Представления альтернативных алгебр и супералгебр*

М. Н. ТРУШИНА
Московский городской педагогический университет
e-mail: mtrushina@yahoo.co.uk

И. П. ШЕСТАКОВ
Институт математики им. С. Л. Соболева
Сибирского отделения Российской академии наук;
Университет Сан-Паулу, Сан-Паулу, Бразилия
e-mail: shestak@ime.usp.br

УДК 512.554.5

Ключевые слова: альтернативная алгебра, альтернативная супералгебра, представления.

Аннотация

Данная статья — обзор результатов о представлениях альтернативных алгебр и супералгебр. В частности, представлены новые результаты авторов по этой теме.

Abstract

M. N. Trushina, I. P. Shestakov, Representations of alternative algebras and superalgebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 1, pp. 233—246.

The paper is a survey of results on representations of alternative algebras and superalgebras. In particular, new results of the authors on the subject are presented.

Посвящается профессору А. В. Михалёву в связи с его 70-летием

Альтернативные алгебры являются ближайшим обобщением ассоциативных алгебр. Алгебра A называется альтернативной, если она удовлетворяет тождествам

$$(x,x,y)=0 \quad \text{(левая альтернативность)},$$
$$(x,y,y)=0 \quad \text{(правая альтернативность)},$$

*Первый автор поддержан Научно-исследовательским фондом штата Сан-Паулу (Бразилия), грант 2008/50141-1. Второй автор поддержан Научно-исследовательским фондом штата Сан-Паулу (Бразилия), грант 2010/50347-9, и Национальным советом Бразилии по научно-техническому развитию, грант 305344/2009-9.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 1, с. 233—246.

где $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор элементов x, y, z. Классическим примером неассоциативной альтернативной алгебры является восьмимерная алгебра октонионов (чисел Кэли), или, более общо, алгебра Кэли—Диксона.

Структурная теория конечномерных альтернативных алгебр восходит к М. Цорну: если A — конечномерная альтернативная алгебра, то A содержит единственный максимальный нильпотентный идеал R (ниль-радикал алгебры A) и фактор-алгебра A/R полупроста [32]. Любая полупростая алгебра разлагается в прямую сумму идеалов, являющихся простыми алгебрами [31]. Всякая простая альтернативная алгебра либо ассоциативна, либо является алгеброй Кэли—Диксона над своим центром (см. [25, 31]). С основными результатами теории бесконечномерных альтернативных алгебр можно ознакомиться по [3].

Теория представлений альтернативных алгебр началась с работ Р. Д. Шейфера [26] и Н. Джекобсона [20], где изучались бипредставления конечномерных альтернативных алгебр. В частности, в [26] было показано, что любое бипредставление полупростой альтернативной алгебры характеристики 0 (без каких-либо ограничений на размерность) вполне приводимо, а в [20] были классифицированы неприводимые альтернативные бимодули над конечномерными алгебрами. Следует отметить, что, в отличие от ассоциативного случая, для неассоциативных алгебр бипредставление является более естественным и легко определяемым понятием, чем одностороннее (правое или левое) представление. Правые представления альтернативных алгебр изучались в работах К. А. Жевлакова [2] и А. М. Слинько и И. П. Шестакова [8]. В частности, в [8] было получено некоторое описание правых неприводимых альтернативных модулей и дана характеризация квазирегулярного радикала в терминах теории представлений. Однако даже в конечномерном случае классификация правых неприводимых альтернативных модулей остаётся незавершённой. Например, до сих пор неясно, является ли левое регулярное представление алгебры Кэли—Диксона (оно неприводимо) её правым альтернативным представлением.

Простые альтернативные супералгебры были описаны в статьях Е. И. Зельманова и И. П. Шестакова [4] (в случае характеристики, отличной от 2, 3) и И. П. Шестакова [11] (для произвольной характеристики). При этом оказалось, что нетривиальные примеры таких супералгебр появляются только в случаях характеристики 2 и 3. Изучение представлений альтернативных супералгебр началось с работы Н. А. Писаренко [7]. В ней были описаны конечномерные неприводимые альтернативные супербимодули над конечномерными простыми альтернативными супералгебрами характеристики, отличной от 2 и 3. Оказалось, что в этом случае нетривиальные неассоциативные альтернативные супербимодули появляются только для минимальной нетривиальной простой супералгебры — «удвоенного поля» $F[u] = F \oplus Fu$, $u^2 = 1$. В [9, 22] были описаны неприводимые бимодули над простыми альтернативными супералгебрами $B(1|2)$ и $B(4|2)$ характеристики 3 и размерностей 3 и 6.

Целью нашей работы является, во-первых, описание неприводимых бипредставлений альтернативных алгебр в любой размерности и характеристике и, во-вторых, описание конечномерных неприводимых альтернативных супербимодулей. Мы описываем также неприводимые супербимодули любой размерности и характеристики над простыми альтернативными супералгебрами. Для завершения описания неприводимых супербимодулей в бесконечномерном случае остаётся описать такие супербимодули (или доказать их отсутствие) над первичными локально нильпотентными альтернативными супералгебрами характеристики 3.

1. Бипредставления альтернативных алгебр

Определение бимодуля в многообразии алгебр восходит к С. Эйленбергу [17] (см. также [3, 5, 21, 27]).

Пусть A — альтернативная алгебра над полем F и M — некоторый A-бимодуль, т. е. M есть векторное пространство над F, на котором определены левое и правое билинейные умножения на элементы алгебры A:

$$A \otimes_F M \to M, \quad (a \otimes m) \mapsto a \cdot m, \quad M \otimes_F A \to M, \quad (m \otimes a) \mapsto m \cdot a,$$

где $a \in A$, $m \in M$. Определим на прямой сумме векторных пространств $E = A \oplus M$ умножение $*$, полагая

$$(a_1 + m_1) * (a_2 + m_2) = a_1 a_2 + a_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot a_2,$$

где $a_1, a_2 \in A$, $m_1, m_2 \in M$. Тем самым E становится алгеброй над F, в которой A является подалгеброй, а M — идеалом с нулевым умножением. Алгебра E называется *расщепляемым нулевым расширением* алгебры A с помощью бимодуля M. Бимодуль M называется альтернативным A-бимодулем, если расщепляемое нулевое расширение $E = A \oplus M$ является альтернативной алгеброй. Нетрудно убедиться, что бимодуль M альтернативен тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in A$, $m \in M$ в алгебре E выполнены равенства

$$(a, b, m) = (b, m, a) = (m, a, b), \quad (m, a, a) = 0.$$

Первостепенной задачей теории (би)представлений в любом классе алгебр является описание неприводимых (би)модулей. Для алгебры A через $\operatorname{Reg} A$ обозначим *регулярный бимодуль* $M = A$ с действием A, индуцированным умножением в A. Ясно, что бимодуль $\operatorname{Reg} \mathbb{O}$ для алгебры Кэли—Диксона $\mathbb{O}$ является точным неприводимым альтернативным неассоциативным бимодулем. Другой пример неассоциативного альтернативного бимодуля — это бимодуль Кэли $\operatorname{Cay} \mathbb{H}$ над алгеброй обобщённых кватернионов $\mathbb{H}$, который определяется следующим образом. Пусть $a \mapsto \bar{a}$ — симплектическая инволюция в $\mathbb{H}$, L — неприводимый левый ассоциативный $\mathbb{H}$-модуль с действием $(a, m) \mapsto am$. Тогда $\operatorname{Cay} \mathbb{H} = L$ с бимодульными операциями

$$m \cdot a = am, \quad a \cdot m = \bar{a} m.$$

Если $\mathbb{H}$ — тело, то $\dim(\operatorname{Cay} \mathbb{H}) = 4$, если же алгебра $\mathbb{H}$ расщепляема над F (т. е. $\mathbb{H} \cong \mathrm{M}_2(F)$), то $\dim(\operatorname{Cay} \mathbb{H}) = 2$.

Из результатов упомянутых во введении работ Р. Шейфера [26] и Н. Джекобсона [20] вытекает следующее описание конечномерных неприводимых альтернативных бимодулей.

Теорема 1. *Пусть A — конечномерная альтернативная алгебра над полем F характеристики, отличной от 2, и V — неприводимый альтернативный точный A-бимодуль. Тогда имеет место один из следующих случаев*:

- *A ассоциативна и V — ассоциативный бимодуль,*
- $A = \mathbb{O}$ *и* $V = \operatorname{Reg}\mathbb{O}$,
- $A = \mathbb{H}$ *и* $V = \operatorname{Cay}\mathbb{H}$.

Неприводимые бимодули над алгеброй обобщённых кватернионов было описаны в [20] в предположении, что основное поле имеет характеристику, отличную от 2, и централизует бимодуль. В [11] И. П. Шестаков обобщил этот результат, сняв ограничения на характеристику, размерность и условие централизуемости. Недавно авторами получено окончательное описание неприводимых альтернативных бимодулей.

Теорема 2 [28]. *Пусть A — альтернативная алгебра и V — неприводимый альтернативный точный A-бимодуль* (*любой размерности и характеристики*). *Тогда справедливо заключение теоремы* 1.

2. Альтернативные супералгебры

Супералгебры являются естественным обобщением алгебр: каждая альтернативная супералгебра есть прямая сумма альтернативной алгебры и альтернативного бимодуля над ней. Дадим точные определения. Алгебра A называется $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгеброй или супералгеброй, если $A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1}$, где $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$, $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Подпространства $A_{\bar 0}$ и $A_{\bar 1}$ называются соответственно чётной и нечётной частями супералгебры A. Например, алгебра Грассмана $G = G_{\bar 0} \oplus G_{\bar 1}$ является супералгеброй, если через $G_{\bar 0}$ ($G_{\bar 1}$) обозначить подмодуль, порождённый словами чётной (нечётной) длины от порождающих алгебры G. Супералгебра $A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1}$ называется альтернативной супералгеброй, если её грассманова оболочка $G(A) = G_{\bar 0} \otimes A_{\bar 0} + G_{\bar 1} \otimes A_{\bar 1}$ является альтернативной алгеброй. Из этого определения следует, что альтернативные супералгебры определяются тождествами

$$
\begin{aligned}
&(a_i, a_j, a_k) = (-1)^{jk+1}(a_i, a_k, a_j),\\
&(a_i, a_j, a_k) = (-1)^{ij+1}(a_j, a_i, a_k),\\
&(a_0, a_0, A) = 0,
\end{aligned}
$$

где $a_s \in A_s$, $s = i, j, k \in \{\bar 0, \bar 1\}$.

Пусть A — некоторая алгебра. Обозначим через $A[\sqrt{1}\,]$ супералгебру, полученную «удвоением» алгебры A:

$$A[\sqrt{1}\,] = A \oplus A \cdot u, \quad (A[\sqrt{1}\,])_{\bar 0} = A, \quad (A[\sqrt{1}\,])_{\bar 1} = A \cdot u,$$

где u $(=\sqrt{1})$ — нечётный центральный элемент, $u^2 = 1$.

С. Т. С. Уолл [30] доказал, что всякая простая конечномерная ассоциативная супералгебра над алгебраически замкнутым полем F изоморфна одной из следующих супералгебр:

- $A = \mathrm{M}_{m|n}(F), \quad A_{\bar 0} = \left\{ \begin{pmatrix} \star & 0 \\ 0 & \star \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\}, \quad A_{\bar 1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \star \\ \star & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right\},$
- $A = \mathrm{M}_n(f)[\sqrt{1}\,]$ — удвоенная матричная алгебра.

В [4] доказано, что всякая нетривиальная простая альтернативная супералгебра характеристики, отличной от 2 и 3, является ассоциативной. В частности, нетривиальные простые конечномерные альтернативные супералгебры над алгебраически замкнутым полем F характеристики, отличной от 2, 3, исчерпываются супералгебрами $\mathrm{M}_{m|n}$, $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}\,]$.

Простые альтернативные супералгебры характеристики 2 и 3 описаны в [11]. В этих случаях появляются неассоциативные нетривиальные простые супералгебры.

Над полем характеристики 2 всякая такая супералгебра изоморфна одной из следующих двух супералгебр, полученных из алгебры Кэли—Диксона:

- супералгебра Кэли—Диксона $\mathbb{O}(4|4) = \mathbb{O} = \mathbb{H} + v\mathbb{H}$ с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой, индуцированной процессом Кэли—Диксона, применённым к подалгебре обобщённых кватернионов $\mathbb{H}$,
- удвоенная алгебра Кэли—Диксона $\mathbb{O}[\sqrt{1}\,]$.

Заметим, что обе эти супералгебры являются альтернативными алгебрами.

Простая неассоциативная нетривиальная альтернативная супералгебра характеристики 3 изоморфна одной из следующих супералгебр (см. [11, 12]):

- *супералгебра* $B(1|2)$. Пусть V — двумерное векторное пространство над полем F с ненулевой кососимметрической билинейной формой $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Унитальная супералгебра $B(1|2) = F \cdot 1 \oplus V$ с единицей 1 задана градуировкой
$$B(1|2)_{\bar 0} = F \cdot 1, \quad B(1|2)_{\bar 1} = V$$
и суперкоммутативным произведением $xy = \langle x, y \rangle \cdot 1$ для $x, y \in V$;
- *супералгебра* $B(4|2)$. Пусть V — то же пространство, что и выше; положим
$$B(4|2)_{\bar 0} = \operatorname{End} V \cong \mathrm{M}_2(F), \quad B(4|2)_{\bar 1} = V$$
с умножением
$$v \cdot a = a(v) = \bar a \cdot v, \quad u \cdot v = \langle \cdot, u \rangle v \in \operatorname{End} V,$$
где $a \in \operatorname{End} V$, $u, v \in V$ и $a \mapsto \bar a$ обозначает симплектическую инволюцию в $\operatorname{End} V$ (т. е. $\langle a(u), v \rangle = \langle u, \bar a(v) \rangle$ для любых $u, v \in V$). Нетрудно убедиться, что $V = B(4|2)_{\bar 1}$ является бимодулем Кэли над $\mathrm{M}_2(F) = B(4|2)_{\bar 0}$;
- *скрученная супералгебра векторного типа* $B(\Gamma, D, \gamma)$. Пусть Γ — ассоциативная коммутативная алгебра над полем F, D — ненулевое дифференцирование Γ, $\gamma \in \Gamma$. Обозначим через $\bar\Gamma$ изоморфную копию векторного

пространства Γ относительно изоморфизма $a \mapsto \bar{a}$ и положим $B(\Gamma, D, \gamma) = \Gamma \oplus \bar{\Gamma}$ с умножением

$$
\begin{aligned}
&a \cdot b = ab,\\
&a \cdot \bar{b} = \bar{a} \cdot b = \overline{ab},\\
&\bar{a} \cdot \bar{b} = \gamma ab + 2D(a)b + aD(b),
\end{aligned}
$$

где $a, b \in \Gamma$, ab — произведение элементов a и b в Γ, и градуировкой

$$B(\Gamma, D, \gamma)_{\bar{0}} = \Gamma, \quad B(\Gamma, D, \gamma)_{\bar{1}} = \bar{\Gamma}.$$

Супералгебра $B(\Gamma, D, \gamma)$ проста тогда и только тогда, когда алгебра Γ не содержит собственных D-инвариантных идеалов (т. е. D-проста).

Пусть A — конечномерная альтернативная супералгебра произвольной характеристики и $S(A)$ — максимальный разрешимый идеал (разрешимый радикал) супералгебры A. Фактор-супералгебра $A/S(A)$ разлагается в прямую сумму простых супералгебр, каждая из которых либо ассоциативна, либо изоморфна одной из супералгебр $\mathbb{O}$, $\mathbb{O}[\sqrt{1}\,]$, $\mathbb{O}(4|4)$, $B(1|2)$, $B(4|2)$, $B(\Gamma, D, \gamma)$ [23]. Радикал $S(A)$ в общем случае не нильпотентен [10], и супералгебра A, вообще говоря, не разлагается в прямую сумму полупростой подалгебры и радикала [6].

Супералгебры $B(1|2)$ и $B(4|2)$ играют важную роль при описании йордановых и лиевых супералгебр характеристики 3. Это связано с наличием в них так называемых «ядерных суперинволюций». Линейное преобразование $a \mapsto \bar{a}^*$ супералгебры A называется *суперинволюцией*, если $(a^*)^* = a$, $(a_i a_j)^* = (-1)^{ij} a_j^* a_i^*$ для любых $a_s \in A_s$. Суперинволюция $*$ называется *ядерной*, если всякий $*$-симметрический элемент супералгебры A лежит в её ассоциативном центре (ядре).

Если A — альтернативная супералгебра с ядерной суперинволюцией $*$, то супералгебра $\mathrm{H}_3(A, *)$ $*$-эрмитовых (3×3)-матриц над A является йордановой супералгеброй относительно симметрического (йорданова) произведения $a_i \circ a_j = 1/2(a_i a_j + (-1)^{ij} a_j a_i)$; при этом если A $*$-проста, то $\mathrm{H}_3(A, *)$ — простая супералгебра. Эта конструкция хорошо известна в случае алгебр: для алгебры октонионов $\mathbb{O}$ с канонической инволюцией $*$ йорданова алгебра $\mathrm{H}_3(\mathbb{O})$ есть известная исключительная 27-мерная алгебра Алберта (см. [3, 21]).

Отображения $a_0 + a_1 \mapsto a_0 - a_1$ и $a_0 + a_1 \mapsto \bar{a}_0 - a_1$, где $a \mapsto \bar{a}$ — симплектическая инволюция в $\mathrm{M}_2(F) = B(4|2)_{\bar{0}}$, являются ядерными суперинволюциями супералгебр $B(1|2)$ и $B(4|2)$. Это было впервые отмечено в [11], где в соответствии с указанной выше конструкцией были построены простые йордановы супералгебры $\mathrm{H}_3\big(B(1|2)\big)$ и $\mathrm{H}_3\big(B(4|2)\big)$, являющиеся супераналогами алгебры Алберта над полем характеристики 3.

Алгебра октонионов и алгебра Алберта являются главными компонентами знаменитого «магического квадрата Фрейденталя—Титса—Винберга» [1, 19, 29], дающего единообразные конструкции исключительных алгебр Ли. Этот квадрат был впервые расширен на случай супералгебр Дж. Бенкарт и Е. Зельмановым [13] (см. также [14]). А. Эльдуке и И. Кунья [15, 16] включили в этот квадрат супералгебры $B(1|2)$, $B(4|2)$ и $\mathrm{H}_3\big(B(1|2)\big)$, $\mathrm{H}_3\big(B(4|2)\big)$, что позволило им построить новые простые супералгебры Ли характеристики 3.

3. Альтернативные супербимодули

Альтернативные супербимодули определяются аналогично неградуированному случаю. Бимодуль $V = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1}$ над альтернативной супералгеброй $A = A_{\bar 0} \oplus A_{\bar 1}$ называется альтернативным A-супербимодулем, если расщепляемое нулевое расширение $A \oplus V = (A_{\bar 0} \oplus V_{\bar 0}) + (A_{\bar 1} \oplus V_{\bar 1})$ является альтернативной супералгеброй.

Будем говорить, что A-супербимодуль $V^{\mathrm{op}} = V^{\mathrm{op}}_{\bar 0} + V^{\mathrm{op}}_{\bar 1}$ получен *сменой чётности* из A-супербимодуля $V = V_{\bar 0} + V_{\bar 1}$, если $V^{\mathrm{op}}_{\bar 0} = V_{\bar 1}$, $V^{\mathrm{op}}_{\bar 1} = V_{\bar 0}$ и A действует на нём следующим образом: $a_i \cdot v = (-1)^i a_i v$, $v \cdot a_i = v a_i$, где $v \in V^{\mathrm{op}}$ и $a_i \in A_i$. Легко убедиться, что для любого альтернативного супербимодуля V супербимодуль V^{op}, полученный из него сменой чётности, также будет альтернативным.

Как и в случае алгебр, первостепенной задачей теории представлений супералгебр является описание неприводимых супербимодулей. Для алгебр такие бимодули определены либо над простыми алгебрами, либо над прямой суммой двух простых алгебр, при этом в последнем случае бимодуль ассоциативен. Существенным отличием суперслучая является то, что неприводимыми супербимодулями могут обладать нильпотентные супералгебры. Впервые это было замечено в работе [10], где этот факт использовался для построения конечномерных разрешимых ненильпотентных альтернативных и йордановых супералгебр.

Пусть $A = A_{\bar 1} = Fu$, $u^2 = 0$. Предположим, что поле F содержит примитивный корень третьей степени из 1, т. е. такой элемент ε, что $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Рассмотрим A-бимодуль $V_\varepsilon(1|1) = Fv_0 \oplus Fv_1$, где $V_{\bar 0} = Fv_0$, $V_{\bar 1} = Fv_1$ и действие элемента u задано равенствами

$$v_0 \cdot u = v_1, \quad u \cdot v_0 = \varepsilon v_1, \quad v_1 \cdot u = v_0, \quad u \cdot v1 = (\varepsilon + 1)v_0.$$

Нетрудно проверить, что $V_\varepsilon(1|1)$ — неприводимый альтернативный супербимодуль; при этом $V_\varepsilon(1|1)^{\mathrm{op}} \cong V_{\bar\varepsilon}(1|1)$.

Отметим, что коммутаторный бимодуль $V_\varepsilon(1|1)^{(-)}$ над супералгеброй Мальцева $A^{(-)}$ появлялся в работе А. Эльдуке и второго автора [18].

Ясно, что бимодуль $V_\varepsilon(1|1)$ можно рассматривать и как унитальный супербимодуль над супералгеброй $F \oplus Fu$, полученной из A присоединением единицы 1; при этом он очевидно останется неприводимым.

Если поле F не содержит примитивный корень третьей степени из 1, то можно построить четырёхмерный неприводимый альтернативный супербимодуль над A (см. [10]).

Рассмотренный пример является в некотором смысле единственным, как показывает следующий результат авторов.

Теорема 3 [28]. *Пусть A — альтернативная супералгебра. Если A обладает точным неприводимым альтернативным неассоциативным супербимодулем V, то либо $A_{\bar{1}}^2 = 0$, либо A первична.*

Если поле F алгебраически замкнуто, то в первом случае $A = A_{\bar{1}} = Fu$ (либо $A = F \oplus Fu$) и бимодуль V изоморфен $V_\varepsilon(1|1)$.

Таким образом, за исключением рассмотренного бимодуля $V_\varepsilon(1|1)$, задача описания неприводимых альтернативных неассоциативных супербимодулей сводится к изучению представлений первичных супералгебр. В работе И. П. Шестакова [11] было показано, что всякая первичная альтернативная супералгебра характеристики, отличной от 3, либо ассоциативна, либо является центральным порядком в простой конечномерной центральной супералгебре. Если ассоциативная первичная супералгебра A обладает точным неприводимым альтернативным неассоциативным супербимодулем V, то нетрудно показать, что A является PI-алгеброй и потому также будет центральным порядком в простой конечномерной центральной супералгебре. Более того, в этом случае центр супералгебры A лежит в централизаторе бимодуля V, и поэтому мы можем рассматривать V как бимодуль над центральным замыканием супералгебры A.

Следовательно, в случае характеристики, отличной от 3, нам достаточно описать неприводимые бимодули над простыми конечномерными альтернативными супералгебрами.

В оставшейся части работы мы опишем неприводимые альтернативные (неассоциативные) супербимодули над простыми супералгебрами любой размерности и характеристики.

4. Неприводимые альтернативные бимодули над простыми супералгебрами

4.1. Супербимодули в характеристике, отличной от 2, 3

Ясно, что для всякой простой альтернативной супералгебры A регулярный супербимодуль $\operatorname{Reg} A$ и его компаньон противоположной чётности $(\operatorname{Reg} A)^{\mathrm{op}}$ являются неприводимыми альтернативными супербимодулями.

Н. А. Писаренко [7] исследовал строение альтернативных супербимодулей над конечномерными полупростыми супералгебрами характеристики, отличной от 2, 3.

Будем говорить, что V *нетривиальный*, если $V_{\bar{0}} \neq 0$ и $V_{\bar{1}} \neq 0$.

Теорема 4 [7]. *Пусть A — конечномерная полупростая альтернативная супералгебра над алгебраически замкнутым полем F характеристики, отличной от 2, 3, т. е. $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_k$, где каждое слагаемое A_i изоморфно либо алгебре Кэли—Диксона $\mathbb{O}$, либо матричной супералгебре типов $\mathrm{M}_{m|n}$ и $\mathrm{M}_k[\sqrt{1}]$ над F. Тогда*

- *всякий альтернативный супербимодуль над A есть прямая сумма ассоциативных (A_i, A_j)-бимодулей и унитальных альтернативных A_i-бимодулей*;
- *всякий нетривиальный точный неприводимый альтернативный супербимодуль V над A либо ассоциативен и изоморфен одному из бимодулей* $\operatorname{Reg}\mathrm{M}_{m|n}$, $(\operatorname{Reg}\mathrm{M}_{m|n})^{\mathrm{op}}$, $\operatorname{Reg}(\mathrm{M}_k[\sqrt{1}\,])$, $\operatorname{Reg}(\mathrm{M}_k[\sqrt{1}\,])^{\mathrm{op}}$, *либо* $A = F[\sqrt{1}\,] = F[u]$, $\dim V = 2$, $V_{\bar 0} = Fv_0$, $V_{\bar 1} = Fv_1$ *и (унитальное) действие A на V имеет один из следующих видов*:

  1) $v_1u = v_0$, $v_0u = 0$, $uv_1 = -2v_0$, $uv_0 = -v_1$,
  2) $v_1u = v_0$, $v_0u = 2v_1$, $uv_1 = 0$, $uv_0 = v_1$,
  3) $v_1u = \frac{1+\alpha}{\delta}v_0$, $v_0u = \delta v_1$, $uv_1 = v_0$, $uv_0 = (1-\alpha)v_1$,

  где $\alpha, \delta \in F$ — ненулевые корни уравнения $\alpha^2 + \alpha\delta + \delta^2 = 1$.

Замечание 5. Заметим, что бимодули видов 1)—3) в предыдущей теореме можно объединить в одну серию унитальных бимодулей над $F[\sqrt{1}\,] = F \oplus Fu$:

$$V = V_{\lambda,\mu}(1|1) = Fv_0 \oplus Fv_1, \quad V_{\bar 0} = Fv_0, \quad V_{\bar 1} = Fv_1,$$

с действием

$$v_1u = (3\mu - \lambda)v_0, \quad uv_1 = 2\lambda v_0, \quad v_0u = 2\mu v_1, \quad uv_0 = (\lambda + \mu)v_1,$$

где $\lambda, \mu \in F$, $\lambda^2 + 3\mu^2 = 1$. При этом бимодуль вида 1) есть бимодуль $V_{-\lambda,0}(1|1)$, бимодуль вида 2) изоморфен бимодулю $V_{0,1/\sqrt{3}}(1|1)$, бимодули вида 3) изоморфны $V_{\lambda,\mu}(1|1)$ для $\lambda = \sqrt{2 - 2\alpha - \delta}/2$, $\mu = \delta/(4\lambda)$.

4.2. Супербимодули в характеристике 3

Пусть теперь характеристика основного поля F равна 3 и A — простая супералгебра, обладающая нетривиальным неприводимым альтернативным неассоциативным бимодулем V. Тогда A либо ассоциативна, либо изоморфна одной из супералгебр $B(1|2)$, $B(4|2)$, $B(\Gamma, D, \gamma)$.

Если A ассоциативна и поле F алгебраически замкнуто, то $A \cong F[\sqrt{1}\,]$ и V изоморфен одному из бимодулей типов 1)—3) из теоремы 4. Заметим, что для бимодулей типа 3) в этом случае $\alpha - \delta = \pm 1$.

Неприводимые унитальные супербимодули над супералгебрами $B(1|2)$ и $B(4|2)$ были описаны М. К. Лопес-Диас и вторым автором в работе [22]. (Также классификация неприводимых конечномерных альтернативных супербимодулей над $B(1|2)$ была независимо получена первым автором в [9].)

Теорема 6 [9, 22]. *Всякий неприводимый альтернативный неассоциативный бимодуль над супералгеброй $B = B(1|2)$ изоморфен либо $\operatorname{Reg} B$, либо $(\operatorname{Reg} B)^{\mathrm{op}}$, либо принадлежит серии неприводимых бимодулей*

$$V(\lambda, \mu)(3|3) = V_{\bar 0} \oplus V_{\bar 1},$$
$$V_{\bar 0} = \mathrm{Vect}_F\langle v_0, v_1R_y, v_0R_y^2\rangle, \quad V_{\bar 1} = \mathrm{Vect}_F\langle v_1, v_0R_y, v_1R_y^2\rangle,$$

с действием

$$vR_y^j \cdot y = \begin{cases} vR_y^{j+1}, & j < 2, \\ \mu v^s, & j = 2, \end{cases}$$
$$vR_y^j \cdot x = \lambda v^s R_y^j + jvR_y^{j-1}, \quad j = 0, 1, 2,$$

где $v \in \{v_0, v_1\}$, $v_i^s = v_{1-i}$ *и* λ, μ *— ненулевые скаляры. При этом супербимодули* $V(\lambda, \mu)$ *и* $V(\lambda', \mu')$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $(\lambda, \mu) = \pm(\lambda', \mu')$. *Кроме того,* $V(\lambda, \mu) \cong \big(V(\lambda, \mu)\big)^{\mathrm{op}}$.

Теорема 7 [22]. *Всякий альтернативный бимодуль над супералгеброй* $B(4|2)$ *вполне приводим, а всякий неприводимый бимодуль с точностью до смены чётности изоморфен регулярному бимодулю.*

Для приложений к теории представлений йордановых супералгебр важно также описание унитальных супербимодулей над супералгебрами $B(4|2)$ и $B(1|2)$, допускающих ядерную суперинволюцию. Бимодуль V над (супер)алгеброй с (супер)инволюцией $(A, *)$ называется *бимодулем с (супер)инволюцией*, если на V задано линейное отображение $v \mapsto \bar{v}$, такое что линейное отображение $a + v \mapsto a^* + \bar{v}$ является (супер)инволюцией расщепляемого нулевого расширения $E = A \oplus V$. Если при этом эта (супер)инволюция является ядерной, то бимодуль $(V, -)$ называется бимодулем с ядерной инволюцией.

Теорема 8 [22]. *Всякий альтернативный бимодуль с ядерной инволюцией над любой из супералгебр* $B(1|2)$, $B(4|2)$ *вполне приводим, а всякий неприводимый бимодуль с ядерной инволюцией с точностью до смены чётности изоморфен регулярному бимодулю с ядерной инволюцией.*

Следствие 9 [22]. *Всякий йорданов бимодуль над любой из супералгебр* $\mathrm{H}_3\big(B(1|2)\big)$, $\mathrm{H}_3\big(B(4|2)\big)$ *вполне приводим, а всякий неприводимый бимодуль с точностью до смены чётности изоморфен регулярному бимодулю.*

Рассмотрим теперь неприводимые представления простой супералгебры $B = B(\Gamma, D, \gamma)$. Вначале мы приведём конструкцию неприводимого бимодуля над B, исходя из дифференциально простого модуля над алгеброй с дифференцированием (Γ, D).

Пусть (A, D) — алгебра с дифференцированием D. A-бимодуль (V, d) с линейным отображением $d\colon V \to V$ называется *бимодулем с дифференцированием* или *D-бимодулем* над алгеброй (A, D), если линейное отображение $D + d\colon a + v \mapsto D(a) + d(v)$ является дифференцированием расщепляемого нулевого расширения $E = A \oplus V$. Если при этом V не содержит собственных d-инвариантных A-подбимодулей (или, эквивалентно, V является минимальным идеалом алгебры E), то (V, d) называется *D-простым* A-бимодулем.

Пусть теперь (V, d) — ассоциативно-коммутативный D-бимодуль над алгеброй с дифференцированием (Γ, D). Рассмотрим расщепляемое нулевое расширение $E = \Gamma \oplus V$ с дифференцированием $D + d$ и построим альтернативную супералгебру $B(E, D + d, \gamma)$. Мы имеем

$$B(E, D + d, \gamma) = (\Gamma \oplus V) \oplus \overline{\Gamma \oplus V} = (\Gamma \oplus \bar{\Gamma}) \oplus (V \oplus \bar{V}) = B \oplus W,$$

где $W = V \oplus \bar{V}$ есть альтернативный бимодуль над супералгеброй $B = B(\Gamma, D, \gamma)$. Обозначим этот бимодуль через $B(V, d, \gamma)$.

Из определения можно легко вывести явное действие $B(\Gamma, D, \gamma)$ на $B(V, d, \gamma)$:

$$a \cdot v = v \cdot a = av, \quad \bar{a} \cdot v = v \cdot \bar{a} = a \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot a = \overline{av},$$
$$\bar{a} \cdot \bar{v} = D(a)v + 2ad(v) + \gamma av, \quad \bar{v} \cdot \bar{a} = d(v)a + 2vD(a) + \gamma va.$$

Теорема 10 [28]. *Пусть V — неприводимый альтернативный супербимодуль над супералгеброй $B(\Gamma, D, \gamma)$. Тогда $(V_{\bar{0}}, d)$ является D-простым ассоциативно-коммутативным бимодулем над алгеброй с дифференцированием (Γ, D), где $d(v) = -(v, \bar{1}, \bar{1})$, и $V \cong B(V_{\bar{0}}, d, \gamma)$.*

Обратно, для всякого D-простого ассоциативно-коммутативного бимодуля (V, d) над (Γ, D) и любого $\gamma \in \Gamma$ бимодуль $B(V, d, \gamma)$ является неприводимым альтернативным бимодулем над супералгеброй $B(\Gamma, D, \gamma)$.

Отметим два важных частных случая, когда неприводимый бимодуль V над $B(\Gamma, D, \gamma)$ изоморфен регулярному бимодулю.

Следствие 11. *Если D — нильпотентное дифференцирование или бимодуль V конечномерен над алгебраически замкнутым основным полем F, то $V \cong \operatorname{Reg} B(\Gamma, D, \gamma)$.*

Заметим также, что $\operatorname{Reg} B(\Gamma, D, \gamma) \cong \big(\operatorname{Reg} B(\Gamma, D, \gamma)\big)^{\mathrm{op}}$.

4.3. Альтернативные супербимодули в случае характеристики 2

Пусть, наконец, характеристика основного поля F равна 2 и A — простая супералгебра, обладающая нетривиальным неприводимым альтернативным неассоциативным бимодулем V. Тогда A либо ассоциативна, либо изоморфна одной из супералгебр $\mathbb{O}(4|4)$, $\mathbb{O}[\sqrt{1}]$.

Если поле F алгебраически замкнуто, то в силу уже упомянутого результата С. Т. С. Уолла [30], справедливого и в характеристике 2, все простые конечномерные ассоциативные супералгебры исчерпываются супералгебрами типа $\mathrm{M}_{m|n}$, $\mathrm{M}_n[\sqrt{1}]$.

Все неассоциативные супербимодули над супералгеброй $F[\sqrt{1}]$, описанные Н. А. Писаренко в теореме 4, имеют место и в этом случае с уточнением, что бимодули типов 1) и 2) становятся изоморфными.

Кроме того, неассоциативные бимодули возникают для супералгебр $\mathrm{M}_{1|1}$ и $\mathrm{M}_2[\sqrt{1}]$. Во-первых, двумерный бимодуль Кэли $\operatorname{Cay} \mathrm{M}_2$ над матричной алгеброй M_2 имеет естественную градуировку, согласованную с градуировкой супералгебры $\mathrm{M}_{1|1}$, и в случае характеристики 2 является альтернативным неассоциативным бимодулем, который мы обозначим как $\operatorname{Cay} \mathrm{M}_{1|1}$.

Во-вторых, этот же бимодуль Кэли $\operatorname{Cay}\mathrm{M}_2$ в характеристике 2 можно «удвоить», рассмотрев $\operatorname{Cay}\mathrm{M}_2[\sqrt{1}\,]$; при этом он станет альтернативным супербимодулем над удвоенной алгеброй $\mathrm{M}_2[\sqrt{1}\,]$.

В случае супералгебры Кэли—Диксона $\mathbb{O}(4|4)$ любой неприводимый супербимодуль либо регулярен, либо получен из него сменой чётности. Для двойной супералгебры Кэли—Диксона $\mathbb{O}[\sqrt{1}\,]$ любой неприводимый точный супербимодуль изоморфен регулярному.

В результате для конечномерных альтернативных супералгебр над алгебраически замкнутым полем мы имеем полное описание неприводимых нетривиальных неассоциативных бимодулей.

Теорема 12 [28]. *Пусть A — конечномерная альтернативная супералгебра над алгебраически замкнутым полем F, V — неприводимый точный нетривиальный неассоциативный альтернативный супербимодуль над A. Тогда супералгебра A проста и либо V изоморфен одному из бимодулей $\operatorname{Reg}A$, $(\operatorname{Reg}A)^{\mathrm{op}}$, либо имеет место один из следующих случаев*:

- $A = F[\sqrt{1}\,]$ *и V — один из двумерных бимодулей типов* 1)—3), *описанных в теореме* 4;
- $\operatorname{char}F = 3$, $A = B(1|2)$, $V = V_{\lambda,\mu}(3|3)$;
- $\operatorname{char}F = 2$, $A = \mathrm{M}_{1|1}$, $V = \operatorname{Cay}\mathrm{M}_{1|1}$;
- $\operatorname{char}F = 2$, $A = \mathrm{M}_2[\sqrt{1}\,]$, $V = \operatorname{Cay}\mathrm{M}_2[\sqrt{1}\,]$.

Литература

[1] Винберг Э. Б. Конструкция особых простых алгебр Ли // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. — 1966. — Вып. 13. — С. 7—9.

[2] Жевлаков К. А. Радикал и представления альтернативных колец // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 2. — С. 162—173.

[3] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.

[4] Зельманов Е. И., Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры и нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — Т. 54, № 4. — С. 676—693.

[5] Кузьмин Е. Н., Шестаков И. П. Неассоциативные структуры // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1990. — Т. 57. — С. 179—266.

[6] Писаренко Н. А. Разложение Веддербёрна в конечномерных альтернативных супералгебрах // Алгебра и логика. — 1993. — Т. 32, № 4. — С. 231—238.

[7] Писаренко Н. А. Структура альтернативных супербимодулей // Алгебра и логика. — 1994. — Т. 33, № 6. — С. 386—397.

[8] Слинько А. М., Шестаков И. П. Правые представления алгебр // Алгебра и логика. — 1974. — Т. 13, № 5. — С. 544—588.

[9] Трушина М. Н. Неприводимые альтернативные супербимодули над простой альтернативной супералгеброй $B(1,2)$ // Фундамент. и прикл. мат. — 2001. — Т. 7, вып. 3. — С. 897—908.

[10] Шестаков И. П. Супералгебры и контрпримеры // Сиб. мат. журн. — 1991. — Т. 32, № 6. — С. 187—196.

[11] Шестаков И. П. Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. — 1997. — Т. 36, № 6. — С. 675—716.

[12] Шестаков И. П. Альтернативные и йордановы супералгебры // Алгебра, геометрия, анализ и математическая физика. 10-я сибирская школа. Новосибирск, 14—22 августа 1996 г. — Новосибирск: Институт математики, 1997. — С. 157—169.

[13] Benkart G., Zelmanov E. Lie algebras graded by root systems // Proc. of the Third Int. Conf. on Nonassociative Algebras and Their Applications (Oviedo, 1993) / S. Gonzalez, ed. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1994. — (Math. Its Appl.; Vol. 303). — P. 31—38.

[14] Benkart G., Zelmanov E. Lie algebras graded by nite root systems and intersection matrix algebras // Invent. Math. — 1996. — Vol. 126, no. 1. — P. 1—45.

[15] Cunha I., Elduque A. An extended Freudenthal magic square in characteristic 3 // J. Algebra. — 2007. — Vol. 317, no. 2. — P. 471—509.

[16] Cunha I., Elduque A. The supermagic square in characteristic 3 and Jordan superalgebras // Algebras, Representations and Applications. Conf. in Honour of Ivan Shestakov's 60th Birthday. Maresias, Brazil, August 26—September 1, 2007 / V. Futorny, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2009. — (Contemp. Math.; Vol. 483). — P. 91—106.

[17] Eilenberg S. Extensions of algebras // Ann. Soc. Pol. Math. — 1948. — Vol. 21. — P. 125—134.

[18] Elduque A., Shestakov I. P. Irreducible non-Lie modules for Malcev superalgebras // J. Algebra. — 1995. — Vol. 173. — P. 622—637.

[19] Freudenthal H. Lie groups in the foundations of geometry // Adv. Math. — 1964. — Vol. 1. — P. 145—190.

[20] Jacobson N. Structure of alternative and Jordan bimodules // Osaka J. Math. — 1954. — Vol. 6. — P. 1—71.

[21] Jacobson N. Structure and Representations of Jordan Algebras. — (Colloq. Publ.; Vol. 39). — Providence: Amer. Math. Soc., 1968.

[22] López-Díaz M. C., Shestakov I. Representations of exceptional simple alternative superalgebras of characteristic 3 // Trans. Amer. Math. Soc. — 2002. — Vol. 354, no. 7. — P. 2745—2758.

[23] López-Díaz M. C., Shestakov I. P. Alternative superalgebras with DCC on two-sided ideals // Commun. Algebra. — 2005. — Vol. 33, no. 10. — P. 3479—3487.

[24] López-Díaz M. C., Shestakov I. P. Representations of exceptional simple Jordan superalgebras of characteristic 3 // Commun. Algebra. — 2005. — Vol. 33, no. 1. — P. 331—337.

[25] Schafer R. D. Alternative algebras over an arbitrary field // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 49. — P. 549—555.

[26] Schafer R. D. Representation of alternative algebras // Trans. Amer. Math. Soc. — 1952. — Vol. 72. — P. 1—17.

[27] Schafer R. D. An Introduction to Nonassociative Algebras. — New York: Academic Press, 1966. — (Pure Appl. Math.; Vol. 22).

[28] Shestakov I., Trushina M. Irreducible bimodules over alternative superalgebras: preprint.

[29] Tits J. Algèbres alternatives, algèbres de Jordan et algèbres de Lie exceptionnelles. I: Construction // Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. — 1966. — Vol. 69. — P. 223—237.

[30] Wall C. T. C. Graded Brauer groups // J. Reine Angew. Math. — 1964. — Vol. 213. — P. 187—199.

[31] Zorn M. Theorie der alternativen Ringe // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1930. — Vol. 8. — P. 123—147.

[32] Zorn M. Alternative rings and related questions. I: existence of the radical // Ann. Math. (2). — 1941. — Vol. 42. — P. 676—686.