} \mathcal{F}_V(n) = \mathrm{Con}^{\Delta}_{\mathfrak{A}_2} \mathcal{F}_V(n)$.

Алгебры $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ *геометрически подобны*, если категории $\mathcal{K}_{V(\mathfrak{A}_1)}(\mathfrak{A}_1)$ и $\mathcal{K}_{V(\mathfrak{A}_2)}(\mathfrak{A}_2)$ изоморфны. Здесь $V(\mathfrak{A})$ — многообразие, порождённое алгеброй $\mathfrak{A}$, и объекты категории $\mathcal{K}_V(\mathfrak{A})$ — пары $\langle \{x_1, \ldots, x_n\}, B \rangle$, где $B \subseteq A^n$ — алгебраическое множество алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$, а $\mathcal{K}(\mathfrak{A})$-морфизмы — отображения вида

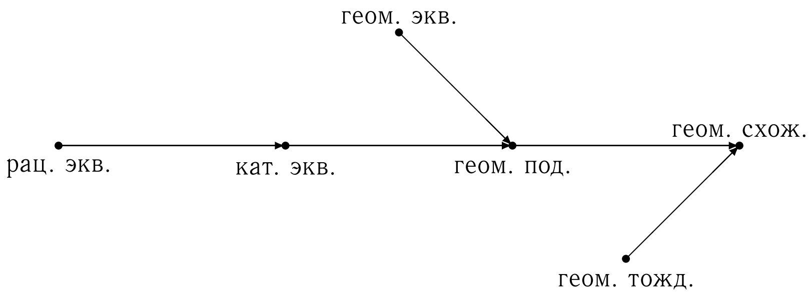
$$[s] \colon \langle \{x_1, \ldots, x_n\}; B \rangle \to \langle \{y_1, \ldots, y_m\}; C \rangle,$$

определимые гомоморфизмами $s \colon \mathcal{F}_V(y_1, \ldots, y_m) \to \mathcal{F}_V(x_1, \ldots, x_n)$, такие, что $\mu s \in C$ для любого $\mu \in B$.

Алгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ *категорно эквивалентны*, если существует изоморфизм φ категории $V(\mathfrak{A}_1)$ на категорию $V(\mathfrak{A}_2)$, такой что $\varphi(\mathfrak{A}_1) = \mathfrak{A}_2$.

Мы имеем также стандартное определение рационально эквивалентных алгебр.

Утверждение 4 [13]. *Имеет место следующая диаграмма для этих отношений* (*здесь стрелки означают строгую импликацию, обратная импликация неверна*):



Отметим два открытых вопроса:

1) найти абстрактное описание последовательностей решёток вида $\langle \mathrm{Alg}_n \mathfrak{A} \mid n \in \omega \rangle$;
2) описать отношения между свойствами решёток $\mathrm{Alg}_n \mathfrak{A}$ и свойствами алгебр $\mathfrak{A}$.

Утверждение 5 [13]. *Для любой полной решётки L существует алгебра $\mathfrak{A}$, такая что $L \cong \mathrm{Alg}_1 \mathfrak{A}$. Для решёток $\mathrm{Alg}_n \mathfrak{A}$* (*при $n \geqslant 2$*) *это не так* (*см.* [19]).

Литература

[1] Даниярова Э. Ю. Основы алгебраической геометрии над алгебрами Ли // Вестник ОмГУ. — 2007. — С. 8—39.

[2] Даниярова Э. Ю. Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли. III. Q-алгебры и координатные алгебры алгебраических множеств: Препринт. — Омск: Изд-во ОмГУ, 2005.

[3] Даниярова Э. Ю., Казачков И. В., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли. I. U-алгебры и универсальные классы // Фундамент. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, вып. 3. — С. 37—63.

[4] Даниярова Э. Ю., Казачков И. В., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над свободной метабелевой алгеброй Ли. II. Случай конечного поля // Фундамент. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, вып. 3. — С. 65—87.

[5] Даниярова Э. Ю., Ремесленников В. Н. Ограниченная алгебраическая геометрия над свободной алгеброй Ли // Алгебра и логика. — 2005. — Т. 44, № 3. — С. 269—304.

[6] Пинус А. Г. Булевы конструкции в универсальной алгебре // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, № 4. — С. 145—180.

[7] Пинус А. Г. Условные термы и их применение в алгебре и теории вычислений // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 4. — С. 35—72.

[8] Пинус А. Г. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.

[9] Пинус А. Г. О $\exists^+$-условных многообразиях, о $\exists^+$-псевдомногообразиях и неявных операциях на них // Алгебра и теория моделей 5. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2005. — С. 139—161.

[10] Пинус А. Г. Позитивно-условные псевдомногообразия и неявные операции на них // Сиб. мат. журн. — 2006. — Т. 47, № 2. — С. 372—382.

[11] Пинус А. Г. Геометрические шкалы многообразий и квазитождества // Мат. труды. — 2009. — Т. 12, № 2. — С. 160—169.

[12] Пинус А. Г. Неявные операции над категориями универсальных алгебр // Сиб. мат. журн. — 2009. — Т. 50, № 1. — С. 146—153.

[13] Пинус А. Г. О геометрически близких алгебрах // Алгебра и теория моделей 8. — Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009. — С. 85—95.

[14] Пинус А. Г. Новые алгебраические инварианты для формульных подмножеств универсальных алгебр // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, № 2. — С. 209—230.

[15] Пинус А. Г. О ∞-квазимногообразиях // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2011. — № 8. — С. 40—45.

[16] Пинус А. Г. Условные геометрические шкалы дискриминаторных многообразий // Сиб. мат. журн. — 2011. — Т. 52, № 3. — С. 650—654.

[17] Пинус А. Г. Неявная алгебраическая геометрия на категориях универсальных алгебр // Сиб. мат. журн. — В печати.

[18] Пинус А. Г. О геометрически полных многообразиях // Вестн. НГУ. — В печати.

[19] Пинус А. Г. О решётках алгебраических подмножеств универсальных алгебр. — В печати.

[20] Плоткин Б. И. Некоторые понятия алгебраической геометрии в универсальной алгебре // Алгебра и анализ. — 1997. — Т. 9, № 4. — С. 224—248.

[21] Плоткин Б. И. Изотипные алгебры // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. — 2011. — Т. 15. — С. 40—66.

[22] Baumslag G., Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups. I. Algebraic sets and ideal theory // J. Algebra. — 1999. — Vol. 219. — P. 16—79.

[23] Berzins A., Plotkin B. Algebraic geometry in varieties of algebras with the given algebra of constans // J. Math. Sci. — 2000. — Vol. 102, no. 3. — P. 4039—4070.

[24] Bludov V., Gusev D. On geometrical equivalence of groups // Algebra and Linear Optimization. Proc. Int. Sem. Devoted to the Ninetieth Birthday of S. N. Chernikov. — Ekateringburg, 2002. — P. 59—65.

[25] Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry // Algebra Discrete Math. — 2008. — Vol. 1. — P. 80—102.

[26] Daniyarova E., Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over algebraic structures. Foundations. — `arXiv:math.AG/1002.3562v3`.

[27] Eilenberg S., Schutzenberger M. P. On pseudovarieties // Adv. Math. — 1976. — Vol. 19, no. 1. — P. 413—418.

[28] Göbel R., Shelah S. Radicals and Plotkin's problem concerning geometrically equivalent groups // Proc. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 130, no. 3. — P. 673—674.

[29] Katsov Y. On geometrically equivalent S-acts // Int. J. Algebra Comput. — 2007. — Vol. 17, no. 5/6. — P. 1055—1065.

[30] Myasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations // J. Algebra. — 2000. — Vol. 234, no. 1. — P. 225—276.

[31] Pinus A. G. Boolean Constructions in Universal Algebra. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1993.

[32] Plotkin B. Varieties of algebras and algebraic varieties. Categories of algebraic varieties // Sib. Adv. Math. — 1997. — Vol. 7, no. 2. — P. 64—97.

[33] Plotkin B. Seven lectures in universal algebraic geometry. — 2002. — `arXiv:math.RA/0502212`.

[34] Plotkin B. Algebras with the same algebraic geometry // Тр. МИРАН им. В. А. Стеклова. — 2003. — Т. 242. — С. 176—207.

[35] Plotkin B. Geometrical equivalence, geometrical similarity and geometrical computability of algebras // Зап. науч. сем. Санкт-Петербург. отд-ния Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ). — 2006. — Т. 330. — С. 201—222.

[36] Plotkin B. Some results and problems related to universal algebraic geometry // Int. J. Algebra Comput. — 2007. — Vol. 17, no. 5/6. — P. 1133—1164.

[37] Plotkin B., Plotkin E., Tsurkov A. Geometrical equivalence of groups // Commun. Algebra. — 1999. — Vol. 24. — P. 4015—4025.

[38] Plotkin B., Zitomirski G. Some logical invariants of algebras and logical relations between algebras // Алгебра и анализ. — 2007. — Т. 19, № 5. — С. 214—245.