

Регулярные полигоны с примитивно нормальными и антиаддитивными теориями*

А. А. СТЕПАНОВА

Дальневосточный федеральный университет
e-mail: stepld@mail.primorye.ru

Г. И. БАТУРИН

Дальневосточный федеральный университет
e-mail: gbaturin@list.ru

УДК 510.67+512.56

Ключевые слова: примитивно нормальная теория, антиаддитивная теория, полигон, регулярный полигон.

Аннотация

В настоящей работе исследуются коммутативные моноиды S , над которыми аксиоматизируемый класс регулярных S -полигонов примитивно нормален и антиаддитивен. Доказывается, что примитивная нормальность аксиоматизируемого класса регулярных S -полигонов над коммутативным моноидом S эквивалентна антиаддитивности этого класса и эквивалентна линейной упорядоченности такой полугруппы R , что S -полигон ${}_S R$ является максимальным относительно включения регулярным подполигоном S -полигона ${}_S S$.

Abstract

A. A. Stepanova, G. I. Baturin, Regular S -acts with primitive normal and antiadditive theories, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 223—232.

In this work, we investigate the commutative monoids over which the axiomatizable class of regular S -acts is primitive normal and antiadditive. We prove that the primitive normality of an axiomatizable class of regular S -acts over the commutative monoid S is equivalent to the antiadditivity of this class and it is equivalent to the linearity of the order on a semigroup R such that an S -act ${}_S R$ is a maximal (under the inclusion) regular subact of the S -act ${}_S S$.

1. Введение

В [4] изучены примитивно нормальные, примитивно связные и аддитивные теории S -полигонов. В частности, доказано, что класс всех S -полигонов примитивно нормален тогда и только тогда, когда S — линейно упорядоченный

*Работа поддержана грантом Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00336-а).

моноид. В [5] на языке структуры примитивных эквивалентностей описаны S -полигоны с примитивно нормальной, аддитивной и антиаддитивной теорией. Показано, что класс всех S -полигонов антиаддитивен только для линейно упорядоченного моноида S , т. е. класс всех S -полигонов антиаддитивен тогда и только тогда, когда этот класс примитивно нормален. В данной работе исследуются коммутативные моноиды S , над которыми аксиоматизируемый класс регулярных S -полигонов примитивно нормален и антиаддитивен. Доказывается, что примитивная нормальность аксиоматизируемого класса регулярных S -полигонов над коммутативным моноидом S эквивалентна антиаддитивности этого класса и эквивалентна линейной упорядоченности такой полугруппы R , что S -полигон ${}_S R$ является максимальным относительно включения регулярным подполигоном S -полигона ${}_S S$.

Пусть T — полная теория первого порядка языка L . Зафиксируем некоторую достаточно большую и достаточно насыщенную модель $\mathcal{C}$ теории T , при этом предполагается, что все рассматриваемые модели теории T являются её элементарными подмоделями. Все элементы, кортежи элементов и множества будут браться из $\mathcal{C}$. Кортежи элементов $\langle a_0, \dots, a_{n-1} \rangle$ и переменных $\langle x_0, \dots, x_{n-1} \rangle$ будут обозначаться соответственно через $\bar{a}$ и $\bar{x}$. Пусть $\bar{s} = \langle s_0, \dots, s_{n-1} \rangle$ и $\bar{t} = \langle t_0, \dots, t_{k-1} \rangle$ — кортежи переменных или элементов, A — множество. Запись $\bar{s} \in A$ будет означать, что $s_0, \dots, s_{n-1} \in A$; запись $\bar{s}(i)$ будет иногда использоваться вместо s_i ; вместо $\exists s_0 \dots \exists s_{n-1}$ в формулах будем писать $\exists \bar{s}$; множество $\{s_0, \dots, s_{n-1}, t_0, \dots, t_{k-1}\}$ будет обозначаться через $\bar{s} \cup \bar{t}$; через $|\bar{s}|$ обозначим длину кортежа $\bar{s}$, т. е. $|\bar{s}| = n$. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула языка L , $\mathcal{A}$ — модель теории T , $\bar{a}$ — кортеж элементов из $\mathcal{A}$ и $|\bar{a}| = |\bar{y}|$, то через $\Phi(\mathcal{A}, \bar{a})$ обозначается множество $\{\bar{b} \mid \mathcal{A} \models \Phi(\bar{b}, \bar{a})\}$.

Формула вида

$$\exists \bar{x} (\Phi_0 \wedge \dots \wedge \Phi_k),$$

где Φ_i — атомарные формулы ($0 \leq i \leq k$), называется *примитивной формулой*.

Пусть $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула языка L , $\bar{a}$, $\bar{b}$ — кортежи элементов и $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{y}|$. Множество вида $\Phi(\mathcal{C}, \bar{a})$ называется *примитивным множеством*. Множества $\Phi(\mathcal{C}, \bar{a})$ и $\Phi(\mathcal{C}, \bar{b})$ называются *примитивными копиями*.

Теория T называется *примитивно нормальной*, если для любых примитивных копий X , Y выполнено $X = Y$ или $X \cap Y = \emptyset$. Аксиоматизируемый класс структур K языка L называется *примитивно нормальным*, если теория этого класса примитивно нормальна. Известно (см. [2]), что декартово замкнутый стабильный класс структур является примитивно нормальным.

Эквивалентность α на некотором множестве X n -ок элементов из $\mathcal{C}$, определённая в $\mathcal{C}$ с помощью некоторой примитивной формулы $\Phi(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, называется *примитивной эквивалентностью*. Область определения X такой эквивалентности α определяется в $\mathcal{C}$ примитивной формулой $\Phi(\bar{x}, \bar{x})$ и обозначается через $\text{dom}(\alpha)$. Если $\bar{a} \in X$, то через $\bar{a}/\alpha$ будем обозначать класс эквивалентности α с представителем $\bar{a}$.

Множество X называется Δ -примитивным, если существует такое семейство S примитивных множеств, что

$$X = \bigcap \{Y \mid Y \in S\}.$$

Множество вида $X = X^*/\alpha = \{\bar{a}/\alpha \mid \bar{a} \in X^*\}$, где X^* — Δ -примитивное множество, α — примитивная эквивалентность и выполнено $X^* \subseteq \text{dom}(\alpha)$, называется *обобщённо примитивным множеством*. При этом X^* называется *основой*, а α — *образующей эквивалентностью* обобщённо примитивного множества X .

Теория T называется *антиаддитивной*, если она примитивно нормальна и не существует бесконечного обобщённо примитивного множества, являющегося абелевой группой относительно операции, определённой примитивной формулой. Аксиоматизируемый класс структур K языка L называется *антиаддитивным*, если теория этого класса антиаддитивна.

Напомним некоторые понятия из теории полигонов. Всюду S будет обозначать моноид, 1 — единицу S , E — множество идемпотентов моноида S . Структура $\langle A; s \rangle_{s \in S}$ языка $L_S = \{s \mid s \in S\}$ называется (*левым*) S -полигоном (или просто полигоном), если $s_1(s_2a) = (s_1s_2)a$ и $1a = a$ для любых $s_1, s_2 \in S$, $a \in A$. Через ${}_SA$ будем обозначать полигон $\langle A; s \rangle_{s \in S}$. Все рассматриваемые в работе полигоны являются левыми S -полигонами.

Пусть ${}_SA, {}_SB$ — полигоны. Элемент $a \in A$ называется *act-регулярным*, если существует такой гомоморфизм $\varphi: {}_SSa \rightarrow {}_SS$, что $\varphi(a)a = a$. Полигон ${}_SA$ называется *регулярным*, если все его элементы act-регулярны. Если для элементов $a \in A$ и $b \in B$ существует изоморфизм $f: {}_SSa \rightarrow {}_SSb$, такой что $f(a) = b$, то этот факт будем обозначать через ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSb$.

Заметим, что объединение всех регулярных подполигонов полигона есть регулярный полигон. Объединение всех регулярных подполигонов полигона ${}_SS$ будем обозначать через ${}_SR$. Всюду в работе предполагается, что $R \neq \emptyset$.

Полугруппу T назовём *линейно упорядоченной*, если для любых $a, b \in T$ либо $Ta \subseteq Tb$, либо $Tb \subseteq Ta$. Моноид S называется *регулярно линейно упорядоченным*, если полугруппа Sa линейно упорядоченна для любого $a \in R$.

Будем отличать знаки теоретико-множественного включения $\subseteq$ и $\subseteq_*$.

2. Примитивно нормальные классы регулярных полигонов

Следующим замечанием будем пользоваться без ссылок на него.

Замечание 2.1. Для любых $a \in S$, $e, f \in E$ выполнены следующие соотношения:

- 1) $aS \subseteq eS \iff ea = a$;
- 2) $Sa \subseteq Se \iff ae = a$.

Теорема 2.2. Полигон ${}_S A$ является примитивно нормальным тогда и только тогда, когда для любых попарно непересекающихся конечных множеств индексов I, J, K , любых $s_i, l_j, r_k^1, r_k^2 \in S$ ($i \in I, j \in J, k \in K$), $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in A$, $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = |\bar{a}_3| = n$, если

$${}_S A \models \bigwedge_{i \in I} s_i \bar{a}_1(l_i) = s_i \bar{a}_2(l_i) \wedge \bigwedge_{j \in J} t_j \bar{a}_2(l_j) = t_j \bar{a}_3(l_j) \wedge \bigwedge_{k \in K} \bigwedge_{m \in \{1,2,3\}} r_k^1 \bar{a}_m(l_k) = r_k^2 \bar{a}_m(l_k), \quad (1)$$

где $0 \leq l_i, l_j, l_k \leq n-1$, то существует такой $\bar{b} \in A$, что $|\bar{b}| = n$ и

$${}_S A \models \bigwedge_{i \in I} s_i \bar{a}_3(l_i) = s_i \bar{b}(l_i) \wedge \bigwedge_{j \in J} t_j \bar{b}(l_j) = t_j \bar{a}_1(l_j) \wedge \bigwedge_{k \in K} r_k^1 \bar{b}(l_k) = r_k^2 \bar{b}(l_k). \quad (2)$$

Доказательство. Необходимость. Пусть ${}_S A$ — примитивно нормальный полигон и (1) выполняется для некоторых попарно непересекающихся конечных множеств индексов I, J, K , некоторых $s_i, l_j, r_k^1, r_k^2 \in S$ ($i \in I, j \in J, k \in K$) и $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in A$, $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = |\bar{a}_3| = n$. Введём обозначение:

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow \exists \bar{u} \left(\bigwedge_{i \in I} s_i \bar{x}(l_i) = s_i \bar{u}(l_i) \wedge \bigwedge_{j \in J} t_j \bar{u}(l_j) = t_j \bar{y}(l_j) \wedge \bigwedge_{k \in K} r_k^1 \bar{x}(l_k) = r_k^2 \bar{x}(l_k) \wedge \bigwedge_{k \in K} r_k^1 \bar{u}(l_k) = r_k^2 \bar{u}(l_k) \wedge \bigwedge_{k \in K} r_k^1 \bar{y}(l_k) = r_k^2 \bar{y}(l_k) \right),$$

где $|\bar{x}| = |\bar{u}| = |\bar{y}| = n$. По условию $\bar{a}_1 \in \Phi(A, \bar{a}_1)$ и $\bar{a}_1, \bar{a}_3 \in \Phi(A, \bar{a}_3)$. Тогда в силу примитивной нормальности полигона ${}_S A$ имеем $\bar{a}_3 \in \Phi(A, \bar{a}_1)$, т. е. условие (2) выполняется.

Достаточность. Пусть $\Psi(\bar{x}, \bar{y})$ — примитивная формула,

$$\Psi(\bar{x}, \bar{y}) \Leftrightarrow \exists \bar{u} \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}),$$

где

$$\begin{aligned} \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \Leftrightarrow & \bigwedge_{\langle i, j \rangle \in I_1} s_i^1 \bar{x}(l_i) = t_j^1 \bar{x}(l_j) \wedge \bigwedge_{\langle i, j \rangle \in I_2} s_i^2 \bar{x}(l_i) = t_j^2 \bar{u}(l_j) \wedge \\ & \bigwedge_{\langle i, j \rangle \in I_3} s_i^3 \bar{u}(l_i) = t_j^3 \bar{u}(l_j) \wedge \bigwedge_{\langle i, j \rangle \in I_4} s_i^4 \bar{u}(l_i) = t_j^4 \bar{y}(l_j) \wedge \\ & \bigwedge_{\langle i, j \rangle \in I_5} s_i^5 \bar{y}(l_i) = t_j^5 \bar{y}(l_j) \wedge \bigwedge_{\langle i, j \rangle \in I_6} s_i^6 \bar{y}(l_i) = t_j^6 \bar{x}(l_j), \end{aligned}$$

$s_i^k, t_j^k \in S$ ($\langle i, j \rangle \in I_k, 1 \leq k \leq 6$). Покажем, что ${}_S A$ — примитивно нормальный полигон. Предположим, что $\bar{a}_2 \in \Psi(A, \bar{a}_1)$, $\bar{a}_2, \bar{a}_3 \in \Psi(A, \bar{a}_4)$ и $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3, \bar{a}_4 \in A$. Тогда

$${}_S A \models \Theta(\bar{a}_2, \bar{a}_1, \bar{b}_{21}) \wedge \Theta(\bar{a}_2, \bar{a}_4, \bar{b}_{24}) \wedge \Theta(\bar{a}_3, \bar{a}_4, \bar{b}_{34}) \quad (3)$$

для некоторых $\bar{b}_{21}, \bar{b}_{24}, \bar{b}_{34} \in A$. Достаточно показать, что $\bar{a}_3 \in \Psi(A, \bar{a}_1)$. Из (3) следует, что

$${}_SA \models \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_1} s_i^1 \bar{a}_3(l_i) = t_j^1 \bar{a}_3(l_j) \wedge \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_5} s_i^5 \bar{a}_1(l_i) = t_j^5 \bar{a}_1(l_j), \quad (4)$$

$${}_SA \models \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_2} t_j^2 \bar{b}_{21}(l_j) = s_i^2 \bar{a}_2(l_i) = t_j^2 \bar{b}_{24}(l_j), \quad (5)$$

$${}_SA \models \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_4} s_i^4 \bar{b}_{24}(l_i) = t_j^4 \bar{a}_4(l_j) = s_i^4 \bar{b}_{34}(l_i), \quad (6)$$

$${}_SA \models \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_3} s_i^3 \bar{b}_{km}(l_i) = t_j^3 \bar{b}_{km}(l_j), \quad (7)$$

$${}_SA \models \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_6} s_i^6 \bar{a}_1(l_i) = t_j^6 \bar{a}_2(l_j) = s_i^6 \bar{a}_4(l_i) = t_j^6 \bar{a}_3(l_j) \quad (8)$$

для любых $\langle k, m \rangle \in \{\langle 2, 1 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 4 \rangle\}$. Из условия теоремы и соотношений (5)–(7) следует, что

$${}_SA \models \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_2} t_j^2 \bar{b}_{34}(l_j) = t_j^2 \bar{b}(l_j) \wedge \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_4} s_i^4 \bar{b}(l_i) = s_i^4 \bar{b}_{21}(l_i) \wedge \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_3} s_i^3 \bar{b}(l_i) = t_j^3 \bar{b}(l_j)$$

для некоторого $\bar{b} \in A$. Отсюда и из (3) получаем, что

$${}_SA \models \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_2} s_i^2 \bar{a}_3(l_i) = t_j^2 \bar{b}(l_j) \wedge \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_4} s_i^4 \bar{b}(l_i) = t_j^4 \bar{a}_1(l_j) \wedge \bigwedge_{\langle i,j \rangle \in I_3} s_i^3 \bar{b}(l_i) = t_j^3 \bar{b}(l_j).$$

Из данного соотношения, (4) и (8) следует, что ${}_SA \models \Theta(\bar{a}_3, \bar{a}_1, \bar{b})$, т. е. что $\bar{a}_3 \in \Psi(A, \bar{a}_1)$. Таким образом, доказано, что ${}_SA$ — примитивно нормальный полигон. $\square$

Утверждение 2.3 [6]. Пусть ${}_SA$ — полигон, $a \in A$. Элемент a *act-регулярен* тогда и только тогда, когда существует идемпотент $e \in R$, такой что ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe$.

Утверждение 2.4 [1]. Если класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем, то $R = \bigcup \{e_i R \mid 1 \leq i \leq n\}$ для некоторых $n \geq 1$, $e_i \in R$, $e_i^2 = e_i$ ($1 \leq i \leq n$).

Лемма 2.5. Пусть класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем и примитивно нормален. Тогда R — регулярно линейно упорядоченный моноид.

Доказательство. Предположим, что $Sc \not\leq Sb$ и $Sb \not\leq Sc$ для некоторых $b, c \in Sa$ и $a \in R$. Существует такой $e \in E$, что ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe$. Пусть ${}_SSe_i$ ($1 \leq i \leq 3$) — попарно непересекающиеся копии полигона ${}_SSe$, Θ — конгруэнция полигона $\bigsqcup_{i=1}^3 {}_SSe_i$, порождённая множеством $\{\langle ce_1, ce_2 \rangle, \langle be_2, be_3 \rangle\}$. Через ${}_SA$ обозначим полигон $\bigsqcup_{i=1}^3 {}_SSe_i / \Theta$, через d / Θ — класс конгруэнции Θ с представителем $d \in \bigsqcup_{i=1}^3 {}_SSe_i$. Пусть

$$\Phi(x, y) \equiv \exists u (bu = x \wedge cu = y).$$

Тогда

$${}_SA \models \Phi(be_1/\Theta, ce_1/\Theta) \wedge \Phi(be_2/\Theta, ce_1/\Theta) \wedge \Phi(be_2/\Theta, ce_3/\Theta).$$

В силу примитивной нормальности класса $\mathfrak{R}$ отсюда следует, что

$${}_SA \models \Phi(be_1/\Theta, ce_3/\Theta).$$

Пусть $u^0 \in \bigcup_{i=1}^3 Se_i$ такой, что ${}_SA \models bu^0/\Theta = be_1/\Theta \wedge cu^0/\Theta = ce_3/\Theta$. Тогда $be_1/\Theta, ce_3/\Theta \in Su^0/\Theta$, что невозможно, так как $be_1/\Theta = \{be_1\}$, $ce_3/\Theta = \{ce_3\}$ и полигоны ${}_S Se_1$, ${}_S Se_3$ не пересекаются. $\square$

Лемма 2.6. Пусть S — коммутативный моноид, класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем и примитивно нормален. Тогда для любых идемпотентов $e, f \in R$ либо $Se \subseteq Sf$, либо $Sf \subseteq Se$.

Доказательство. Предположим, что $Se \not\subseteq Sf$ и $Sf \not\subseteq Se$ для некоторых идемпотентов $e, f \in R$. Заметим, что $ef \in E$. Если $Sef = Sf$, то $ef = fef = f$, следовательно, $Sf \subseteq Se$, противоречие. Следовательно, $Sef \subset Sf$. Аналогично $Sef = Sfe \subset Se$. Пусть

$$\Phi(x, y) \Leftrightarrow \exists u (eu = ex \wedge fu = fy).$$

Тогда

$${}_SR \models \Phi(e, e) \wedge \Phi(f, f) \wedge \Phi(f, e).$$

В силу примитивной нормальности класса $\mathfrak{R}$ отсюда следует, что ${}_SR \models \Phi(e, f)$. Пусть $u^0 \in R$ такой, что ${}_SR \models e = eu^0 \wedge f = fu^0$. Тогда $e, f \in Su^0$. Следовательно, по лемме 2.5 либо $Se \subseteq Sf$, либо $Sf \subseteq Se$, что противоречит предположению. $\square$

Теорема 2.7. Пусть S — коммутативный моноид и класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем. Класс $\mathfrak{R}$ примитивно нормален тогда и только тогда, когда полугруппа R является линейно упорядоченной.

Доказательство. Необходимость. Пусть класс $\mathfrak{R}$ примитивно нормален. Покажем, что полугруппа R является линейно упорядоченной. Поскольку класс $\mathfrak{R}$ аксиоматизируем, то по утверждению 2.4 $R = \bigcup \{e_i R \mid 1 \leq i \leq m\}$ для некоторых $m \geq 1$ и идемпотентов $e_i \in R$ ($1 \leq i \leq m$). Так как $sf = fsf \in fR$ для любого $s \in S$, то $fR = Sf$, где $f \in R \cap E$. Тогда в силу коммутативности моноида S и по лемме 2.6 $R = eR = Se$ для некоторого идемпотента $e \in R$. Таким образом, по лемме 2.5 R — линейно упорядоченная полугруппа.

Достаточность. Пусть ${}_SA \in \mathfrak{R}$, I, J, K — попарно непересекающиеся конечные множества индексов, $s_i, l_j, r_k^1, r_k^2 \in S$ ($i \in I, j \in J, k \in K$), $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \in A$, $|\bar{a}_1| = |\bar{a}_2| = |\bar{a}_3| = n$ и выполняется (1), где $0 \leq l_i, l_j, l_k \leq n-1$. По утверждению 2.3 существуют такие кортежи идемпотентов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \in R$, что $|\bar{e}_1| = |\bar{e}_2| = |\bar{e}_3| = n$ и ${}_S S\bar{a}_i(j) \xrightarrow{\sim} {}_S S\bar{e}_i(j)$ для любых i, j , $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq n-1$. Тогда $\bar{a}_i(j) = \bar{e}_i(j)\bar{a}_i(j)$ для любых i, j , $0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq n-1$.

Будем строить кортеж $\bar{b}$, для которого выполняется соотношение (2).

Зафиксируем $l \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Введём обозначения: $I_l = \{i \in I \mid l_i = l\}$, $J_l = \{j \in J \mid l_j = l\}$. Пусть $1 \leq k \leq 3$. Так как по условию множество $\{Sd \mid Sd \subseteq Se_k(l)\}$ является линейно упорядоченным относительно включения, то существуют такие $s^k, t^k \in S$, что $Ss^k e_k(l) = \max\{Ss_i e_k(l) \mid i \in I_l\}$ и $St^k e_k(l) = \max\{St_j e_k(l) \mid j \in J_l\}$. Тогда для любого $i \in I_l$ и $j \in J_l$ существуют такие $r_i^k \in S$ и $r_j^k \in S$, что $s_i \bar{e}_k(l) = r_i^k s^k \bar{e}_k(l)$ и $t_j \bar{e}_k(l) = r_j^k t^k \bar{e}_k(l)$, а следовательно, $s_i \bar{a}_k(l) = r_i^k s^k \bar{a}_k(l)$ и $t_j \bar{a}_k(l) = r_j^k t^k \bar{a}_k(l)$.

Предположим, что

$$S\bar{e}_1(l) \subseteq S\bar{e}_2(l), \quad S\bar{e}_3(l) \subseteq S\bar{e}_2(l), \quad (9)$$

т. е. $\bar{e}_k(l) = \bar{e}_2(l)\bar{e}_k(l)$ и $\bar{a}_k(l) = \bar{e}_2(l)\bar{a}_k(l)$ для любого k , $1 \leq k \leq 3$. В силу линейной упорядоченности полугруппы $S\bar{e}_2(l)$ без ограничения общности можно считать, что $S\bar{e}_1(l) \subseteq Se_3(l)$, т. е. $\bar{e}_1(l) = \bar{e}_1(l)\bar{e}_3(l)$. Предположим, что $St^2 \bar{e}_2(l) \subseteq Ss^2 \bar{e}_2(l)$, т. е. $t^2 \bar{e}_2(l) = r^2 s^2 \bar{e}_2(l)$ для некоторого $r^2 \in S$. Пусть $j \in J_l$. Тогда $t_j \bar{e}_2(l) = r_j^2 t^2 \bar{e}_2(l) = r_j^2 r^2 s^2 \bar{e}_2(l)$ и $t_j \bar{a}_2(l) = r_j^2 r^2 s^2 \bar{a}_2(l)$. Следовательно, используя (1), получаем

$$\begin{aligned} t_j \bar{a}_3(l) &= t_j \bar{a}_2(l) = r_j^2 r^2 s^2 \bar{a}_2(l) = r_j^2 r^2 s^2 \bar{a}_1(l) = \\ &= r_j^2 r^2 s^2 \bar{e}_2(l) \bar{a}_1(l) = t_j \bar{e}_2(l) \bar{a}_1(l) = t_j \bar{a}_1(l), \end{aligned}$$

т. е. $t_j \bar{a}_3(l) = t_j \bar{a}_1(l)$. Полагаем $\bar{b}(l) = \bar{a}_3(l)$. Если $Ss^2 \bar{e}_2(l) \subseteq St^2 \bar{e}_2(l)$, то, рассуждая аналогично, получаем, что $\bar{b}(l) = \bar{a}_1(l)$.

Пусть (9) не выполняется. Тогда без ограничения общности можно считать, что

$$S\bar{e}_3(l) \subseteq S\bar{e}_1(l), \quad S\bar{e}_2(l) \subseteq S\bar{e}_1(l),$$

т. е. $\bar{e}_k(l) = \bar{e}_1(l)\bar{e}_k(l)$ и $\bar{a}_k(l) = \bar{e}_1(l)\bar{a}_k(l)$ для любого k , $1 \leq k \leq 3$.

Предположим, что $St^1 \bar{e}_1(l) \subseteq Ss^1 \bar{e}_1(l)$, т. е. $t^1 \bar{e}_1(l) = r^1 s^1 \bar{e}_1(l)$ для некоторого $r^1 \in S$. Пусть $j \in J_l$. Тогда $t_j \bar{e}_1(l) = r_j^1 t^1 \bar{e}_1(l) = r_j^1 r^1 s^1 \bar{e}_1(l)$ и $t_j \bar{a}_1(l) = r_j^1 r^1 s^1 \bar{a}_1(l)$. Следовательно, используя (1), получаем

$$\begin{aligned} t_j \bar{a}_3(l) &= t_j \bar{a}_2(l) = t_j \bar{e}_1(l) \bar{a}_2(l) = r_j^1 r^1 s^1 \bar{e}_1(l) \bar{a}_2(l) = \\ &= r_j^1 r^1 s^1 \bar{a}_2(l) = r_j^1 r^1 s^1 \bar{a}_1(l) = t_j \bar{a}_1(l), \end{aligned}$$

т. е. $t_j \bar{a}_3(l) = t_j \bar{a}_1(l)$. Полагаем $\bar{b}(l) = \bar{a}_3(l)$.

Предположим, что $Ss^1 \bar{e}_1(l) \subseteq St^1 \bar{e}_1(l)$, т. е. $s^1 \bar{e}_1(l) = r_1 t^1 \bar{e}_1(l)$ для некоторого $r_1 \in S$. Пусть $i \in I_l$. Тогда $s_i \bar{e}_1(l) = r_i^1 s^1 \bar{e}_1(l) = r_i^1 r_1 t^1 \bar{e}_1(l)$. Следовательно, используя (1), получаем

$$\begin{aligned} s_i \bar{a}_3(l) &= s_i \bar{e}_1(l) \bar{a}_3(l) = r_i^1 r_1 t^1 \bar{e}_1(l) \bar{a}_3(l) = r_i^1 r_1 t^1 \bar{e}_1(l) \bar{a}_2(l) = \\ &= s_i \bar{e}_1(l) \bar{a}_2(l) = s_i \bar{a}_2(l) = s_i \bar{a}_1(l), \end{aligned}$$

т. е. $s_i \bar{a}_3(l) = s_i \bar{a}_1(l)$. Полагаем $\bar{b}(l) = \bar{a}_1(l)$.

Таким образом, кортеж $\bar{b}$, для которого выполняется соотношение (2), построен. $\square$

Следующий пример показывает, что условие коммутативности моноида S в теореме 2.7 существенно.

Пусть $S = \{e_1, e_2\} \cup T \cup \{1\}$, где T — полугруппа со свободными порождающими $\{a, b\}$ и определяющими соотношениями $ab^2 = ab$, $ba^2 = ba$. Бинарная операция на S задаётся следующим образом: $se_i = e_i$, $e_it = e_i$ для любых $i \in \{1, 2\}$, $s \in S$, $t \in T$; 1 — единичный элемент. Легко проверить, что S — моноид относительно введённой операции и $E = \{e_1, e_2, 1\}$. Заметим, что $Se_i = \{e_i\}$ для любого $i \in \{1, 2\}$. Так как $ba^2 = ba$ и $ba \neq b$, то соотношение ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SS \cdot 1$ не выполняется. Так как $a^2 \neq a$ и $ae_i = e_i$, то соотношение ${}_SSa \xrightarrow{\sim} {}_SSe_i$ не выполняется ни для какого i , $i \in \{1, 2\}$. Аналогично показывается ложность соотношений ${}_SSb \xrightarrow{\sim} {}_SS \cdot 1$ и ${}_SSb \xrightarrow{\sim} {}_SSe_i$ ($i \in \{1, 2\}$). Тогда $R = \{e_1, e_2\}$. Ясно, что полугруппа R не является линейно упорядоченной. Для любого полигона ${}_SA \in \mathfrak{R}$ и любых $a \in A$, $s \in S$ выполняется равенство $sa = a$, т. е. любой регулярный полигон представим в виде копроизведения одноэлементных полигонов. Следовательно, класс $\mathfrak{R}$ аксиоматизируем и примитивно нормален.

3. Антиаддитивные классы регулярных полигонов

Аксиоматизируемые классы регулярных полигонов изучались в [3]. В частности, в этой работе доказано следующее утверждение.

Утверждение 3.1. Если класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем, то $R = \bigcup \{e_i R \mid 1 \leq i \leq n\}$ для некоторых $n \geq 1$, $e_i \in R$, $e_i^2 = e_i$ ($1 \leq i \leq n$).

Из этого утверждения получаем следствие.

Следствие 3.2. Если класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем, моноид S коммутативен и R — линейно упорядоченная полугруппа, то $R = eR$ для некоторого идемпотента $e \in R$.

Всюду ниже T будет обозначать теорию аксиоматизируемого примитивно нормального класса $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов, S — коммутативный моноид и R — линейно упорядоченная полугруппа.

Доказательство следующей леммы является модификацией доказательства леммы 2 из [5].

Лемма 3.3. Пусть $\Phi(x_0, \bar{x})$ — конъюнкция атомарных формул, $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Тогда существуют такие формула $\Psi(\bar{x})$, являющаяся конъюнкцией атомарных формул, $s, t \in S$ и i , $0 \leq i \leq n$, что в теории T выполняется

$$\Phi(x_0, \bar{x}) \equiv \Psi(\bar{x}) \wedge tx_i = sx_0.$$

Доказательство. По следствию 3.2 существует идемпотент $e \in R$, такой что $R = eR$. Тогда

$$T \vdash \forall x (x = ex). \quad (10)$$

Пусть $\Phi(x_0, \bar{x})$ — конъюнкция атомарных формул, $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Доказательство леммы проведём индукцией по числу k атомарных подформул формулы

$\Phi(x_0, \bar{x})$, содержащих переменную x_0 . Предположим, что

$$\Phi(x_0, \bar{x}) \equiv \Psi_1(x_0, \bar{x}) \wedge t_1 x_i = s_1 x_0,$$

где $\Psi_1(x_0, \bar{x})$ — конъюнкция атомарных формул, $s_1, t_1 \in S$, $0 \leq i \leq n$. По предположению индукции $\Psi_1(x_0, \bar{x}) \equiv \Psi_2(\bar{x}) \wedge t_2 x_j = s_2 x_0$ для некоторой формулы $\Psi_2(\bar{x})$, являющейся конъюнкцией атомарных формул, некоторых $s_2, t_2 \in S$ и j , $0 \leq j \leq n$. В силу линейной упорядоченности полугруппы R выполняется либо $Ss_1e \subseteq Ss_2e$, либо $Ss_2e \subseteq Ss_1e$. Пусть, например, $Ss_1e \subseteq Ss_2e$. Тогда существует такой $r \in S$, что $s_1e = rs_2e$. Следовательно, ввиду (10) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(x_0, \bar{x}) &\equiv \Psi_2(\bar{x}) \wedge t_2 x_j = s_2 x_0 \wedge t_1 x_i = s_1 x_0 \equiv \\ &\equiv \Psi_2(\bar{x}) \wedge rt_2 x_j = t_1 x_i \wedge t_2 x_j = s_2 x_0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

Доказательство следующей леммы в точности совпадает с доказательством леммы 3 из [5].

Лемма 3.4. Пусть $\Phi(\bar{x})$ не тождественно ложная примитивная формула, $\bar{x} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Тогда существуют формула $\Phi_0(\bar{x})$, являющаяся конъюнкцией атомарных формул, и примитивные формулы $\Phi_i(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, такие что в теории T выполняется

$$\Phi(\bar{x}) \equiv \Phi_0(\bar{x}) \wedge \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \Phi_i(x_i).$$

Лемма 3.5. Пусть $\bar{a} \in C$, $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{a})$ — примитивная формула, определяющая на бесконечном обобщённо примитивном множестве X бинарную операцию $+$: $\bar{x} + \bar{y} = \bar{z}$. Тогда множество X не является группой относительно этой операции.

Доказательство. Пусть $\bar{a} \in C$, $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{a})$ — примитивная формула, определяющая на бесконечном обобщённо примитивном множестве X структуру группы относительно операции $+$, X^* — основа, α — образующая эквивалентность обобщённо примитивного множества X , $|\bar{a}| = |\bar{u}|$. По лемме 3.4 в теории T выполняется

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) \equiv \Phi_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) \wedge \Phi_1(\bar{x}) \wedge \Phi_2(\bar{y}) \wedge \Phi_3(\bar{z}) \wedge \Phi_4(\bar{u})$$

для некоторых формул $\Phi_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$, $\Phi_1(\bar{x})$, $\Phi_2(\bar{y})$, $\Phi_3(\bar{z})$, $\Phi_4(\bar{u})$, где $\Phi_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$ — конъюнкция атомарных формул, $\Phi_1(\bar{x})$, $\Phi_2(\bar{y})$, $\Phi_3(\bar{z})$, $\Phi_4(\bar{u})$ — примитивные формулы. По лемме 3.3 существуют формула $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$, $t_i, s_i \in S$ и $\bar{w} = \langle w_1, \dots, w_n \rangle$, где $w_i \in \bar{x} \cup \bar{y} \cup \bar{z} \cup \bar{u}$ ($1 \leq i \leq n$), такие что $\Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u})$ — конъюнкция атомарных формул и в теории T выполняется

$$\Phi_0(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) \equiv \Psi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{u}) \wedge \Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}),$$

где

$$\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}) \equiv \bigwedge_{1 \leq i \leq n} t_i z_i = s_i w_i.$$

Пусть $\bar{b}, \bar{c} \in X^*$, $\bar{0}/\alpha$ — нулевой элемент группы X . Предположим, что $t_i z_i = s_i x_j$ — атомарная подформула формулы $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$. Так как $\bar{0}/\alpha + \bar{b}/\alpha = \bar{b}/\alpha$, то $t_i \bar{b}(i) = s_i \bar{0}(j)$. Так как

$$\bar{0}/\alpha + \bar{c}/\alpha = \bar{c}/\alpha + \bar{0}/\alpha = \bar{c}/\alpha, \quad (11)$$

то $t_i \bar{c}(i) = s_i \bar{0}(j) = s_i \bar{c}(j)$. Следовательно, $t_i \bar{b}(i) = s_i \bar{c}(j)$. Предположим, что $t_i z_i = s_i y_j$ — атомарная подформула формулы $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$. Так как

$$\bar{b}/\alpha + \bar{0}/\alpha = \bar{b}/\alpha, \quad (12)$$

то $t_i \bar{b}(i) = s_i \bar{0}(j)$. Если $t_i z_i = s_i z_j$ — атомарная подформула формулы $\Theta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u})$, то из (11) следует равенство $t_i \bar{b}(i) = s_i \bar{a}(j)$. Кроме того, из (11) и (12) получаем, что

$$\mathcal{C} \models \Psi(\bar{c}, \bar{0}, \bar{a}) \wedge \Phi_1(\bar{c}) \wedge \Phi_2(\bar{0}) \wedge \Phi_3(\bar{b}) \wedge \Phi_4(\bar{a}).$$

Тогда $\bar{c}/\alpha + \bar{0}/\alpha = \bar{b}/\alpha$, т. е. $\bar{c}/\alpha = \bar{b}/\alpha$ и $|X| = 1$. Противоречие. $\square$

Из леммы 3.5 следует теорема.

Теорема 3.6. Если S — коммутативный моноид, класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем и примитивно нормален, то класс $\mathfrak{R}$ антиаддитивен.

Из теорем 2.7, 3.6 и определения антиаддитивного класса получаем следствие.

Следствие 3.7. Пусть S — коммутативный моноид и класс $\mathfrak{R}$ регулярных полигонов аксиоматизируем. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) класс $\mathfrak{R}$ примитивно нормален;
- 2) класс $\mathfrak{R}$ антиаддитивен;
- 3) полугруппа R линейно упорядоченна.

Литература

- [1] Михалёв А. В., Овчинникова Е. В., Палютин Е. А., Степанова А. А. Теоретико-модельные свойства регулярных S -полигонов // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2004. — Т. 10, вып. 4. — С. 107—157.
- [2] Палютин Е. А. Примитивно связанные теории // *Алгебра и логика.* — 2000. — Т. 39, № 2. — С. 145—169.
- [3] Степанова А. А. Аксиоматизируемость и модельная полнота класса регулярных полигонов // *Сиб. мат. журн.* — 1994. — Т. 35, № 1. — С. 181—193.
- [4] Степанова А. А. Примитивно связанные и аддитивные теории полигонов // *Алгебра и логика.* — 2006. — Т. 45, № 3. — С. 300—313.
- [5] Степанова А. А. Полигоны с примитивно нормальными и аддитивными теориями // *Алгебра и логика.* — 2008. — Т. 47, № 4. — С. 491—508.
- [6] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. *Monoids, Acts and Categories.* — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.