Кольца частных градуированных ассоциативных колец. I

И. Н. БАЛАБА
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail: ibalaba@tula.net

А. Л. КАНУННИКОВ, А. В. МИХАЛЁВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

УДК 512.552

Ключевые слова: кольца частных, градуированные кольца.

Аннотация

В статье дан обзор результатов по градуированным кольцам частных, а также приведены новые результаты авторов.

Abstract

I. N. Balaba, A. L. Kanunnikov, A. V. Mikhalev, Quotient rings of graded associative rings. I, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 2, pp. 3—74.

The paper contains a review of results on graded quotient rings and new results proved by the authors.

Содержание

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 2, с. 3—74.

Введение

При исследовании колец нередко оказывается полезным вложить рассматриваемое кольцо в кольцо, обладающее теми или иными дополнительными свойствами. Первоначально рассматривался вопрос о вложение колец в тела. В начале 30-х годов прошлого века О. Оре [58] нашёл необходимые и достаточные условия вложимости некоммутативного ассоциативного кольца без делителей нуля в тело частных, К. Асано [27] расширил конструкции Оре на кольца не обязательно без делителей нуля.

В конце 1950-х годов с появлением работ Р. Е. Джонсона [48], Ю. Утуми [63], А. В. Голди [39,40], П. Габриэля [37,38], И. Ламбека [49,50] и других значение колец частных возросло не только в связи с вложением колец, но и в связи со структурной теорией колец. В монографии Б. Стенстрёма [62], вышедшей в 1975 году, было дано систематическое изложение теории колец частных ассоциативных колец и её применение к структурной теории колец.

Заметим, что теория колец частных развивается не только для ассоциативных колец. П. Коном [33] было установлено, что произвольная алгебра Ли вложима в алгебру Ли с делением. Е. И. Зельмановым [14, 15] были доказаны аналоги теорем Голди для линейных йордановых алгебр. Рядом авторов рассматривались конструкции алгебр частных для алгебр Ли и йордановых алгебр [25, 61].

В последние десятилетия отмечается значительный интерес к алгебраическим объектам, снабжённым градуировкой. При построении структурной теории градуированных колец большую роль играет изучение колец частных градуированных колец. При этом кольца частных градуированных колец должны естественным образом наследовать градуировку исходного кольца.

Авторы планируют опубликовать серию обзорных статей по структурной теории градуированных колец (ассоциативных и неассоциативных). Первая часть этой серии посвящена кольцам частных ассоциативных градуированных колец.

Все рассматриваемые кольца ассоциативные с единицей 1, все модули правые унитальные, G — мультипликативная группа с единичным элементом e, все градуированные кольца и модули по умолчанию градуированы группой G. Так, фраза «X — градуированный модуль» означает, если не оговорено противное, что X — правый G-градуированный R-модуль, где R — G-градуированное кольцо.

Если M — правый R-модуль, N — подмодуль в M, K — подмножество в M, то обозначим $(N : K) = \{r \in R \mid Kr \subseteq N\}$. В частности, при $N = 0$ получаем аннулятор $\operatorname{Ann} K = (0 : K)$ подмножества K.

Если R — кольцо, K — подмножество в R, то определяется правый аннулятор $\mathrm{r}_R(K) = \{r \in R \mid Kr = 0\}$ и левый аннулятор $\mathrm{l}_R(K) = \{r \in R \mid rK = 0\}$ множества K.

Под регулярным кольцом понимается кольцо, регулярное по фон Нейману. Под регулярным элементом кольца понимается элемент, не являющийся ни левым, ни правым делителем нуля.

Центр кольца R обозначается через $Z(R)$, центр группы G — через $Z(G)$.

1. Основные определения и свойства

1.1. Градуированные кольца и модули

Определение 1. Кольцо R называется *G-градуированным* (или градуированным по группе G), если

$$R = \bigoplus_{g \in G} R_g,$$

где $\{R_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп кольца R и $R_g R_h \subseteq R_{gh}$ для всех $g, h \in G$.

Элементы множества $h(R) = \bigcup\limits_{g \in G} R_g$ называются *однородными элементами* кольца R, а ненулевой элемент $r \in R_g$ называется *однородным элементом степени* g (обозначение: $\deg r = g$).

Каждый ненулевой элемент $r \in R$ имеет единственное представление в виде суммы однородных элементов $r = \sum\limits_{g \in G} r_g$, где $r_g \in R_g$ ненулевые лишь для конечного числа элементов $g \in G$. Ненулевые слагаемые r_g в таком разложении называются *однородными компонентами* элемента r.

Ясно, что R_e — подкольцо в R, а R_g — R_e-R_e-бимодули при всех $g \in G$.

Предложение 1 [57, предложение 1.1.1]. *Для градуированного кольца* $R = \bigoplus\limits_{g \in G} R_g$ *справедливы следующие утверждения*:

1) $1 \in R_e$;
2) *если* $r \in R_g$, *то* $r^{-1} \in R_{g^{-1}}$.

Идеал (односторонний) I кольца R называется *градуированным*, если $I = \bigoplus\limits_{g \in G} (I \cap R_g)$. Для любого (левого, правого или двустороннего) идеала I в R через I_{gr} обозначается наибольший градуированный идеал, содержащийся в I.

Структуру всех идеалов не обязательно градуированного кольца R будем обозначать через $\mathcal{I}d(R)$, а структуру всех градуированных идеалов градуированного кольца R будем обозначать через $\mathcal{I}d^{\mathrm{gr}}(R)$.

Определение 2. Пусть R — G-градуированное кольцо. Правый R-модуль M называется G-градуированным, если

$$M = \bigoplus_{g \in G} M_g,$$

где $\{M_g \mid g \in G\}$ — семейство аддитивных подгрупп в абелевой группе $(M, +)$, таких что $M_g R_h \subseteq M_{gh}$ для всех $g, h \in G$.

Элементы множества $h(M) = \bigcup\limits_{g \in G} M_g$ называются *однородными элементами* модуля M; каждый ненулевой элемент $m = \sum\limits_{g \in G} m_g \in M$ представляется однозначно в виде суммы своих однородных компонент m_g. Для элемента $m \in M$ и подмножества $T \subseteq M$ определяются *носители*:

$$\mathrm{Supp}(m) = \{g \in G \mid m_g \neq 0\}, \quad \mathrm{Supp}(T) = \bigcup_{m \in T} \mathrm{Supp}(m).$$

Подмодуль N G-градуированного модуля M является G-градуированным, если

$$N = \bigoplus_{g \in G} N_g, \quad \text{где} \quad N_g = N \cap M_g,$$

или, что равносильно, подмодуль N вместе с каждым своим элементом содержит все его однородные компоненты.

Структуру всех подмодулей не обязательно градуированного модуля M будем обозначать через $\mathcal{L}(M)$, а структуру всех градуированных подмодулей градуированного модуля M будем обозначать через $\mathcal{L}^{\mathrm{gr}}(M)$.

Градуировка модуля M индуцирует градуировку на фактор-модуле M/N по градуированному подмодулю N: $(M/N)_g = \{m + N \mid m \in M_g\}$.

Аналогично определяются левый G-градуированный модуль и G-градуированный бимодуль.

1.2. Градуированные гомоморфизмы

Обозначим через mod-R (R-mod) категорию правых (левых) R-модулей, а через gr.mod-R (R-gr.mod) — категорию правых (левых) G-градуированных R-модулей, объектами которой являются правые (левые) G-градуированные R-модули, а морфизмами — гомоморфизмы, сохраняющие градуировку, т. е.

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr.mod}\text{-}R}(M, N) = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid f(M_g) \subseteq N_g \text{ для всех } g \in G\}.$$

Если $M = \bigoplus\limits_{g \in G} M_g$ — правый градуированный R-модуль и $g \in G$, то обозначим через $M(g)$ модуль M, рассматриваемый с градуировкой $M(g)_h = M_{gh}$, $h \in G$. Правый градуированный R-модуль $M(g)$ называется *g-сдвигом* модуля M.

Множество $\{g \in G \mid M(g) \cong M\}$ является подгруппой в G, которая называется *стабилизатором* модуля M и обозначается через $G(M)$.

Непосредственно проверяется, что соответствие $\tau_g\colon M \to M(g)$ определяет функтор сдвига градуировки $\tau_g\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}R \to \mathrm{gr.mod}\text{-}R$, который является эквивалентностью категорий, и при этом имеют место следующие равенства:

1) $\tau_g \circ \tau_h = \tau_{gh}$ для всех $g, h \in G$;
2) $\tau_g \circ \tau_{g^{-1}} = \tau_{g^{-1}} \circ \tau_g = \mathrm{Id}_{\mathrm{gr.mod}\text{-}R}$ (тождественный функтор);
3) $U \circ \tau_g = U$, где $U\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}R \to \mathrm{mod}\text{-}R$ — функтор, забывающий градуировку.

Кроме гомоморфизмов G-градуированных модулей, сохраняющих градуировку, естественно рассматривать гомоморфизмы, градуировку «сдвигающие».

Определение 3. R-линейное отображение $f\colon M \to N$ правых G-градуированных R-модулей называется градуированным гомоморфизмом степени g, если $f(M_h) \subseteq N_{gh}$ для всех $h \in G$. Градуированные гомоморфизмы степени g образуют аддитивную подгруппу $\mathrm{HOM}_R(M,N)_g$ группы $\mathrm{Hom}_R(M,N)$.

Ясно, что
$$\mathrm{HOM}_R(M,N) = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{HOM}_R(M,N)_g$$
является G-градуированной абелевой группой (группа A называется градуированной по группе G, если A разложена в прямую сумму своих подгрупп, индексированных элементами $g \in G$), а
$$\mathrm{END}_R(M) = \bigoplus_{g\in G} \mathrm{END}_R(M,M)_g \text{ — }$$
G-градуированным кольцом, которое называется *кольцом градуированных эндоморфизмов* градуированного R-модуля M.

Из определений следует, что
$$\mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}R}(M,N) = \mathrm{HOM}_R(M,N)_e,$$
$$\mathrm{HOM}_R(M,N)_g = \mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}R}\big(M, N(g)\big) = \mathrm{Hom}_{\text{gr.mod-}R}(M(g^{-1}), N).$$

Для всякого однородного гомоморфизма $f\colon M \to N$ подмодули $\operatorname{Ker} f \subseteq M$ и $\operatorname{Im} f \subseteq N$ являются градуированными. Если $N \subseteq M$ — градуированные модули, то канонический эпиморфизм $\pi\colon M \to M/N$ является однородным степени e.

Предложение 2 [57, следствия 2.4.4—2.4.6, пример 2.4.1]. *Верны следующие утверждения.*

1. *Пусть M и N — градуированные модули над градуированным кольцом R. Тогда если модуль M конечно порождённый или оба модуля M и N имеют конечные носители (например, если группа G конечна), то*
$$\mathrm{HOM}_R(M,N) = \mathrm{Hom}_R(M,N).$$
2. *Существуют такие градуированное кольцо R и градуированные модули M_R, N_R, что*
$$\mathrm{HOM}_R(M,N) \subsetneq \mathrm{Hom}_R(M,N).$$

Ясно, что $\mathrm{END}_R(M)$ — наибольшее градуированное подкольцо кольца $\mathrm{End}_R(M)$, содержащее градуированное кольцо R. Кроме того, $\mathrm{END}_R(R) = \mathrm{End}_R(R) \cong R$ — изоморфизм градуированных колец.

Прямые произведения (а также прямые суммы) градуированных модулей являются градуированными с естественной градуировкой:
$$\Big(\prod_{i\in I} X_i\Big)_g = \prod_{i\in I} (X_i)g.$$

Предложение 3 [57, следствие 2.3.4]. *Градуированный подмодуль Y градуированного модуля X — прямое слагаемое в X как объект категории R-*gr *в точности тогда, когда Y — прямое слагаемое в X как объект категории R-*mod.

Замечание 1. При рассмотрении левых G-градуированных R-модулей *градуированным морфизмом степени g* называется R-линейное отображение $f\colon M \to N$, для которого $(M_h)f \subseteq N_{hg}$ при всех $h \in G$, а *g-сдвигом* модуля M называется модуль $M(g)$, рассматриваемый с градуировкой $M(g)_h = M_{hg}$, $h \in G$.

1.3. Градуированные тензорные произведения

Пусть $M \in \mathrm{gr.mod}\text{-}R$, $N \in R\text{-}\mathrm{gr.mod}$. Следуя [56], определим *градуированное тензорное произведение* $M \otimes_R N$ как градуированную абелеву группу

$$M \otimes_R N = \bigoplus_{g \in G} (M \otimes_R N)_g,$$

обозначив через $(M \otimes_R N)_g$ аддитивную подгруппу группы $M \otimes_R N$, порождённую элементами $m \otimes n$, где $m \in M_h$, $n \in N_k$ и $hk = g$.

Предложение 4 [56, предложения 1.2.13, 1.2.14]. *Пусть R и S — градуированные кольца. Тогда*

1) *для всякого $M \in R\text{-}\mathrm{gr.mod}$ функтор*

$$- \otimes_R M\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}R \to \mathrm{gr.mod}\text{-}\mathbb{Z}$$

является точным справа;

2) *если $M \in \mathrm{gr.mod}\text{-}R$, а $N \in R\text{-}\mathrm{gr.mod}\text{-}S$, то $M \otimes_R N \in \mathrm{gr.mod}\text{-}S$*;

3) *если $M \in \mathrm{gr.mod}\text{-}R$, $P \in \mathrm{gr.mod}\text{-}S$, $N \in R\text{-}\mathrm{gr.mod}\text{-}S$, то существует естественный изоморфизм градуированных модулей*

$$\mathrm{HOM}_S(M \otimes_R N, P) \cong \mathrm{HOM}_R\big(M, \mathrm{HOM}_S(N, P)\big);$$

4) *если G — абелева группа, то для любых $M \in \mathrm{gr.mod}\text{-}R$, $N \in R\text{-}\mathrm{gr.mod}$ и любых $g, h \in G$ имеет место равенство*

$$M(g) \otimes_R N(h) = (M \otimes_R N)(gh).$$

Определение 4. Градуированный R-модуль P называется gr-плоским, если функтор

$$- \otimes_R P\colon \mathrm{gr.mod}\text{-}R \to \mathrm{gr.mod}\text{-}\mathbb{Z}$$

является точным.

Предложение 5 [56, предложение 1.2.18]. *Градуированный модуль является gr-плоским тогда и только тогда, когда он является плоским.*

1.4. Скрещённые произведения

Определение 5.

1. Пусть A — кольцо, $\mathrm{U}(A)$ — множество всех его обратимых элементов, G — группа, $\sigma\colon G \to \operatorname{Aut} A$, $\alpha\colon G^2 \to \mathrm{U}(A)$ — два отображения. Обозначим $\sigma(g)(a)$ через ${}^g a$. Четвёрка (A, G, σ, α) называется скрещённой системой, если выполнены следующие условия ($a \in A$, $g, h, k \in G$):
   1) ${}^g({}^h a) = \alpha(g,h){}^{gh}a\,\alpha(g,h)^{-1}$;
   2) $\alpha(g,h)\alpha(gh,k) = {}^g\alpha(h,k)\,\alpha(g,hk)$;
   3) $\alpha(g,e) = \alpha(e,g) = 1$;
   4) ${}^e a = a$.
2. Пусть (A, G, σ, α) — скрещённая система. Свободный левый A-модуль с базисом G, на котором определено умножение по правилу
$$(ag)(bh) = \bigl(a{}^g b\,\alpha(g,h)\bigr)gh, \quad a, b \in A, \quad g, h \in G,$$
называется скрещённым произведением и обозначается $A{*}G(\sigma,\alpha)$ (используется также обозначение $A^\sigma_\alpha G$).
3. Если $\sigma(g) = \mathrm{id}_A$ при всех $g \in G$, то скрещённое произведение $A * G(\sigma,\alpha)$ называется скрещённым групповым кольцом и обозначается $A_\alpha G$.
4. Если $\alpha(g,h) = 1$ при всех $g, h \in G$, то скрещённое групповое кольцо $A^t G$ называется косым групповым кольцом и обозначается AG.
5. Если $\sigma(g) = \mathrm{id}_A$ при всех $g \in G$ и $\alpha(g,h) = 1$ при всех $g, h \in G$, то скрещённое групповое произведение $A * G(\sigma,\alpha)$ превращается в обычное групповое кольцо AG.

Предложение 6 [57, предложения 1.4.1, 1.4.2]. *Верны следующие утверждения.*

1. *Скрещённое произведение $R = A * G(\sigma,\alpha)$ превращается в G-градуированное кольцо, если положить $R_g = Ag$. При этом $R_e = A$ и каждая однородная компонента R содержит обратимый элемент g.*
2. *Всякое G-градуированное кольцо R, такое что при каждом $g \in G$ компонента R_g содержит обратимый элемент u_g, причём $u_e = 1$, является скрещённым произведением для скрещённой системы (R_e, G, σ, α), где $\sigma(g)(a) = u_g a u_g^{-1}$, $\alpha(g,h) = u_g u_h u_{gh}^{-1}$.*

Групповым кольцам посвящена большая обзорная статья [13].

1.5. Смэш-произведения

Пусть R — G-градуированное кольцо, $\mathrm{M}_G(R)$ — кольцо $(|G| \times |G|)$-матриц над R с конечным числом ненулевых элементов в каждой строке и каждом столбце с умножением
$$(\alpha\beta)(x,y) = \sum_{g\in G} \alpha(x,z)\beta(z,y)$$

и единицей $I = \delta(x, y)$. Матричные единицы обозначим через $e_{x,y}$, $x, y \in G$. Определим отображение

$$\varphi\colon \begin{cases} R \to \mathrm{M}_G(R), \\ r \mapsto \sum\limits_{x,y \in G} r_{xy^{-1}} e_{x,y}. \end{cases}$$

Определение 6. Подкольцо кольца $\mathrm{M}_G(R)$, порождённое образом $\operatorname{Im}\varphi$ и множеством $\{e_{x,x} \mid x \in G\}$, называется смэш-произведением кольца R и группы G и обозначается $R \# G$.

Свойства смэш-произведений можно найти в [57].

1.6. Аннуляторные условия для однородных компонент

Определение 7.

1. Градуированный модуль M_R назовём g-точным, если для любого ненулевого $m \in h(M)$ существует такое $r \in h(R)$, что $0 \neq mr \in M_g$.
2. Кольцо R называется g-точным слева (справа) (или точным слева (справа) в компоненте g), если для любого ненулевого $x \in h(R)$ существует такой $x' \in h(R)$, что $0 \neq x'x \in R_g$ $(0 \neq xx' \in R_g)$. Кольцо R, g-точное слева и справа, называется g-точным.
3. Если $R_s R_h = R_{sh}$ для всех $s, h \in G$, то кольцо R называется *сильно градуированным*.
4. Если $\mathrm{r}_R(R_g) = \mathrm{l}_R(R_g) = 0$ для всех $g \in G$, то кольцо R называется *слабо градуированным*.

Ясно, что скрещённое произведение является сильно градуированным, сильно градуированное кольцо является слабо градуированным и точным во всех компонентах. Обратные утверждения неверны (см. примеры в разделе 1.2).

В [57, предложение 1.1.1] показано, что кольцо R является сильно G-градуированным в точности тогда, когда $R_e = R_g R_{g^{-1}}$ для всех $g \in G$.

1.7. Примеры

1. Любое кольцо R можно рассматривать как градуированное по любой группе G с тривиальной градуировкой: $R_e = R$, $R_g = 0$ при $g \neq e$.
2. Групповое кольцо $R = AG$, где A — кольцо, а G — группа, имеет каноническую G-градуировку: $R_g = Ag$.
3. Поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел градуировано группой $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$:

$$\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}, \quad \mathbb{C}_0 = \mathbb{R}, \quad \mathbb{C}_1 = i\mathbb{R}.$$

4. Тело $\mathbb{H}$ классических кватернионов градуировано группой $\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2 = \{(0,0),$ $(0,1),\ (1,0),\ (1,1)\}$:

$$\mathbb{H} = \mathbb{R}\oplus i\mathbb{R}\oplus j\mathbb{R}\oplus k\mathbb{R},$$
$$\mathbb{H}_{(0,0)} = \mathbb{R},\quad \mathbb{H}_{(0,1)} = i\mathbb{R},\quad \mathbb{H}_{(1,0)} = j\mathbb{R},\quad \mathbb{H}_{(1,1)} = k\mathbb{R}.$$

5. На кольце многочленов $R = A[x]$ от переменной x над кольцом A можно естественным образом определить $\mathbb{Z}$-градуировку, положив

$$R_n = Ax^n \ \text{ при } \ n\geqslant 0,\quad R_n = 0 \ \text{ при } \ n<0.$$

6. Кольцо многочленов $R = A[x]$ можно градуировать и по группе $\mathbb{Z}_n$, положив

$$R_{\bar{k}} = \begin{cases} A[x^n] & \text{при } k=0,\\ x^kA[x^n] & \text{при } 1\leqslant k\leqslant n-1.\end{cases}$$

Если A — поле, то кольцо $A[x]$ точно во всех компонентах (так как не содержит делителей нуля), но не является сильно градуированным, поскольку

$$R_{\bar{1}}R_{\overline{n-1}} = x^nF[x^n] \neq F[x^n] = R_{\bar{0}}.$$

7. Пусть k — поле, многочлен $x^n - a$ неприводим над k. Тогда

$$L = k(a) \cong k[x]/(x^n - a) \text{ —}$$

простое радикальное расширение поля k, являющееся $\mathbb{Z}_n$-градуированным кольцом:

$$L = \bigoplus_{i=0}^{n-1} ka^i.$$

Этот пример обобщает пример 3: $k=\mathbb{R}$, $a=-1$, $\mathbb{C}\cong\mathbb{R}[x]/(x^2+1)$.

8. Матричное кольцо $R = \mathrm{M}_n(A)$ над кольцом A с системой матричных единиц $(e_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ можно градуировать по группе $\mathbb{Z}$:

$$R_k = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n-k} e_{i,i+k}A & \text{при } 0\leqslant k<n,\\ \sum\limits_{i=1-k}^{n} e_{i,i+k}A & \text{при } -n<k<0,\\ 0 & \text{при } |k|\geqslant n,\end{cases}$$

т. е.

$$\ldots,\ R_{-1}=\begin{pmatrix}0&0&0&\ldots&0&0\\A&0&0&\ldots&0&0\\0&A&0&\ldots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ldots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\ldots&0&0\\0&0&0&\ldots&A&0\end{pmatrix},\ R_0=\begin{pmatrix}A&0&0&\ldots&0&0\\0&A&0&\ldots&0&0\\0&0&A&\ldots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ldots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\ldots&A&0\\0&0&0&\ldots&0&A\end{pmatrix},$$

$$R_1=\begin{pmatrix}0&A&0&\ldots&0&0\\0&0&A&\ldots&0&0\\0&0&0&\ldots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ldots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\ldots&0&A\\0&0&0&\ldots&0&0\end{pmatrix},\ldots.$$

9. Если $R=\bigoplus\limits_{g\in G}R_g$ — G-градуированное кольцо и $\bar{g}=(g_1,\ldots,g_n)\in G^n$, то через $\mathrm{M}_n(R)(\bar{g})$ обозначим кольцо матриц $\mathrm{M}_n(R)$ со следующей градуировкой:

$$\mathrm{M}_n(R)_h(\bar{g})=\begin{pmatrix}R_{g_1hg_1^{-1}}&R_{g_1hg_2^{-1}}&\ldots&R_{g_1hg_n^{-1}}\\R_{g_2hg_1^{-1}}&R_{g_2hg_2^{-1}}&\ldots&R_{g_2hg_n^{-1}}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\R_{g_nhg_1^{-1}}&R_{g_nhg_2^{-1}}&\ldots&R_{g_nhg_n^{-1}}\end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что при такой градуировке матричная единица e_{ij} имеет степень $g_i^{-1}g_j$. Если $\bar{g}=(e,\ldots,e)$, то пишут просто $\mathrm{M}_n(R)$ [56, A.I.5].

Важное место в теории градуированных колец занимает проблема описания всех возможных типов градуировок. В последние годы было опубликовано много работ, касающихся описания градуировок на кольце матриц $\mathrm{M}_n(k)$ над полем k (см., например, [8, 12, 28, 34]). В этих работах были выделены так называемые *хорошие* (или *элементарные*) градуировки, которые характеризуются однородностью всех матричных единиц. Если кольцо $\mathrm{M}_n(k)$ снабжено хорошей градуировкой, то оно является градуированным кольцом эндоморфизмов $\mathrm{END}_k(V)$ некоторого конечномерного градуированного векторного пространства V над полем k [34, предложение 1.2]. Градуировка $\mathrm{M}_n(R)(\bar{g})$ из примера 9 также называется хорошей, поскольку $\mathrm{M}_n(R)(\bar{g})\cong\mathrm{END}_R(F)$, где $F\cong\bigoplus\limits_{i=1}^{n}R(g_i)$ — конечно порождённый gr-свободный правый R-модуль [56, A.I.5]. Результаты работы [7] позволяют дать описание изоморфизмов и антиизоморфизмов градуированных колец матриц, снабжённых хорошими градуировками.

В [11] доказано, что кольцо, содержащее систему матричных единиц (т. е. такую систему элементов e_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, что $\sum\limits_{i=1}^{n} e_{ii} = 1$ и $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$), изоморфно $(n \times n)$-матричному кольцу над централизатором этой системы [11, предложение 6, с. 82]. Нам понадобится градуированный аналог этого предложения. Заметим, что централизатор системы однородных матричных единиц может оказаться неградуированным подкольцом в R.

Пример 1. Пусть G — группа, $g, h \in G$, $gh \neq hg$, D — G-градуированное кольцо, $d \in D_h \setminus 0$, $R = \mathrm{M}_2(D)(e, g)$ — G-градуированное кольцо, C — централизатор системы $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$ матричных единиц в R. Тогда

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in C, \quad \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R_h, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \in R_{g^{-1}hg} \neq R_h,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \notin C\colon \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},$$

т. е. C не является G-градуированным подкольцом в R.

Теорема 1. *Пусть R — G-градуированное кольцо, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, $\{e_{ij} \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ — система матричных единиц в R, такая что $e_{ij} \in R_{g_i^{-1}g_j}$, C — её централизатор, $g_i^{-1}g_j \in \mathrm{Supp}(C)$ при всех $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Тогда C — градуированное подкольцо в R и $R \cong \mathrm{M}_n(C)(\bar{g})$ (изоморфизм градуированных колец).*

Доказательство. Если $c_1 + \ldots + c_m \in C$, $c_k \in G_{h_k}$, то $c_1e_{ij} + \ldots + c_me_{ij} = e_{ij}c_1 + \ldots + e_{ij}c_m$ для всех i, j. Поэтому при всех $k = 1, \ldots, m$ имеем $c_ke_{ij} \in R_{h_kg_i^{-1}g_j}$, $e_{ij}c_k \in R_{g_i^{-1}g_jh_k}$, но $h_kg_i^{-1}g_j = g_i^{-1}g_jh_k$ (по условию), так что $c_ke_{ij} = e_{ij}c_k$ и $c_k \in C$, т. е. C — градуированное подкольцо R.

Изоморфизм колец R и $\mathrm{M}_n(C)$ в неградуированным случае строится по правилу (см. [11, с. 82])

$$a \mapsto (b_{ij})_{ij}, \quad b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} e_{ki}ae_{jk}.$$

При этом элементам e_{ij} соответствуют обычные матричные единицы, имеющие в градуированном кольце $\mathrm{M}_n(C)(\bar{g})$ те же степени $g_i^{-1}g_j$. □

2. Градуированные аналоги классических понятий

В этом разделе мы рассмотрим связь классических понятий и теорем теории колец и их градуированных аналогов, которые нам понадобятся в работе.

Если в определениях классических понятий рассматривать вместо всех элементов только однородные, а вместо всех идеалов (подмодулей) только градуированные, то получатся стандартные градуированные аналоги этих понятий, которые принято обозначать с помощью приставки gr-. Например, gr-артинов (gr-нётеров) модуль — это градуированный модуль с условием минимальности (максимальности) для градуированных подмодулей.

Естественный и важный вопрос в теории градуированных колец — какие свойства градуированного кольца или модуля равносильны соответствующему «gr-свойству» и при каких условиях. При исследовании таких вопросов всегда полезно рассмотреть групповое кольцо RG с канонической градуировкой. Непосредственно проверяется, что между (односторонними) идеалами кольца R и градуированными (односторонними) идеалами кольца RG имеется структурный изоморфизм, сохраняющий включения, суммы, произведения. Отсюда, в частности, следует, что если P — свойство колец, формулируемое в терминах односторонних идеалов (например, первичность, полупервичность, регулярность, примитивность, полная приводимость и др.), и gr-P — его естественный градуированный аналог, то кольцо R обладает свойством P в точности тогда, когда кольцо RG с канонической градуировкой обладает свойством gr-P. В то же время кольцо RG может не обладать самим свойством P.

Особого внимания заслуживает случай градуировки по *упорядоченной* группе, при котором многие свойства градуированного кольца оказываются эквивалентными их градуированным аналогам.

Определение 8. Группа G называется упорядоченной, если на ней введён линейный порядок $\leqslant$, такой что

$$a \leqslant b \implies ac \leqslant bc \text{ и } ca \leqslant cb \text{ при всех } a, b, c \in G.$$

Заметим, что в первых работах по градуированным кольцам рассматривалась градуировка только по группе $\mathbb{Z}$ целых чисел с обычным порядком.

2.1. Gr-простота, градуированные тела и векторные пространства

Определение 9.

1. Градуированный модуль X, имеющий ровно два градуированных подмодуля 0 и X, называется gr-простым.
2. Градуированный подмодуль Y градуированного модуля X называется gr-минимальным (gr-максимальным), если Y — минимальный ненулевой (максимальный собственный) элемент решётки $\mathcal{L}^{\mathrm{gr}}(X)$.
3. Градуированное кольцо R с ненулевым умножением, имеющее ровно два градуированных идеала 0 и R, называется gr-простым.
4. Градуированный идеал I градуированного кольца R называется gr-минимальным (gr-максимальным), если I — минимальный ненулевой (максимальный собственный) элемент решётки $\mathcal{I}d^{\,\mathrm{gr}}(R)$.
5. Градуированное кольцо, каждый ненулевой однородный элемент которого обратим, называется градуированным телом. Коммутативное градуированное тело называется градуированным полем.

6. Градуированный модуль над градуированным телом называется градуированным векторным пространством.

Ясно, что градуированное тело gr-просто.

Пример 2. Групповое кольцо FG с канонической градуировкой является градуированным телом в точности тогда, когда F является телом. Если $G \neq \{e\}$, то кольцо FG не является телом, поскольку содержит нетривиальный фундаментальный идеал $\omega G = \left\{\sum \alpha_g g \mid \sum \alpha_g = 0\right\}$.

Градуированные векторные пространства изучались в [3, 57].

Предложение 7 [57, предложение 2.7.1]. *Пусть X — gr-простой модуль. Тогда*

1) *для всех $g \in G$ R_e-модуль X_g либо нулевой, либо gr-простой;*
2) *если $X_g \neq 0$, то $X \cong (R/I)(g^{-1})$ для некоторого gr-максимального идеала I в R;*
3) *если $D = \mathrm{END}_R(X)$, то D — градуированное тело и $D = \bigoplus\limits_{g \in G(X)} D_g$;*
4) *модуль X точен во всех компонентах $g \in \mathrm{Supp}(X)$.*

2.2. Gr-регулярность

Определение 10. Градуированное кольцо R называется gr-регулярным, если $a \in aRa$ для каждого $a \in h(R)$, т. е. если уравнение $a = axa$ разрешимо относительно $x \in R$ при всех $a \in h(R)$.

Ясно, что если $a \in R_g$ и $a = axa$, то мы можем заменить x его однородной компонентой x_τ степени $\tau = g^{-1}$ и элементы $ax_{g^{-1}}, xa_{g^{-1}} \in R_e$ являются однородными идемпотентами кольца R.

Gr-регулярные кольца изучались в [4, 56, 59, 64].

Легко убедиться, что градуированное регулярное кольцо является и gr-регулярным, в то же время gr-регулярное кольцо может не быть регулярным.

Теорема 2 [13, теорема 10.4]. *Групповое кольцо AG регулярно в точности тогда, когда кольцо A регулярно, группа G локально конечна (т. е. каждая конечно порождённая подгруппа группы G конечна) и порядок каждой конечной подгруппы в G обратим в кольце A.*

Таким образом, групповое кольцо $k\mathbb{Z}$, где k — поле, является $\mathbb{Z}$-градуированным телом, а следовательно, gr-регулярным кольцом, но не является регулярным.

Предложение 8 [57, следствие 6.3.5]. *Пусть G — конечная группа, R — такое G-градуированное кольцо, что $|G|^{-1} \in R$. Тогда кольцо R регулярно в точности тогда, когда R gr-регулярно.*

Аналогично неградуированному случаю справедливо следующее предложение, характеризующее gr-регулярные кольца.

Предложение 9 [56, предложение C.1.5.1]. *Для градуированного кольца R следующие условия равносильны:*

1) *R — gr-регулярное кольцо*;
2) *каждый главный правый (левый) градуированный идеал кольца R порождается однородным идемпотентом*;
3) *каждый конечно порождённый правый (левый) градуированный идеал порождается однородным идемпотентом*;
4) *каждый градуированный правый (левый) R-модуль является gr-плоским (т. е. плоским по предложению 5).*

Отметим некоторые свойства gr-регулярных колец.

Предложение 10. *Пусть R — gr-регулярное кольцо. Тогда между правыми (левыми) градуированными идеалами кольца R и правыми (левыми) идеалами кольца R_e имеется биекция.*

Доказательство. Каждому правому градуированному идеалу I кольца R поставим в соответствие правый идеал I_e кольца R_e, а каждому правому идеалу K кольца R_e поставим в соответствие градуированный правый идеал KR кольца R. Ясно, что $(KR)_e = KR_e = K$. Кроме того, если R gr-регулярно, то $I_eR = I$. Действительно, I и I_eR — градуированные правые идеалы в R и $h(I_eR) = h(I)$, так как для всякого $a \in h(I)$ существует такое $x \in h(R)$, что $a = axa$ и $ax \in R_e \cap I$, так что $a = (ax)a \in I_eR$. □

Предложение 11 [56, замечание C.1.5.12]. *Для gr-регулярного кольца R справедливы следующие утверждения*:

1) *однородные идемпотенты принадлежат единичной компоненте R_e*;
2) *R e-точно*;
3) *R_e — регулярное кольцо*;
4) *каждый главный правый (левый) градуированный идеал I порождён как правый (левый) идеал своей компонентой I_e*;
5) *градуированные правые (левые) идеалы идемпотентны.*

Теорема 3 [56, следствие C.1.5.3; 64, теорема 3]. *Если R — сильно градуированное кольцо и кольцо R_e регулярно, то кольцо R gr-регулярно.*

2.3. Gr-первичность и gr-полупервичность

Определение 11.

1. Градуированное кольцо R называется gr-первичным, если $IJ \neq 0$ для всех ненулевых градуированных идеалов I и J кольца R (причём можно считать, что идеалы I и J оба левые или оба правые) или, что равносильно, условие $aRb = 0$ влечёт условие $a = 0$ или $b = 0$ для всех $a, b \in h(R)$.
2. Градуированное кольцо R называется gr-полупервичным, если $I^2 \neq 0$ для всех ненулевых градуированных идеалов I кольца R (причём идеал I можно считать односторонним) или, что равносильно, условие $aRa = 0$ влечёт условие $a = 0$ для всех $a \in h(R)$.

Ясно, что первичное (полупервичное) градуированное кольцо является gr-первичным (gr-полупервичным). Обратное неверно, как показывают примеры групповых колец.

Теорема 4. *Пусть A — кольцо, G — группа. Тогда*

1) *AG первично в точности тогда, когда A первично и $\{e\}$ — единственная конечная нормальная подгруппа группы G* (см. [10, теорема 21; 17, с. 258]);
2) *AG полупервично в точности тогда, когда A полупервично и порядки нормальных подгрупп в G не являются делителями нуля в A* (см. [13, теорема 13.2; 17, с. 255]).

Например, градуированное поле $k\mathbb{Z}_2$ не первично при любом поле k и не полупервично, если $\operatorname{char} k = 2$.

Теорема 5 [57, теорема 2.11.4]. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо с конечным носителем. Тогда*

1) *R e-точно;*
2) *R_e полупервично;*
3) *$g \in \operatorname{Supp}(R)$ тогда и только тогда, когда $g^{-1} \in \operatorname{Supp}(R)$ для всех $g \in G$.*

Предложение 12 [2; 57, предложение 5.2.6]. *Если G — упорядоченная группа и R — G-градуированное кольцо, то R первично (полупервично) в точности тогда, когда R gr-первично (gr-полупервично).*

Замечание 2. Пусть кольцо R e-точно справа или слева. Тогда если кольцо R_e первично (полупервично), то кольцо R gr-первично (gr-полупервично).

В самом деле, если I и J — ненулевые градуированные идеалы в R такие, что $IJ = 0$, то в силу e-точности I_e и J_e — ненулевые идеалы в R_e и $I_e J_e = 0$.

2.4. Градуированный радикал Джекобсона

Определение 12.

1. Градуированный радикал Джекобсона градуированного модуля M — это пересечение всех его максимальных градуированных подмодулей. Обозначение: $\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(M)$.
2. Градуированный радикал Джекобсона градуированного кольца R — это $\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(R_R)$.
3. Градуированное кольцо R с $\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(R) = 0$ называется gr-полупримитивным (мы следуем И. Ламбеку, избегая перегруженного термина «полупростой»).

Соберём всю информацию о градуированном радикале Джекобсона, которая нам понадобится в дальнейшем.

Предложение 13. *Верны следующие утверждения.*

1. *$\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ — градуированный идеал кольца R, совпадающий с пересечением всех градуированных максимальных идеалов, а также с пересечением всех gr-примитивных идеалов.*

2. $R/\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ — *gr-полупримитивное кольцо.*
3. $h\big(\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(R)\big) = \bigcup\limits_{g\in G} \{r \in R_g \mid$ *для всех* $s \in R_{g^{-1}}$ $1 - rs$ *обратим справа*$\}$.
4. $\operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(R)$ — *наибольший среди таких градуированных идеалов* K *кольца* R*, что* $1 - r$ *обратим для всех* $r \in K_e$.
5. *Пусть* $X \subseteq Y$ — *градуированные модули,* $\pi\colon X \to X/Y$ — *канонический эпиморфизм* (*степени* e)*. Тогда* $\pi \operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(X) \subseteq \operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(\pi X)$*, а если* $Y \subseteq \operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(X)$*, то* $\pi \operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(X) = \operatorname{Rad}^{\mathrm{gr}}(\pi X)$.

2.5. Полная gr-приводимость

В классической теории колец детально изучены вполне приводимые кольца, т. е. кольца, в которых каждый односторонний идеал выделяется прямым слагаемым. Строение и эквивалентные характеристики таких колец даёт теорема Молина—Веддербёрна—Артина, согласно которой вполне приводимые кольца изоморфны конечным прямым произведениям колец матриц над телами.

В теории градуированных колец получены аналоги этой теоремы (см. ниже).

В классическом случае сумма всех изоморфных между собой минимальных правых идеалов вполне приводимого кольца образует его минимальный двусторонний идеал, являющийся вполне приводимым простым кольцом и называющийся однотипной компонентной вполне приводимого кольца. Заметим, что в градуированном случае возникает особенность: градуированные изоморфизмы минимальных правых градуированных идеалов могут быть, вообще говоря, произвольной степени, и поэтому в классе вполне gr-приводимых простых колец выделяются так называемые *ровно* приводимые: те, которые можно представить в виде прямой суммы e-изоморфных минимальных правых градуированных идеалов.

Замечание 3. В англоязычной литературе (см. [57]) для таких колец используется термин «gr-uniformly simple ring», который мы перевели как «ровно вполне gr-приводимое gr-простое кольцо», избегая терминов «равномерный» и «униформный», используемых для модулей, в которых любые два ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение.

Строение вполне gr-приводимых колец описывает следующая теорема, которая является градуированным аналогом теоремы Молина—Веддербёрна—Артина.

Теорема 6 [51; 57, теорема 2.10.10]. *Верны следующие утверждения.*

1. *Вполне gr-приводимое gr-простое* G*-градуированное кольцо изоморфно кольцу вида* $\mathrm{M}_n(D)(g_1,\ldots,g_n)$*, где* $n \in \mathbb{N}$, $g_1,\ldots,g_n \in G$, D — G*-градуированное тело.*
2. *Ровно вполне gr-приводимое gr-простое* G*-градуированное кольцо* R *изоморфно кольцу* $\mathrm{M}_n(D)$ *матриц над* G*-градуированным телом* D.
3. *Вполне gr-приводимое кольцо изоморфно конечному прямому произведению вполне gr-приводимых gr-простых колец.*

4. *Вполне gr-приводимые кольца — это в точности gr-артиновы gr-полупримитивные кольца.*

Для градуированных колец условие полной gr-приводимости, вообще говоря, слабее условия полной приводимости, как показывает теорема Машке.

Теорема 7 (Г. Машке). *Пусть A — кольцо, G — группа. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *кольцо AG вполне приводимо*;
2) *кольцо A вполне приводимо, G — конечная группа, $|G|$ обратимо в A*;
3) *фундаментальный идеал ωG — прямое слагаемое в AG.*

В то же время кольцо AG вполне gr-приводимо в точности тогда, когда кольцо A вполне приводимо (см. начало раздела).

2.6. Gr-свобода

Определение 13. Градуированный модуль X_R называется gr-свободным, если он обладает базисом, состоящим из однородных элементов, т. е. если для некоторого множества $\{g_i \in G \mid i \in I\}$

$$X \cong \bigoplus_{i \in I} R(g_i).$$

Не всякий градуированный R-модуль, свободный в R-mod, является gr-свободным.

Пример 3 [57]. Пусть $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ — $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо с тривиальной градуировкой $R_0 = R$ и $X_R = R_R$ — Z-градуированный R-модуль с градуировкой $X_0 = \mathbb{Z} \times \{0\}$, $X_1 = \{0\} \times \mathbb{Z}$, $X_i = 0$ при $i \neq 0, 1$. Тогда X_R — свободный R-модуль, не являющийся gr-свободным градуированным R-модулем.

Предложение 14. *Каждый градуированный R-модуль X изоморфен фактор-модулю некоторого gr-свободного модуля.*

Доказательство. Каждому элементу $x \in h(X) \setminus 0$ поставим в соответствие экземпляр $(R_x)_R \cong R\big((\deg x)^{-1}\big)_R$ модуля R_R со сдвинутой на $(\deg x)^{-1}$ градуировкой и эпиморфизм степени e R-модулей $f_x\colon R_x \to X$, $r \mapsto xr$. Тогда существует эпиморфизм степени e $f\colon \bigoplus\limits_{x \in h(X) \setminus 0} R_x \mapsto X$, такой что $f \circ \mathrm{id}_x = f_x$, где id_x — каноническое вложение R_x в прямую сумму. $\square$

2.7. Gr-существенность

Определение 14.

1. Расширение градуированных модулей $X_R \subseteq Y_R$ называется gr-существенным, если $X \cap K \neq 0$ для любого ненулевого градуированного подмодуля $K \subseteq Y$ или, что равносильно (поскольку K можно считать циклическим), если для каждого $y \in h(Y) \setminus 0$ найдётся $r \in h(R)$, такой что $yr \in h(X) \setminus 0$.

2. Градуированный правый идеал I градуированного кольца R называется gr-существенным, если $I_R \subseteq R_R$ — gr-существенное расширение.
3. Градуированный модуль, не имеющий собственных gr-существенных расширений, называется gr-замкнутым.
4. gr-замкнутый модуль, являющийся gr-существенным расширением градуированного модуля X, называется gr-замыканием X.

Ясно, что всякое градуированное существенное расширение является и gr-существенным. Оказывается, верно и обратное.

Предложение 15 [57, предложение 2.3.5]. *Всякое gr-существенное расширение $X_R \subseteq Y_R$ градуированных модулей X_R и Y_R является существенным.*

Доказательство. Пусть $0 \neq y = y_{g_1} + \ldots + y_{g_n} \in Y$. Достаточно доказать, что найдётся такое $r \in h(R)$, что $0 \neq yr \in X$. Проведём индукцию по n. При $n = 1$ получаем условие gr-существенности X в Y. Далее, пусть $n > 1$ и существует $r \in h(R)$, для которого $0 \neq (y - y_{g_n})r \in X$. Теперь если $y_{g_n} r = 0$, то $0 \neq yr \in X$, а если $y_{g_n} r \neq 0$, то найдётся $r' \in h(R)$, для которого $0 \neq (y_{g_n} r)r' \in X$. Тогда $y(rr') = \big((y - y_{g_n})r\big)r' + (y_n r)r' \in X \setminus 0$, так как $rr' \in h(R)$. □

Соберём основные свойства gr-существенных подмодулей, вытекающие из свойств существенных подмодулей [17, с. 104, 168] и предложения 15.

Предложение 16. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $X \subseteq Y$ — градуированные модули и K — максимальный градуированный подмодуль в Y среди подмодулей, имеющих нулевое пересечение с X, то $X + K$ — gr-существенный подмодуль в Y.*
2. *Пересечение конечного числа gr-существенных подмодулей — gr-существенный подмодуль.*
3. *Если X — gr-существенный подмодуль в Y и $f \in \mathrm{END}_R Y$, то $f^{-1}(X)$ — gr-существенный подмодуль в Y. В частности, если I — gr-существенный правый идеал в R, $a \in h(R)$, $\bar{a}\colon R \ni r \mapsto ar \in R$, то $(I : a) = \{r \in R \mid ar \in I\} = \bar{a}^{-1}(I)$ — gr-существенный правый идеал в R.*
4. *Пусть R и S — градуированные кольца, причём $R_R \subseteq S_R$ — gr-существенное расширение. Тогда*
   1) *если K — gr-существенный правый идеал в S, то $K \cap R$ — gr-существенный правый идеал в R;*
   2) *если I — gr-существенный правый идеал в R, то IS — gr-существенный правый идеал в S.*

Установим связь между gr-существенностью градуированных модулей и существенностью их компонент, в частности между gr-существенностью градуированных правых идеалов колец и существенностью правых идеалов их единичных компонент.

Предложение 17. *Пусть $X_R \subseteq Y_R$ — градуированные модули, $g \in G$, модуль Y g-точен. Тогда*

1) *$X \neq 0$ тогда и только тогда, когда $X_g \neq 0$;*
2) *X_R gr-существен в Y_R тогда и только тогда, когда $(X_g)_{R_e}$ существен в $(Y_g)_{R_e}$;*
3) *если X gr-замкнут, то X_g замкнут.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Импликация $\Longleftarrow$ очевидна, а импликация $\Longrightarrow$ непосредственно следует из определения g-точности.

Докажем второе утверждение. Убедимся в справедливости импликации $\Longrightarrow$. Если $0 \neq K_{R_e} \subseteq (Y_g)_{R_e}$, то $0 \neq KR$ — градуированный R-подмодуль в Y_R, поэтому $X \cap KR \neq 0$ и по первому утверждению $(X \cap KR)_g = X_g \cap K \neq 0$.

Докажем импликацию $\Longleftarrow$. Если $0 \neq Z \subseteq Y$ — градуированный R-подмодуль, то по первому утверждению $0 \neq Z_g \subseteq Y_g$ — R_e-подмодуль, поэтому $Z_g \cap X_g \neq 0$ и $Z \cap X \neq 0$.

Третье утверждение следует из второго. □

Следствие 1. *Пусть кольцо R e-точно справа. Тогда для всех правых градуированных идеалов I кольца R и всех правых идеалов K кольца R_e верны следующие утверждения*:

1) *$I \neq 0$ тогда и только тогда, когда $I_e \neq 0$;*

1′) *$K \neq 0$ тогда и только тогда, когда $KR \neq 0$;*

2) *I gr-существен в R тогда и только тогда, когда I_e существен в R_e;*

2′) *K существен в R_e тогда и только тогда, когда KR gr-существен в R;*

3) *если I gr-замкнут в R, то I_e замкнут в R_e;*

3′) *K замкнут в R_e, если KR gr-замкнут в R.*

Замечание 4. Условие точности существенно, как показывает пример $\mathbb{Z}$-градуированного кольца многочленов $R[x]$, в котором градуированный идеал $I = (x)$ существен, но $I_e = 0$.

Предложение 18. *Пусть $X \subseteq Y$ — gr-существенное расширение градуированных R-модулей. Тогда X g-точен тогда и только тогда, когда Y g-точен для всех $g \in G$.*

Доказательство. Докажем импликацию $\Longrightarrow$. Пусть $0 \neq y \in h(Y)$. Сначала найдём такой элемент $r \in h(R)$, что $0 \neq yr \in h(X)$, а затем такой $r' \in h(R)$, что $0 \neq (yr)r' \in X_g$. Тогда $0 \neq y(rr') \in X_g \subseteq Y_g$.

Докажем импликацию $\Longleftarrow$. Пусть $0 \neq x \in h(X) \subseteq h(Y)$. Сначала найдём такой элемент $r \in h(R)$, что $0 \neq xr \in h(Y)$, а затем такой $r' \in h(R)$, что $0 \neq (xr)r' \in Y_g$. Тогда $0 \neq x(rr') \in Y_g \cap X = X_g$. □

2.8. Градуированная размерность Голди

Определение 15. Пусть X — ненулевой градуированный правый R-модуль, $n \in \mathbb{N}$.

1. Модуль $X \neq 0$ называется gr-униформным (или gr-равномерным), если всякий его ненулевой градуированный подмодуль является gr-существенным или, что равносильно, любые два ненулевых градуированных подмодуля в X имеют ненулевое пересечение.
2. Градуированное кольцо R, такое что модуль R_R (${}_RR$) gr-униформен, называется gr-униформным справа (слева).
3. Элемент $r \in h(R)$, для которого модуль $(rR)_R$ (${}_R(Rr)$) gr-униформен, называется gr-униформным справа (слева).
4. Если модуль X содержит прямую сумму n ненулевых градуированных подмодулей и не содержит прямых сумм из $n+1$ градуированных ненулевых подмодулей, то число n называется градуированной размерностью Голди модуля X и обозначается $\text{gr-u.dim}(X)$.
5. Градуированный модуль, имеющий конечную размерность Голди, называется gr-конечномерным.
6. Градуированное кольцо R, такое что модуль R_R (${}_RR$) gr-конечномерен, называется gr-конечномерным справа (слева).

Замечание 5. Пусть X_R — градуированный модуль.

1. X_R gr-униформен тогда и только тогда, когда $\text{gr-u.dim}(X) = 1$.
2. X gr-конечномерен тогда и только тогда, когда X не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых градуированных подмодулей.
3. $\text{gr-u.dim}(X) = n$ тогда и только тогда, когда X — gr-существенное расширение прямой суммы своих n gr-униформных подмодулей.
4. $\text{gr-u.dim}(X) \leqslant \text{u.dim}(X)$, где $\text{u.dim}(X)$ — размерность Голди модуля X (рассматриваемого без градуировки).
5. Модуль X gr-конечномерен в точности тогда, когда кольцо $\text{END}_R(X)$ не содержит бесконечного множества ортогональных однородных идемпотентов. В частности, градуированное кольцо $R \cong \text{End}_R R \cong \text{END}_R R$ gr-конечномерно в точности тогда, когда R не содержит бесконечного множества ортогональных однородных идемпотентов.
6. Свойства gr-униформности и униформности, вообще говоря, неравносильны. Например, если k — поле, G — группа, то групповое кольцо kG является градуированным полем и тем более gr-униформным. В то же время по теореме Машке (теореме 7) при определённых условиях фундаментальный (неградуированный) идеал выделяется в kG прямым слагаемым, и значит, кольцо kG при этих условиях не униформно.

Предложение 19. *Пусть градуированный R-модуль X g-точен, $g \in G$. Тогда*

$$\text{gr-u.dim}(X) = \text{u.dim}\big((X_g)_{R_e}\big).$$

В частности, X gr-конечномерен (gr-униформен) тогда и только тогда, когда $(X_g)_{R_e}$ конечномерен (униформен).

Доказательство. Если $\bigoplus_{i=1}^{n} Y_i$ — прямая сумма ненулевых градуированных подмодулей в X, то $\bigoplus_{i=1}^{n} (Y_i \cap X_g)$ — прямая сумма ненулевых подмодулей в $(X_g)_{R_e}$, поэтому $\operatorname{gr-u.dim}(X) \leqslant \operatorname{u.dim}(X_g)$.

Если $\bigoplus_{i=1}^{n} K_i$ — прямая сумма ненулевых подмодулей в $(X_g)_{R_e}$, то $\bigoplus_{i=1}^{n} K_i R$ — прямая сумма ненулевых градуированных подмодулей в X. Действительно, пусть $\sum_{i=1}^{n} k_i r_i = 0$, $k_i \in K_i \subseteq X_g$, $r_i \in h(R)$, $k_i r_i \neq 0$. Можно считать, что все r_i из одной компоненты. Найдём такой элемент $r' \in h(R)$, что $0 \neq k_1 r_1 r' \in X_g$. Тогда $\sum_{i=1}^{n} k_i r_i r' = 0$, причём $k_i r_i r' \in X_g$ при всех i, поэтому $k_i r_i r' = 0$ при всех i — противоречие. Значит, $\operatorname{gr-u.dim}(X) \geqslant \operatorname{u.dim}(X_g)$. $\square$

Предложение 20. *Пусть кольцо R e-точно справа. Тогда* $\operatorname{gr-u.dim}(R_R) = \operatorname{u.dim}((R_e)_{R_e})$. *В частности, R gr-конечномерно (gr-униформно) справа тогда и только тогда, когда R_e конечномерно (униформно) справа.*

Доказательство. Если $\bigoplus_{i=1}^{n} I_i$ — прямая сумма ненулевых градуированных правых идеалов в R, то $\bigoplus_{i=1}^{n} (I_i \cap R_e)$ — прямая сумма ненулевых правых идеалов в R_e, а если $\bigoplus_{i=1}^{n} K_i$ — прямая сумма ненулевых правых идеалов в R_e, то так же, как в предыдущем предложении, показывается, что $\bigoplus_{i=1}^{n} K_i R$ — прямая сумма ненулевых градуированных правых идеалов в R. $\square$

2.9. Gr-сингулярность

Определение 16.

1. Градуированный подмодуль X_R модуля Y_R со свойством, что для любого $x \in h(Y)$ справедливо, что $x \in h(X)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{r}_R(x)$ — gr-существенный правый идеал в R, называется gr-сингулярным подмодулем модуля X и обозначается $\operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}} R$ (в некоторых источниках встречается обозначение $Z^{\mathrm{gr}}(Y)$).
2. Градуированный модуль X называется gr-сингулярным (gr-несингулярным), если $\operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(X) = X$ ($\operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(X) = 0$).
3. Правый градуированный идеал $\operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R)$ кольца R называется правым gr-сингулярным идеалом R.
4. Градуированное кольцо R с $\operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = R$ ($\operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0$) называется gr-сингулярным (gr-несингулярным) справа.

Аналогичные определения даются в левостороннем случае.

Ясно, что $\operatorname{Sing}^{\mathrm{gr}}(X)$ — наибольший градуированный подмодуль сингулярного подмодуля $\operatorname{Sing}(X)$ модуля X ($\operatorname{Sing}(X)$ состоит из всех элементов модуля X, аннуляторы которых — существенные правые идеалы в R).

Заметим, что $\mathrm{Sing}(X)$ может не быть градуированным подмодулем модуля X.

Пример 4. Групповое кольцо $R = \mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2 = \{0, e_0, e_1, e_0 + e_1\}$ с естественной $\mathbb{Z}_2$-градуировкой gr-несингулярно, но $\mathrm{Sing}(R) = \{0, e_0 + e_1\}$.

Предложение 21 [57, следствие 5.3.4]. *Если G — упорядоченная группа и X — G-градуированный модуль, то $\mathrm{Sing}(X)$ — градуированный подмодуль в X, и поэтому $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(X) = \mathrm{Sing}(X)$.*

Ясно, что если $X_R \subseteq Y_R$ — gr-существенное расширение, то $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(X_R) = \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(Y_R) \cap X$.

Предложение 22. *Пусть R, S — градуированные кольца, причём $R_R \subseteq S_R$ — gr-существенное расширение. Тогда*

1) $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_R) = \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_S)$;
2) *R gr-несингулярно справа тогда и только тогда, когда S gr-несингулярно справа.*

Доказательство. Первое утверждение и импликация $\Longleftarrow$ во втором утверждении следуют из пункта 4 предложения 16.

Докажем импликацию $\Longrightarrow$. Если $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_S) = 0$, то по первому утверждению $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) \subseteq \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_R) = 0$. $\square$

Предложение 23. *Если X_R — g-точный градуированный модуль, $g \in G$, то $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(X)$ — g-точный модуль.*

Доказательство. Пусть I — gr-существенный правый идеал в R, $x \in h(X) \setminus 0$, $xI = 0$. Тогда $0 \neq xr \in X_g$ для некоторого $r \in h(R)$ и $(I : r)$ — gr-существенный правый идеал, поэтому $0 \neq xr \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(X)$. $\square$

Предложение 24. *Если кольцо R e-точно справа, X — градуированный R-модуль, $g \in G$, то $\mathrm{Sing}(X_g)_{R_e} = \big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(X_R)\big)_g$. В частности, при $X_R = R_R$ и $g = e$ получаем, что $\mathrm{Sing}\big((R_e)_{R_e}\big) = \big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R)\big)_e$.*

Доказательство. Пусть K — существенный правый идеал в R_e, $x \in X_g$, $xK = 0$. Тогда KR — gr-существенный правый идеал в R (следствие 1) и $xKR = 0$. Значит, $\mathrm{Sing}(X_g)_{R_e} \subseteq \big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(X_R)\big)_g$.

Пусть I — gr-существенный правый идеал в R, $x \in X_g$, $xI = 0$, то I_e — существенный правый идеал в R_e (следствие 1) и $xI_e = 0$. Значит, $\mathrm{Sing}(X_g)_{R_e} \supseteq \big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(X_R)\big)_g$. $\square$

Следствие 2. *Если кольцо R e-точно справа (слева), то кольцо R gr-несингулярно справа (слева) в точности тогда, когда кольцо R_e несингулярно справа (слева).*

2.10. Центр

Предложение 25 [56, предложение 2.1.8]. *Если R — кольцо, градуированное упорядоченной группой G, то его центр $Z(R)$ является градуированным подкольцом кольца R.*

Заметим, что если G — абелева группа, то центр $Z(R)$ G-градуированного кольца R является градуированным подкольцом, даже если G не является упорядоченной группой. В общем случае центр градуированного кольца может не быть градуированным.

Пример 5. Пусть F — поле, G — неабелева группа порядка n. Ясно, что групповая алгебра $R = FG$ является градуированным телом, но её центр $Z(FG)$ не является градуированным полем, так как $g_1 + \ldots + g_n \in Z(FG)$, но $g_i \notin Z(FG)$, если $g_i \notin Z(G)$.

3. Градуированные рациональные расширения и кольца частных

3.1. Рациональность и gr-рациональность

Расширение модулей $X_R \subseteq Y_R$ называется рациональным, если для любых $y_1 \in Y \setminus 0$ и $y_2 \in Y$ найдётся такой элемент $r \in R$, что $y_1 r \neq 0$ и $y_2 r \in X$.

Кольцо S называется правым кольцом частных своего подкольца R, если $R_R \subseteq S_R$ — рациональное расширение. Говорят также, что R — правый порядок в S.

Градуированный аналог рассматриваемых понятий вводится естественным образом.

Определение 17.

1. Расширение градуированных модулей $X_R \subseteq Y_R$ над градуированным кольцом R называется gr-рациональным, если для любых $y_1 \in h(Y) \setminus 0$ и $y_2 \in h(Y)$ найдётся такой элемент $r \in h(R)$, что $y_1 r \neq 0$ и $y_2 r \in h(X)$.
2. Градуированное кольцо S называется градуированным правым кольцом частных своего градуированного подкольца R, если $R_R \subseteq S_R$ — gr-рациональное расширение.

Ясно, что всякое рациональное градуированное расширение градуированных модулей является gr-рациональным. Следующее предложение показывает, что верно и обратное.

Предложение 26. *Всякое gr-рациональное расширение $X_R \subseteq Y_R$ градуированных модулей X_R и Y_R является рациональным.*

Доказательство. Пусть $x = x_{g_1} + \ldots + x_{g_k} \in Y \setminus 0$, $y = y_{h_1} + \ldots + y_{h_l} \in Y$, $g_i, h_j \in G$. Считаем, что $y \neq 0$, иначе можно взять $r = 1$. Проведём индукцию по l. При $l = 1$ найдём элемент $r \in h(R)$, для которого $x_{g_1} r \neq 0$ и $yr = y_{h_1} r \in X$. Тогда $xr \neq 0$ и $yr \in X$. При $l > 1$ найдём сначала такой элемент $r' \in h(R)$, что $x_{g_1} r' \neq 0$ и $y_{h_l} r' \in X$, а затем по предположению индукции такой $r \in R$, что $x_{g_1} r' r \neq 0$ и $(y_{h_1} r' + \ldots + y_{h_{l-1}} r') r \in X$. Тогда $xr'r = x_{g_1} r'r + \ldots \neq 0$ и $yr'r \in X$. □

Следствие 3. *Градуированные кольца частных являются кольцами частных.*

В то же время не существует никакого канонического способа индуцировать градуировку с кольца на произвольное его кольцо частных.

Пример 6. $\mathbb{Z}$-градуировку с кольца многочленов $R = k[x]$ нельзя продолжить на поле частных $k(x)$. Действительно, пусть $(1+x)^{-1} = t_{i_1} + \ldots + t_{i_n}$, $i_1 < \ldots < i_n$. Тогда $1 = (1+x)(t_{i_1} + \ldots + t_{i_n})$, причём $\deg(1 \cdot t_{i_1}) = i_1$ — наименьшая, а $\deg(x \cdot t_{i_n}) = i_n + 1$ — наибольшая из степеней элементов этого разложения единицы. Это противоречит тому, что $1 \in R_e$.

3.2. Свойства градуированных колец частных

Лемма 1. *Пусть S — градуированное правое кольцо частных градуированного кольца R. Тогда*

1) *если K — ненулевой правый градуированный идеал в S, то $K \cap R$ — ненулевой правый градуированный идеал в R;*
2) *если I — ненулевой правый градуированный идеал в R, то IS — ненулевой правый градуированный идеал в S, $R \cap IS$ — ненулевой правый градуированный идеал в R, являющийся gr-существенным расширением I; в частности, если I gr-замкнут, то $R \cap IS = I$;*
3) *для всех градуированных правых идеалов I, J в R справедливо, что если $I \cap J = 0$, то $IS \cap JS = 0$;*
4) $\Bigl(\bigoplus\limits_i I_i\Bigr)S = \bigoplus\limits_i (I_i S)$ *для любого семейства $(I_i)_i$ градуированных правых идеалов в R;*
5) *$K \cap R$ — gr-существенный правый идеал в R для всякого gr-существенного правого идеала K в S;*
6) *IS — gr-существенный правый идеал в S для всякого gr-существенного правого идеала I в R.*

Доказательство. Свойства 1)—6) следуют из свойств колец частных (см. [20, п. 14.9]) и предложений 15 и 26. □

Предложение 27. *Пусть S — градуированное правое кольцо частных градуированного кольца R. Тогда*

1) *R коммутативно тогда и только тогда, когда S коммутативно;*
2) $\text{gr-u.dim}(R_R) = \text{gr-u.dim}(S_S)$; *в частности, R gr-конечномерно (gr-униформно) справа тогда и только тогда, когда S gr-униформно (gr-униформно) справа;*
3) $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_R) = \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S_S)$, $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = R \cap \mathrm{Sing}(S_S)$;
4) *утверждения, что кольцо R gr-несингулярно, модуль S_R gr-несингулярен, кольцо S_S gr-несингулярно, эквивалентны;*
5) *если R gr-первично (gr-полупервично), то S gr-первично (gr-полупервично).*

Доказательство. Пусть Q — максимальное правое кольцо частных кольца R.

Утверждение 1) следует из того, что коммутативность кольца R влечёт коммутативность кольца Q (см., например, [20, предложение 14.9]).

Утверждение 2) следует из утверждений 3) и 4) леммы 1.

Утверждения 3) и 4) следуют из утверждений 5) и 6) леммы 1 и предложения 22.

Утверждение 5) следует из утверждения 1) леммы 1. □

3.3. Градуированные плотные идеалы

С рациональными расширениями и кольцами частных тесно связано понятие плотного одностороннего идеала кольца. Такие идеалы используются, например, при построении различных колец частных.

Определение 18. Градуированный правый идеал I градуированного кольца R называется gr-плотным, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

1) $\mathrm{l}_R(I : r) = 0$ для всех $r \in h(R)$;
2) для любых $r_1 \in h(R) \setminus 0$ и $r_2 \in h(R)$ найдётся элемент $r \in h(R)$, такой что $r_1 r \neq 0$, $r_2 r \in I$;
3) $I_R \subseteq R_R$ — gr-рациональное расширение.

Следствие 4 (из предложения 26 [2, 47]). *Градуированный правый идеал градуированного кольца R является плотным тогда и только тогда, когда он является gr-плотным.*

Иногда бывает удобнее применять другое, эквивалентное, определение градуированного правого кольца частных с использованием плотных правых градуированных идеалов.

Предложение 28. *Пусть R — градуированное подкольцо градуированного кольца S. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *S — градуированное правое кольцо частных кольца R*;
2) *для любого $s \in h(S) \setminus 0$ $(R : s)_R = \{r \in R \mid sr \in R\}$ является плотным правым градуированным идеалом в R и $s(R : s)_R \neq 0$ (последнее условие равносильно условию существования $r \in h(R)$, для которого $0 \neq sr \in R$).*

Доказательство. Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $s \in h(S) \setminus 0$, $r_1, r_2 \in h(R)$, $r_1 \neq 0$. Для элементов $r_1 \in h(S) \setminus 0$ и $sr_2 \in h(S)$ по 2) найдётся элемент $r \in h(R)$, такой что $r_1 r \neq 0$ и $sr_2 r \in h(R)$, т. е. $r_2 r \in (R : s)_R$, поэтому правый градуированный идеал $(R : s)_R$ является плотным. Далее, положив в 2) $s = s' \in h(S) \setminus 0$, найдём элемент $r \in h(R)$, такой что $0 \neq sr \in h(R)$.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $s, s' \in h(S)$, $s \neq 0$. По $s \neq 0$ найдём элемент $r_1 \in h(R)$, такой что $0 \neq sr_1 \in R$. По 1) $(R : s')_R$ — плотный правый градуированный идеал кольца R (при $s' = 0$ он совпадает с R), поэтому для элементов $sr_1 \in h(R) \setminus 0$ и $r_1 \in h(R)$ найдётся элемент $r \in h(R)$, такой что $sr_1r \neq 0$ и $r_1r \in (R : s')_R$, т. е. $s'r_1r \in h(R)$. $\square$

Непосредственно из определений вытекает, что gr-рациональные расширения являются gr-существенными. В частности, gr-плотные правые идеалы gr-существенные. Обратное неверно, как показывает пример $p\mathbb{Z}_{p^2} \lhd \mathbb{Z}_{p^2}$ при простом p (неградуированный случай). Но при условии gr-несингулярности данные понятия совпадают. Более точно, так же, как и в неградуированном случае, доказывается следующее предложение (см. [17, § 4.5; 20, п. 14.1, 14.3]).

Предложение 29. *Пусть $X \subseteq Y$ — градуированные R-модули. Тогда*

1) *$X \subseteq Y$ — gr-рациональное расширение тогда и только тогда, когда X gr-существен в Y и для любых $y \in h(Y)\setminus 0$ и $x \in h(X)\setminus 0$ найдётся такой элемент $r \in h(R)$, для которого $xr \neq 0$ и $yr \in X$;*
2) *если X gr-существен в Y и X gr-несингулярен, то Y gr-несингулярен и $X \subseteq Y$ — gr-рациональное расширение;*
3) *кольцо R gr-несингулярно справа в точности тогда, когда все gr-существенные правые идеалы в R являются gr-плотными.*

В дальнейшем нам понадобятся свойства градуированных плотных идеалов gr-полупервичных колец.

Лемма 2. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо и I — градуированный идеал кольца R. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) $\mathrm{l}_R(I) = 0$;
2) *I — gr-плотный правый идеал;*
3) *I — gr-существенный правый идеал.*

Лемма 3. *Пусть I — градуированный идеал gr-полупервичного кольца R. Тогда*

1) $\mathrm{l}_R(I) = \mathrm{r}_R(I) =: I^*$;
2) $I \cap I^* = 0$;
3) *$I \oplus I^*$ — gr-плотный правый идеал.*

3.4. Рациональные расширения однородных компонент

Предложение 30. *Пусть $X \subseteq Y$ — gr-рациональное расширение градуированных модулей и модуль Y g-точен. Тогда $X_g \subseteq Y_g$ — рациональное расширение R_e-модулей.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in Y_g$, $y_1 \neq 0$. Так как расширение $X \subseteq Y$ gr-рационально, то найдётся такой элемент $r \in h(R)$, что $y_1r \neq 0$ и $y_2r \in h(X)$. Так как модуль Y g-точен, то найдётся такой элемент $r' \in h(R)$, что $0 \neq (y_1r)r' \in Y_g$. Поскольку $y_1 \in Y_g$, $y_1rr' \in Y_g$ и $r, r' \in h(R)$, то $rr' \in R_e$. Значит, $y_2(rr') \in X_g$, и $X_g \subseteq Y_g$ — рациональное R_e-расширение. $\square$

Следствие 5. *Пусть S — градуированное правое кольцо частных кольца R и S_R — e-точный модуль. Тогда S_e — правое кольцо частных кольца R_e.*

Замечание 6. Пример 14 показывает, что условие e-точности существенно. В этом примере Q^{gr} — максимальное $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо частных коммутативного кольца R, причём $R_0 \cong k \hookrightarrow k \oplus k = Q_0^{\mathrm{gr}}$, $k \ni a \mapsto (a, a) \in k \oplus k$. Ясно, что $k \oplus k$ не кольцо частных для k.

Следствие 6. *Пусть градуированное кольцо R e-точно справа и I — его градуированный плотный правый идеал. Тогда I_e — плотный правый идеал кольца R_e.*

4. Градуированная инъективность

Перейдём к рассмотрению градуированных инъективных модулей. Они изучались в работах [19, 23, 55] для $\mathbb{Z}$-градуированных колец и позднее в [56, 57] для колец, градуированных произвольной группой.

Определение 19. Градуированный R-модуль X называется gr-инъективным, если и только если для любых градуированных R-модулей A и B, любого мономорфизма $\alpha \in \mathrm{HOM}_R(A, B)_e$ и любого гомоморфизма $\varphi \in \mathrm{HOM}_R(A, X)_e$ найдётся гомоморфизм $\psi \in \mathrm{HOM}_R(B, X)_e$, такой что $\psi \circ \alpha = \varphi$.

Другими словами, градуированный R-модуль gr-инъективен, если он инъективен как объект категории gr.mod-R.

Замечание 7. Ясно, что если в определении 19 все гомоморфизмы считать сдвигающими градуировку, то получится эквивалентное определение.

Лемма 4 [57, следствие 2.4.8]. *Градуированный R-модуль X_R gr-инъективен тогда и только тогда, когда функтор $\mathrm{HOM}_R(-, X)$ точен.*

Теорема 8 (критерий Бэра для градуированных модулей [57, следствие 2.4.8]). *Градуированный модуль X_R gr-инъективен тогда и только тогда, когда для любого градуированного правого идеала K кольца R, любого $g \in G$ и любого $\varphi \in \big(\mathrm{HOM}_R(K, X)\big)_g$ найдётся элемент $m \in X_g$, такой что $\varphi k = mk$ для всех $k \in K$.*

Предложение 31 [57, следствия 2.3.2, 2.5.2]. *Верны следующие утверждения.*

1. *Всякий инъективный градуированный модуль gr-инъективен.*
2. *Если группа G конечна, то всякий gr-инъективный G-градуированный модуль инъективен.*

Пример 7 [57, замечание 2.3.3]. Пусть k — поле, $R = k[x, x^{-1}]$ — $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо с градуировкой $R_n = kx^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда R_R — gr-инъективный, но не инъективный модуль.

4.1. Модуль градуированных характеров

Один из способов построения максимального правого кольца частных данного кольца основывается на понятии инъективной оболочки. Инъективная оболочка $\mathrm{E}(X)$ модуля X строится в два этапа: сначала модуль X вкладывается в инъективный модуль, а затем среди всех инъективных расширений модуля X выбирается в определённом смысле наименьшее. Оно оказывается его существенным расширением, причём любые два таких инъективных существенных расширения модуля X оказываются изоморфными, и любое из них и называется инъективной оболочкой модуля X. Для вложения произвольного модуля в инъективный используется модуль характеров: показывается, что каждый модуль вкладывается в модуль характеров свободного модуля, а последний оказывается инъективным (см. [17]).

Поскольку категория градуированных модулей $\mathrm{gr.mod}$-R является категорией Гротендика, то существование достаточного числа инъективных объектов и инъективной оболочки можно получить из общекатегорных соображений. Но внимания заслуживает явное описание вложения градуированного модуля X в gr-инъективный с использованием модуля градуированных характеров X^*, наследующего градуировку модуля X. В [19, 23] рассмотрен случай $\mathbb{Z}$-градуировки.

Определение 20. Пусть X — градуированный правый R-модуль. Определим левый R-модуль X^* градуированных характеров модуля X:

$$X^* = \mathrm{HOM}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \quad (r\chi)x = r(\chi x), \quad \chi \in X^*, \quad r \in R, \quad x \in X,$$

с градуировкой

$$X^*_g = \{\chi \in X^* \mid \text{для любого } h \in G \setminus \{g^{-1}\} \ \chi X_h = 0\},$$

т. е. $X^* = \mathrm{HOM}_{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ — группа G-градуированных гомоморфизмов G-градуированных аддитивных групп, где $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_e = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Следующие леммы и предложения доказываются аналогично неградуированному случаю (см. [17, § 4.2]).

Лемма 5. *Верны следующие утверждения.*

1. *Отображение*

$$\begin{cases} X \to (X^*)^*, \\ x \mapsto (X^* \ni \chi \mapsto \chi x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{cases} -$$

однородный степени e мономорфизм левых R-модулей.

2. *Если $\varphi\colon A \to B$ — однородный степени g эпиморфизм R-модулей A_R и B_R, то*

$$\varphi^*\colon \begin{cases} B^* \to A^*, \\ \chi \mapsto \big(A \ni a \mapsto \chi(\varphi a)\big) \end{cases} -$$

однородный степени g мономорфизм R-модулей ${}_RB^*$ и ${}_RA^*$.

3. *Каждый градуированный модуль X_R вкладывается с сохранением градуировки в модуль градуированных характеров gr-свободного модуля.*
4. *Если $_RF$ — gr-свободный модуль, то F_R^* — gr-инъективный модуль.*

Заметим только, что при доказательстве пункта 3 следует учесть предложение 14.

Следствие 7. *Каждый градуированный модуль вкладывается с сохранением градуировки в gr-инъективный модуль.*

Лемма 6. *Пусть Y — gr-существенное расширение X, I — gr-инъективный модуль, содержащий X. Тогда существует однородный степени e мономорфизм $Y \to I$, тождественный на X.*

Предложение 32. *Каждый градуированный модуль X обладает максимальным gr-замыканием Y, единственным с точностью до изоморфизма на X, т. е. если Y' — другое максимальное gr-замыкание X, то существует однородный степени e изоморфизм градуированных модулей Y и Y', тождественный на X.*

Предложение 33. *Пусть $X \subseteq Y$ — градуированные R-модули. Следующие условия равносильны*:

1) *Y — максимальное gr-существенное расширение X*;
2) *Y — gr-существенное расширение X и gr-инъективный модуль*;
3) *Y — минимальный gr-инъективный модуль, содержащий Y.*

При выполнении эквивалентных условий 1)—3) модуль Y называется gr-инъективной оболочкой модуля X и обозначается через $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X)$ (в некоторых источниках, например в [57], используется обозначение $\mathrm{E}^{\mathrm{g}}(X)$, но мы для единообразия, а также во избежание путаницы с элементом группы $g \in G$, используем в подобных случаях приставку gr-).

В дальнейшем нам понадобится понятие gr-рациональной оболочки градуированного модуля.

Лемма 7. *Пусть $X \subseteq Y$ — градуированные модули, I — gr-инъективная оболочка модуля Y. Тогда равносильны следующие условия*:

1) *$X \subseteq Y$ — gr-рациональное расширение*;
2) *для любого $f \in \mathrm{END}_R(I)$ если $f(X) = 0$, то $f(Y) = 0$).*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Предположим, что $f \in$ $\in \mathrm{END}_R(I)$, $f(X) = 0$, но $f(Y) \neq 0$. В силу gr-существенности Y в I $f(Y) \cap Y \neq 0$. Пусть $0 \neq y = f(x) \in h\bigl(Y \cap f(Y)\bigr)$. По 1) найдётся такой элемент $r \in h(R)$, что $yr \neq 0$ и $xr \in X$. Тогда $0 = f(xr) = yr \neq 0$ — противоречие.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). Предположим противное. Тогда существуют такие $x, y \in h(Y)$, что $y \neq 0$ и $(x : X) := \{r \in R \mid xr \subseteq X\} \subseteq r(y)$. Так как $r(x) \subseteq (x : X) \subseteq r(y)$, то корректно отображение $xR \ni xr \mapsto f(xr) = yr \in yR$, которое является однородным (степени $\deg y(\deg x)^{-1}$, если $x \neq 0$) эпиморфизмом R-модулей. Так как $(x : X) \subseteq r(y)$, то $X \cap xR \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, что позволяет корректно доопределить f до эпиморфизма (однородного той же степени)

$$g\colon \begin{cases} xR + X \to yR, \\ xr + x' \mapsto yr \quad (x' \in X,\ r \in R). \end{cases}$$

Поскольку модуль I gr-инъективен, эпиморфизм g продолжается в свою очередь до эндоморфизма $h \in \mathrm{END}_R(I)$. При этом $h(X) = g(X) = 0$. В то же время $h(x) = f(x) = y \neq 0$ и $h(Y) \neq 0$ — противоречие. □

Определение 21. Пусть Z — gr-инъективная оболочка градуированного модуля X. Градуированный модуль $Y \subseteq Z$, являющийся gr-рациональным расширением модуля X и содержащий всякое gr-рациональное расширение X в Z, называется gr-рациональной оболочкой X в Z.

Лемма 8. *Пусть Z — gr-инъективная оболочка градуированного модуля X. Тогда существует ровно одна gr-рациональная оболочка Y модуля X в Z. Кроме того,*

1) *если Z' — ещё одна gr-инъективная оболочка X и Y' — gr-рациональная оболочка X в Z', то $Y \cong Y'$;*
2) *если Z — gr-рациональное расширение X (например, если X gr-несингулярен, предложение 29), то $Y = Z$;*
3) *если X gr-инъективен, то $X = Y = Z$.*

Доказательство. Пусть Y_i — все gr-рациональные расширения X в Z (одно из них X), $Y = \sum\limits_i Y_i$, $f \in \mathrm{END}_R(Z)$ такой, что $f(X) = 0$. По лемме 7 $f(Y_i) = 0$. Тогда $f(Y) = 0$, и по лемме 7 Y — gr-рациональное расширение X.

Первое утверждение теперь следует из того, что все gr-инъективные оболочки модуля X изоморфны. Утверждения 2) и 3) очевидны. □

4.2. Структура gr-инъективных модулей

Определение 22. Пусть R — градуированное кольцо, X — левый R_e-модуль.

1. Левый градуированный R-модуль
$$\mathrm{Ind}(X) = R \otimes_{R_e} X, \quad \mathrm{Ind}(X)_g = R_g \otimes_{R_e} X,$$
называется градуированным R-модулем, индуцированным R_e-модулем X.
2. Левый градуированный R-модуль
$$\mathrm{Coind}(X) = \bigoplus_{g\in G} \{f \in \mathrm{Hom}_{R_e}(R, X) \mid \text{для всех } h \neq g^{-1}\ f(R_h) = 0\}$$
называется градуированным R-модулем, коиндуцированным R_e-модулем X.

Замечание 8. Непосредственно проверяется, что указанные в определениях множества $\mathrm{Ind}(X)$ и $\mathrm{Coind}(X)$ действительно являются G-градуированными R-модулями. Функтор $\mathrm{Ind}\colon R_e\text{-mod} \to R\text{-gr}$ называется *индуцированным*, а функтор $\mathrm{Coind}\colon R_e\text{-mod} \to R\text{-gr}$ — *коиндуцированным*.

Предложение 34 [57, с. 34]. *Верны следующие утверждения.*

1. *Функтор* Ind *точен справа.*
2. *Если* ${}_{R_e}R$ — *плоский модуль или, что равносильно,* ${}_{R_e}R_g$ — *плоские модули, то функтор* Ind *точен слева и, значит, точен.*
3. *Функтор* Coind *точен слева.*
4. *Если* ${}_{R_e}R$ — *проективный левый модуль, то функтор* Coind *точен справа и, значит, точен.*

Предложение 35 [57, следствие 2.5.6]. *Для градуированного модуля* X_R *верны следующие утверждения.*

1. *Если* ${}_{R_e}X$ — *инъективный модуль, то модуль* $\mathrm{Coind}(X)$ *gr-инъективен.*
2. *Если* X — *gr-инъективный правый* R*-модуль и модули* ${}_{R_e}X_g$ *плоские при всех* $g \in G$*, то модули* ${}_{R_e}X_g$ *инъективные при всех* $g \in G$.

Предложение 36 [57, предложение 2.8.1]. *Пусть* $g \in G$, ${}_RX$ — *gr-инъективный* g*-точный модуль. Тогда* ${}_{R_e}X_g$ — *инъективный модуль и* $X \cong \mathrm{Coind}\, X_g(g^{-1})$.

Следствие 8 [57, следствие 2.8.2]. *Пусть* $g \in G$, ${}_RX$ — g*-точный модуль. Тогда*

$$\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X) \cong \mathrm{Coind}(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X)_g) \cong \mathrm{Coind}\big(\mathrm{E}(X_g)\big)(g^{-1}).$$

Лемма 9 [57, лемма 2.8.3]. *Пусть* ${}_RX$ — *ненулевой градуированный модуль с конечным носителем* $\mathrm{Supp}(X)$*. Тогда в* X *существует ненулевой градуированный подмодуль,* g*-точный хотя бы для одного* $g \in \mathrm{Supp}(X)$.

Следствие 9 [57, следствие 2.8.4]. *Пусть* ${}_RX$ — *ненулевой градуированный* R*-модуль с конечным носителем* $\mathrm{Supp}(X)$*. Тогда в* X *существует градуированный ненулевой gr-инъективный подмодуль,* g*-точный хотя бы для одного* $g \in \mathrm{Supp}(X)$*. В частности, каждый gr-инъективный gr-неразложимый модуль с конечным носителем точен хотя бы в одной компоненте.*

Для градуированного модуля ${}_RX$ обозначим через $\mathcal{F}(X)$ семейство всех градуированных подмодулей в X, точных хотя бы в одной компоненте.

Предложение 37 [57, предложение 2.8.5]. *Каждый градуированный модуль* ${}_RX$ *с конечным носителем является gr-существенным расширением конечной прямой суммы подмодулей из* $\mathcal{F}(X)$.

Теорема 9 [57, теорема 2.8.7, следствие 2.8.8]. *Пусть* ${}_RX$ — *gr-инъективный модуль с конечным носителем* $\mathrm{Supp}(X)$*. Тогда*

1) X *инъективен;*

2) *существуют* $n \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_n \in G$ *и левые инъективные* R_e*-модули* $X_1, \ldots, X_n$, *такие что*
$$X \cong \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Coind}(X_i)(g_i^{-1}).$$

4.3. Градуированные квазиинъективные модули

Определение 23. Градуированный R-модуль X называется gr-квазиинъективным, если для любого градуированного подмодуля $0 \neq U \subseteq X$ и любого градуированного гомоморфизма $\alpha\colon U \to X$ существует $\psi \in \mathrm{END}_R(X)$, такой что $\psi(u) = \alpha(u)$ для всех $u \in U$.

Предложение 38 [6, предложение 3.14]. *Пусть* X *— правый градуированный* R*-модуль,* $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X)$ *— его gr-инъективная оболочка,* $\Lambda = \mathrm{END}_R\big(\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X)\big)$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) ΛX *является пересечением всех gr-квазиинъективных подмодулей модуля* $\mathrm{E}^{\mathrm{gr}}(X)$, *содержащих* X;
2) ΛX *является gr-квазиинъективным модулем*;
3) *градуированный модуль* X *является gr-квазиинъективным тогда и только тогда, когда* $X = \Lambda X$.

Следствие 10. *Градуированный* R*-модуль* X *gr-квазиинъективен тогда и только тогда, когда он является вполне инвариантным подмодулем своей gr-инъективной оболочки.*

5. Теорема слабой плотности

Теоремы плотности имеют многочисленные применения в теории колец. В работе [6] были доказаны теорема плотности для градуированного слабо примитивного кольца и теорема слабой плотности в случае, когда градуировка колец осуществляется по полугруппам, а градуировка модулей — по полигонам над этими полугруппами, при некоторых условиях сокращения, наложенных на полугруппы и полигоны.

Приведём доказательство теоремы слабой плотности в нашем случае, для чего сформулируем несколько определений.

Пусть S — G-градуированное кольцо, M_S — правый G-градуированный S-модуль, $\Delta = \mathrm{END}(M_S)$, ${}_\Delta N$ — левый G-градуированный Δ-модуль и T — градуированный S-подмодуль в $\mathrm{HOM}_\Delta(N, M)$. Построенная таким образом система называется (*правым*) *градуированным* S*-контекстом*.

Определение 24.

1. Градуированный подмодуль T называется тотальным, если $nT \neq 0$ для любого $0 \neq n \in h(N)$.

2. Градуированный подмодуль T называется слабо плотным, если для любых однородных элементов $n_1, n_2, \ldots, n_k \in h(N)$, таких что $n_1 \notin \sum\limits_{i=2}^{k} \Delta n_i$, найдётся такой однородный элемент $t \in h(T)$, что $n_1 t \neq 0$, $n_i t = 0$ для всех $i > 1$.

Теорема 10 (теорема слабой плотности). *Пусть в данном S-контексте модуль M_S gr-квазиинъективен, а T тотален. Тогда T слабо плотен.*

Доказательство. Проведём индукцию по k. При $k = 1$ в силу тотальности подмодуля T для произвольного $n_1 \in h(N)$ найдётся такой $t \in h(T)$, что $n_1 t \neq 0$.

Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_k \in h(N)$ таковы, что $n_1 \notin \sum\limits_{i=2}^{k} \Delta n_i$, и утверждение теоремы выполнено для любого $l < k$. Предположим, что для нашего набора утверждение теоремы неверно, т. е. для всех $t \in T$ из того, что $n_i t = 0$ для всех $i = 2, \ldots, k$, следует, что $n_1 t = 0$. Положим $J = \{t \in T \mid n_i t = 0,\ i > 2\}$ (при $k = 2$ положим $J = T$). Ясно, что J является градуированным S-подмодулем в T. Если $n_2 \in \sum\limits_{i=2}^{k} \Delta n_i$, то по предположению индукции теорема доказана. Пусть $n_2 \notin \sum\limits_{i=2}^{k} \Delta n_i$. Тогда по предположению индукции $n_2 J \neq 0$ и $n_2 J$ — градуированный S-подмодуль в M. Определим отображение $f\colon n_2 J \to M$ по правилу $f(n_2 t) = n_1 t$ для всех $t \in J$. Легко убедиться, что отображение f корректно определено (так как если $n_2 t = 0$, то и $n_1 t = 0$) и является градуированным гомоморфизмом S-подмодулей. В силу gr-квазиинъективности M_S найдётся такой элемент $\lambda \in \Delta = \mathrm{END}(M_S)$, что $\lambda(n_2 t) = f(n_2 t) = n_1 t$ для всех $t \in J$. Отсюда получим, что $(\lambda n_2 - n_1)J = 0$. Рассмотрим элементы $\lambda n_2 - n_1, \ldots, n_k \in h(N)$. Так как $n_1 \notin \sum\limits_{i=2}^{k} \Delta n_i$, то и $\lambda n_2 - n_1 \notin \sum\limits_{i=3}^{k} \Delta n_i$. По предположению индукции $(\lambda n_2 - n_1)J \neq 0$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

6. Максимальные градуированные правые кольца частных

В неградуированном случае для каждого кольца R существует его максимальное (или полное) правое кольцо частных $Q(R)$ (существует также левое, причём левое и правое, вообще говоря, не совпадают). Максимальным оно называется потому, что в него вкладывается всякое правое кольцо частных. В теории градуированных колец вводится естественный градуированный аналог этого понятия — максимальное градуированное правое кольцо частных градуированного кольца R. Мы будем обозначать его $Q^{\mathrm{gr}}(R)$. Как и любое правое кольцо частных, кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ вкладывается в кольцо $Q(R)$ (следствие 3), но, вообще говоря, с ним не совпадает, потому что кольцо $Q(R)$ может оказаться неградуированным, точнее, градуировка кольца R может не продолжаться на кольцо $Q(R)$ (пример 6).

6.1. Эквивалентные определения и основные свойства

6.1.1. Кольцо эндоморфизмов gr-инъективной оболочки

Мы построим максимальное градуированное правое кольцо частных аналогично его неградуированному аналогу, следуя в основном изложению И. Ламбека [17].

Определение 25. Пусть I_R — gr-инъективная оболочка градуированного модуля R_R, $H = H(R) = \mathrm{END}_R(I)$. ${}_H I_R$ — градуированный H-R-бимодуль, $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R) = \mathrm{END}_H\, I$. Эндоморфизмы из Q^{gr} пишем справа от аргументов. Кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ называется максимальным градуированным правым кольцом частных кольца R.

Предложение 39. *Верны следующие утверждения.*

1. $\begin{cases} R \to Q^{\mathrm{gr}}, \\ r \mapsto (I \ni i \mapsto ir \in I) \end{cases}$ — *градуированный мономорфизм колец.*
2. $\begin{cases} {}_H H \to {}_H I, \\ h \mapsto h1 \end{cases}$ — *однородный степени e эпиморфизм H-модулей.*
3. $\begin{cases} Q^{\mathrm{gr}}_R \to I_R, \\ q \mapsto 1q \end{cases}$ — *однородный степени e мономорфизм R-модулей с образом*

$$1Q^{\mathrm{gr}} = \{i \in I \mid \text{для любого } f \in h(H) \text{ если } f(R) = 0, \text{ то } f(i) = 0\}.$$

4. *Если R_R — gr-инъективный модуль, то $R \cong H \cong Q^{\mathrm{gr}}$.*
5. *Пусть градуированный подмодуль D_R модуля Q^{gr}_R удовлетворяет условию*

$$\text{для любого } f \in h(H) \text{ если } f(D) = 0, \text{ то } f(R) = 0. \qquad (*)$$

   Тогда для каждого $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ градуированный подмодуль $q^{-1}D = \{r \in R \mid qr \in D\}$ удовлетворяет условию $(*)$, т. е. если $f(q^{-1}D) = 0$ для всех $f \in h(H)$, то $f(R) = 0$.
6. *Градуированный правый идеал D кольца R является плотным в точности тогда, когда выполнено условие $(*)$.*
7. *Для каждого gr-плотного правого идеала A кольца R и каждого $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ правый градуированный идеал $q^{-1}A := \{r \in R \mid qr \in A\}$ является gr-плотным.*
8. *Q^{gr} — градуированное правое кольцо частных кольца R.*
9. *Для всякого градуированного правого кольца частных S кольца R тождественное отображение кольца R может быть продолжено, и притом*

однозначно, до гомоморфизма R-модулей S_R в Q^{gr}_R, являющегося мономорфизмом градуированных колец. В частности, $1Q^{\mathrm{gr}}_R$ — gr-рациональная оболочка R в I.

10. *Пусть $R \subseteq S$ — градуированные кольца. Тогда существует изоморфизм градуированных колец S и Q^{gr}, тождественный на R тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*
    1) *S — градуированное правое кольцо частных кольца R;*
    2) *для любых $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_r$, $g \in G$, $f \in \big(\mathrm{HOM}_R(D,R)\big)_g$ найдётся элемент $s \in S_g$, такой что для любых $d \in h(D)$ справедливо $f(d) = sd$.*
11. $\mathrm{HOM}_R(A,I) = \mathrm{HOM}_{Q^{\mathrm{gr}}}(A,I)$ *для любого градуированного модуля $A_{Q^{\mathrm{gr}}}$; в частности,* $\mathrm{END}_{Q^{\mathrm{gr}}}(I) = H$ *и* $\mathrm{END}_R(Q^{\mathrm{gr}}) = \mathrm{END}_{Q^{\mathrm{gr}}}(Q^{\mathrm{gr}}) \cong Q^{\mathrm{gr}}$.
12. *$I_{Q^{\mathrm{gr}}}$ — gr-инъективная оболочка модуля $Q^{\mathrm{gr}}_{Q^{\mathrm{gr}}}$.*
13. $Q^{\mathrm{gr}}\big(Q^{\mathrm{gr}}(R)\big) = Q^{\mathrm{gr}}(R)$.
14. *Следующие условия равносильны:*
    1) *модули ${}_H H$ и ${}_H I$ канонически изоморфны;*
    2) *модули I_R и Q^{gr}_R канонически изоморфны;*
    3) *кольца H и Q^{gr} канонически изоморфны;*
    4) *модуль Q^{gr}_R gr-инъективен;*
    5) *модули $I_{Q^{\mathrm{gr}}}$ и $Q^{\mathrm{gr}}_{Q^{\mathrm{gr}}}$ канонически изоморфны;*
    6) *модуль $Q^{\mathrm{gr}}_{Q^{\mathrm{gr}}}$ gr-инъективен;*
    7) *модуль I_R — gr-рациональное расширение модуля R_R.*

Замечание 9. Гомоморфизмы в пунктах 1—3 называются каноническими. Всюду далее будем считать, что $R \subseteq Q^{\mathrm{gr}}$, отождествляя R с его каноническим образом при мономорфизме из пункта 1. Используя пункт 5, будем также отождествлять $\mathrm{END}_R(Q^{\mathrm{gr}})$ с Q^{gr}. Пункты 8 и 9 оправдывают название «максимальное градуированное правое кольцо частных». Для их доказательства при данном определении кольца Q^{gr} понятие gr-плотного правого идеала формулируется в духе характеризации $1Q^{\mathrm{gr}}$ в I из пункта 3 (пункты 5 и 6, условие $(*)$). Канонические изоморфизмы в условиях 1), 2) и 5) пункта 14 — это гомоморфизмы соответственно из пунктов 2, 3 и 1, в условии 3) — композиция изоморфизмов абелевых групп из условий 1) и 2), которая оказывается изоморфизмом градуированных колец.

Доказательство. 1. Если $ir = 0$ для всех $i \in I$, то $r = 1r = 0$. Кроме того, для $r \in h(R)$ гомоморфизм $i \mapsto ir$ имеет ту же степень, что и элемент r.

2. Градуированный гомоморфизм модулей $R_R \to I_R$, $r \mapsto ir$ при каждом $i \in I$ продолжается до эндоморфизма из H (так как I gr-инъективен), и значит, для каждого $i \in I$ существует $h \in H$, такой что $h1 = i$. Однородность степени e эпиморфизма $h \mapsto h1$ очевидна.

3. По пункту 2 $I = H1$, так что если для $q \in Q^{\mathrm{gr}}$ верно $1q = 0$, то $Iq = (H1)q = H(1q) = 0$ и $q = 0$. Однородность степени e очевидна. Для любого

$q \in Q^{\mathrm{gr}}$ и любого $h \in h(H)$ имеют место импликации

$$hR = 0 \implies h1 = 0 \implies h(1q) = (h1)q = 0,$$

означающие, что

$$1Q^{\mathrm{gr}} \subseteq \{i \in I \mid \text{для любого } h \in H \text{ если } hR = 0, \text{ то } hi = 0\}.$$

Обратно, пусть $i \in I$ такой, что для любого $f \in h(H)$ если $fR = 0$, то $fi = 0$. Это условие с учётом пункта 2 означает корректность отображения ${}_HI \ni f1 \to fi \in {}_HI$, являющегося градуированным гомоморфизмом, и значит, $(f1)q = fi$ для некоторого $q \in Q^{\mathrm{gr}}$. В частности, при $f = 1$ получаем $1q = i$.

4. Если R_R — gr-инъективный модуль, то $I = R$, так что $H = \mathrm{END}_R(I) = \mathrm{END}_R(R) \cong R$ и $Q^{\mathrm{gr}} = \mathrm{END}_H(I) \cong \mathrm{END}_R(R) \cong R$.

5. Пусть $f \in h(H)$ и $f(q^{-1}D) = 0$. Отображение

$$\varphi\colon \begin{cases} D + qR \to R, \\ d + qr \mapsto fR \end{cases}$$

корректно: если $d + qr = 0$, то $qr \in D$, $r \in q^{-1}D$ и $fr = 0$. Ясно, что φ — гомоморфизм R-модулей, поэтому его можно продолжить до эндоморфизма $\psi \in \mathrm{END}_R(I) = H$. Так как $\psi(D) = \varphi(D) = 0$, то по $(*)$ $\psi(R) = 0$. Отсюда следует, что $f(1) = \varphi(q) = \psi(q) = \big(\psi(1)\big)q = 0$ и $f(R) = \big(f(1)\big)R = 0$.

6. Пусть $f \in h(H)$ и $f(D) = 0$. Предположим, что $f(R) \cap R \neq 0$. Тогда найдётся такой элемент $r_2 \in h(R)$, что $r_1 = f(r_2) \neq 0$. В силу gr-плотности D для $r_1 \neq 0$ и r_2 найдётся такой элемент $r \in h(R)$, что $r_1 r \neq 0$ и $r_2 r \in D$. Тогда $r_1 r = f(r_2)r \in f(D) = 0$ — противоречие. Значит, $f(R) \cap R = 0$, а тогда $f(R) = 0$ (так как $R_R \subseteq I_R$ — gr-существенное расширение).

Докажем обратное утверждение. Пусть $r_1, r_2 \in h(R)$, $r_1 \neq 0$. Если D — gr-плотный правый идеал в R, то $(D : r_2)_R$ тоже gr-плотный в R. Продолжим однородный гомоморфизм $R_R \neq r \mapsto r_1 r \in R_R$ до эндоморфизма $h \in H$. Так как $hR \ni h1 = r_1 \neq 0$, то $r_1(D : r_2) \neq 0$, т. е. $r_1 r \neq 0$ для некоторого $r \in h(R)$, такого что $r_2 r \in D$. Это и означает плотность правого градуированного идеала D.

7. Утверждение следует из пунктов 5 и 6.

8. Проверим условие 2) предложения 28. Пусть $0 \neq q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$. Применяя пункт 7 к $A_R = R_R$, получаем, что $q^{-1}R$ — gr-плотный правый идеал в R. Так как Q^{gr}_R — gr-существенное расширение R_R, то $q(R : q)_R = qR \cap R \neq 0$.

9. Так как $R_R \subseteq S_R$ — gr-существенное расширение, то можно считать, что $S_R \subseteq I_R$. Тогда для всякого $f \in h(H)$, такого что $fR = 0$, имеем $fs(R : s) = 0$ для всех $s \in S$, и с учётом gr-плотности $(R : s)$ $fsR = 0$. Значит, $fS = 0$, и по пункту 3 $S \subseteq 1Q^{\mathrm{gr}}$. Пусть теперь $\varphi\colon S_R \to 1Q^{\mathrm{gr}}_R$ — однородный степени e гомоморфизм R-модулей, продолжающий тождественное отображение $R \to R$. Продолжим гомоморфизм R-модулей $S_R \ni s \mapsto \varphi s - s \in (1Q^{\mathrm{gr}})_R$ до гомоморфизма $\psi \in h(H)$. Тогда $\psi R = 0$, и по пункту 3 $\psi S = 0$. Значит, $\varphi s = 1s$. Остаётся показать, что S — подкольцо в Q^{gr}. Обозначим операцию умножения в S через $*$. Тогда для всех $s, s' \in h(S)$, $d \in h(R : s)$ имеем

$$(s * s)d = (s' * s) * d = s' * (s * d) = s' * (sd) = s'(sd),$$

так как $d, sd \in R$. Значит, $(s' * s - s's)(R : s) = 0$, и в силу gr-плотности правого идеала $(R : s)$ $s' * s = s's$.

10. Утверждение следует из пункта 9.

11. Пусть $\varphi \in h\big(\mathrm{HOM}_R(B, I)\big)$, $a \in h(A)$, $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$. Покажем, что $\varphi(aq) = \varphi(a)q$. Рассмотрим гомоморфизм $\varphi_a \in \mathrm{HOM}_R(Q^{\mathrm{gr}}, I)$, заданный по правилу $\varphi_a(q) = \varphi(aq) - \varphi(a)q$. В силу gr-инъективности модуля I_R и того, что по пункту 3 $Q^{\mathrm{gr}}_R \cong (1Q^{\mathrm{gr}})_R \subseteq I_R$, гомоморфизм φ_a продолжается до эндоморфизма $\psi_a \in \mathrm{END}_R(I) = H$. Поскольку $\psi_a(R) = \varphi_a(R) = 0$, в силу леммы 7 $\psi_a(Q^{\mathrm{gr}}) = 0$.

12. Достаточно показать, что модуль $I_{Q^{\mathrm{gr}}}$ gr-инъективен. Пусть $A_{Q^{\mathrm{gr}}} \subseteq B_{Q^{\mathrm{gr}}}$, $f \in \mathrm{HOM}_{Q^{\mathrm{gr}}}(A, I) \subseteq \mathrm{HOM}_R(A, I)$. В силу gr-инъективности модуля I_R гомоморфизм f продолжается до гомоморфизма $g \in \mathrm{HOM}_R(B, I)$, который по пункту 10 является гомоморфизмом Q^{gr}-модулей. Это доказывает gr-инъективность модуля $I_{Q^{\mathrm{gr}}}$.

13. Утверждение следует из пунктов 11 и 12.

14. Имеем следующие равносильные утверждения:

$$1) \iff \mathrm{Ker}(h \mapsto h1) = 0 \iff$$
$$\iff \text{для любого } h \in H \text{ если } hR = 0, \text{ то } hI = 0 \iff I = 1Q^{\mathrm{gr}} \iff 2).$$

Пусть выполнены 1) и 2). Тогда H и Q^{gr} изоморфны по крайней мере как абелевы группы. Но так как при этом $h \leftrightarrow q$ тогда и только тогда, когда $h1 = 1q$, то из $h \leftrightarrow q$ и $h' \leftrightarrow q'$ следует, что $(hh')1 = h(h'1) = h(1q') = (h1)q' = (1q)q' = 1(qq')$, т. е. $H \cong Q^{\mathrm{gr}}$ — изоморфизм колец. Кроме того, $H_g \leftrightarrow Q^{\mathrm{gr}}_g$, $g \in G$.

Обратно, пусть выполнено 3). Возьмём $i \in I$. По пункту 1 найдётся такой элемент $f \in H$, что $f1 = i$, а по 3) найдётся такой $q \in Q^{\mathrm{gr}}$, что $f1 = 1q$. Значит, $i = 1q$, что доказывает 2).

Из 4) следует, что $Q^{\mathrm{gr}} \cong 1Q^{\mathrm{gr}}$ gr-инъективен, откуда получаем 2), так как gr-инъективный модуль I является gr-существенным расширением модуля $1Q^{\mathrm{gr}}$. Обратная импликация 2) $\Longrightarrow$ 4) очевидна.

Эквивалентности 1) $\iff$ 5) $\iff$ 3) $\iff$ 6) теперь следуют из пунктов 11 и 12.

Ясно, что верна импликация 2) $\Longrightarrow$ 7). Обратная импликация верна по пункту 9. $\square$

Отметим следующее утверждение, неградуированный аналог которого хорошо известен (см., например, [17, § 4.3, предложение 9]).

Предложение 40. *Пусть $(R_i)_{i \in I}$ — семейство G-градуированных колец. Тогда*

$$Q^{\mathrm{gr}}\left(\prod_{i \in I} R_i\right) = Q^{\mathrm{gr}}\left(\bigoplus_{i \in I} R_i\right) = \prod_{i \in I} Q^{\mathrm{gr}}(R_i).$$

Теорема 11 (градуированный вариант теоремы Утуми). *Пусть R — G-градуированное кольцо, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, $\mathrm{M}_n(R)(\bar{g})$ — матричное кольцо с градуировкой из примера 9. Тогда*

$$Q^{\mathrm{gr}}\big(\mathrm{M}_n(R)(\bar{g})\big) = \mathrm{M}_n\big(Q^{\mathrm{gr}}(R)\big)(\bar{g}).$$

6.1.2. Индуктивный предел по фильтру gr-плотных правых идеалов

Определение 26. Непустое множество $\mathcal{F}$ градуированных правых идеалов кольца R называется градуированной топологией или градуированным фильтром, если выполнены следующие условия:

1) если $I \subseteq J$ — градуированные правые идеалы кольца R и $I \in \mathcal{F}$, то $J \in \mathcal{F}$;
2) если $I, J \in \mathcal{F}$, то $I \cap J \in \mathcal{F}$;
3) если $I \in \mathcal{F}$ и $r \in h(R)$, то $(I : r)_R \in \mathcal{F}$;
4) если I — градуированный правый идеал кольца R, $J \in \mathcal{F}$ и $(I : r)_R \in \mathcal{F}$ для всех $r \in h(J)$, то $I \in \mathcal{F}$.

Если $\mathcal{F}$ — градуированная топология и $M \in \mathrm{gr.mod}\text{-}R$, то

$$t_{\mathcal{F}}(M) = \{m \in M \mid \mathrm{Ann}_R(m) \in \mathcal{F}\}$$

является градуированным подмодулем модуля M. В силу леммы II.9.4 из [56] $t_{\mathcal{F}}$ является жёстким кручением в категории $\mathrm{gr.mod}\text{-}R$, т. е. идемпотентным точным слева функтором, коммутирующим с функторами сдвига градуировки τ_g для всех $g \in G$.

Известно [56, теорема II.9.6.], что любое жёсткое кручение в категории $\mathrm{gr.mod}\text{-}R$ может быть индуцировано градуированным кручением в категории $\mathrm{mod}\text{-}R$. Кручение в категории $\mathrm{mod}\text{-}R$ называется градуированным, если его топология обладает базой, состоящей из градуированных правых идеалов.

Ясно, что если $\mathcal{T}$ и $\mathcal{F}$ — градуированные топологии в кольце R и $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{F}$, то $t_{\mathcal{T}}(M) \subseteq t_{\mathcal{F}}(M)$ для любого модуля $M \in \mathrm{gr.mod}\text{-}R$.

Если $\mathcal{F}$ — градуированная топология в кольце R, то можно определить градуированное кольцо частных

$$Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R) = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}} \mathrm{HOM}_R\big(I, R/t_{\mathcal{F}}(R)\big).$$

Предложение 41. *Пусть R — G-градуированное кольцо и $\mathcal{F}$ — градуированная топология в кольце R. Тогда*

1) *$Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R)$ — G-градуированное кольцо;*
2) *отображение*

$$\begin{cases} \varphi_R\colon R \to Q^{\mathrm{gr}}_{\mathcal{F}}(R), \\ r \mapsto \big(I \ni x \mapsto rx + t_{\mathcal{F}}(R) \in R/t_{\mathcal{F}}(R)\big) \end{cases} -$$

гомоморфизм градуированных колец, для которого $\ker \varphi_R = t_{\mathcal{F}}(R)$.

Обозначим через $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}} = \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}(R)$ совокупность всех градуированных плотных правых идеалов кольца R. Легко показать, что $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}$ является градуированной топологией в кольце R; она называется *градуированной топологией Ламбека* [56, с. 137]. Кольцо Q^{gr} можно определить как градуированное кольцо частных, соответствующее топологии $\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}$.

Так как $t_{\mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)}(R) = 0$, то

$$Q^{\mathrm{gr}} = \varinjlim_{D \in \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}} \mathrm{HOM}_R(D, R).$$

Другими словами,

$$Q^{\mathrm{gr}} = \Bigg(\bigcup_{D \in \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}} \mathrm{HOM}_R(D, R) \Bigg) \Big/ \theta,$$

где θ — отношение эквивалентности на множестве $\bigcup\limits_{D \in \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}} \mathrm{HOM}_R(D, R)$, которое вводится следующим образом.

Пусть D_1, D_2 — градуированные плотные правые идеалы кольца R, $D = D_1 \cap D_2$, $f_1\colon D_1 \to R$, $f_2\colon D_2 \to R$ — градуированные гомоморфизмы R-модулей. Тогда

$$f_1 \; \theta \; f_2 \iff f_1|_D = f_2|_D.$$

Операции в $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ корректно определяются равенствами

$$[f_1]_\theta * [f_2]_\theta = [f_1 * f_2]_\theta, \quad * \in \{+, \cdot\},$$

при этом $f_1 + f_2 \in \mathrm{HOM}_R(D_1 \cap D_2, R)$, $f_1 f_2 \in \mathrm{HOM}_R(f_2^{-1} D_1, R)$, а градуировка наследуется с кольца R:

$$Q_g^{\mathrm{gr}} = \Bigg(\bigcup_{D \in \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}} \mathrm{HOM}_R(D, R)_g \Bigg) \Big/ \theta.$$

Связь между определениями из подразделов 6.1.1 и 6.1.2 устанавливается с помощью следующего предложения 42.

Предложение 42. *Пусть D и E — градуированные подмодули в Q_R^{gr}, причём D плотный, $(E : D) = \{q \in Q^{\mathrm{gr}} \mid qD \subseteq E\}$. Тогда*

$$\begin{cases} (E : D) \to \mathrm{HOM}_R(D, E), \\ q \mapsto (D \ni d \mapsto qd \in E) \end{cases} -$$

изоморфизм градуированных групп.

Доказательство. Докажем мономорфность. Пусть $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ такое, что $qD = 0$. Тогда $q = 0$, так как D — плотный подмодуль в Q^{gr}.

Докажем эпиморфность. Для данного гомоморфизма $f \in h\big(\mathrm{HOM}_R(D, E)\big)$ рассмотрим гомоморфизм $\bar{f} \in h_R\big(\mathrm{HOM}(1D, 1E)\big)\colon \bar{f}(1d) = 1f(d)$. Гомоморфизм $\bar{f}$ продолжим до гомоморфизма $h \in H$. Докажем, что $h1Q^{\mathrm{gr}} \subseteq 1Q^{\mathrm{gr}}$. Согласно пункту 3 предложения 39 для этого достаточно показать, что $h'h1Q^{\mathrm{gr}} = 0$ для всякого такого $h' \in h(H)$, что $h'R = 0$. Итак, пусть $h' \in h(H)$ и $h'R = 0$. Тогда по пункту 3 предложения 39 $h'h1D = h'1fD \subseteq h'1Q^{\mathrm{gr}} = 0$. Так как D gr-плотный в Q_R^{gr}, то $h'h1Q^{\mathrm{gr}} = 0$. Значит, $h1Q^{\mathrm{gr}} \subseteq 1Q^{\mathrm{gr}}$ и $h1 = 1q$ для некоторого $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$. Итак, $1fd = h1d = 1qd$ и $fd = qd$ для всех $d \in D$.

Ясно, что $(E : D)$ — градуированная абелева группа (поскольку D и E — градуированные модули) и что при данном изоморфизме однородные элементы из $(E : D)$ переходят в однородные гомоморфизмы той же степени. $\square$

Теорема 12. *Определения кольца Q^{gr} из подразделов* 6.1.1 *и* 6.1.2 *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть Q^{gr} — кольцо, определённое в пункте 6.1.1. Тогда

$$h(Q^{\mathrm{gr}}) = \bigcup_{D\in\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}(R)} h(R:D), \quad Q^{\mathrm{gr}} = \bigcup_{D\in\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}(R)} (R:D),$$

так как по пункту 7 предложения 39 для каждого $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ правый градуированный идеал $D = q^{-1}R$ в R является gr-плотным.

Каждому однородному гомоморфизму $f \in \bigcup\limits_{D\in\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}(R)} h\big(\mathrm{HOM}_R(D,R)\big)$ поставим в соответствие элемент $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, в который он переходит при изоморфизме из предложения 42, и продолжим это соответствие по линейности на неоднородные гомоморфизмы. Пусть $q_i \in Q^{\mathrm{gr}}$ соответствует $f_i \in \mathrm{HOM}_R(D_i,R)$, $i = 1,2$. Тогда имеем

$$f_1 \,\theta\, f_2 \iff \text{для любого } d \in D_1\cap D_2 \text{ справедливо } f_1 d = f_2 d \iff \\ \iff (q_1 - q_2)(D_1\cap D_2) = 0 \iff h(D_1\cap D_2) = 0,$$

где $g \in H$ такой, что $(1)(q_1 - q_2) = g(1)$ тогда и только тогда, когда $g(R) = 0$ (пункт 6 предложения 39), что эквивалентно тому, что $q_1 = q_2$.

Итак, построена биекция между Q^{gr} и $\bigcup\limits_{D\in\mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}(R)} \mathrm{HOM}_R(D,R)$. Непосредственно проверяется, что она является изоморфизмом градуированных колец. ☐

Замечание 10. Максимальное правое кольцо частных было введено впервые Ю. Утуми как в подразделе 6.1.2.

Следствие 11. *Верны следующие утверждения.*

1. *Пусть D и D' — плотные градуированные подмодули модуля Q^{gr}_R. Тогда $D \cong D'$ тогда и только тогда, когда существует элемент $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, такой что $D' = qD$ и q обратим.*
2. *Для любого плотного правого градуированного идеала D кольца R и гомоморфизма $f \in \mathrm{HOM}_R(D,R)$ существует такой элемент $q \in Q^{\mathrm{gr}}$, что $f(d) = qd$ для всех $d \in D$.*
3. *$Q^{\mathrm{gr}} = R$ тогда и только тогда, когда для любых $D \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}$, $g \in G$, $f \in \big(\mathrm{HOM}_R(D,R)\big)_g$ найдётся элемент $r \in R_g$, такой что для всех $d \in h(D)$ справедливо $f(d) = qd$.*
4. *Если R содержит наименьший плотный правый градуированный идеал D_0 (например, если R gr-артиново справа), то D_0 — идеал в R и $Q^{\mathrm{gr}} \cong \cong \mathrm{HOM}_R(D_0,D_0)$ — изоморфизм градуированных колец.*
5. *Если R — gr-простое gr-артиново справа кольцо, то $Q^{\mathrm{gr}} \cong R$.*

6.1.3. Аксиоматический подход

Предложение 43 [47, предложение 1.4]. *Максимальное градуированное правое кольцо частных Q^{gr} градуированного кольца R, построенное в предыдущих подразделах, обладает следующими свойствами (и определяется ими с точностью до изоморфизма):*

1) *R — градуированное подкольцо кольца Q^{gr};*
2) *для каждого $q \in Q^{\mathrm{gr}}$ существует $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}$, такой что $qD \subseteq R$;*
3) *если $q \in Q^{\mathrm{gr}}$ и $qD = 0$ для некоторого $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}$, то $q = 0$;*
4) *если $D \in \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}$ и $f \in \mathrm{HOM}_R(D, R)$, то существует $q \in Q^{\mathrm{gr}}$, такой что $f(d) = dq$ для всех $d \in D$.*

Доказательство. Ясно, что кольцо, построенное в подразделе 6.1.2, удовлетворяет всем четырём условиям. Обратно, пусть A — градуированное кольцо, удовлетворяющее условиям 1)—4). Возьмём $q \in A$ и рассмотрим все gr-плотные правые идеалы D в R, такие что $qD \subseteq R$ (в силу условия 2) хотя бы один такой D существует). Каждому такому D поставим в соответствие гомоморфизм $f_D\colon D \to R$, заданный правилом $f_D(d) = qd$. По условию для каждого рассматриваемого D существует элемент q_D, такой что $f_D(d) = q_D d$ для всех $d \in D$, причём по условию 3) элемент q_D определён однозначно. Значит, $q_D = q$. Ясно, что любые два гомоморфизма f_D θ-эквивалентны. Поставив в соответствие элементу $q \in A$ класс эквивалентности $[f_D]_\theta$, получим изоморфизм градуированных колец $A \cong Q^{\mathrm{gr}}$. □

Следствие 12 [47, предложение 1.6]. *Пусть R — градуированное кольцо. Тогда*

$$Q^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus_{\sigma\in G} Q^{\mathrm{gr}}(R)_\sigma =$$
$$= \bigoplus_{\sigma\in G} \{x \in Q(R) \mid \text{существует } I \in \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R), \text{ такой что } xI_t \subseteq R_{\sigma t} \text{ для всех } t \in G\}.$$

6.2. Gr-регулярность и полная gr-приводимость кольца $Q^{\mathrm{gr}}(R)$

Вопросы регулярности и полной приводимости максимального правого кольца частных Q кольца R полностью исследованы (см. [17, 20]). В частности, установлены следующие критерии:

— Q регулярно тогда и только тогда, когда R несингулярно справа;
— Q вполне приводимо тогда и только тогда, когда R несингулярно справа и конечномерно.

Для получения градуированных аналогов этих утверждений нам понадобится характеризация градуированного радикала Джекобсона (предложение 13).

Лемма 10. *Пусть I_R — gr-инъективный модуль, $H = \mathrm{END}_R I$, N — градуированный идеал кольца H, такой что $\mathrm{Ker}\, h$ — gr-существенный подмодуль в I для всякого однородного (а тогда любого) $h \in H$. Тогда*

1) *кольцо H/N gr-регулярно*;
2) *$N = \mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}(H)$.*

Доказательство. Пусть $f \in h(H)$. Возьмём градуированный подмодуль K в I_R, максимальный среди градуированных подмодулей, пересечение которых с $f^{-1}(0) = \{i \in I \mid fi = 0\}$ равно 0. Ясно, что $f^{-1}(0)$ — градуированный подмодуль в I_R, и поэтому $f^{-1}(0) \oplus K$ — gr-существенный подмодуль в I_R (пункт 1 предложения 16). Так как ограничение ff на K — однородный мономорфизм, то существует однородный гомоморфизм $\varphi\colon f(K) \to I$, такой что $\varphi f(k) = k$ для всех $k \in K$. В силу gr-инъективности модуля I_R φ продолжается до однородного гомоморфизма $f' \in H$. Тогда $ff'f(i) = f(i)$ для всех $i \in f^{-1}(0) \oplus K$, и значит, $ff'f - f \in h(N)$. Это и означает, что H/N — gr-регулярное кольцо.

Поскольку gr-регулярные кольца gr-полупримитивны, то для канонического эпиморфизма $\pi\colon H \to H/N$ имеем $\mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}(\pi(H)) = 0$, и по пункту 5 предложения 13 $\pi\big(\mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}(H)\big) = 0$, т. е. $\mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}(H) \subseteq N$.

Для доказательства обратного включения воспользуемся характеризацией градуированного радикала Джекобсона из пункта 4 предложения 13. Пусть $f \in h(N_e)$. Тогда $\mathrm{Ker}\, f$ — gr-существенный подмодуль в I_R. Поскольку $1-f \in N_e$ и $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Ker}(1-f) = 0$, то $\mathrm{Ker}(1-f) = 0$ и модуль $(1-f)(I_R)$ e-изоморфен модулю I_R и, значит, gr-инъективен. Отсюда следует, что $(1-f)I_R$ — прямое слагаемое в I_R, причём содержащее gr-существенный в I_R подмодуль $\mathrm{Ker}\, f$, поэтому $(1-f)I = I$. Значит, элемент $1-f$ степени e обратим, и по пункту 4 предложения 13 $N \subseteq \mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}(H)$. □

Лемма 11. *Пусть I_R — gr-инъективная оболочка модуля R_R, $H = \mathrm{END}_R I$. Тогда*

1) *аддитивные группы $I/\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(I_R)$ и $H/\mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}(H)$ изоморфны*;
2) *$\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(I_R) = \mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}({}_H I)$.*

Доказательство. Отображение $\pi\colon H \to I$, $f \mapsto f(1)$ — эпиморфизм степени e H-модулей (пункт 2 предложения 39). Пусть N — градуированный подмодуль в I_R, такой что $\mathrm{Ker}\, f$ — gr-существенный подмодуль в I_R для всякого $f \in h(N)$. Так как $f \in h(N)$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ker}\, f$ — gr-существенный подмодуль в I_R, что эквивалентно тому, что $\mathrm{Ker}\, f \cap R$ — gr-существенный правый идеал в R, и тому, что $\pi f = f(1) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}} I_R$, то $\pi^{-1}\,\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}} I_R = N$, и значит, $\pi\colon H \to N$ индуцирует изоморфизм групп $H/N \to I/\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(I_R)$.

По лемме 10 $N = \mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}(H)$ и $\pi^{-1}0 \subseteq \pi^{-1}\,\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}} I_R = N$, поэтому по пункту 5 предложения 13 имеем

$$\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(I_R) = \pi\big(\mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}(H)\big) = \mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}\big(\pi(H)\big) = \mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}({}_H I). \qquad \square$$

Предложение 44. *Следующие условия равносильны*:
1) $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = 0$;
2) $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(I_R) = 0$;
3) $\mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}(H) = 0$;
4) $\mathrm{Rad}^{\mathrm{gr}}(H_I) = 0$;
5) Q^{gr} — *gr-регулярное кольцо.*

Доказательство. Равносильность утверждений 1) и 2) следует из того, что $R_R \subseteq I_R$ — gr-существенное расширение и $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R_R) = \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(I_R) \cap R$. По лемме 11 имеем 3) $\Longrightarrow$ 2) $\Longleftrightarrow$ 4).

Импликацию 5) $\Longrightarrow$ 1) докажем от противного. Пусть $r \in h(R) \setminus 0$ и $rI = 0$, где I — gr-существенный правый идеал в R. Тогда I_R — gr-существенный подмодуль в Q^{gr}_R (так как $R_R \subseteq Q^{\mathrm{gr}}_R$ — gr-существенное расширение) и $rqr = r$ для некоторого $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$. В частности, $qr \neq 0$, поэтому $0 \neq qrs \in I$ для некоторого $s \in h(R)$. В то же время $rs = rqrs \in rI = 0$ — противоречие.

Покажем, что из утверждения 2) следуют утверждения 3) и 5). Из того, что $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(I_R) = 0$ следует, что $N = \{f \in H \mid f(1) \in \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(I_R)\} = \{f \in H \mid f(1) = 0\} \lhd H$, следовательно, $NI = NH1 \subseteq N1 = 0$. Поэтому $I = 1Q^{\mathrm{gr}}$ (пункт 3 предложения 39), откуда получаем, что $N := \mathrm{Ker}\big(H \ni f \mapsto f(1)\big) = 0$. Следовательно, $Q^{\mathrm{gr}} \cong H = H/N$ gr-регулярно по лемме 10. □

Регулярному кольцу не хватает до полной приводимости какого-либо условия конечности, например артиновости, нётеровости или конечномерности (справа или слева). Из этих трёх условий только конечномерность переносится с R на $Q(R)$ и наоборот (кольца частных неартиновых и ненётеровых колец могут быть полями).

Теорема 13. *Для градуированного кольца R с максимальным правым градуированным кольцом частных Q^{gr} следующие условия равносильны*:
1) R — *gr-несингулярное справа gr-конечномерное справа кольцо*;
2) Q^{gr} — *gr-несингулярное справа gr-конечномерное справа кольцо*;
3) Q^{gr} — *gr-несингулярное справа кольцо без бесконечных множеств ортогональных однородных идемпотентов*;
4) Q^{gr} — *gr-регулярное кольцо без бесконечных множеств ортогональных однородных идемпотентов*;
5) Q^{gr} — *вполне gr-приводимое кольцо.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) следует из пунктов 3) и 5) предложения 27.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) следует из пункта 5 замечания 5.

Для доказательства импликации 3) $\Longrightarrow$ 4) заметим, что по предложению 44 Q^{gr} — gr-регулярное кольцо.

Импликации 4) $\Longrightarrow$ 5) $\Longrightarrow$ 1) проверяются непосредственно. □

Предложение 45 [47, предложение 1.9]. *Пусть R и S — градуированные кольца, причём $R \subseteq S \subseteq Q^{\mathrm{gr}}(R)$. Тогда $Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}(S)$.*

6.3. Связь колец Q^{gr} и Q, $Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$ и $Q(R_e)$

Поскольку Q^{gr} — правое кольцо частных кольца R, то $Q^{\mathrm{gr}} \subseteq Q$. Более того, если S — такое градуированное кольцо, что $R \subseteq S \subseteq Q^{\mathrm{gr}}$, то S — градуированное правое кольцо частных кольца R и, значит, $S \subseteq Q^{\mathrm{gr}}$. Тем самым Q^{gr} — максимальное градуированное подкольцо в Q.

Вообще говоря, кольца Q^{gr} и Q могут не совпадать.

Пример 8. При стандартной $\mathbb{Z}$-градуировке кольца многочленов $R = k[x]$ над полем k имеем $Q^{\mathrm{gr}}(R) = k[x, x^{-1}]$ и $Q(R) = k(x)$.

Предложение 46 [57, предложения 8.3.4]. *Если кольцо R имеет конечный носитель (например, если группа G конечна), то $Q(R) = Q^{\mathrm{gr}}(R)$ и $Q(R)$ тоже имеет конечный носитель.*

Следующий пример кольца R, для которого кольцо $Q(R)$ совпадает с R и не является инъективным, взят из [20] (пример 14.10). Мы исследуем кольцо R, вводя на нём естественную градуировку.

Пример 9. Пусть k — поле, $R = k[X, Y]/I$, $I = (X^2, Y^2, XY)$, $x = X + I$, $y = Y + I$, $D = (x, y)$. Тогда для гомоморфизма R-модулей

$$f\colon \begin{cases} D \to R, \\ ax + by \mapsto ax \end{cases}$$

не существует такого элемента $r \in R$, что $f(t) = rt$ для всех $t \in D$. Действительно, для $t = \alpha x + \beta y + \gamma$ имеем, что если для любых $a, b \in k$ выполняется $t(ax + by) = \gamma ax + \gamma by = ax$, то $1 = \gamma = 0$. Противоречие. Значит, кольцо R не является инъективным.

Градуируем кольцо R по группе $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$: $R_0 = k$, $R_1 = kx$, $R_2 = ky$. Легко убедиться, что R не содержит собственных плотных градуированных идеалов, поэтому по пункту 3 следствия 11 $Q^{\mathrm{gr}}(R) \cong \mathrm{HOM}_R(R, R) \cong R$. Так как $\mathbb{Z}_3$ — конечная группа, то по предложению 46 $Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q(R)$.

Теорема 14. *Пусть R — gr-несингулярное e-точное справа кольцо. Тогда $Q^{\mathrm{gr}}(R)_e \cong Q(R_e)$.*

Доказательство. Если I — плотный правый градуированный идеал в R, то I_e — плотный правый идеал в R_e (следствие 6).

Если K — плотный правый идеал в R_e, то KR — плотный правый градуированный идеал в R. Это следует из следствия 1 и того, что gr-существенные правые идеалы gr-несингулярного кольца являются gr-плотными (предложение 29).

Обозначим отношения эквивалентности из пункта 6.1.2 для колец $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ и $Q(R_e)$ через θ и θ_e соответственно. Если $f_i \in \mathrm{HOM}_R(I_i, R)_e$, $i = 1, 2$, и $f_1\ \theta\ f_2$, то $f_1|_{I_e}\ \theta_e\ f_2|_{I_e}$. Поэтому каждому элементу $q \in Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$ можно поставить в соответствие такой элемент $\bar{q} \in Q(R_e)$, что $\bar{q} = [f|_{I_e}]_{\theta_e}$, где $q = [f]_\theta$, $f\colon I \to R$, I — gr-плотный правый идеал в R.

Обратно, пусть $\varphi \in \mathrm{Hom}_{R_e}(K, R_e)$, где K — плотный правый идеал в R_e. Определим $\tilde{\varphi} \in \mathrm{HOM}_R(KR, R)_e$ по правилу

$$\tilde{\varphi}\Bigl(\sum_m k_m r_m\Bigr) = \sum_m \varphi(k_m) r_m, \quad \text{где} \quad k_m \in K, \quad r_m \in R.$$

Докажем корректность этого отображения. Пусть $\sum\limits_m k_m r_m = 0$. Тогда все r_m можно считать однородными одной степени, поэтому $\sum\limits_m \varphi(k_m) r_m \in h(R)$. Если $\sum\limits_m \varphi(k_m) r_m \neq 0$, то в силу e-точности справа кольца R найдётся такой элемент $r' \in h(R)$, что $\Bigl(\sum\limits_m \varphi(k_m) r_m\Bigr) r' \in R_e \setminus 0$. Но тогда $r_m r' \in R_e$ (поскольку $\varphi(k_m) \in R_e$), так что $\Bigl(\sum\limits_m \varphi(k_m) r_m\Bigr) r' = \varphi\Bigl(\sum\limits_m (k_m r_m) r'\Bigr) = 0$ — противоречие.

Если $\varphi_i \in \mathrm{HOM}_{R_e}(K_i, R_e)$, $i = 1, 2$, и $\varphi_1 \; \theta_e \; \varphi_2$, то $\tilde{\varphi}_1 \; \theta \; \tilde{\varphi}_2$. Поэтому каждому элементу $t \in Q(R_e)$ можно поставить в соответствие такой элемент $\tilde{t} \in Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$, что $\tilde{t} = [\tilde{\varphi}]_\theta$, где $t = [\varphi]_{\theta_e}$, $\varphi \colon K \to R_e$, K — плотный правый идеал в R_e. Ясно, что $\bar{\tilde{t}} = t$ для каждого $t \in Q(R_e)$ и $\tilde{\bar{q}} = q$ для каждого $q \in Q^{\mathrm{gr}}(R)_e$, а также что $\bar{\ }$ и $\tilde{\ }$ — гомоморфизмы градуированных колец. □

Предложение 47 [57, предложение 8.3.5]. *Пусть группа G конечная и кольцо R сильно G-градуированное. Тогда*

1) *кольца $Q(R)$ и $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ совпадают и являются сильно G-градуированными*;
2) $Q_e^{\mathrm{gr}}(R) = Q(R_e)$;
3) *если R — скрещённое произведение, то и $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ — скрещённое произведение.*

Частный случай утверждений 1) и 3) установил В. Бёрджесс в статье [31], посвящённой максимальным кольцам частных групповых колец.

Следствие 13 [31]. *Если G — конечная группа, A — кольцо, то $Q(AG) = Q(A)G$.*

Отметим также, что из структурного изоморфизма между правыми идеалами кольца A и градуированными правыми идеалами градуированного кольца AG вытекает следующее предложение.

Предложение 48. *Для группового кольца AG с естественной градуировкой справедливо равенство $Q^{\mathrm{gr}}(AG) = Q(A)G$.*

Пример 10. Пусть k — поле,

$$R = \begin{pmatrix} k & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = R_0 \oplus R_1 \text{ —}$$

$\mathbb{Z}_2$-градуированное кольцо, где

$$R_0 = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_1 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q(R) = \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \end{pmatrix} = Q_0^{\mathrm{gr}}(R) \oplus Q_1^{\mathrm{gr}}(R),$$

где

$$Q_0^{\mathrm{gr}}(R) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}, \quad Q_1^{\mathrm{gr}}(R) = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix},$$

$Q(R_0) = R_0$ и не существует мономорфизма $Q^{\mathrm{gr}}(R)_0$ в $Q(R_0)$, тождественного на R_0. Заметим, что $R_1^2 = 0 \neq R_0$.

См. также пример 14 в разделе 9.

7. Мартиндейловские градуированные кольца частных

В. Мартиндейл [52] впервые использовал для построения колец частных первичных колец двусторонние идеалы, поэтому эти кольца называют также *мартиндейловскими кольцами частных*. С. Амицур [24] продолжил эту конструкцию на случай полупервичных колец. Д. Пассман [60] рассмотрел симметрическую версию мартиндейловского кольца частных, получил для неё некоторые элементарные свойства и построил симметрические кольца частных для некоторых классов первичных колец.

Используя идею Д. Пассмана, Э. Есперс и П.Ваутерс в [47] определили правое (левое) градуированное мартиндейловское и градуированные симметрические кольца частных. Для построения правого (левого) градуированного мартиндейловского кольца частных они вместо множества градуированных плотных правых идеалов $\mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$ использовали множество всех градуированных двусторонних идеалов, являющихся плотными правыми (левыми) идеалами. В работе были установлены свойства этих колец и их взаимосвязь друг с другом.

Лемма 12. *Пусть R и S — градуированные кольца, такие что $R \subseteq S \subseteq Q^{\mathrm{gr}}(R)$. Тогда*

1) *правый градуированный идеал J кольца S является плотным тогда и только тогда, когда $J \cap R$ — градуированный плотный идеал кольца R;*
2) *правый градуированный идеал J кольца S является существенным тогда и только тогда когда $J \cap R$ — существенный правый градуированный идеал кольца R.*

Лемма 13. *Пусть R и S — градуированные кольца, такие что $R \subseteq S \subseteq Q^{\mathrm{gr}}(R)$. Тогда $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R) = R \cap \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S)$.*

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{r}_R(x) = \mathrm{r}_S(x) \cap R$ для всех $x \in h(R)$. Согласно лемме 12 градуированный идеал $\mathrm{r}_R(x)$ является существенным правым идеалом кольца R тогда и только тогда, когда $\mathrm{r}_S(x)$ является существенным правым идеалом кольца S. Следовательно, $\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R) = R \cap \mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(S)$. $\square$

7.1. Двусторонние градуированные кольца частных

Обозначим через $\mathcal{I}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$ ($\mathcal{I}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{gr}}(R)$) множество всех градуированных идеалов I кольца R, являющихся плотными правыми (левыми) идеалами.

Конструкция двустороннего правого кольца частных аналогична конструкции максимального кольца частных, только вместо множества $\mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$ берётся множество $\mathcal{I}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Построенное таким образом кольцо называется двусторонним правым градуированным кольцом частных и обозначается $Q_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$ (встречаются и другие обозначения, например $Q_{\text{gr-Mart}}^{\mathrm{r}}(R)$, см. [47] и диаграмму). Таким образом,

$$Q_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R) = \varinjlim_{I \in \mathcal{I}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)} \mathrm{HOM}_R(I, R).$$

Предложение 49 [47, предложение 1.4]. *Двустороннее правое градуированное кольцо частных $Q_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$ градуированного кольца R обладает следующими свойствами*:

1) *R — градуированное подкольцо кольца $Q_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$*;
2) *для каждого $q \in Q_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существует $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$, такой что $qI \subseteq R$*;
3) *если $q \in Q_{r}^{\mathrm{gr}}(R)$ и $qI = 0$ для некоторого $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$, то $q = 0$*;
4) *если $I \in \mathcal{I}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$ и $f \in \mathrm{HOM}(I_R, R_R)$, то существует $q \in Q_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$, такой что $f(x) = xq$ для всех $x \in I$.*

Свойства 1)—4) характеризуют градуированное кольцо $Q_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$ с точностью до изоморфизма.

Опишем связь между кольцами $Q_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$ и $Q^{\mathrm{gr}}(R)$.

Предложение 50 [47, предложение 1.7].

$$Q_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R) = \{q \in Q^{\mathrm{gr}}(R) \mid qL \subseteq R \text{ \textit{для некоторого} } L \in \mathcal{I}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)\}.$$

Аналогичным образом можно определить двустороннее градуированное левое кольцо частных $Q_{\mathrm{l}}^{\mathrm{gr}}(R)$.

7.2. Симметрические градуированные кольца частных

Положив

$$Q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}(R) = \{q \in Q_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R) \mid Lq \subseteq R \text{ для некоторого } L \in \mathcal{I}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{gr}}(R)\},$$

получим *симметрическое градуированное мартиндейловское кольцо частных* кольца R.

В [47] было определено также *симметрическое градуированное максимальное кольцо частных*

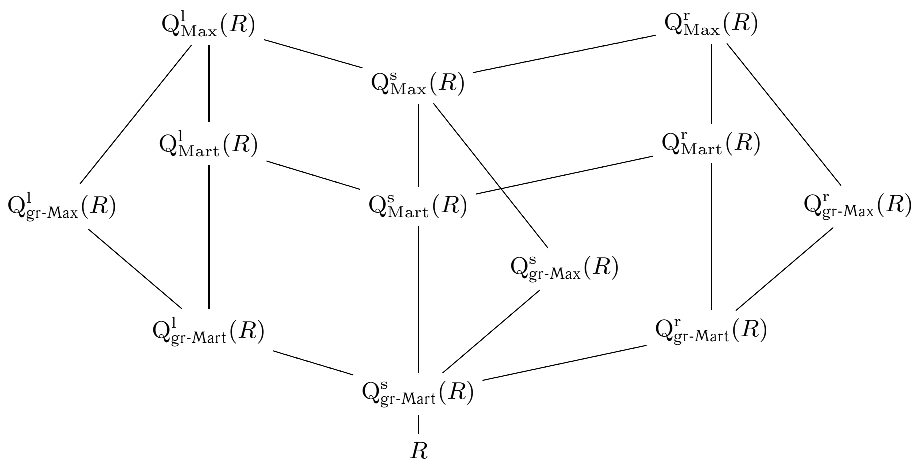
$$Q_{\text{gr-Max}}^{\mathrm{s}}(R) = \{q \in Q^{\mathrm{gr}}(R) \mid Lq \subseteq R \text{ для некоторого } L \in \mathcal{D}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{gr}}(R)\}.$$

Эти кольца также можно охарактеризовать с помощью четырёх свойств, подобных тем, которые характеризуют максимальное градуированное правое кольцо частных.

Предложение 51 [47, предложение 1.5]. *Пусть R — градуированное кольцо, $Q = Q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}(R)$, $\sigma_{\mathrm{r}} = \mathcal{I}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$, $\sigma_{\mathrm{l}} = \mathcal{I}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{gr}}(R)$ (или $Q = Q_{\text{gr-Max}}^{\mathrm{s}}(R)$, $\sigma_{\mathrm{r}} = \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$, $\sigma_{\mathrm{l}} = \mathcal{D}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{gr}}(R)$). Тогда кольцо Q обладает следующими свойствами, которые определяют его с точностью до изоморфизма*:

1) *R — градуированное подкольцо кольца Q;*
2) *для каждого $q \in Q$ существуют такие $I \in \sigma_{\mathrm{r}}$ и $J \in \sigma_{\mathrm{l}}$, что $qI \subseteq R$ и $Jq \subseteq R$;*
3) *если $q \in Q$ и $qI = 0$ (или $Jq = 0$) для некоторых $I \in \sigma_{\mathrm{r}}$, $J \in \sigma_{\mathrm{l}}$, то $q = 0$;*
4) *если $f \in \mathrm{HOM}(I_R, R_R)$ и $g \in \mathrm{HOM}({}_RJ, {}_RR)$, где $I \in \sigma_{\mathrm{r}}$, $J \in \sigma_{\mathrm{l}}$, причём $y(fx) = (yg)x$ для всех $x \in I$, $y \in J$, то существует $q \in Q$, такой что $fx = qx$ и $yg = yq$ для всех $x \in I$, $y \in J$.*

В [47] была представлена следующая диаграмма, показывающая вложения различных колец частных градуированного кольца R, в том числе градуированных. При этом мы сохранили обозначения из [47]: $Q_{\mathrm{Max}}^{k}(R)$ означает максимальное правое, левое или симметрическое кольцо частных кольца R в зависимости от k; $Q_{\mathrm{Mart}}^{k}(R)$ — мартиндейловские кольца частных; $Q_{\text{gr-Max}}^{k}(R)$ и $Q_{\text{gr-Mart}}^{k}(R)$ — градуированные максимальные и мартиндейловские кольца частных.



Определение 27. Пусть R — G-градуированное кольцо, H — подполугруппа в G. Определим G-градуированное кольцо $R_{[H]}$:

$$(R_{[H]})_g = \begin{cases} R_g, & \text{если } g \in H, \\ 0, & \text{если } g \notin H. \end{cases}$$

Определение 28. Группа G называется группой частных своей подполугруппы H, если $G = \{a^{-1}b \mid a, b \in H\}$.

Следующие предложения, взятые из [47], устанавливают связь между кольцами $Q_{\text{gr-Max}}^{\mathrm{s}}(R)$, $Q_{\text{gr-Max}}^{\mathrm{s}}(R_{[H]})$ и их единичными компонентами, где H — подгруппа (или подполугруппа) в G, в случае когда кольцо R слабо градуированное.

Предложение 52 [47, предложение 2.2]. *Если кольцо R слабо G-градуированное и H — подполугруппа в G, то*

$$Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Max}}(R_e) = \big(Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Max}}(R_{[H]})\big)_e.$$

Предложение 53 [47, предложение 2.4]. *Пусть кольцо R слабо G-градуированное, G — абелева группа, являющаяся группой частных своей подполугруппы H. Тогда*

$$Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Max}}(R) = Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Max}}(R_{[H]}).$$

Предложение 54 [47, следствие 2.5]. *Пусть кольцо R слабо градуированное,*

$$Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Max}}(R_e)I = IQ^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Max}}(R_e) = Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Max}}(R_e)$$

для всякого идеала I кольца R_e, являющегося одновременно плотным левым и плотным правым идеалом. Тогда

1) $Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Max}}(R)$ *сильно градуированное*;
2) $(Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Max}})_g = Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Max}}(R_e)R_g = R_g Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{Max}}(R_e)$ *для всех $g \in G$.*

Предложение 55 [47, следствие 2.6]. *Пусть выполнены условия предложения 54, G — абелева группа, являющаяся группой частных своей подполугруппы H. Тогда для всякого градуированного идеала I кольца $R_{[H]}$, являющегося плотным правым и плотным левым идеалом, справедливы равенства*

$$Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Max}}(R_{[H]})I = IQ^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Max}}(R_{[H]}) = Q^{\mathrm{s}}_{\mathrm{gr\text{-}Max}}(R_{[H]}).$$

Пусть R — gr-полупервичное кольцо и $\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$ – множество всех градуированных идеалов I кольца R, таких что $\mathrm{l}_R(I) = 0$. В силу лемм 2, 3 каждый градуированный идеал $I \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)$ является плотным и существенным как правый (и как левый) идеал. Таким образом, в этом случае

$$\mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R) = \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}(R) = \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{l}}(R)$$

и

$$Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{s}}(R) = \{q \in Q^{\mathrm{gr}}(R) \mid qL \cup Lq \subseteq R \text{ для некоторого } L \in \mathcal{I}^{\mathrm{gr}}(R)\}.$$

7.3. Градуированный расширенный центроид

Напомним, что *расширенным центроидом* $C(R)$ полупервичного кольца R называется центр мартиндейловского правого кольца частных. Поскольку центр градуированного кольца может не быть градуированным кольцом, то *градуированным расширенным центроидом* $C^{\mathrm{gr}}(R)$ градуированного кольца R назовём максимальное градуированное подкольцо центра градуированного мартиндейловского правого кольца частных $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}(R)$. Ясно, что $\mathrm{Supp}\big(C^{\mathrm{gr}}(R)\big) \subseteq Z(G)$. Свойства градуированных расширенных центроидов первичных колец, градуированных абелевой группой, изучались в [32, 35, 45, 46], а первичных супералгебр — в [36].

Теорема 15. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо. Тогда*

$$h\big(C^{\mathrm{gr}}(R)\big) = h\Big(Z\big(Q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}(R)\big)\Big) = h\big(Z(Q^{\mathrm{gr}})\big) = \{q \in h(Q^{\mathrm{gr}}) \mid qr = rq \text{ для всех } r \in R\}.$$

Доказательство. Пусть $c \in h\big(Z(Q^{\mathrm{gr}})\big)$, $x \in (R:c)_R$, $r \in h(R)$. Тогда $c(rx) = r(cx) \in R$ и $rx \in (R:c)_R$, и следовательно, $J = (R:c)_R$ — градуированный плотный идеал кольца R. Так как $Jc = cJ \subseteq R$, то $c \in Q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}(R)$, и следовательно, $h\big(Z(Q^{\mathrm{gr}})\big) \subseteq h\Big(Z\big(Q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}(R)\big)\Big)$.

Согласно предложению 45 $Q^{\mathrm{gr}}\big(Q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}(R)\big) = Q^{\mathrm{gr}}(R)$. Тогда $Z\big(Q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}(R)\big) \subseteq Z(Q^{\mathrm{gr}})$, и следовательно, $h\Big(Z\big(Q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}(R)\big)\Big) = h\big(Z(Q^{\mathrm{gr}})\big)$. Аналогичным образом получим, что $h\Big(Z\big(Q_r^{\mathrm{gr}}(R)\big)\Big) = h\big(Z(Q^{\mathrm{gr}})\big)$.

Пусть $q \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ и $qr = rq$ для всех $r \in h(R)$. Тогда $(qx - xq)r = q(xr) - xqr = xrq - xrq = 0$ для всех $x \in h(Q^{\mathrm{gr}})$ и $r \in (R:x)_R$. Таким образом, $q \in C^{\mathrm{gr}}(R)$. □

Следствие 14. *Градуированный расширенный центроид gr-полупервичного кольца является градуированным подкольцом расширенного центроида.*

Предложение 56. *Пусть D — градуированный плотный правый идеал gr-полупервичного кольца R и S — такое градуированное подкольцо, что $D \subseteq S \subseteq Q^{\mathrm{gr}}(R)$. Тогда S — gr-полупервичное кольцо.*

Доказательство. Пусть I — ненулевой градуированный нильпотентный идеал кольца S и $0 \neq q \in I$. Из предложения 43 следует, что $qJ \subseteq R$ для некоторого идеала $J \in \mathcal{D}_{\mathrm{r}}^{\mathrm{gr}}(R)$. Тогда $0 \neq q(K \cap J) \subseteq I \cap R$ является ненулевым градуированным нильпотентным правым идеалом кольца R, получили противоречие. □

Теорема 16. *Пусть R — gr-полупервичное G-градуированное кольцо, $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R)$ — градуированное максимальное правое кольцо частных кольца R и $C^{\mathrm{gr}} = C^{\mathrm{gr}}(R)$ — градуированный расширенный центроид кольца R. Тогда C^{gr} является gr-регулярным gr-самоинъективным кольцом.*

Доказательство. Пусть $c \in C_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}$. Тогда $I = cQ^{\mathrm{gr}}$ и $J = c^2Q^{\mathrm{gr}}$ — градуированные идеалы кольца Q^{gr}. Поскольку согласно предложению 56 кольцо Q^{gr} является gr-полупервичным, а c — центральный элемент, то $K = \mathrm{r}_{Q^{\mathrm{gr}}}(I) = \mathrm{r}_{Q^{\mathrm{gr}}}(J)$ и градуированные идеалы $I \oplus K$ и $J \oplus K$ являются плотными (лемма 3), а следовательно, плотным будет и идеал $P = (I \oplus K) \cap (J \oplus K) = (I \cap J) \oplus K$.

Отображение $f\colon P \to Q^{\mathrm{gr}}$, заданное правилом $f(c^2q + k) = cq$, определяет центральный однородный элемент $p \in Q^{\mathrm{gr}}(Q^{\mathrm{gr}})$ степени s^{-1}. Так как $Q^{\mathrm{gr}}(Q^{\mathrm{gr}}) = Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}$, то $p \in C^{\mathrm{gr}}$. Ясно, что $cpc(cq + k) = c^2q = c(cq + k)$ для любого $q \in Q^{\mathrm{gr}}$, $k \in K$. Поэтому $cpc = c$, и следовательно C^{gr} — gr-регулярное кольцо.

Пусть K — градуированный идеал кольца C^{gr} и $\varphi\colon K \to C^{\mathrm{gr}}$ — градуированный гомоморфизм. Для доказательства gr-самоинъективности кольца C^{gr} согласно теореме 8 достаточно показать, что существует однородный элемент $c \in C^{\mathrm{gr}}$, для которого $\varphi(x) = cx$ для всех $x \in K$.

В силу gr-регулярности кольца C^{gr} все градуированные левые C^{gr}-модули являются gr-плоскими, т. е. плоскими (предложение 5). Тогда из [17, предложение 1] следует, что имеет место канонический изоморфизм

$$f\colon Q^{\mathrm{gr}} \otimes_{C^{\mathrm{gr}}} K \to Q^{\mathrm{gr}}K,$$

задаваемый правилом

$$f\biggl(\sum_{i=1}^{n} q_i \otimes k_i\biggr) = \sum_{i=1}^{n} q_i k_i \quad (q_i \in Q^{\mathrm{gr}}, \quad k_i \in K).$$

Следовательно, найдётся градуированный морфизм ψ, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} Q^{\mathrm{gr}} \otimes_{C^{\mathrm{gr}}} K & \xrightarrow{1\otimes\varphi} & Q^{\mathrm{gr}} \otimes_{C^{\mathrm{gr}}} C^{\mathrm{gr}} \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle h}\big\downarrow \\ Q^{\mathrm{gr}}K & \xrightarrow{\psi} & Q^{\mathrm{gr}} \end{array}.$$

Пусть $I = Q^{\mathrm{gr}}K$ — градуированный идеал кольца Q^{gr} и $\psi(aq) = \psi(a)q$, $\psi(qa) = q\psi(a)$ для всех $q \in Q^{\mathrm{gr}}$, $a \in I$. Положим $J = r_{Q^{\mathrm{gr}}}(I)$. Тогда $I \oplus J$ — градуированный плотный правый идеал кольца Q^{gr}. Следовательно, отображение $\varphi\colon I \oplus J \to Q^{\mathrm{gr}}$, где $\varphi(a+b) = \psi(a)$ ($a \in I$, $b \in J$) определяет центральный однородный элемент $c \in Q^{\mathrm{gr}}(Q^{\mathrm{gr}}) = Q^{\mathrm{gr}}$. Заметим, что $ck = \varphi(k) = \psi(k) = h[(1\otimes\varphi)(1\otimes k)] = \varphi(k)$ для всех $k \in K$, что и требовалось доказать. □

Теорема 17. *Пусть R — gr-полупервичное кольцо, $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R)$, $C^{\mathrm{gr}} = C^{\mathrm{gr}}(R)$, ${}_RU_R$ — градуированный подбимодуль R-R-бимодуля Q^{gr} и $f\colon {}_RU_R \to {}_RQ^{\mathrm{gr}}_R$ — гомоморфизм бимодулей, такой что $f(U_h) \subseteq (Q^{\mathrm{gr}})_{gh}$ для некоторого $g \in Z(G)$. Тогда существует элемент $\lambda \in C^{\mathrm{gr}}_g$, такой что $f(u) = \lambda u$ для всех $u \in U$.*

Доказательство. Из предложения 43 следует, что $W = U \cap R$ является ненулевым градуированным идеалом кольца R. Положим $I(w) = \bigl(R : f(w)\bigr)_R$ и $V = \sum\limits_{w \in h(W)} wI(w)$. Так как $f(rw) = rf(w)$ для всех $r \in R$ и $w \in W$, то $f(rw)I(w) \subseteq R$ и $I(w) \subseteq I(rw)$, и значит, V — градуированный левый идеал кольца R. С другой стороны, V является суммой градуированных правых идеалов, следовательно, V — градуированный идеал кольца R. Заметим, что $f(V) = \sum f(w)\bigl(R : f(w)\bigr) \subseteq R$. Определим отображение $g\colon V \oplus r_R(V) \to R$, полагая $g(v + v') = f(v)$ для всех $v \in V$, $v' \in r_R(V)$. Так как $V \oplus r_R(V) \in \mathcal{D}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{r}}(R)$, то существует элемент $\lambda \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, такой что $g(x) = \lambda x$ для всех $x \in V \oplus r_R(V)$. Тогда $\lambda r x = g(rx) = rg(x) = r\lambda x$ для всех $x \in V \oplus r_R(V)$, $r \in R$. Следовательно, $r\lambda = \lambda r$ для всех $r \in R$, и по теореме 15 получим, что $\lambda \in C^{\mathrm{gr}}$. Пусть $u \in h(U)$, $D = (R : u)_R$ и $d \in D$. Тогда $udr \in V$ для всех $r \in \bigl(R : f(ud)\bigr)_R$ и $f(u)dr = f(udr) = g(udr) = \lambda udr$, $(f(u) - \lambda u)dr = 0$. Следовательно, $(f(u) - \lambda u)d = 0$ для всех $d \in D$, и поэтому $f(u) = \lambda u$ для всех $u \in U$. □

Рассмотрим Q^{gr} как левый градуированный C^{gr}-модуль. Тогда Q^{gr} является правым градуированным $\mathrm{END}_{C^{\mathrm{gr}}}(Q^{\mathrm{gr}})$-модулем. Обозначим через $R_{(\mathrm{l})}$ ($R_{(\mathrm{r})}$) подкольцо в $\mathrm{END}_{C^{\mathrm{gr}}}(Q^{\mathrm{gr}})$, порождённое всеми левыми (правыми) умножениями на элементы из R, и положим $S = R_{(\mathrm{l})}R_{(\mathrm{r})} \subseteq \mathrm{END}_{C^{\mathrm{gr}}}(Q^{\mathrm{gr}})$.

Теорема 18. *Пусть G — абелева группа, R — gr-полупервичное кольцо, $Q^{\mathrm{gr}} = Q^{\mathrm{gr}}(R)$, $C^{\mathrm{gr}} = C^{\mathrm{gr}}(R)$ и $q_1, q_2, \ldots, q_n \in h(Q^{\mathrm{gr}})$, причём $q_1 \notin \sum\limits_{i=2}^{k} C^{\mathrm{gr}} q_i$. Тогда существует элемент $t = \sum\limits_{i=1}^{m} l_{a_i} r_{b_i} \in R_{(\mathrm{l})}R_{(\mathrm{r})}$, такой что*

$$q_1 \cdot t = \sum_{i=1}^{m} a_i q_1 b_i \neq 0, \quad q_i \cdot t = 0 \ \text{ для всех } \ i \geqslant 2.$$

Доказательство. Согласно теореме 17 Q^{gr} является gr-квазиинъективным правым S-модулем и $C^{\mathrm{gr}} = \mathrm{END}(Q_S)$. Определим S-контекст, положив $M = N = Q^{\mathrm{gr}}$, $\Delta = C^{\mathrm{gr}}$, $T = S$. Покажем, что T — тотальный S-подмодуль правого S-модуля $\mathrm{HOM}_\Delta(M, N) = \mathrm{END}_{C^{\mathrm{gr}}}(Q^{\mathrm{gr}})$. Действительно, для любого $0 \neq q \in h(Q)$ имеем $qT = RqR \supseteq Rq(R : q) \neq 0$ (предложение 43). Применив теорему 10, найдём требуемый элемент $t = \sum\limits_{i=1}^{m} l_{a_i} r_{b_i} \in R_{(\mathrm{l})}R_{(\mathrm{r})}$. □

Замечание 11. Отметим, что в теореме 18 элементы a_i, b_j, $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, можно выбрать однородными, причём $a_i b_i \in R_\sigma$ для всех $i = 1, \ldots, m$.

Хорошо известно, что расширенный центроид первичного кольца является полем. В [45] было показано, что аналогичное утверждение справедливо для градуированного расширенного центроида gr-первичного кольца, градуированного абелевой группой.

Предложение 57 [45, лемма 1.1]. *Пусть R — gr-первичное кольцо, градуированное абелевой группой G, и $Q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}(R)$ — его симметричное градуированное кольцо частных. Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) *$C^{\mathrm{gr}}(R)$ является градуированным полем*;
2) *если $a_i, b_i \in h\big(Q_{\mathrm{s}}^{\mathrm{gr}}(R)\big)$, $i = 1, \ldots, n$, и $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x b_i = 0$ для всех $x \in h(R)$, элементы $a_1, \ldots, a_n$ линейно зависимы над $C^{\mathrm{gr}}(R)$ и элементы $b_1, \ldots, b_n$ линейно зависимы над $C^{\mathrm{gr}}(R)$.*

Следующее утверждение устанавливает связь между расширенным центроидом и градуированным расширенным центроидом первичного кольца, градуированного абелевой группой.

Предложение 58 [46, следствия 3, 4]. *Для первичного кольца R, градуированного абелевой группой G, справедливы следующие утверждения*:

1) $C(R) = C^{\mathrm{gr}}(R)\big(C^{\mathrm{gr}}(R)\big)^{-1}$;
2) *$C(R) = C^{\mathrm{gr}}(R)$ в точности тогда, когда каждый ненулевой идеал кольца R содержит ненулевой однородный элемент.*

С. Амицур [24, теорема 5] показал, что свойство расширенного центроида быть полем характеризует первичные кольца в классе полупервичных колец. Для расширенного центроида градуированной супералгебры аналогичное утверждение было доказано в [36].

Для произвольной группы G имеем следующее утверждение.

Предложение 59. *Пусть R — gr-полупервичное G-градуированное кольцо, $C^{\mathrm{gr}} = C^{\mathrm{gr}}(R)$ — его градуированный расширенный центроид. Тогда эквивалентны следующие условия*:

1) *R gr-первично*;
2) *C^{gr} — градуированное поле*;
3) *C^{gr}_e — поле.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть выполнено условие 1) и $0 \neq \lambda \in h(C^{\mathrm{gr}})$. Пусть I — градуированный плотный идеал в R, такой что $0 \neq \lambda I \subseteq R$. Если $\lambda r = 0$ для некоторого $r \in h(R)$, то $\lambda R r = 0$, и следовательно, $r = 0$ в силу gr-первичности кольца R. Таким образом, $\mathrm{l}_R(\lambda I) = 0$ и λI — градуированный плотный идеал в R. Ясно, что отображение $f\colon \lambda I \to Q^{\mathrm{gr}}(R)$, определённое правилом $f(\lambda a) = a$ $(a \in I)$, удовлетворяет всем условиям теоремы 17. Следовательно, существует такой элемент $\mu \in h(C^{\mathrm{gr}})$, что $f(\lambda a) = \mu\lambda a = a$ для всех $a \in I$. Отсюда получим, что $\mu\lambda = 1$.

Импликация 1) $\Longrightarrow$ 2) очевидна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Предположим, что кольцо R не является gr-первичным. Тогда существует ненулевой градуированный идеал I в R, такой что $\mathrm{l}_R(I) \neq 0$. Тогда $I \oplus \mathrm{l}_R(I)$ — плотный правый градуированный идеал в R (лемма 3). Рассмотрим отображение $f\colon I \oplus \mathrm{l}_R(I) \to Q^{\mathrm{gr}}(R)$, $g(u+v) = u$, $u \in I$, $v \in \mathrm{l}_R(I)$. Применив теорему 17, найдём $\lambda \in C_e$, для которого $g(u+v) = \lambda(u+v) = u$. Ясно, что $\lambda^2 = \lambda$ и $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq 1$. Получили противоречие, так как поле не может содержать нетривиальных идемпотентов. $\square$

8. Локализации по однородным мультипликативным системам

8.1. Градуированные кольца частных относительно множества однородных знаменателей

Напомним определение и критерий существования правого кольца частных относительно множества знаменателей в неградуированном случае.

Пусть S — мультипликативное подмножество (неградуированного) кольца R, т. е. $1 \in S$, $0 \notin S$ и $st \in S$ для всех $s, t \in S$.

Определение 29. Кольцо RS^{-1} называется правым кольцом частных кольца R относительно множества S, если существует гомоморфизм колец $f\colon R \to RS^{-1}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) для каждого $s \in S$ элемент $f(S)$ обратим в кольце RS^{-1};
2) любой элемент $q \in RS^{-1}$ представим в виде $q = f(r)f(s)^{-1}$ для некоторых $r \in R$ и $s \in S$;
3) $f(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $rs = 0$ для некоторого $s \in S$.

Замечание 12.

1. Кольцо R, вообще говоря, не является порядком в кольце RS^{-1}, так как может в него не вкладываться. Для существования вложения колец $R \hookrightarrow RS^{-1}$, позволяющего отождествлять $r \in R$ с $r1^{-1} \in RS^{-1}$, необходимо и достаточно, чтобы множество S не содержало делителей нуля кольца R.
2. Можно определить также левое кольцо частных $S^{-1}R$ и двустороннее кольцо частных $S^{-1}RS^{-1}$, но мы ограничимся правосторонним случаем.

Известно (см., например, [21, предложение 16.9; 62, гл. 2, предложение 1.4]), что для существования правого кольца частных RS^{-1} необходимо и достаточно выполнение правых условий Оре.

O_1. Для любых $r \in R$ и $s \in S$ существуют $r' \in R$ и $s \in S$, для которых $rs' = sr'$.

O_2. Если $sr = 0$ для $r \in R$ и $s \in S$, то $rs' = 0$ для некоторого $s' \in S$.

Определение 30. Мультипликативное множество S, состоящее только из регулярных элементов (не обязательно всех) кольца R и удовлетворяющее условиям Оре, называется *правым множеством Оре*.

Далее в этом разделе R — градуированное кольцо и S — его мультипликативное подмножество, состоящее из однородных элементов.

Предложение 60 [57, лемма 8.1.1]. *Во введённых обозначениях условия Оре* O_1 *и* O_2 *выполняются тогда и только тогда, когда выполнены условия Оре для однородных элементов.*

$\mathrm{O}_1^{\mathrm{gr}}$. *Для любых* $r \in h(R)$ *и* $s \in S$ *существуют* $r' \in h(R)$ *и* $s \in S$, *для которых* $rs' = sr'$.

$\mathrm{O}_2^{\mathrm{gr}}$. *Если* $sr = 0$ *для* $r \in h(R)$ *и* $s \in S$, *то* $rs' = 0$ *для некоторого* $s' \in S$.

Так же, как в неградуированном случае, доказывается следующая лемма о приведении к общему знаменателю (см. [20, п. 10.7]).

Лемма 14. *Пусть* R — *градуированное кольцо,* S — *правое множество Оре, лежащее в* $h(R)$, $Q = RS^{-1}$ — *градуированное кольцо частных кольца* R *относительно* S. *Тогда для всех* $q_1, \ldots, q_n \in h(Q)$ *существуют такие* $r_1, \ldots, r_n \in h(R)$ *и* $s \in S$, *что* $q_i = r_i s$, $i = 1, \ldots, n$.

Предложение 61 [57, предложения 8.1.2, 8.1.4, следствие 8.1.3]. *При выполнении условий Оре верны следующие утверждения.*

1. *Кольцо* RS^{-1} *является* G-*градуированным кольцом с градуировкой*

$$(RS^{-1})_g = \{rs^{-1} \mid \deg r(\deg s)^{-1} = g\}.$$

2. *Если R сильно градуированное, то и RS^{-1} сильно градуированное.*
3. *Если R — скрещённое произведение, то и RS^{-1} — скрещённое произведение.*
4. *Если группа G конечна, то кольцо $(R\#G)S^{-1}$ существует, причём $(R\#G)S^{-1} = (RS^{-1})\#G$.*

Замечание 13 [57, пример 8.3.3]. Пусть S — правое множество Оре, лежащее в $h(R)$. Тогда из условий Оре следует, что множество $\mathcal{F}_S$ всех таких градуированных правых идеалов I кольца R, что $(I : r) \cap S \neq 0$ для всех $r \in h(R)$, образует градуированную топологию с базой $\{sR \mid s \in S\}$. Поэтому кольцо RS^{-1} можно определить следующим образом:

$$RS^{-1} = \varinjlim_{I \in \mathcal{F}_S} \mathrm{HOM}(I, R).$$

8.2. Классические градуированные кольца частных

Определение 31. Если множество S совпадает со множеством всех однородных неделителей нуля, то кольцо $Q = RS^{-1}$ называется градуированным правым классическим кольцом частных кольца R и обозначается $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Заметим, что градуированное правое классическое кольцо частных $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ коммутативного кольца R без делителей нуля является градуированным полем и подкольцом правого классического кольца частных $Q_{\mathrm{cl}}(R)$. Конечно, кольцо R может содержать и неоднородные регулярные элементы, так что, вообще говоря, $Q_{\mathrm{cl}}(R) \neq Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Пример 11. Пусть $R = F[x]$ — кольцо многочленов над полем F со стандартной $\mathbb{Z}$-градуировкой. Легко убедиться, что $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R) = F[x, x^{-1}]$ — кольцо лорановских многочленов, а $Q_{\mathrm{cl}}(R) = F(x)$ — кольцо рациональных функций.

Кольца частных колец, сильно градуированных конечной группой, исследованы в [44].

Теорема 19 [44, теорема 1.1, предложение 1.1]. *Пусть R — кольцо, сильно G-градуированное конечной группой. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *R имеет артиново правое классическое кольцо частных $Q_{\mathrm{cl}}(R)$;*
2) *R_e имеет артиново правое классическое кольцо частных $Q_{\mathrm{cl}}(R_e)$;*
3) *$R\#G$ имеет артиново правое кольцо частных $Q_{\mathrm{cl}}(R\#G)$.*

При выполнении этих условий все три кольца частных могут быть получены обращением регулярных элементов кольца R_e и являются сильно G-градуированными.

Следствие 15. *Если кольцо R является сильно градуированным конечной группой G, то кольца R и $R\#G$ имеют артиновы правые классические кольца частных одновременно.*

Следующий пример показывает, что кольцо R_e может иметь правое классическое кольцо частных, а кольцо R при этом — не иметь. Через $N(A)$ обозначен первичный радикал кольца A.

Пример 12 [44, пример 1]. Пусть k — поле, $R = k[X_1, X_2, \ldots]$, I — идеал в R, порождённый элементами

$$X_i - X_j, \quad i \neq j, \quad X_i X_j, \quad i \neq j, \quad X_i^3, \tag{1}$$

$R_0 = R/I$, $x_i = X_i + I$. Тогда $x_i^2 = x_j^2$ для всех i, j, и мы обозначим x_i^2 через t.

Обозначим через M векторное пространство $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty} kx_i$ над k. Из соотношений 1 видно, что M — $k[t]$-модуль. Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуированное кольцо

$$A = \begin{pmatrix} k[t] & M \\ M & k[t] \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} k[t] & 0 \\ 0 & k[t] \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{pmatrix}.$$

Оно обладает следующими свойствами:

1) A 0-точно;
2) $A_1 \cong k[x]/(x^2)$;
3) A не имеет артинова кольца частных, так как
$$N(A) = \begin{pmatrix} (t) & M \\ M & (t) \end{pmatrix}$$
и $N(A)/N(A)^2$ ни артиново, ни нётерово;
4) A полупервично.

Следующий пример показывает, что множества Оре колец R и R_1 могут не совпадать.

Пример 13 [44, пример 2]. Пусть k — поле, $R = k\langle T, X_1, X_2, \ldots\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра, I — идеал в R, порождённый элементами

$$X_i^2 - X_j^2, \quad i \neq j, \quad X_{2i}T - TX_i, \quad X_i X_j, \quad i \neq j, \quad X_i^3,$$

$R_0 = R/I$, $x_i = X_i + I$, $t = T + I$. Тогда $x_i^2 = x_j^2$ для всех i, j, и мы обозначим x_i^2 через y.

Обозначим через M векторное пространство над k, порождённое элементами x_i, $x_i t^j$, t^j, x_i. Из соотношений в R_0 видно, что M — $k[t]$-модуль.

Обозначим через A_0 подкольцо $k[t, y]$ в R_0. Легко убедиться, что $A_0 \cong$ $\cong k[T, Y]/(Y^2)$ и M — A_0-модуль.

Рассмотрим $\mathbb{Z}_2$-градуированное кольцо

$$\Lambda = \begin{pmatrix} k[t] & M \\ M & k[t] \end{pmatrix}, \quad \Lambda_0 = \begin{pmatrix} k[t] & 0 \\ 0 & k[t] \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & M \\ M & 0 \end{pmatrix}.$$

Оно обладает следующими свойствами:

1) R 0-точно;
2) $\Lambda_1 \cong A_0 \oplus A_0$;
3) множество S_1 регулярных элементов кольца Λ, лежащих в A_1, не является множеством Оре, так как
$$\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} \Lambda \cap \begin{pmatrix} 0 & x_1 T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S_1 = \varnothing;$$

4) $\Lambda/N(\Lambda) \cong k[t] \oplus k[t]$, поэтому регулярные элементы в Λ — это в точности регулярные элементы по модулю $N(\Lambda)$.

Теорема 20 [44, теорема 2.1]. *Пусть R — кольцо, сильно градуированное конечной группой G, кольцо R_e имеет полупервичное правое классическое кольцо частных. Тогда кольца R и $R\#G$ имеют полупервичные правые классические кольца частных, причём все три кольца частных могут быть получены обращением регулярных элементов кольца R_e.*

Теорема 21 [44, теорема 2.2]. *Пусть R — кольцо, сильно градуированное конечной группой G, $R_e/(N(R_e)$ — полупервичное правое кольцо Голди. Тогда R_e имеет полупервичное правое классическое кольцо частных.*

Следствие 16 [44, следствие 1]. *Пусть R — кольцо, сильно градуированное конечной группой G, и выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) *R не имеет $|G|$-кручения*;
2) *$R_e/N(R_e)$ — PI-кольцо.*

Тогда кольцо R_e имеет полупервичное правое классическое кольцо частных.

Также в [44] рассматриваются кольца частных $\mathbb{Z}$-градуированных колец.

Теорема 22 [44, предложения 3.1, 3.2]. *Пусть R — сильно $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо. Тогда кольца R и R_0 одновременно обладают или не обладают артиновым правым классическим кольцом частных.*

9. Градуированные кольца Голди

Английский математик Альфред Голди в 1950-х годах исследовал порядки во вполне приводимых кольцах и установил, что полупервичное нётерово справа кольцо R обладает вполне приводимым классическим правым кольцом частных $Q_{\mathrm{cl}}(R)$, причём при этих условиях $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ просто тогда и только тогда, когда R первично. Позднее он показал, что условие нётеровости справа можно ослабить до следующего:

1) кольцо R удовлетворяет условию максимальности для правых аннуляторов;
2) кольцо R не содержит бесконечных прямых сумм правых идеалов.

Кольца со свойством 2) стали называться конечномерными справа, а кольца со свойствами 1) и 2) — правыми кольцами Голди. Например, кольцо $k[x_1, x_2, \ldots]$ многочленов над полем k от счётного числа коммутирующих переменных — коммутативное ненётерово кольцо Голди с полем частных $k(x_1, x_2, \ldots)$.

А. Голди доказал не только достаточность, но и необходимость условий 1), 2) и полупервичности кольца для полной приводимости его классического правого кольца частных.

Теорема 23 (А. Голди [20, 22, 40]). *Для ассоциативного кольца R следующие условия эквивалентны*:

1) *R — полупервичное правое кольцо Голди;*

2) *правый идеал в R существен в точности тогда, когда он содержит хотя бы один регулярный элемент;*
3) *кольцо R обладает правым классическим кольцом частных $Q_{\mathrm{cl}}(R)$, которое является вполне приводимым кольцом.*

При выполнении этих условий кольцо $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ просто тогда и только тогда, когда кольцо R первично.

Часто утверждение о первичных кольцах Голди называют первой теоремой Голди, а о полупервичных — второй, так же, как в случае теорем Веддербёрна—Артина, описывающих строение вполне приводимых колец в простом (первичном) и в общем (полупервичном) случаях. Фактически, теоремы Голди обобщают теоремы Веддербёрна—Артина, поскольку вполне приводимые кольца являются правыми (и левыми) кольцами Голди и совпадают со своими кольцами частных.

Условие 2) в доказательстве теоремы 23 играет ключевую роль. Позже, при изучении максимальных колец частных, было также установлено, что вместе с конечномерностью кольца R оно даёт достаточное условие для совпадения классического $Q_{\mathrm{cl}}(R)$ и максимального $Q(R)$ правых колец частных кольца R.

Теорема 24 [17, с. 180, 181]. *Для конечномерного справа полупервичного кольца, каждый существенный правый идеал которого содержит регулярный элемент, максимальное правое кольцо частных совпадает с классическим правым кольцом частных.*

Таким образом, для полупервичных правых колец Голди R справедливо также равенство $Q_{\mathrm{cl}}(R) = Q(R)$.

Существует и другой подход, при котором сразу исследуются максимальные правые кольца частных. Сначала укажем эквивалентную характеризацию полупервичных правых колец Голди.

Предложение 62 [20, п. 6.32]. *Для ассоциативного кольца R с единицей следующие условия эквивалентны*:
1) *R — полупервичное правое кольцо Голди*;
2) *R — полупервичное конечномерное справа несингулярное справа кольцо.*

Иными словами, при условиях полупервичности и конечномерности справа условия несингулярности справа и максимальности для правых аннуляторов равносильны.

Из предложения 62 и теоремы 13 напрямую следует, что максимальные правые кольца частных полупервичных правых колец Голди вполне приводимы.

Перейдём к исследованию градуированного случая. В отличие от теоремы Веддербёрна—Артина, здесь не удаётся получить градуированный аналог с той же лёгкостью.

Градуированное кольцо назовём правым gr-кольцом Голди, если оно gr-конечномерно справа и удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей правых gr-аннуляторов (т. е. правых аннуляторов, являющихся градуированными правыми идеалами).

Сразу покажем, что обращение теоремы Голди (импликации 3) $\Longrightarrow$ 1) и 2) $\Longrightarrow$ 1) в теореме 23) в градуированном случае полностью аналогично.

Теорема 25. *Если кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ вполне gr-приводимо (и gr-просто), то кольцо R — gr-полупервичное (gr-первичное) правое gr-кольцо Голди.*

Доказательство аналогично неградуированному случаю (см. [22, теорема 7.2.3]).

Теорема 26. *R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди тогда и только тогда, когда R — gr-полупервичное gr-несингулярное справа gr-конечномерное справа кольцо.*

Доказательство аналогично неградуированному случаю (предложение 62).

Теорема 27. *Пусть R — градуированное кольцо, в котором каждый градуированный правый идеал gr-существен в точности тогда, когда он содержит однородный регулярный элемент. Тогда R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди.*

Доказательство. Докажем, что R gr-несингулярно справа. Если $a \in h\big(\mathrm{Sing}^{\mathrm{gr}}(R)\big)$, то $\mathrm{r}_R(a)$ — gr-существенный правый идеал в R, поэтому $\mathrm{r}_R(a)$ содержит некоторый регулярный элемент b. Тогда $ab = 0$ и $a = 0$.

Докажем, что R gr-полупервично. Пусть I — такой градуированный идеал в R, что $I^2 = 0$. Тогда существует такой правый градуированный идеал J в R, что $I \oplus J$ — gr-существенный правый идеал в R, и существует регулярный элемент вида $a + b$, где $a \in I$ и $b \in J$. Но так как $aI = 0$ и $bI \subseteq I \cap J = 0$, то $(a + b)I = 0$, поэтому $I = 0$.

Докажем, что R gr-конечномерно справа. Если это не так, то найдётся gr-существенный правый идеал $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} I_k$, где все градуированные правые идеалы I_k отличны от 0. По условию B содержит неделитель нуля $\sum\limits_{i=1}^{n} b_{k_i}$, где $b_{k_i} \in B_{k_i} \setminus 0$. Но тогда идеал $B' = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} B_{k_i}$ gr-существен, что противоречит равенству $B' \cap B_j = 0$ при $j \notin \{k_1, \ldots, k_n\}$.

По теореме 26 R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди. $\square$

В то же время существуют gr-полупервичные правые gr-кольца Голди, для которых не выполнены градуированные аналоги условий 2) и 3) теоремы 23.

Пример 14 [42; 55, пример 9.2.2; 57, пример 8.4.7]. Пусть k — поле, кольцо $R = k[X, Y]/(XY)$ градуировано группой $\mathbb{Z}$ (обозначим $x = X + (XY)$ и $y = Y + (XY)$):

$$R_n = \begin{cases} kx^n, & n > 0, \\ k, & n = 0, \\ ky^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

Легко убедиться, что $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R) = R$ не является gr-артиновым (и тем более вполне gr-приводимым) и что (x, y) — gr-существенный идеал, все однородные элементы которого — делители нуля.

Найдём максимальное градуированное кольцо частных $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ кольца R. Каждый плотный градуированный идеал кольца R имеет вид (x^m, y^n), где $m, n \geqslant 1$. Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ при достаточно больших m, n $(m, n > |k|)$ всякий однородный степени k гомоморфизм R-модулей $f\colon (x^m, y^n) \to R$ задаётся правилом

$$\begin{cases} f(x^m) = ax^{m+k}, \\ f(y^n) = by^{n-k}, \end{cases} \quad \text{где } a, b \in k,$$

и обратно, при всех $a, b \in k$ это правило задаёт такой гомоморфизм (проверяется непосредственно с учётом соотношения $xy = 0$), поэтому по определению градуированного максимального кольца частных имеем

$$Q^{\mathrm{gr}}_n(R) = kx^n \oplus ky^{-n} \ (= k \oplus k \text{ при } n = 0),\ n \in \mathbb{Z},$$
$$Q^{\mathrm{gr}}(R) = k[x, x^{-1}] \oplus k[y, y^{-1}].$$

Таким образом, кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ не совпадает с кольцом $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = R$ и вполне gr-приводимо, поскольку является конечным прямым произведением градуированных полей. Заметим, что $Q^{\mathrm{gr}}_0(R) \cong k \oplus k \ncong k \cong R_0$ (имеет место вложение колец $R_0 \hookrightarrow Q^{\mathrm{gr}}_0(R)$: $k \ni a \mapsto (a, a) \in k \oplus k$).

Этот пример показывает, что градуированный вариант теоремы Голди следует рассматривать для классического $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$ и максимального $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ градуированных правых колец частных отдельно, причём как вопрос их совпадения, так и вопрос полной gr-приводимости кольца $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}$ упираются в проблему существования однородного регулярного элемента в каждом gr-существенном правом идеале кольца R. Дело в том, что, повторяя рассуждения Голди в градуированном случае, мы придём, вообще говоря, к неоднородному регулярному элементу. Эта проблема решалась многими математиками наложением дополнительных ограничений на однородные компоненты кольца R и на градуирующую группу G.

Первый градуированный вариант теоремы Голди был получен в монографии [55] 1979 года, где рассматривались только $\mathbb{Z}$-градуированные кольца.

Теорема 28 [55, предложение 9.2.3]. *Пусть* $R = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} R_n$ — $\mathbb{Z}$*-градуированное gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди. Обозначим* $R_0^+ = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} R_n$, $R^+ = \bigoplus\limits_{n>0} R_n$. *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) R^+ *содержит центральный однородный регулярный элемент*;
2) $R = R_0^+$ *и минимальные gr-первичные идеалы в* R *не содержат* R^+;
3) $R = R_0^+$ *и* R^+ *содержат однородный регулярный элемент*;
4) *все элементы в* $H(R_0^+)$ *нильпотентны.*

Тогда существует и вполне gr-приводимо кольцо $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$.

Всюду далее в этом разделе S — множество всех однородных регулярных элементов кольца R, т. е. $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = RS^{-1}$.

В 1986 году в работе [54] был доказан градуированный вариант теоремы Голди в предположении, что R_e — полупервичное левое кольцо Голди. На само кольцо R было наложено ограничение, эквивалентное e-точности слева. Мы сформулируем правосторонний вариант этой теоремы и несколько изменим доказательство.

Теорема 29 [54, предложение 1.4]. *Пусть R — e-точное справа градуированное кольцо, R_e — полупервичное правое кольцо Голди. Тогда*

1) *S — правое множество Оре в R;*
2) *множество $S_e = S \cap R_e$ совпадает с множеством всех элементов кольца R_e, регулярных в R_e;*
3) *существует, вполне gr-приводимо и e-точно кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R) = RS^{-1}$;*
4) *$RS^{-1} = RS_e^{-1}$ и $(RS^{-1})_e = R_e S_e^{-1}$;*
5) *R — e-точное gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $s \in S$, $r \in h(R)$. Тогда правый идеал sR gr-существен в R. Действительно, пусть $sR \cap I = 0$, где I — некоторый градуированный правый идеал в R. Тогда $I \oplus sI \oplus s^2 I \oplus \ldots$ — бесконечная прямая сумма правых идеалов, следовательно, $I = 0$. Отсюда следует, что правый идеал $(sR : r)$ также gr-существен, поэтому $(sR : r)_e$ — существенный правый идеал в R_e (следствие 1). По теореме 23 существует регулярный в R_e элемент $t \in (sR : r)_e$, т. е. $rt = sr'$ для некоторого $r' \in h(R)$.

Докажем утверждение 2). Пусть элемент s регулярен в R_e и $st = 0$, где $t \in h(R) \setminus 0$. Тогда $tt' \in R_e \setminus 0$ для некоторого $t' \in h(R)$ и $stt' = 0$ — противоречие. Далее, пусть $ts = 0$, где $t \in h(R) \setminus 0$. Докажем, что $t't \in R_e \setminus 0$ для некоторого $t' \in h(R)$, что будет противоречить регулярности t в R_e. Предположим, что $R_g t = 0$, где $g = (\deg t)^{-1}$. Так как $tR_g R_e$ — ненулевой правый идеал в полупервичном кольце R_e, то его квадрат $tR_g R_e t R_g R_e$ также ненулевой. С другой стороны, $t(R_g R_e) t R_g R_e \subseteq tR_g t R_g R_e = 0$, так как $R_g t = 0$. Противоречие.

Докажем утверждения 3) и 5). Существование кольца $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}} = RS^{-1}$ следует из пункта 1). Полная gr-приводимость этого кольца следует из предложения 63. Докажем его e-точность. Пусть $rs^{-1} \in Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}} \setminus 0$, $r \in h(R) \setminus 0$. Тогда, так как R e-точно справа, $rr' \in R_e \setminus 0$ для некоторого $r' \in h(R)$ и $rs^{-1}sr' = rr'$, поэтому $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ также e-точно справа. По теореме 27 R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди. Но если кольцо gr-полупервично, то его e-точность справа влечёт e-точность слева. Итак, кольца R и RS^{-1} e-точны.

Докажем утверждение 4). Если $s \in S$, то, как доказано в пункте 1), правый идеал sR gr-существен. По пункту 2) $sa = t \in S_e$ для некоторых $a, t \in h(R)$. Тогда $a = s^{-1}t \in S^{-1}S$, $s^{-1} = at^{-1}$ в $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$, при этом $t^{-1} \in S_e^{-1}$.

Остаётся заметить, что $(RS_e^{-1})_e = R_e S_e^{-1}$. □

В 2000 году К. Гудёрл и Т. Стэффорд доказали градуированную версию теоремы Голди для gr-первичных колец, градуированных абелевой группой [42]. Этот результат вошёл в монографию [57].

Теорема 30 [42; 57, теорема 8.4.4]. *Если группа G абелева и G-градуированное кольцо R gr-первично, то кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существует, gr-артиново справа и gr-просто.*

В той же монографии получены также новые варианты теоремы для gr-полупервичных колец, но при достаточно сильных ограничениях на группу.

Теорема 31 [57, теорема 8.4.9]. *Если R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди, сильно градуированное конечной группой G, то R_e — полупервичное правое кольцо Голди, кольцо $Q_{\mathrm{cl}}(R) = Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)$ существует, является сильно G-градуированным, вполне gr-приводимым и $\left(Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R)\right)_e = Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}(R_e) = R_e S_e^{-1}$.*

Справедлив градуированный аналог теоремы 24 о совпадении классического и максимального правых колец частных (доказательство аналогично неградуированному случаю).

Теорема 32. *Если кольцо R gr-конечномерно справа и $I \cap S \neq \varnothing$ для каждого gr-существенного правого идеала I кольца R, то $Q^{\mathrm{gr}} = Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$.*

Для кольца R из примера 14 не выполнено ни условие полной gr-приводимости кольца $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$, ни условие существования однородных регулярных элементов в каждом gr-существенном правом идеале. Это не случайно. Следующее предложение показывает, что эти условия равносильны (при условии существования кольца $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$). Доказательство аналогично неградуированному случаю (см. [20, п. 10.10, 5), 6)] и [22, теорема 7.2.1]).

Предложение 63. *Для градуированного кольца R следующие условия равносильны:*

1) *кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}} = RS^{-1}$ существует и вполне gr-приводимо;*
2) *каждый gr-существенный правый идеал I кольца R содержит однородный регулярный элемент.*

При выполнении этих условий $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ gr-просто в точности тогда, когда R gr-первично.

Перейдём к вопросу об однородных регулярных элементах в gr-существенных правых идеалах.

Лемма 15. *Пусть R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди. Тогда для любого $s \in h(R)$ равносильны следующие условия:*

1) $s \in S$;
2) $\mathrm{r}_R(s) = 0$;
3) *sR — gr-существенный правый идеал кольца R.*

Доказательство аналогично неградуированному случаю (см. [22, следствие 2 леммы 7.2.1, лемма 7.2.3]).

Лемма 16 [42; 57, лемма 8.4.3]. *Пусть R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди. Тогда если $0 \neq a \in h(R)$ — gr-униформный элемент, то пра-*

вый gr-аннулятор $\mathrm{r}_R(a)$ *максимальный среди правых gr-аннуляторов ненулевых однородных элементов из* R.

Следующая теорема является усилением теоремы 11 из статьи [16].

Теорема 33. *Пусть* R — e*-точное справа правое gr-кольцо Голди, кольцо* R_e *полупервично. Тогда*

1) *всякий ненулевой правый градуированный идеал* I *кольца* R *содержит ненильпотентный gr-униформный элемент в компоненте* I_e;
2) $I_e \cap S \neq \varnothing$ *для всякого правого gr-существенного идеала* I *кольца* R;
3) R_e — *правое кольцо Голди*;
4) $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$ *существует и вполне gr-приводимо*;
5) *кольцо* $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$ e*-точно справа*;
6) $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$ *gr-просто тогда и только тогда, когда* R *gr-первично*;
7) $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}(R)$;
8) $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = RS_e^{-1}$, *где* $S_e = S \cap R_e$;
9) $\bigl(Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)\bigr)_e = Q_{\mathrm{cl}}(R_e) = R_e S_e^{-1}$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Так как R gr-конечномерно справа, то найдётся gr-униформный элемент $a \in h(I) \setminus 0$ (возьмём произвольный элемент $a_1 \in h(I) \setminus 0$, если модуль a_1R не gr-униформный, то найдутся $a_2, a_3 \in h(a_1R) \setminus 0$, для которых $a_2R \oplus a_3R \subseteq a_1R$, и т. д., но этот процесс не может продолжаться бесконечно). Поскольку R e-точно справа, то можно считать, что $a \in I_e$ (если $a \in h(I) \setminus 0$, то $aa' \in I_e \setminus 0$ для некоторого $a' \in h(R)$, причём $aa'R \subseteq aR$, так что gr-униформность a влечёт gr-униформность aa'). Так как R_e полупервично, то $aba \neq 0$ для некоторого $b \in R_e$. Элемент ba ненильпотентен: иначе $(ba)^n = 0$, $(ba)^{n-1} \neq 0$ для некоторого $n \geqslant 2$, и так как $\mathrm{r}_R(a) \subseteq \mathrm{r}_R\bigl((ba)^{n-1}\bigr)$, то по лемме 16 из $\mathrm{r}_R(a) = \mathrm{r}_R\bigl((ba)^{n-1}\bigr) \ni ba$ следует, что $aba = 0$, что неверно. Следовательно, $ab \in I_e$ — ненильпотентный gr-униформный элемент.

Докажем утверждение 2). Найдём (по п. 1)) gr-униформный ненильпотентный элемент $a_1 \in I_e$. Пусть уже построены gr-униформные ненильпотентные элементы $a_1, \ldots, a_m \in I_e$, такие что $a_i \in \bigcap\limits_{j=1}^{i-1} \mathrm{r}_R(a_j)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $\bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathrm{r}_R(a_j) \neq 0$. Так как I — правый gr-существенный идеал, то $I \cap \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathrm{r}_R(a_j) \neq 0$ и по п. 1) существует ненильпотентный gr-униформный элемент $a_{m+1} \in I_e \cap \bigcap\limits_{j=1}^{m} \mathrm{r}_R(a_j)$. По построению и в силу gr-униформности элементов a_i имеем, что $a_i \in \mathrm{r}_R(a_j) = \mathrm{r}_R(a_j^2)$, $i > j$, откуда легко следует, что сумма $\sum\limits_{i \geqslant 1} a_iR$ прямая и, значит, конечная, поэтому существует $n \in \mathbb{N}$, такой что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{r}_R(a_i) = 0$. Тогда $\mathrm{r}_R(a) = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \mathrm{r}_R(a_i) = 0$, и элемент $a = a_1 + \ldots + a_n \in I_e$ регулярный по лемме 15.

Докажем утверждение 3). Так как R e-точно справа и gr-конечномерно, то R_e конечномерно (предложение 20). Так как R удовлетворяет условию максимальности для правых gr-аннуляторов, то R_e удовлетворяет условию обрыва для правых аннуляторов (поскольку $\mathrm{r}_{R_e}(T) = \mathrm{r}_R(T) \cap R_e$ для всякого $T \subseteq R_e$). Значит, R_e — gr-кольцо Голди. Поэтому выполнены все условия теоремы 29, а значит, доказаны пункты 4), 5), 8) и 9).

Пункт 6) следует из теоремы 63.

Пункт 7) следует из теоремы 32. □

Докажем ещё одну теорему, в которой наложим дополнительное условие только на группу, однако из этого условия будут следовать все условия теоремы 33.

Теорема 34 [16, теорема 13]. *Пусть R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди, группа G периодична. Тогда R — e-точное кольцо, R_e — полупервичное правое кольцо Голди, и поэтому выполнены все утверждения теоремы* 33.

Доказательство. 1. Докажем, что выполнен пункт 1) теоремы 33. Пусть I — ненулевой правый градуированный идеал кольца R. Найдём gr-униформный элемент $a \in I$. Пусть $a \in I_g$, $g \in G$. Так как R gr-полупервично, найдутся такие $h \in G$ и $b \in R_h$, что $aba \neq 0$. Тогда элемент $ba \in R_{hg} \setminus 0$ ненильпотентен, иначе $(ba)^n = 0$, $(ba)^{n-1} \neq 0$ для некоторого $n \geqslant 2$ и, поскольку $\mathrm{r}_R(a) \subseteq \mathrm{r}_R\big((ba)^{n-1}\big)$, по лемме 16 из $\mathrm{r}_R(a) = \mathrm{r}_R\big((ba)^{n-1}\big) \ni ba$ следует, что $aba = 0$, что неверно. В силу периодичности группы G элемент gh имеет конечный порядок $O(gh)$, и поэтому $(ab)^{O(gh)} \in I_e$ — ненильпотентный gr-униформный элемент.

2. Теперь так же, как в пункте 2) теоремы 33 доказывается, что всякий gr-существенный правый идеал содержит однородный регулярный элемент.

3. Пусть $x \in h(R) \setminus 0$. Тогда по пункту 1 правый градуированный идеал xR содержит ненильпотентный gr-униформный элемент $xy \in (xR)_e \setminus 0$. Следовательно, кольцо R e-точно справа, а также слева, поскольку $yx \neq 0$ (иначе $(xy)^2 = 0$).

4. Покажем, что R_e — полупервичное правое кольцо Голди. Согласно теореме 23 достаточно показать, что для всех правых идеалов J кольца R_e справедлива равносильность утверждений, что J существен и что J содержит регулярный (в R_e) элемент.

Если J существен в R_e, то с учётом доказанной e-точности кольца R получаем, что правый идеал JR gr-существен в R (следствие 1). Значит, по пункту 2 $\varnothing \neq (JR)_e \cap S = J \cap S$.

Пусть элемент $s \in J$ регулярен в R_e. Тогда $\mathrm{r}_R(s) = 0$ ввиду e-точности кольца R. По лемме 15 $s \in S$ и правый идеал sR (а тогда и $JR \supseteq sR$) gr-существен в R. Поэтому правый идеал $J = (JR)_e$ существен в R_e (следствие 1).

Значит, для кольца R выполнены все условия теоремы 33. □

Теперь мы можем получить полный аналог (в форме критерия) теоремы Голди для градуированных колец с конечным носителем.

Теорема 35. *Для градуированного кольца R с конечным носителем следующие условия равносильны*:

1) *R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди*;
2) *в R множество всех gr-существенных правых идеалов совпадает с множеством всех градуированных правых идеалов, содержащих однородный регулярный элемент*;
3) *кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ существует и вполне gr-приводимо.*

При выполнении этих условий выполнены все утверждения теоремы 33.

Доказательство. Докажем, что из условия 1) следуют 2) и 3). Так как R — gr-полупервичное кольцо с конечным носителем, то по теореме 5 R e-точно и R_e полупервично, так что для кольца R выполнены все условия теоремы 33. Поэтому каждый gr-существенный правый идеал в R содержит однородный регулярный элемент и кольцо $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ существует и вполне gr-приводимо, а всякий правый идеал, содержащий однородный регулярный элемент s, является gr-существенным, поскольку содержит правый идеал sR, gr-существенный по лемме 15.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) следует из теоремы 27.

Так как $Q_{\mathrm{cl}}^{\mathrm{gr}}$ вполне gr-приводимо, то R gr-полупервично, и импликация 3) $\Longrightarrow$ 2) следует из предложения 63.

Остальные утверждения следуют из теоремы 33. □

Мы рассмотрели классические градуированные правые кольца частных gr-полупервичных правых gr-колец Голди. Что касается их максимальных градуированных правых колец частных, то они вполне gr-приводимы всегда.

Следствие 17. *Пусть R — gr-полупервичное правое gr-кольцо Голди. Тогда кольцо $Q^{\mathrm{gr}}(R)$ вполне gr-приводимо.*

Доказательство. Утверждение следует из теорем 13 и 26. □

10. Градуированные кольца главных правых градуированных идеалов

В 1962 году вышла статья [41] А. Голди о строении колец главных правых идеалов, или pri-колец (principal right ideal rings), с некоторыми дополнительными условиями. В ней были описаны первичные и полупервичные pri-кольца. В [43] был уточнён результат Голди о первичных pri-кольцах и сформулирована теорема в форме критерия.

Теорема 36 (третья теорема Голди [41,43]). *Верны следующие утверждения.*

1. *Полупервичные pri-кольца — это в точности конечные прямые суммы первичных pri-колец.*

2. *Первичные pri-кольца — это в точности матричные pri-кольца над нётеровыми справа областями Оре (под областью понимается ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля; коммутативность не предполагается).*

А. Джатегаонкар отметил, что матричное кольцо $\mathrm{M}_n(D)$ является pri-кольцом в точности тогда, когда каждый подмодуль модуля D^n порождается не более чем n элементами.

Мы получим, следуя А. Джатегаонкару, градуированный аналог третьей теоремы Голди для градуированных gr-pri-колец (градуированных колец, в которых каждый градуированный правый идеал порождается одним однородным элементом). Ясно, что такие кольца являются gr-нётеровыми справа и тем более правыми gr-кольцами Голди. Более того, как мы сейчас покажем, для таких колец условие gr-полупервичности гарантирует существование и полную gr-приводимость градуированного классического правого кольца частных (без дополнительных ограничений, как в теоремах 29, 33, 34).

Предложение 64. *Пусть R — gr-полупервичное gr-pri-кольцо, S — множество всех его однородных регулярных элементов. Тогда*

1) *всякий gr-существенный правый идеал в R порождается одним элементом из S;*
2) *кольцо $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = RS^{-1}$ существует, вполне gr-приводимо и совпадает с кольцом $Q^{\mathrm{gr}}(R)$.*

Доказательство. Всякий gr-существенный правый идеал в R имеет вид sR. По лемме 15 получаем, что $s \in S$. В частности, каждый gr-существенный правый идеал в R содержит однородный регулярный элемент, и по предложению 63 кольцо $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = RS^{-1}$ существует и вполне gr-приводимо. Кроме того, по теореме 32 имеет место равенство $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}(R)$. □

Теорема 37. *Для градуированного кольца R равносильны следующие условия:*

1) *R — gr-полупервичное gr-pri-кольцо;*
2) *$R \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{n} R_i$, где $n \in \mathbb{N}$ и каждое кольцо R_i — gr-первичное gr-pri-кольцо.*

При выполнении этих условий кольца $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$ существуют, вполне gr-приводимы и

$$Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}(R) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R_i) = \bigoplus_{i=1}^{n} Q^{\mathrm{gr}}(R_i).$$

Доказательство. Импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2).

По предложению 64 существует кольцо $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = RS^{-1}$, содержащее n центральных ортогональных неразложимых однородных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$, таких что $e_1 + \ldots + e_n = 1$. Обозначим через T градуированное подкольцо

$Re_1 \oplus \ldots \oplus Re_n$ в $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)$, а через I — градуированный идеал $\{r \in R \mid re_i \in R, i = 1, \ldots, n\}$. По лемме 14 существует $c \in S$, для которого $e_i c \in R$ при всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $cT \subseteq R$, и значит, cT — правый gr-существенный идеал в R. Следовательно, $cT = aR$ для некоторого $a \in S$. Отсюда следует, что $a = cb$ для некоторого регулярного $b \in T$ и $T = bR$. В частности, $b^2 = bd$ для некоторого $d \in h(R)$. Сокращая на регулярный элемент $b \in S$, получаем, что $b = d \in h(R)$, т. е. $T = R$. Теперь ясно, что Re_i — градуированный правый порядок в gr-простом gr-артиновом кольце $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R)e_i$, поэтому Re_i — gr-первичное правое gr-кольцо Голди. Ясно, что Re_i — gr-pri-кольцо, поскольку Re_i — прямое слагаемое в gr-pri-кольце R.

Вторая часть теоремы следует из предложений 64 и 40. □

Теорема 38. *Пусть G — абелева группа, R — G-градуированное gr-pri-кольцо, $n \in \mathbb{N}$, $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^n$. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *R gr-первичное и*
$$Q := Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = RS^{-1} = Q^{\mathrm{gr}}(R) \cong \mathrm{M}_n(T)(\bar{g}),$$
где T — G-градуированное тело;

2) *$R \cong \mathrm{M}_n(D)(\bar{g})$, где D — G-градуированная правая область Оре и $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(D) = Q^{\mathrm{gr}}(D) \cong T$.*

Доказательство. Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 1). По предложению 64 существует кольцо $Q^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{cl}}(R) = RS^{-1}$, которое совпадает с кольцом $Q^{\mathrm{gr}}(R)$. По градуированному варианту теоремы Утуми имеем, что
$$Q^{\mathrm{gr}}(R) \cong Q^{\mathrm{gr}}\big(\mathrm{M}_n(D)(\bar{g})\big) \cong \mathrm{M}_n\big(Q^{\mathrm{gr}}(D)\big)(\bar{g}) \cong \mathrm{M}_n(T)(\bar{g}) \text{ —}$$
gr-простое gr-артиново кольцо (так как T — градуированное тело, см. теорему 6), так что R — gr-первичное правое gr-кольцо Голди по теореме 25.

Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Обозначим через N полную систему $\{e_{ij} \in Q \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ матричных единиц кольца Q. Тогда $e_{ij} \in Q_{g_i^{-1} g_j}$ (см. пример 9). Так как множество N конечно, по лемме 14 существует элемент $a \in S$, для которого $Na \subseteq R$.

Положим $M := a^{-1}Na$. Тогда M — полная система матричных единиц в Q, такая что $aM \subseteq R$, поэтому $aMR = bR$ для некоторого $b \in S$. Отсюда следует, что $b = ac$ для некоторого $c \in h(MR)$ и элемент $c = ba^{-1}$ обратим в Q, поэтому $MR = cR$.

Поскольку $MR \supseteq R$, то $R \supseteq Rc^{-1}$. В частности, $c^{-1} \in R$ и
$$(R : M) := \{r \in R \mid rM \subseteq R\} = \{r \in R \mid rcR \subseteq R\} = Rc^{-1}.$$
Ввиду $(R : M)M = RM$ получаем, что $(Rc^{-1})M = Rc^{-1}$, откуда следует, что $R = R(c^{-1}Mc)$ и $c^{-1}Mc \subseteq R$, так что $c^{-1}Mc$ — полная система матричных единиц в R. Её централизатор $D := C_R(c^{-1}Mc)$ — градуированное кольцо по теореме 1. Обозначив $\deg(ac) =: h$, получим, что матричная единица $(ac)^{-1}e_{ij}(ac)$ принадлежит $R_{(g_i h)^{-1}(g_j h)}$, поэтому
$$R \cong \mathrm{M}_n(D)(g_1 h, \ldots, g_n h) = \mathrm{M}_n(D)(g_1, \ldots, g_n).$$

Тогда
$$Q^{\mathrm{gr}}(R) = Q^{\mathrm{gr}}\big(D(\bar{g})\big) = \mathrm{M}_n\big(Q^{\mathrm{gr}}(R)(\bar{g})\big).$$
Но по условию $Q^{\mathrm{gr}}(R) \cong \mathrm{M}_n(T)(\bar{g})$, значит, $Q^{\mathrm{gr}}(D) = T$. В частности, D — градуированная правая область Оре. $\square$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 11-01-00571а.

Литература

[1] Атья М., Макдональд И. Введение в коммутативную алгебру. — М.: Факториал, 2003.

[2] Балаба И. Н. Кольца частных полупервичных градуированных колец // Тр. междунар. семинара «Универсальная алгебра и её приложения». — Волгоград, 2000. — С. 21—28.

[3] Балаба И. Н. Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, вып. 4 (16). — С. 6—23.

[4] Балаба И. Н. Градуированные регулярные кольца и модули // Чебышёвский сб. — 2010. — Т. 11, вып. 3 (35). — С. 22—31.

[5] Балаба И. Н., Ефремов В. А. Градуированные кольца частных полупервичных градуированных колец // Чебышёвский сб. — 2010. — Т. 11, вып. 1 (33). — С. 20—30.

[6] Балаба И. Н., Зеленов С. В., Лимаренко С. В., Михалёв А. В. Теоремы плотности для градуированных колец // Фундамент. и прикл. мат. — 2003. — Т. 9, вып. 1. — С. 27—49.

[7] Балаба И. Н., Михалёв А. В. Изоморфизмы и антиизоморфизмы колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Докл. РАН. — 2009. — Т. 425, № 5. — С. 1—4.

[8] Бахтурин Ю. А., Зайцев М. В., Сегал С. К. Конечномерные простые градуированные алгебры // Мат. сб. — 2008. — Т. 199, № 7. — С. 21—40.

[9] Бейдар К. И. Кольца с обобщёнными тождествами. I // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1977. — № 2. — С. 19—26.

[10] Бовди А. А. Групповые кольца. — Ужгород: Изд-во Ужгород. ун-та, 1974.

[11] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[12] Зайцев М. В., Сегал С. К. Конечные градуировки простых артиновых колец // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2001. — № 3. — С. 21—24.

[13] Залесский А. Е., Михалёв А. В. Групповые кольца // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. — 1973. — Т. 2. — С. 5—118.

[14] Зельманов Е. И. Теоремы Голди для йордановых алгебр // Сиб. мат. журн. — 1987. — Т. 28. — С. 44—52.

[15] Зельманов Е. И. Теоремы Голди для йордановых алгебр. II // Сиб. мат. журн. — 1988. — Т. 29. — С. 68—74.

[16] Канунников А. Л. Градуированные варианты теоремы Голди // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 3. — Р. 46—50.

[17] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[18] Лимаренко С. В. Слабо примитивные суперкольца // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 3. — С. 97—142.

[19] Рахман М. Т. Инъективные модули, кольца эндоморфизмов и локализации в случае градуированных колец: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 1982.

[20] Туганбаев А. А. Теория колец. Арифметические модули и кольца. — М.: МЦНМО, 2009.

[21] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 1. — М.: Мир, 1977.

[22] Херстейн И. Некоммутативные кольца. — М.: Мир, 1972.

[23] Эльмахди С. С. Градуированные регулярные кольца и градуированные V-модули: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — М., 1985.

[24] Amitsur S. A. On rings of quotients // Symp. Math. — 1972. — Vol. 8. — P. 149—164.

[25] Anquela J. A., García E., Gómez-Lozano M. Maximal algebras of Martindale-like quotients of strongly prime linear Jordan algebras // J. Algebra. — 2004. — Vol. 280. — P. 367—383.

[26] Aranda Pino G., Siles Molina M. The maximal graded left quotient algebra of a graded algebra // Acta Math. Sinica. Eng. Ser. — 2006. — Vol. 22, no. 21. — P. 261—275.

[27] Asano K. Arithmetische Idealtheorie in nichtkommutativen Ringen // Japan J. Math. — 1939. — Vol. 15. — P. 1—36.

[28] Bahturin Yu. A., Sehgal S. K., Zaicev M. V. Group graging on associative algebras // J. Algebra. — 2001. — Vol. 241. — P. 677—698.

[29] Beidar K. I., Martindale W. S., Mikhalev A. V. Rings with Generalized Identities. — New York: Marcel Dekker, 1996.

[30] Bell A. D. Localization and ideal theory in Noetherian strongly group-graded rings // J. Algebra. — 1987. — Vol. 105. — P. 76—115.

[31] Burgess W. D. Rings of quotients of group rings // Can. J. Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 865—875.

[32] Cohen M., Rowen L. H. Group-graded rings // Commun. Algebra. — 1983. — Vol. 11, no. 1. — P. 1253—1270.

[33] Cohn P. Simple rings without zero-divisors and Lie division rings // Matematika. — 1959. — Vol. 6. — P. 14—18.

[34] Dăscălescu S., Ion B., Năstăsescu C., Rios Montes J. Group gradings on full matrix rings // J. Algebra. — 1999. — Vol. 220. — P. 709—728.

[35] Ferrero M., Jespers E., Puezylowski E. R. Prime ideals of graded rings and related matter // Commun. Algebra. — 1990. — Vol. 18, no. 11. — P. 3819—3834.

[36] Fošner M. On the extended centroid of prime associative superalgebras with applications to superderivations // Commun. Algebra. — 2004. — Vol. 32, no. 2. — P. 689—705.

[37] Gabriel P. La localisation dans les anneaux non commutatifs // Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres. — 1959-1960. — Vol. 13, no. 1, exp. 2. — P. 1—35.

[38] Gabriel P. Des categories abeliennes // Bull. Soc. Math. Fr. — 1962. — Vol. 90. — P. 323—448.

[39] Goldie A. W. The structure of prime rings under ascending chain conditions // Proc. London Math. Soc. — 1958. — Vol. 8. — P. 589—608.

[40] Goldie A. W. Semi-prime rings with maximal conditions // Proc. London Math. Soc. — 1960. — Vol. 10. — P. 201—220.

[41] Goldie A. W. Non-commutative principal ideal rings // Arch. Math. — 1962. — Vol. 13. — P. 213—221.

[42] Goodearl K., Stafford T. The graded version of Goldie's theorem // Contemp. Math. — 2000. — Vol. 259. — P. 237—240.

[43] Jategaonkar A. V. Left Principal Ideal Rings. — Berlin: Springer, 1970. — (Lect. Notes Math.; Vol. 123).

[44] Jensen A., Jondrup S. Classical quotient rings of group graded rings // Commun. Algebra. — 1992. — Vol. 20. — P. 2923—2936.

[45] Jespers E. Jacobson rings and rings strongly graded by an Abelian group // Israel J. Math. — 1988. — Vol. 63. — P. 67—78.

[46] Jespers E. Computing the extended centroid of Abelian-group graded-rings // Commun. Algebra. — 1992. — Vol. 20, no. 12. — P. 3603—3608.

[47] Jespers E., Wauters P. A general notion of noncommutative Krull rings // J. Algebra. — 1988. — Vol. 112. — P. 388—415.

[48] Johnson R. E. The extended centralizer of a ring over a module // Proc. Amer. Math. Soc. — 1951. — Vol. 2. — P. 891—895.

[49] Lambek J. On structure of semi-prime rings and their rings of quotients // Can. J. Math. — 1961. — Vol. 13. — P. 392—417.

[50] Lambek J. On Utumi's rings of quotients // Can. J. Math. — 1963. — Vol. 15. — P. 363—370.

[51] Liu S., Beattie M., Fang H. Graded division rings and the Jacobson density theorem // J. Beijing Normal Univ. (Natur. Sci.). — 1991. — Vol. 27, no. 2. — P. 129—134.

[52] Martindale W. S. Prime rings satisfying a generalized polynomial identity // J. Algebra. — 1969. — Vol. 12. — P. 576—584.

[53] Năstăsescu C. Some constructions over graded rings. Application // J. Algebra. — 1989. — Vol. 120. — P. 119—138.

[54] Năstăsescu C., Nauwelaerts E., van Oystaeyen F. Arithmetically graded rings revisited // Commun. Algebra. — 1986. — Vol. 14, no. 10. — P. 1191—2017.

[55] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded and Filtered Rings and Modules. — Berlin: Springer, 1979. — (Lect. Notes Math.; Vol. 758).

[56] Năstăsescu C., van Oystaeyen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 1982.

[57] Năstăsescu C., van Oystayen F. Graded Ring Theory. — Amsterdam: North-Holland, 2004.

[58] Ore O. Linear equations in non-commutative fields // Ann. Math. — 1931. — Vol. 32. — P. 463—477.

[59] Van Oystaeyen F. Note on graded von Neumann regular rings // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1984. — Vol. 29, no. 3. — P. 263—271.

[60] Passman D. S. Computing the symmetric rings of quotients // J. Algebra. — 1987. — Vol. 105. — P. 207—235.

[61] Siles Molina M. Algebras of quotients of Lie algebras // J. Pure Appl. Algebra. — 2004. — Vol. 188. — P. 175—188.

[62] Stenström B. Rings of Quotients. An Introduction to Methods of Ring Theory. — Berlin: Springer, 1975.

[63] Utumi Y. On quotient rings // Osaka J. Math. — 1956. — Vol. 8. — P. 1—18.

[64] Yahya H. A note on graded regular rings // Commun. Algebra. — 1997. — Vol. 25, no. 1. — P. 223—228.