Размерностные многочлены в обобщённо-разностном случае

С. Н. СМИРНОВ
*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*
e-mail: smirnov57sergey@rambler.ru

УДК 512.628.4+512.553.5

Ключевые слова: разностная алгебра, рзностные модули, разностные размерностные многочлены.

Аннотация

Цель данной работы — обобщение результатов о размерностном многочлене разностных модулей над разностными кольцами для более широкого класса колец разностных операторов. Введено понятие квазикомммутативности, обобщающее коммутативность и позволяющее рассматривать более широкие классы моноидов и групп эндоморфизмов. Установлены некоторые структурные свойства квазикоммутативных моноидов и групп, позволяющие применить к ним методы, близкие методам работы со свободными коммутативными моноидами и свободными абелевыми группами. Доказана теорема существования размерностного многочлена обобщённо-разностных модулей для свободно квазикоммутативного моноида эндоморфизмов и существование его аналога в случае прямого произведения свободно квазикоммутативного моноида и конечной циклической группы.

Abstract

S. N. Smirnov, Dimension polynomials in the generalized difference case, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 205—222.

The aim of this paper is to generalize results about dimension polynomials of difference modules over difference rings for the wider class of rings of difference operators. We introduce the notion of the quasi-commutativity, which generalizes the notion of the commutativity and enables one to consider the wider classes of monoids and groups of endomorphisms. Some properties of quasi-commutative monoids and groups are established; these properties allow us to apply some methods that are almost similar to the ones used in working with free commutative monoids and groups. Also we prove the theorem of existence of the dimension polynomial of generalized difference modules in the cases where the submonoid of endomorphisms is free quasi-commutative. Also the existence of its analog for the case of a direct product of a free quasi-commutative monoid and a finite cyclic group is established.

1. Введение

Разностная алгебра обязана своим появлением Дж. Ритту, работы которого [9,10], как и работы Х. Роденбуша [11] и Ф. Херцога [6], лежат в основании

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 1, с. 205—222.

теории алгебраических разностных уравнений (хотя стоит отметить, что первые попытки в этом направлении были предприняты ещё в конце XIX века Казоратти). В дальнейшем скорость развития разностной алгебры снизилась, но в 1950-х годах Р. Кон в своих работах поднял уровень её изучения до сравнимого с дифференциальной алгеброй; его монография [5] долгое время оставалась единственной фундаментальной монографией по теории разностных алгебр. Первые шаги в построении теории разностных размерностей также были предприняты Р. Коном, исследования в этой области были продолжены П. Эвановичем. Понятие размерностного многочлена было предложено А. Б. Левиным сначала для расширений разностных полей [2], затем для разностных и инверсных разностных модулей. В [8] А. Б. Левин приводит следующий результат.

Теорема 1.1. *Пусть R — артиново разностное кольцо с базисным множеством $\sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, и пусть $M = \bigoplus_{q \geqslant 0} M^{(q)}$ — конечно порождённый положительно градуированный σ-R-модуль. Тогда*

1) *длина $\mathrm{l}_R\big(M^{(q)}\big)$ каждого R-модуля $M^{(q)}$ конечна;*
2) *существует многочлен $\varphi(t)$ от одной переменной с рациональными коэффициентами, такой что $\varphi(q) = \mathrm{l}_R\big(M^{(q)}\big)$ для достаточно больших $q \in \mathbb{N}$;*
3) *$\deg \varphi(t) \leqslant n-1$ и многочлен $\varphi(q)$ может быть представлен в виде*
$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \binom{t+i}{i},$$
где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

В данной работе обобщаются этот результат и метод, которым он был получен.

2. Основные определения

Напомним некоторые основные понятия и результаты теории разностных алгебр. Следуя [8], под разностным кольцом будем понимать коммутативное кольцо R с некоторым свободным коммутативным подмоноидом моноида эндоморфизмов $\mathrm{End}(R)$ кольца R. Здесь и далее для краткости записи, если g — некоторый элемент полугруппы или моноида, $g^{(m+l)} = g^l$ для некоторых $l, m \in \mathbb{N}$ и m_0, l_0 — наименьшие такие натуральные m, l, обозначим $\mathrm{o}(g) = m_0$, иначе положим $\mathrm{o}(g) = \infty$.

Определение 2.1. Пусть G — некоторый моноид, Λ — подмножество G, снабжённое линейным отношением порядка $\leqslant$, $\mathfrak{U}_\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda \times \Lambda \mid \lambda_1 \leqslant \lambda_2\}$. Будем говорить, что G — свободно квазикоммутативный относительно $(\Lambda, \leqslant)$ моноид, если существует такое отображение $\lambda\colon \mathfrak{U}_\Lambda \to \Lambda$, что для любых $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{U}_\Lambda$ справедливо $\lambda(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant \lambda_2$, и при этом G является фактором свободного моноида, порождённого Λ, по конгруэнции ρ, $a \ \rho \ b$ тогда и только тогда, когда найдутся такие λ_1, λ_2, что $a = \lambda_1 \lambda_2$, $b = \lambda_2 \lambda(\lambda_1, \lambda_2)$.

Определение 2.2. Пусть G — группа, Λ — подмножество G, снабжённое линейным отношением порядка $\leqslant$, $\mathfrak{U}_\Lambda = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda \times \Lambda \mid \lambda_1 \leqslant \lambda_2\}$. Будем говорить, что G — свободно квазикоммутативная относительно $(\Lambda, \leqslant)$ группа, если существует такое отображение $\lambda\colon \mathfrak{U}_\Lambda \to \Lambda$, что для любых $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathfrak{U}_\Lambda$ справедливо $\lambda(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant \lambda_2$, и при этом G является фактором свободной группы, порождённой Λ, по подгруппе, порождённой такими элементами ab^{-1}, что существуют $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, $a = \lambda_1\lambda_2$, $b = \lambda_2\lambda(\lambda_1, \lambda_2)$. В этом случае Λ будем называть базисным множеством моноида (группы) G. В тех же обозначениях фактор свободно квазикоммутативного моноида G назовём квазикоммутативным моноидом, фактор свободно квазикоммутативной группы назовём квазикоммутативной группой и множество Λ снова будем называть базисным множеством моноида (группы) G.

Замечание 2.3. В случае когда G — группа, второе свойство означает в точности, что автоморфизм сопряжения любым элементом базисного множества можно ограничить до действия на его начальном сегменте, ограниченном этим элементом.

Легко привести некоторые примеры.

Пример 2.4. Свободная абелева группа (свободный коммутативный моноид) является свободно квазикоммутативной (свободно квазикоммутативным) относительно любого множества свободных порождающих с произвольно заданным на нём отношением порядка, конечно порождённая абелева группа является квазикоммутативной (в силу существования разложения в прямую сумму циклических). Квазикоммутативная группа содержит квазикоммутативный моноид с теми же образующими.

Пример 2.5. Если $\sharp\Lambda \leqslant 2$, то очевидно, что группа G абелева. Первые нетривиальные примеры свободно квазикоммутативных групп будут при $\sharp\Lambda = 3$, т. е. $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3$. Есть четыре (с точностью до изоморфизма) свободно квазикоммутативных относительно L моноида: коммутативный $\mathbb{Z}_0^3$ и три некоммутативных

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}_{0;1,1}^3 &= \mathbb{Z}_0^3/\langle \lambda_2\lambda_3 = \lambda_3\lambda_1,\ \lambda_1\lambda_3 = \lambda_3\lambda_1\rangle,\\
\mathbb{Z}_{0;1,2}^3 &= \mathbb{Z}_0^3/\langle \lambda_2\lambda_3 = \lambda_3\lambda_1,\ \lambda_1\lambda_3 = \lambda_3\lambda_2\rangle,\\
\mathbb{Z}_{0;2,2}^3 &= \mathbb{Z}_0^3/\langle \lambda_2\lambda_3 = \lambda_3\lambda_2,\ \lambda_1\lambda_3 = \lambda_3\lambda_2\rangle,
\end{aligned}$$

а также две квазикоммутативные группы: абелева $\mathbb{Z}^3$ и

$$\mathbb{Z}^3/\langle \lambda_2\lambda_3 = \lambda_3\lambda_1,\ \lambda_1\lambda_3 = \lambda_3\lambda_2\rangle.$$

Пример 2.6. $\mathrm{O}(n)$ является свободно квазикоммутативной группой относительно базисного множества

$$\Lambda_{\mathrm{O}} = \{\lambda_{\mathrm{T};\alpha,\tau}, \lambda_{\mathrm{S}}\colon \alpha \in [0;2\pi),\ \tau \in \mathrm{P}(n, n-2)\},$$

порядок на Λ_{O} определяется произвольным образом с условием, что $\lambda_{\mathrm{S}} > \lambda_{\mathrm{T};\alpha,\tau}$ для всех $\alpha \in [0;2\pi)$, $\tau \in \mathrm{P}(n, n-2)$. Здесь $\mathrm{P}(n, n-2)$ — пространство гиперплоскостей коразмерности 2 в $\mathbb{R}^n$, проходящих через 0, λ_{S} — матрица симметрии относительно гиперплоскости $x_1 = 0$, $\lambda_{\mathrm{T};\alpha,\tau}$ — матрица поворота на угол α относительно гиперплоскости τ (для каждой гиперплоскости τ коразмерности 2 определим свой положительно ориентированный базис $\mathbb{R}^n$ — $e_1, \ldots, e_n$, — такой что $e_1, \ldots, e_{n-2}$ — базис τ. Тогда в базисе $e_1, \ldots, e_n$ матрица $\lambda_{\mathrm{T};\alpha,\tau}$ будет иметь блочный вид: левый верхний блок размера $(n-2)\times(n-2)$ — единичная матрица, правый нижний блок размера 2×2 — стандартная матрица поворота на угол α против часовой стрелки.

Пример 2.7. Группа движений $\mathbb{R}^n$ также является квазикоммутативной группой. В обозначениях предыдущего примера (заменяя матрицы ортогональных преобразований на соответствующие преобразования) в качестве базисного множества возьмём

$$\Lambda = \Lambda_{\mathrm{O}} \cup \{\lambda_{\mathrm{TR};l,p} \colon l \in \mathbb{R},\ p \in \mathrm{P}(n,1)\},$$

порядок на Λ определяется произвольным образом с условием, что $\lambda_{\mathrm{S}} > \lambda_{\mathrm{T};\alpha,\tau} > \lambda_{\mathrm{TR};l,p}$ для всех $\alpha \in [0;2\pi)$, $\tau \in \mathrm{P}(n, n-2)$, $l \in \mathbb{R}$, $p \in \mathrm{P}(n,1)$. Здесь $\mathrm{P}(n,1)$ — проективное пространство — пространство прямых в $\mathbb{R}^n$, проходящих через 0, $\lambda_{\mathrm{TR};l,p}$ — сдвиг на l вдоль прямой p (для каждой прямой одно из двух направлений назовём положительным, относительно этого направления и будем определять знак l).

Установим простейшие свойства квазикоммутативных моноидов и групп.

Предложение 2.8. *Пусть G — свободно квазикоммутативный относительно базисного множества $(\Lambda, \leqslant)$ моноид. Тогда*

1) *любой элемент $g \in G$ представим в виде*

$$g = \lambda_{i_1}^{m_1} \cdots \lambda_{i_k}^{m_k},$$

где $\lambda_{i_1} > \ldots > \lambda_{i_k}$, $m_1, \ldots, m_k \geqslant 0$;

2) *если при этом $g = \lambda_{j_1}^{n_1} \cdots \lambda_{j_t}^{n_t}$, то*

$$\sum_{i=1}^{t} n_i = \sum_{j=1}^{k} m_j.$$

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение. Для каждого элемента $g \in G \setminus \{0\}$ определим его вес $\mathrm{wt}(g)$ как

$$\mathrm{wt}(g) = \min\{t \mid \text{найдутся } \lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \Lambda, \text{ такие что } g = \lambda_1 \cdots \lambda_t\}.$$

Положим также $\mathrm{wt}(e) = 0$.

Доказательство будем вести индукцией по $\mathrm{wt}(g)$. При $\mathrm{wt}(g) = 0$ утверждение, очевидно, верно. Пусть оно верно при $\mathrm{wt}(g) \leqslant k$. Положим $s = k+1$. Пусть $g = \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_s}$ — произвольное разложение элемента $g \in G$ в произведение s образующих (т. е. $\mathrm{wt}(g) \leqslant s$). Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_t$ — полный набор сомножителей $\lambda_{i_1}, \ldots, \lambda_{i_s}$ в разложении g.

Если $t = 1$, то $g = \lambda_1^s$, и это и есть искомое разложение. Пусть $t > 1$. Рассмотрим самое левое вхождение элемента λ_t. Если перед ним есть элемент λ_i,

$i \neq t$, воспользуемся коммутационным соотношением $\lambda_i \lambda_t = \lambda_t \lambda_j$ для некоторого $j \leqslant i$. Тем самым первое вхождение λ_t сместится влево, и при этом количество вхождений λ_t, как и сумма показателей при образующих, не изменится. Повторяя эту операцию, пока первое вхождение λ_t не окажется на первой позиции, получим представление $g = \lambda_t g_1$, где разложение g_1 содержит не больше $s-1$ сомножителей и сумма степеней образующих не больше исходной. Применив утверждение к g_1, получим разложение g_1. Увеличив показатель при λ_t на 1, получим искомое разложение для g, при этом сумма степеней будет равна исходной. Заметим, что если $\lambda_t^{m_t} \cdots \lambda_1^{m_1} = \lambda_t^{n_t} \cdots \lambda_1^{n_1}$, то существует конечная цепочка преобразований слова, которое будет написано, если раскрыть степени в левой части, в соответствующее слово в правой части, каждое из которых заключается в замене рядом пар рядом стоящих букв $\lambda_{i_1}\lambda_{i_2}$ по одному из правил коммутирования на другую пару (т. е. в применении элементарного ρ-перехода, см., например, [1]). При таких преобразованиях количество букв в слове не меняется, т. е. сумма показателей степеней в левой и в правой части одна и та же, что завершает доказательство второго утверждения. Значит, утверждение верно и при $\mathrm{wt}(g) = k+1$, т. е. оно верно при любом $\mathrm{wt}(g) \in \mathbb{N}$. $\square$

Замечание 2.9. Заметим, что определённая в ходе доказательства функция $\mathrm{wt}(g)$ в силу второго свойства свободно квазикоммутативного моноида в точности равна сумме показателей при образующих в любом разложении элемента g.

Разложение элемента моноида указанного в первой части предложения вида назовём *стандартным*. По свойству 2)

$$G = \bigoplus_{s \in \mathbb{N} \cup \{0\}} G^{(s)}, \quad G^{(q)} = \{g^{\mathrm{wt}(g)} = q\}.$$

Назовём $\mathbb{Z}$-градуированный (здесь и далее все градуировки делаются по группе $\mathbb{Z}$) моноид G *стандартно градуированным*, если найдётся линейно упорядоченное множество образующих $K \subset G^{(1)}$, для всех $k \in K$ справедливо, что $k \in G \backslash \langle \{k' \in K \colon k' < k\} \rangle$, и при этом $\langle \{k' \in K \colon k' < k\} \rangle k = k \langle \{k' \in K \colon k' < k\} \rangle$. Очевидно, стандартно градуированные моноиды являются свободно квазикоммутативными относительно того же множества образующих с тем же отношением порядка. В самом деле, для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$

$$k_i k_j = k_j g, \quad g \in \langle k_1, \ldots, k_j \rangle, \quad k_j g = k_i k_j \in G^{(2)}, \quad k_j \in G^{(1)},$$

но $g \in \langle k_1, \ldots, k_j \rangle$, и значит, так как произведение не меньше двух образующих не будет лежать в $G^{(2)}$, $g = k_s$, $1 \leqslant s \leqslant n$.

Докажем аналогичное свойство свободно квазикоммутативных групп.

Предложение 2.10. *Пусть G — свободно квазикоммутативная относительно базисного множества $(\Lambda, \leqslant)$ группа, $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Тогда*

1) *любой элемент $g \in G$ представим в виде*

$$g = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_k^{m_k},$$

где $\lambda_1 > \ldots > \lambda_k \in \Lambda$;

2) *такое представление единственно*;
3) *если при этом* $g = \lambda_{j_1}^{n_1} \cdots \lambda_{j_t}^{n_t}$, *то*

$$\sum_{i=1}^{t} |n_i| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |m_j|;$$

4) $\lambda_1 \leqslant \max\{\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_t}\}$.

Доказательство. Введём понятие веса элемента, аналогичное уже введённому для свободно квазикоммутативных моноидов, а именно $\mathrm{wt}(e) = 0$, для $g \in \{G\} \setminus \{0\}$ положим

$$\mathrm{wt}(g) = \min\{t \mid \text{найдутся } m \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \Lambda,\ k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{Z}, \\ \text{такие что } |k_1| + \ldots + |k_m| = t,\ g = \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_m^{k_m}\}.$$

Будем вести доказательство индукцией по $\mathrm{wt}(g)$. При $\mathrm{wt}(g) = 0$ имеем, что $g = e$, и все три части утверждения очевидно выполняются. Пусть утверждение верно при $\mathrm{wt}(g) \leqslant k$. Положим $s = k + 1$. Сначала заметим, что в силу квазикоммутативности G автоморфизм $\psi_g \in \mathrm{Aut}(G)$, $\psi_g(x) = gxg^{-1}$, где $g \in \Lambda$, корректно сужается до действия на множестве $\Lambda_{\leqslant g}$ элементов Λ, не больших g, а в силу обратимости ψ_g это действие сводится к перестановке элементов $\Lambda_{\leqslant g}$, т. е. для любого $h \in \Lambda_{\leqslant g}$ найдётся $q \in \Lambda_{\leqslant g}$, $h \leqslant q$, такое что $hg^{-1} = g^{-1}q$.

Сначала докажем первую часть утверждения. Пусть $g = \lambda_{i_1}^{\pm 1} \cdots \lambda_{i_p}^{\pm 1}$ — произвольное разложение элемента $g \in G$ в произведение образующих, $p \leqslant s$. Пусть $\lambda_1 < \ldots < \lambda_t$ — полный набор различных образующих, участвующих в выписанном выше произведении. Тогда если $t = 1$, то $g = \lambda_1^q$ (где q — сумма показателей степеней) — искомое разложение. Пусть теперь $t > 1$. Рассмотрим самое левое вхождение элемента λ_1. Если перед ним есть элемент λ_i, $i > 1$, воспользуемся коммутационным соотношением $\lambda_i\lambda_1 = \lambda_1\lambda$, если показатель при λ_1 больше нуля, и соотношением $\lambda_i\lambda_1^{-1} = \lambda_1^{-1}\lambda$ для некоторого $\lambda < \lambda_1$ иначе. Тем самым первое вхождение λ_1 сместится влево, и при этом количество вхождений λ_1, как и сумма модулей показателей при образующих, не увеличится (правда, множество образующих, входящих сомножителями в разложение элемента g, возможно, расширится; если это так, перенумеруем образующие $\lambda_2, \ldots, \lambda_t, \lambda$ так, чтобы было $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_{t+1}$). Повторяя эту операцию, пока первое вхождение λ_1 не окажется на первой позиции, получим представление $g = \lambda_1^{\pm 1} g_1$, где сумма степеней в разложении g_1 не больше $p-1$. Применив утверждение к g_1, получим разложение

$$g_1 = \lambda_{j_1}^{n_1} \cdots \lambda_{j_q}^{n_q},$$

где сумма модулей n_q не больше $p - 1$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_{j_1} > \ldots > \lambda_{j_q}$. Если $j_1 > 1$, уже имеем искомое разложение, а если $j_1 = 1$, то, добавив ± 1 к показателю при λ_1 в разложении g_1, получим искомое разложение для g, при этом сумма степеней будет не больше исходной.

Докажем единственность. Пусть

$$\lambda_s^{m_s}\cdots\lambda_1^{m_1}=\lambda_s^{n_s}\cdots\lambda_1^{n_1}.$$

Тогда

$$\lambda_{s-1}^{m_{s-1}}\cdots\lambda_1^{m_1}(\lambda_{s-1}^{n_{s-1}}\cdots\lambda_1^{n_1})^{-1}=\lambda_s^{n_s-m_s}$$

в силу свободной квазикоммутативности, $\lambda_s^{(n_s-m_s)}=e$, и значит, $n_s=m_s$, и

$$\lambda_{s-1}^{m_{s-1}}\cdots\lambda_1^{m_1}=\lambda_{s-1}^{n_{s-1}}\cdots\lambda_1^{n_1}.$$

По предположению индукции $m_i=n_i$ для всех $i\in\{1,\ldots,s-1\}$, что завершает доказательство единственности разложения.

Последние два свойства получаются, если перейти, как мы это делали в доказательстве, от произвольного разложения g к разложению искомого вида, предварительно выделив левым множителем максимальный элемент этого разложения или его обратный. Тогда для разложения, которое получится таким путём, последние два свойства будут выполнены. Но разложение искомого вида единственно и, значит, совпадает с тем, которое мы рассматриваем. Таким образом, утверждение индукции верно при $\mathrm{wt}(g)\leqslant k+1$. Значит, оно верно при всех $\mathrm{wt}(g)\in\mathbb{N}$. □

Разложение, существование которого доказано в этом предложении, назовём *стандартным*. Здесь и далее под фильтрацией понимается возрастающая фильтрация. Заметим, что наличие, единственность и минимальность суммы показателей по всем разложениям стандартного разложения позволяет корректно ввести положительную $\mathbb{Z}$-фильтрацию на группе G:

$$G_d=\left\{\lambda_n^{m_n}\cdots\lambda_1^{m_1}\;\middle|\;\sum_{i=1}^{n}|m_i|\leqslant d\right\}.$$

Докажем аналогичное свойство квазикоммутативных групп и моноидов.

Предложение 2.11. *Пусть G — квазикоммутативный относительно базисного множества $(\Lambda,\leqslant)$ моноид. Тогда*

1) *любой элемент $g\in G$ представим в виде*

$$g=\bar\lambda_1^{m_1}\cdots\bar\lambda_k^{m_k},$$

где $\lambda_1>\ldots>\lambda_k$, $m_1,\ldots,m_k\geqslant 0$, $m_i\leqslant\mathrm{o}(\lambda_i)$;

2) *среди таких представлений есть такое, что если при этом $g=\bar\lambda_{j_1}^{n_1}\cdots\bar\lambda_{j_t}^{n_t}$, то*

$$\sum_{i=1}^{t}|n_i|\geqslant\sum_{j=1}^{k}|m_j|.$$

Предложение 2.12. *Пусть G — квазикоммутативная относительно базисного множества $(\Lambda,\leqslant)$ группа. Тогда*

1) *любой элемент $g \in G$ представим в виде*

$$g = \bar{\lambda}_1^{m_1} \cdots \bar{\lambda}_k^{m_k},$$

где $\lambda_1 > \ldots > \lambda_k$, $|m_i| \leqslant (\mathrm{o}(\lambda_i) + 1)/2$;

2) *среди таких представлений есть такое, что если при этом* $g = \bar{\lambda}_{j_1}^{n_1} \cdots \bar{\lambda}_{j_t}^{n_t}$, *то*

$$\sum_{i=1}^{t} |n_i| \geqslant \sum_{j=1}^{k} |m_j|.$$

Доказательство. Доказательства двух предложений сходны. Пусть G — фактор свободно квазикоммутативного моноида (свободно квазикоммутативной группы) G', и пусть $w = \bar{g}$, $g \in G'$. Тогда, как доказано выше, у g есть стандартное разложение

$$g = \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_k^{m_k},$$

где $\lambda_1 > \ldots > \lambda_k$. Имеем

$$w = \bar{g} = \overline{\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_k^{m_k}} = \bar{\lambda}_1^{m_1} \cdots \bar{\lambda}_k^{m_k}.$$

Для доказательства неравенства на m_i в случае моноида заметим, что при $\mathrm{o}(r) < \infty$ справедливо $r^{(\mathrm{o}(r)+k)} = r^{(\mathrm{o}(r))}$, а значит,

$$w = \bar{\lambda}_1^{m'_1} \cdots \bar{\lambda}_k^{m'_k},$$

где m'_i — остаток от деления m_i на $\mathrm{o}(\lambda_i)$. В случае группы в тех же обозначениях, если $m'_i > \mathrm{o}(\lambda_i + 1)/2$, заменим m'_i на $m''_i = m'_i - \mathrm{o}(\lambda_i)$. Чтобы доказать последнее утверждение, заметим, что если $w = \bar{g}_n$, то существует разложение указанного вида, сумма модулей показателей степеней которого не больше $\mathrm{wt}(g_n)$. Если при этом $w = \bar{\lambda}_{j_1}^{n_1} \cdots \bar{\lambda}_{j_t}^{n_t}$ и

$$\sum_{i=1}^{t} |n_i| < \mathrm{wt}(g_n),$$

то $w = \bar{g}_{n+1}$, $g_{n+1} = \lambda_{j_1}^{n_1} \cdots \lambda_{j_t}^{n_t}$ и $\mathrm{wt}(g_{n+1}) < \mathrm{wt}(g_n)$. Значит, имеем последовательность $g_1 = g, g_2, \ldots$. Так как последовательность весов g_i составлена из неотрицательных целых чисел и убывает, то она конечна и обрывается на $g' = g_r$. Взяв стандартное разложение g', получим разложение w с требуемыми свойствами. $\square$

Для квазикоммутативного моноида и квазикоммутативной группы стандартным разложением назовём одно из разложений, удовлетворяющих последнему свойству минимальности суммы модулей показателей из доказанных только что утверждений. Весом $\mathrm{wt}(w)$ элемента w назовём сумму модулей показателей в стандартном разложении w. Заметим, что, как и в случае свободно квазикоммутативных групп, можно ввести стандартную фильтрацию на квазикоммутативной группе или квазикоммутативном моноиде, положив $G_k = \{g \in G \mid \mathrm{wt}(g) \leqslant k\}$

3. Обобщённые разностные кольца

Определение 3.1. *Обобщённым* (в смысле квазикоммутативности) *разностным* (или *обобщённо-разностным*) *кольцом* назовём коммутативное кольцо R с квазикоммутативным моноидом $G \subset \mathrm{End}(G)$. В этом случае мы будем говорить о *G-кольце*.

В тех случаях, когда это не приведёт к путанице, слово *обобщённый* по отношению к связанным с обобщённо-разностными кольцами объектам будет опускаться.

Определение 3.2. *Кольцом разностных операторов* G-кольца R назовём кольцо $\mathfrak{D}$ формальных конечных сумм (называемых разностными операторами)

$$\sum_{g \in G} r_g g, \quad r_g \in R.$$

Правила сложения и умножения определяются соотношениями

$$\sum_{g\in G} r_g g + \sum_{g \in G} a_g g = \sum_{g\in G} (r_g + a_g) g, \quad a_g, r_g \in R,$$

и

$$rg = g(r)g, \quad g \in G, \quad r \in R,$$

распространёнными по линейности.

В случае свободно квазикоммутативного моноида на кольце разностных операторов можно ввести естественную градуировку:

$$\mathfrak{D} = \bigoplus \mathfrak{D}^{(i)}, \quad \mathfrak{D}^{(i)} = \Big\{\sum r_g g \colon r_g \in R,\ g \in G,\ \mathrm{wt}(g) = i\Big\}.$$

Аналогично в случае квазикоммутативного G на кольце $\mathfrak{D}$ можно ввести естественную фильтрацию:

$$\mathfrak{D}_i = \sum_{j=0}^{i} \Big\{\sum r_g g \colon r_g \in R,\ g \in G_j\Big\}.$$

Определение 3.3. Пусть G — (свободно) квазикоммутативный моноид, R — обобщённо-разностное G-кольцо, $\mathfrak{D}$ — кольцо разностных операторов R. *G-R-модулем* назовём всякий левый модуль над $\mathfrak{D}$.

Градуированным G-R-модулем назовём градуированный модуль над градуированным кольцом $\mathfrak{D}$. Так как Re лежит в нулевой компоненте $\mathfrak{D}$, то каждая однородная компонента градуированного G-R-модуля является R-модулем. Отлично фильтрованным G-R-модулем назовём фильтрованный модуль ${}_{\mathfrak{D}}M$, такой что существует $r \in \mathbb{N}$, для которого $M_{r+d} = \mathfrak{D}_d M_r$.

Определение 3.4. Пусть R — произвольное кольцо. Тогда длиной $\mathrm{l}_R(M)$ модуля M назовём верхнюю грань r длин вложенных цепочек R-модулей

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \ldots \subsetneq M_r = M.$$

Положим $\mathrm{l}_R(M) = \infty$, если для любого $r \in \mathbb{N}$ найдётся такая цепочка.

Замечание 3.5. Следует отметить, что конечно порождённый модуль над артиновым кольцом имеет конечную длину

В [8] доказана следующая лемма.

Лемма 3.6. *Пусть R — артиново коммутативное кольцо, α — инъективный эндоморфизм R и*

$$0 \xrightarrow{i} K \to M \xrightarrow{\delta} N \to 0 \text{ —}$$

точная последовательность конечно порождённых R-модулей, где i — инъекция, а δ — аддитивное отображение M на N, такое что

$$\delta(rx) = \alpha(r)\delta(x) \quad \text{для всех} \quad r \in R, \ x \in M.$$

Тогда N — конечно порождённый $\alpha(R)$-модуль и

$$\mathrm{l}_R(K) + \mathrm{l}_{\alpha(R)}(N) = \mathrm{l}_R(M).$$

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 3.7. *Пусть G — свободно квазикоммутативный относительно конечного множества $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ моноид, R — артиново G-кольцо с 1, $\lambda_i^2(R) = \lambda_i(R)$, и пусть $M = \bigoplus\limits_{q \geqslant 0} M^{(q)}$ — конечно порождённый градуированный G-R-модуль. Тогда*

1) $\mathrm{l}_R\big(M^{(q)}\big) < \infty$;
2) *существуют такие $\varphi(t) \in \mathbb{Z}[t]$, $q_0 \in \mathbb{N}$, что*

$$\mathrm{l}_R\big(M^{(q)}\big) = \varphi(q)$$

для каждого $q > q_0$;

3) $\deg \varphi(t) \leqslant n-1$ *и существуют такие $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{N}$, что*

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \binom{t+i}{i}.$$

Доказательство. Сначала докажем первую часть утверждения. Пусть $\mathfrak{D}$ — кольцо разностных операторов G-кольца R. Ввиду артиновости R и конечной порождённости M можно считать, что M порождён над $\mathfrak{D}$ конечным числом однородных элементов $x_1, \dots, x_k, x_i \in M^{(s_i)}$ (в самом деле, если $y_1, \dots, y_{k_0}$ — образующие M над $\mathfrak{D}$, возьмём в качестве системы однородных образующих M множество однородных компонент элементов y_i). Тогда любой элемент $u \in M^{(q)}$ представим в виде

$$u = \sum_{i=1}^{k} u_i x_i,$$

где $u_i \in \mathfrak{D}^{(q-s_i)}$. Значит, так как любой элемент $\mathfrak{D}^{(m)}$ является конечной линейной комбинацией с коэффициентами из R $\binom{m+s-1}{s-1}$ элементов $\lambda_s^{m_s} \cdots \lambda_1^{m_1}$,

$\sum\limits_{i=1}^{k} m_i = m$, имеем, что $M^{(q)}$ порождён над R конечным множеством элементов

$$\left\{\lambda_s^{m_s}\cdots\lambda_1^{m_1}x_i,\ \sum_{j=1}^{k} m_j + s_i = q\right\}.$$

В соответствии с замечанием 3.5, так как R — артиново кольцо, $M^{(q)}$ имеет конечную длину.

Вторую и третью часть утверждения докажем индукцией по s. При $s = 0$ $G = \{e\}$ и $M^{(q)} = 0$ для достаточно больших q. Пусть теперь утверждение верно при $s = s_0$. Докажем его истинность при $s = s_0 + 1$. Обозначим через Λ', G', $\mathfrak{D}'$ множество $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1}\}$, свободно квазикоммутативный относительно Λ' подмоноид G и кольцо разностных операторов R как G'-кольца соответственно; через $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ обозначим кольца G- и G'-операторов над $\lambda_s(R)$. Пусть

$$\theta\colon M \to M, \quad \theta(x) = \lambda_s x \ \text{ для всех } \ x \in M.$$

Обозначим $K = \operatorname{Ker}\theta$, $N = \operatorname{Im}\theta$,

$$K = \bigoplus K^{(q)}, \quad K^{(q)} = \operatorname{Ker}|_{M^{(q)}}\theta,$$
$$N = \bigoplus N^{(q)}, \quad N^{(q)} = \theta\bigl(M^{(q)}\bigr).$$

Тогда имеем точную последовательность

$$0 \to K^{(q)} \hookrightarrow M^{(q)} \xrightarrow{\theta} N^{(q)} \to 0.$$

По лемме 3.6 при $\delta = \theta$ имеем

$$\mathrm{l}_R\bigl(K^{(q)}\bigr) + \mathrm{l}_{\lambda_s(R)}\bigl(N^{(q)}\bigr) = \mathrm{l}_R\bigl(M^{(q)}\bigr) \ \text{ для всех } \ q \in \mathbb{N}.$$

В то же время, так как $\lambda_s K = 0$, K можно рассматривать как $\mathfrak{D}'$-модуль. По предположению индукции $\mathrm{l}_R\bigl({}_R K^{(q)}\bigr) = \varphi_K(q)$ при всех $q > q_K$ для некоторого $q_K \in \mathbb{N}$ и

$$\varphi_K(t) = \sum_{i=0}^{s-2} a_{K,i}\binom{t+i}{i}, \quad a_{K,i} \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, имеем

$$\mathrm{l}_R\bigl(M^{(q)}\bigr) = \mathrm{l}_{\lambda_s(R)}\bigl(N^{(q)}\bigr) + \varphi_K(q) \ \text{ для всех } \ q \in \mathbb{N},\ q > q_K.$$

Обозначим теперь $L^{(q)} = R\theta\bigl(M^{(q)}\bigr)$. Очевидно, что $L^{(q)} \subseteq M^{(q+1)}$, $\lambda_i(R)\theta\bigl(M^{(q)}\bigr) \subseteq \lambda_i(R)\theta\bigl(M^{(q+1)}\bigr) = L^{(q+1)}$. Обозначим

$$A = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} A^{(q)}, \quad A^{(q)} = M^{(q+1)}/L^{(q)}.$$

Тогда действие элементов λ_i опускается очевидным образом на A, $\lambda_i\bigl(x+L^{(q)}\bigr) = \lambda_i x + L^{(q+1)}$ (так как $\lambda_i \in \mathfrak{D}^{(1)}$, то $\lambda_i x \in M^{(q+2)}$ при всех $x \in M^{(q+1)}$, $\lambda_i\bigl(A^{(q)}\bigr) \in A^{(q+1)}$). При этом по построению

$$\lambda_s\bigl(x + L^{(q)}\bigr) = \lambda_s(x) + R\theta\bigl(M^{(q+1)}\bigr) = \theta(x) + R\theta\bigl(M^{(q+1)}\bigr) = 0 + R\theta\bigl(M^{(q+1)}\bigr).$$

Таким образом, λ_s аннулирует A. Значит, A — градуированный $\mathfrak{D}'$-модуль, и наше обозначение $A^{(q)}$ согласовано с градуировкой. В частности, по предположению индукции

$$\mathrm{l}_R\big(A^{(q)}\big) = \varphi_A(q) \quad \text{для всех} \quad q > q_A$$

для некоторого многочлена

$$\varphi_A(t) = \sum_{i=0}^{s-2} a_{A,i}\binom{t+i}{i}, \quad a_{A,i} \in \mathbb{Z},$$

степени не выше $s-2$ и некоторого $q_A \in \mathbb{N}$. В то же время, так как $M^{(q+1)}$ — конечно порождённый R-модуль, ${}_RL^{(q)}$, ${}_RA^{(q)}$ конечно порождённые, и значит,

$$\mathrm{l}_R\big(L^{(q)}\big) < \infty, \quad \mathrm{l}_R\big(A^{(q)}\big) < \infty$$

и

$$\mathrm{l}_R\big(M^{(q+1)}\big) = \mathrm{l}_R\big(L^{(q)}\big) + l_R\big(A^{(q)}\big) = \mathrm{l}_R\big(L^{(q)}\big) + \varphi_A(q) \quad \text{для всех} \quad q \in \mathbb{N},\ q > q_A.$$

Рассмотрим теперь градуированный модуль

$${}_{\mathfrak{B}}\theta(L) = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} \lambda_s(R)\theta^2\big(M^{(q)}\big) = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} \theta^2\big(V^{(q)}\big).$$

Последнее равенство верно, так как для любого r найдётся r', такой что из $\lambda_s(r) = \lambda_s^2(r')$ следует, что $\lambda_s(r)\theta^2(a) = \lambda_s(r)\lambda_s^2 a = \lambda_s^(r')\lambda_s^2 a = \lambda_s^2(r'a)$ для всех $a \in M^{(q)}$. Обозначим θ_q ограничение θ на ${}_RL^{(q)}$, $B^{(q)} = \operatorname{Ker}\theta_q$. Имеем

$$B^{(q)} \subseteq L^{(q)} = R\theta\big(M^{(q)}\big) \subseteq M^{(q+1)}.$$

Из точной последовательности

$$0 \to B^{(q)} \hookrightarrow L^{(q)} \xrightarrow{\theta_q} \theta^2\big(M^{(q)}\big) \to 0$$

по лемме 3.6 получаем, что

$$\mathrm{l}_R\big(L^{(q)}\big) = \mathrm{l}_R\big(B^{(q)}\big) + \mathrm{l}_{\lambda_s(R)}\Big(\theta^2\big(M^{(q)}\big)\Big).$$

Так как $\lambda_s B^{(q)} = 0$, рассматривая $B^{(q)}$ как $\mathfrak{D}'$-модуль, по предположению индукции получаем, что

$$\mathrm{l}_R\big(B^{(q)}\big) = \varphi_B(q) \quad \text{для всех} \quad q \in \mathbb{N},\ q > q_B$$

для некоторого $q_B \in \mathbb{N}$.

Пусть ${}_{\lambda_s(R)}C^{(q)} = \operatorname{Ker}|_{N^q}\theta N^{(q)}$, $C = \bigoplus\limits_{i\in\mathbb{Z}} C^{(i)}$, $C^{(q)}$ конечно порождённый, на C естественным образом определяются действия $\lambda_i\colon C^{(q)} \to C^{(q+1)}$. Тогда λ_s аннулирует C, и значит, рассматривая C как $\mathfrak{B}'$-модуль, по предположению индукции получаем, что

$$\mathrm{l}_{\lambda_s(R)}\big(C^{(q)}\big) = \varphi_C(q) \quad \text{для всех} \quad q \in \mathbb{N},\ q > q_C$$

для некоторого $q_C \in \mathbb{N}$ и

$$\varphi_C(t) = \sum_{i=0}^{s-2} a_{C,i}\binom{t+i}{i}, \quad a_{C,i} \in \mathbb{Z}.$$

Учитывая точную последовательность

$$0 \to C^{(q)} \hookrightarrow N^{(q)} \xrightarrow{\theta} N^{(q)} = \theta^2\bigl(M^{(q)}\bigr) \to 0,$$

по лемме 3.6 при $\delta = \theta$ имеем, что

$$\begin{aligned} \mathrm{l}_{\lambda_s(R)}\bigl(N^{(q)}\bigr) &= \mathrm{l}_{\lambda_s(R)}\Bigl(\theta^2\bigl(M^{(q)}\bigr)\Bigr) + \mathrm{l}_{\lambda_s(R)}\bigl(C^{(q)}\bigr) = \\ &= \mathrm{l}_{\lambda_s(R)}\Bigl(\theta^2\bigl(M^{(q)}\bigr)\Bigr) + \varphi_C(q) \quad \text{для всех} \quad q \in \mathbb{N},\ q > q_C. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_R\bigl(M^{(q+1)}\bigr) &= \varphi_A(q) + \mathrm{l}_R\bigl(L^{(q)}\bigr) = \varphi_A(q) + \varphi_B(q) + \mathrm{l}_{\lambda_s(R)}\Bigl(\theta^2\bigl(M^{(q)}\bigr)\Bigr) = \\ &= \varphi_A(q) + \varphi_B(q) + \mathrm{l}_{\lambda_s(R)}\bigl(N^{(q)}\bigr) - \varphi_C(q) = \\ &= \varphi_A(q) + \varphi_B(q) - \varphi_C(q) - \varphi_K(q) + \mathrm{l}_R\bigl(M^{(q)}\bigr) \\ &\text{для всех} \quad q \in \mathbb{N},\ q > \max\{q_A, q_B, q_C, q_K\}. \end{aligned}$$

Обозначив

$$q_M = \max\{q_A, q_B, q_C, q_K\},$$

получим, что

$$\begin{aligned} \lambda_R\bigl(M^{(q)}\bigr) &= \lambda_R\bigl(M^{(q_M)}\bigr) + \sum_{i=q_M}^{q-1}\Bigl(\lambda_R\bigl(M^{(i+1)}\bigr) - \lambda_R\bigl(M^{(i)}\bigr)\Bigr) = \\ &= \lambda_R\bigl(M^{(q_M)}\bigr) + \sum_{i=q_M}^{q-1}\bigl(\varphi_A(q) + \varphi_B(q) - \varphi_C(q) - \varphi_K(q)\bigr) = \\ &= \lambda_R\bigl(M^{(q_M)}\bigr) + \sum_{i=q_M}^{q-1}\sum_{j=0}^{s-2}(a_{A,j} + a_{B,j} - a_{C,j} - a_{K,j})\binom{i+j}{i} = \\ &= \lambda_R\bigl(M^{(q_M)}\bigr) + \sum_{j=0}^{s-2}\sum_{i=q_M}^{q-1}(a_{A,j} + a_{B,j} - a_{C,j} - a_{K,j})\binom{i+j}{i} = \\ &= \lambda_R\bigl(M^{(q_M)}\bigr) + \sum_{j=0}^{s-2}(a_{A,j} + a_{B,j} - a_{C,j} - a_{K,j})\left(\binom{q+j}{j+1} - \binom{q_M+j}{j+1}\right) = \\ &= \lambda_R\bigl(M^{(q_M)}\bigr) + \sum_{j=0}^{s-2}(a_{A,j} + a_{B,j} - a_{C,j} - a_{K,j})\left(\binom{j+q+1}{j+1} - \binom{j+q}{j}\right) - \\ &- \sum_{j=0}^{s-2}(a_{A,j} + a_{B,j} - a_{C,j} - a_{K,j})\binom{j+q_M}{j+1} = \sum_{j=0}^{s-1} a_{M,j}\binom{j+q}{j}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{M,s-1} &= (a_{A,s-2} + a_{B,s-2} - a_{C,s-2} - a_{K,s-2}),\\ a_{M,j} &= a_{A,j-1} + a_{B,j-1} - a_{C,j-1} - a_{K,j-1} -\\ &\quad - (a_{A,j} + a_{B,j} - a_{C,j} - a_{K,j}), \quad j = 1, \ldots, s-2,\\ a_0 &= \lambda_R\big(M^{(q_M)}\big) - (a_{A,0} + a_{B,0} - a_{C,0} - a_{K,0}) -\\ &\quad - \sum_{j=0}^{s-2} (a_{A,j} + a_{B,j} - a_{C,j} - a_{K,j}) \binom{j+q_M}{j+1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi_M(q) = \sum_{j=0}^{s-1} a_{M,j} \binom{j+q}{j}$$

удовлетворяет условиям 2) и 3) нашего утверждения, т. е. при $s = s_0 + 1$ оно тоже верно. Значит, оно верно при всех $s \in \mathbb{N}$. $\square$

Замечание 3.8. Заметим, что, вообще говоря, эта теорема неконструктивна, так как даже при известной системе однородных образующих по набору их весов и количеству образующих из базы нашего квазикоммутативного моноида нельзя указать оценку сверху на константу q_0.

В самом деле, рассмотрим следующий пример.

Пример 3.9. Пусть N — произвольное натуральное число. Возьмём $R = \mathbb{C}[x]$,

$$G = \big\{\lambda^n : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\big\} \subset \operatorname{End}(R),$$

$\lambda\big(f(x)\big) = f(x+1)$. Будем рассматривать R как обобщённо-разностное G-кольцо (или, что то же самое, как разностное кольцо с $\sigma = \{\lambda\}$). Рассмотрим (обобщённо-разностный) разностный (G-R-) σ-модуль M, порождённый над $\mathfrak{D}$ одним элементом $x \in M^{(0)}$, такой что $x, \lambda x, \ldots, \lambda^{N-1}x$ — различные свободные образующие M над R, и при этом $\lambda^N x = 0$. Очевидно, существует ровно один такой (обобщённо-разностный) разностный модуль, и при этом

$$M^{(q)} = R\lambda^q x \ \text{ для всех } \ q < N, \quad M^{(q)} = 0 \ \text{ для всех } \ q \geqslant N.$$

Тогда

$$\mathrm{l}_R\big(M^{(q)}\big) = 1 \ \text{ для всех } \ q < N, \quad \mathrm{l}_R\big(M^{(q)}\big) = 0 \ \text{ для всех } \ q \geqslant N.$$

Значит, $\varphi_M(t) = 0$ — многочлен нулевой степени, как и должно быть в соответствии с теоремой, но при этом $q_M = N$ может быть сколь угодно большим числом.

Имеет место следствие из теоремы 3.7.

Предложение 3.10. *Пусть G — прямое произведение свободно квазикоммутативного моноида относительно конечного множества $\Lambda' = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ и циклической группы порядка $m \in \mathbb{N}$. Будем рассматривать G как квазикоммутативный моноид с базисным множеством $\Lambda = \Lambda' \cup \{\lambda\}$, где λ — образующая* *группы-сомножителя. Обозначим $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ полный набор корней многочлена $p(z) = z^m - z^{m-1} + 1$. Пусть R — артиново обобщённо-разностное G-кольцо, $\lambda_i^2(R) = \lambda_i(R)$, M — конечно порождённый отлично фильтрованный разностный G-R-модуль. Тогда*

1) $\mathrm{l}_R(M_q) < \infty$ *для всех* $q \in \mathbb{N}$;
2) *найдутся такие* $q_0 \in \mathbb{N}$, $\varphi(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg\varphi(x) \leqslant n$, $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{Q}(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, *что*
$$\mathrm{l}_R(M_q) = \varphi(q) + t_1\zeta_1^q + \ldots + t_m\zeta_m^q \quad \text{для всех} \quad q > q_0.$$

Доказательство. Рассмотрим ассоциированную градуировку модуля M
$$M^{(0)} = 0, \quad M^{(q)} = M_q/M_{q-1}.$$
Для доказательства первой части утверждения теперь достаточно повторить первую часть доказательства теоремы 3.7 и учесть, что
$$\mathrm{l}_R(M_q) = \mathrm{l}_R\biggl(\bigoplus_{0\leqslant i\leqslant q} M^{(i)}\biggr) = \sum_{i=0}^{q} \mathrm{l}_R\bigl(M^{(i)}\bigr).$$

Докажем вторую часть. Для этого докажем следующее утверждение: найдутся $q_M \in \mathbb{N}$, $\psi(x) \in \mathbb{Q}[x]$, $\deg\psi(x) \leqslant n-1$, $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{Q}$, такие что
$$\mathrm{l}_R(M_q) = \psi(q) + h_1\zeta_1^q + \ldots + h_m\zeta_m^q \quad \text{для всех} \quad q > q_M.$$
Рассмотрим $\theta\colon M \to M$, $\theta(x) = \lambda x$. Пусть $G' = \langle\lambda_1, \ldots, \lambda_n\rangle$ и $\mathfrak{D}'$ — кольцо разностных операторов R как G'-кольца. Заметим, что если $\lambda^m = e$, то $\lambda G = G$, $\theta^m = \mathrm{id}$ — тождественное отображение. Значит, θ — изоморфизм модулей.

Пусть
$$N^{(q)} = \theta\bigl(M^{(q)}\bigr).$$
Тогда $N^{(q)} \approxeq M^{(q)}$, и значит,
$$f_N(q) = f_M(q) \quad \text{для всех} \quad q \in \mathbb{N}.$$
В то же время, так как, очевидно, $\lambda G^{(q)} \subset G^{(q+1)} \cup G^{(q+1-m)}$, имеем, что $N^{(q)} \subset \subset M^{(q+1)} \oplus M^{(q+1-m)}$.

Обозначим
$$A = \bigoplus_{q\in\mathbb{N}} A^{(q)}, \quad A^{(q)} = \bigl(M^{(q+1)} \oplus M^{(q-m+1)}\bigr)/N^{(q)}.$$

Тогда действие элементов λ_i и λ опускается очевидным образом на A, $\lambda_i\bigl(x + L^{(q)}\bigr) = \lambda_i x + N^{(q+1)}$. При этом по построению
$$\lambda\bigl(x + L^{(q)}\bigr) = \lambda(x) + R\theta\bigl(M^{(q+1)}\bigr) = \theta(x) + R\theta\bigl(M^{(q+1)}\bigr) = 0 + R\theta\bigl(M^{(q+1)}\bigr),$$
т. е. λ аннулирует A. Значит, ${}_{\mathfrak{D}'}A$ — градуированный модуль и наше обозначение $A^{(q)}$ согласовано с градуировкой. В частности, по теореме 3.7
$$f_A(q) = \psi_A(q) \quad \text{для всех} \quad q > q_A$$

для некоторого многочлена $\psi_A(t) \in \mathbb{Q}[t]$ степени не выше $n-1$ и некоторого $q_A \in \mathbb{N}$. В то же время, так как $M^{(q+1)} + M^{(q+1-m)}$ — конечно порождённый R-модуль, ${}_RA^{(q)}$ конечно порождённый, и значит,

$$\mathrm{l}_R\bigl(A^{(q)}\bigr) < \infty$$

и

$$f_M(q+1)+f_M(q+1-m) = f_N(q)+f_A(q) = f_M(q)+\varphi_A(q) \text{ для всех } q \in \mathbb{N},\ q > q_A.$$

Таким образом, при $q > \max\{q_A, m\}$ имеем разностное уравнение

$$f_M(q+1) - f_M(q) + f_M(q+1-m) = \varphi_A(q),$$

в котором в правой части стоит многочлен степени не выше $\deg\psi \leqslant n$. Перепишем его в виде

$$f_M\bigl((q-m+1)+m\bigr) - f_M\bigl((q-m+1)+(m-1)\bigr) + f_M(q-m+1) = \tilde{\psi}(q-m+1),$$

где

$$\tilde{\psi}(q) = \psi(q+m-1).$$

Характеристический многочлен этого уравнения имеет вид

$$p(x) = x^m - x^{m-1} + 1.$$

Поэтому, так как у p нет кратных корней и 1 не его корень, решение уравнения может быть записано в виде

$$f_M(q) = \psi_M(q) + \sum_{i=1}^{m} h_i\zeta_i^q,$$

где

$$\psi_M(t) \in \mathbb{Q}[t], \quad h_i \in \mathbb{Q}(\zeta_1, \ldots, \zeta_m), \quad \deg\psi_M(t) \leqslant n-1.$$

Вернувшись к нашей фильтрации модуля M, получим ввиду

$$M_q \approxeq M_{q-1} \oplus M^{(q)}$$

соотношение

$$\mathrm{l}_R(M_q) - \mathrm{l}_R(M_{q-1}) = \mathrm{l}_R\bigl(M^{(q)}\bigr) = \psi_M(q) + \sum_{i=1}^{m} h_i\zeta_i^q \text{ для всех } q > q_M.$$

Поскольку $\zeta_i \neq 1$, отсюда следует, что

$$\mathrm{l}_R(M_q) = \varphi_M(q) + \sum_{i=1}^{m} h_{Mi}\zeta_i^q$$

для некоторых

$$\varphi_M(t) \in \mathbb{Q}[t], \quad h_{Mi} \in \mathbb{Q}(\zeta_1, \ldots, \zeta_m), \quad \deg\varphi_M(t) \leqslant \deg\psi_M + 1 \leqslant n. \qquad \square$$

Пример 3.11. Рассмотрим R — кольцо непрерывных функций на «цилиндре» $S^1 \times \mathbb{R}^2 = \{e^{i\varphi}\colon \varphi \in \mathbb{R}\} \times \mathbb{R}^2$. Пусть λ — действие отображения поворота цилиндра на угол $2\pi/m$,

$$\lambda\bigl(f(z,x,y)\bigr) = f\bigl(z * e^{(2\pi/m)i}, x, y\bigr),$$

λ_1 — действие сдвига вдоль оси x цилиндра на 1,

$$\lambda_1\bigl(f(z,x,y)\bigr) = f(z, x+1, y),$$

λ_2 — действие сдвига вдоль оси y цилиндра на 1,

$$\lambda_1\bigl(f(z,x,y)\bigr) = f(z, x, y+1).$$

Пусть $G = \{\lambda^k,\ k = 0, \ldots, m-1\} \subset \mathrm{End}(R)$ — циклическая группа. Рассмотрим обобщённо-разностный G-R-модуль M, порождённый над $\mathfrak{D}$ одной свободной образующей x, лежащей в нулевой компоненте M. Тогда, очевидно,

$$M_q = \bigoplus_{p+r+k\leqslant q,\ 0\leqslant k<m,\ p,r\geqslant 0} R\lambda^k\lambda_1^p\lambda_2^r x.$$

Имеем

$$\begin{aligned}
\mathrm{l}_R(M_q) &= \sum_{p+r+k\leqslant q,\ 0\leqslant k<m,\ p,r\geqslant 0} 1 = \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{q-k}\sum_{r=0}^{q-p-k} 1 = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{q-k}(q-p-k+1) = \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{q-k}(p+1) = \\
&= \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(q-k+2)(q-k+1)}{2} = \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(q+2)(q+1)}{2} + \frac{k^2}{2} - \frac{k(2q+3)}{2} = \\
&= \frac{m(q^2+3q+2)}{2} + \frac{(m(m-1)(2m-1))}{12} - \frac{(2q+3)m(m-1)}{4} = \\
&= \frac{m}{2}q^2 + \frac{m(m-4)}{2}q + \left(\frac{m^3}{6} - m^2 + \frac{11}{6}m\right).
\end{aligned}$$

В данном случае

$$h_{Mi} = 0, \quad \deg\varphi_M(q) = 2.$$

В заключение автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Александру Васильевичу Михалёву, а также участникам семинара «Кольца и модули» кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова за обсуждение затронутых здесь вопросов. Также автор выражает благодарность Александру Борисовичу Левину за полезные рекомендации в процессе написания работы.

Литература

[1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. — М.: Мир, 1972.

[2] Левин А. Б. Характеристические многочлены фильтрованных разностных модулей и расширений разностных полей // Усп. мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 3. — С. 177—178.

[3] Левин А. Б. Характеристические многочлены инверсных разностных модулей и некоторые свойства инверсной разностной размерности // Усп. мат. наук. — 1980. — Т. 35, № 1. — С. 201—202.

[4] Шафаревич И. Р. Основные понятия алгебры. — Ижевск: РХД, 2001.

[5] Cohn R. M. Difference Algebra. — New York: Interscience, 1965.

[6] Herzog F. Systems of algebraic mixed difference equations // Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — Vol. 37. — P. 239—259.

[7] Kondratieva M. V., Levin A. B., Mikhalev A. V., Pankratiev E. V. Differential and Difference Dimension Polynomials. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.

[8] Levin A. B. Difference Algebra. — Berlin: Springer, 2008.

[9] Ritt J. F. Algebraic difference equations // Bull. Am. Math. Soc. — 1934. — Vol. 40. — P. 303—308.

[10] Ritt J. F. Complete difference ideals // Amer. J. Math. — 1941. — Vol. 63. — P. 681—690.

[11] Ritt J. F., Raudenbush H. W. Ideal theory and algebraic difference equations // Trans. Am. Math. Soc. — 1939. — Vol. 46. — P. 445—452.