$\mathcal{E}$-замкнутые группы и модули

А. В. ГРИШИН, А. В. ЦАРЁВ
Московский педагогический государственный университет
e-mail: an-tsarev@yandex.ru

УДК 512.553.5+512.541.52

Ключевые слова: $\mathcal{E}$-замкнутый модуль, E-кольцо, E-группа, модуль эндоморфизмов, абелева группа.

Аннотация

В работе рассматриваются абелевы группы (модули), изоморфные своим группам (модулям) эндоморфизмов. Найдено необходимое и достаточное условие, при котором из изоморфизма групп $G \cong \operatorname{End} G$ вытекает коммутативность кольца эндоморфизмов группы G.

Abstract

A. V. Grishin, A. V. Tsarev, $\mathcal{E}$-closed groups and modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 2, pp. 97—106.

The paper discusses Abelian groups (modules) isomorphic to their endomorphism groups (modules). A necessary and sufficient condition is given according to which the commutativity of the endomorphism ring of a group G follows from the isomorphism $G \cong \operatorname{End} G$.

Введение

Кольцо K называется E-кольцом, если канонический гомоморфизм из кольца K в кольцо эндоморфизмов его аддитивной группы $\mathsf{E}(K^+)$, отображающий элемент $r \in K$ в эндоморфизм правого умножения на r, является изоморфизмом. Аддитивные группы E-колец называются E-группами. Отметим, что абелева группа G является E-группой тогда и только тогда, когда $G \cong \operatorname{End} G$ и кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(G)$ коммутативное. В связи с этим, в качестве обобщения E-групп, естественно рассмотреть группы, изоморфные своим группам эндоморфизмов (ниже мы называем их $\mathcal{E}$-замкнутыми группами). В 1998 году в работе [5] Ш. Фейгельсток, Ю. Хаусен и Р. Рафаэль доказали, что в классе абелевых групп конечного ранга группа $\mathcal{E}$-замкнута тогда и только тогда, когда она является E-группой. В связи с этим они поставили следующую проблему: совпадают ли классы E-групп и $\mathcal{E}$-замкнутых групп? Отрицательно эту проблему решили в 2003 году Р. Гёбель, С. Шелах и Л. Стрюнгманн. В частности,

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 2, с. 97—106.

в [7] они доказали существование континуальных $\mathcal{E}$-замкнутых групп, не являющихся E-группами. Для счётных абелевых групп (точнее, для групп счётного ранга) проблема Фейгельстока—Хаусен—Рафаэля осталась открытой.

В настоящей работе продолжается изучение $\mathcal{E}$-замкнутых групп и модулей. Основным результатом статьи является теорема 4.3, в которой на языке конечной топологии колец эндоморфизмов получено необходимое и достаточное условие, при котором $\mathcal{E}$-замкнутая группа является E-группой. В качестве следствия из этой теоремы получается положительное решение проблемы Фейгельстока—Хаусен—Рафаэля для абелевых групп счётной мощности (следствие 4.6).

1. Предварительные определения, обозначения и примеры

Под группой в работе всегда подразумевается абелева группа, записанная аддитивно. Через $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ будем обозначать группы целых и рациональных чисел соответственно, через $\mathbb{Z}_m$ — группу классов вычетов по модулю m. Рангом группы G будем называть мощность максимальной линейно независимой (над $\mathbb{Z}$) системы группы G. Будем обозначать ранг группы G через $\mathrm{r}(G)$. Если G — смешанная группа, то $\mathrm{r}(G) = \mathrm{r}\big(G/\mathrm{t}(G)\big)$, где $\mathrm{t}(G)$ — периодическая часть группы G. Если p — простое число, то через $\mathrm{r}_p(G)$ будем обозначать p-ранг группы G, равный величине $\dim_{\mathbb{Z}_p} G/pG$.

Пусть Φ — коммутативное, ассоциативное кольцо с единицей и без делителей нуля (область целостности), k — поле частных кольца Φ и M — Φ-модуль без кручения ранга n, т. е. M — подмодуль векторного пространства $V = \mathrm{k}M$, $\mathrm{r}(M) = \dim_{\mathrm{k}} V = n$.

Обозначим через $\mathsf{E}(M)$ алгебру эндоморфизмов модуля M. Назовём Φ-модуль M *$\mathcal{E}$-замкнутым*, если $M \cong \mathrm{End}_\Phi M$, где $\mathrm{End}_\Phi M$ — аддитивная группа Φ-алгебры $\mathsf{E}(M)$, рассматриваемая как Φ-модуль.

Если Φ-модуль $\mathcal{E}$-замкнут, то на нём очевидным образом вводится структура ассоциативной алгебры с единицей.

Приведём примеры $\mathcal{E}$-замкнутых $\mathbb{Z}$-модулей (которые также будем называть $\mathcal{E}$-замкнутыми группами), естественно возникающие в теории абелевых групп.

Пример 1.1. Периодическая абелева группа $\mathcal{E}$-замкнута тогда и только тогда, когда она циклическая.

Пример 1.2. Абелева группа с ненулевой делимой частью $\mathcal{E}$-замкнута тогда и только тогда, когда она имеет вид $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$.

Пример 1.3. Пусть G — абелева группа без кручения ранга 1. Хорошо известно (см., например, [3, § 1]), что условие $G \cong \mathrm{End}_{\mathbb{Z}} G$ выполняется тогда и только тогда, когда группа G имеет идемпотентный тип, т. е. в точности тогда, когда фактор-группа $G/\langle g\rangle$ при произвольном $g \neq 0$ является прямой суммой делимой периодической группы и конечной группы.

Пример 1.4. Абелева группа G называется *факторно делимой*, если она не содержит делимых периодических подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что G/F — делимая периодическая группа.

Любая факторно делимая группа ранга 1 является $\mathcal{E}$-замкнутой (см. [1]).

Пример 1.5. Пусть $\chi = (m_p)$ — произвольная характеристика (т. е. последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞, занумерованная простыми индексами). Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod\limits_{p \in P} K_p$, где $K_p = \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ — кольцо классов вычетов по модулю p^{m_p} при $m_p < \infty$ и $K_p = \hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо целых p-адических чисел при $m_p = \infty$. Тогда для каждого подкольца K (содержащего единицу) кольца $\mathbb{Z}_\chi$ справедливо $\mathsf{E}(K^+) \cong K$, т. е. K^+ является $\mathcal{E}$-замкнутой группой.

Отметим, что, по-видимому, все приведённые выше примеры переносятся на случай модулей над областями главных идеалов.

С $\mathcal{E}$-замкнутыми модулями тесно связаны так называемые E-кольца, введённые П. Шульцем в 1973 г. [8]. Базовые факты теории E-колец изложены в [2, § 6]. Рассмотрим некоторые из них.

Определение 1.1. Кольцо K называется *E-кольцом*, если

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, K) = \mathrm{Hom}_K(K, K).$$

Аддитивные группы E-колец называются *E-группами*.

Рассмотрим некоторые свойства E-колец.

1. K является E-кольцом тогда и только тогда, когда всякий эндоморфизм φ аддитивной группы кольца K совпадает с умножением справа кольца K на элемент $\varphi(1)$.

Действительно, если K — E-кольцо и $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(K, K)$, то

$$\varphi(r) = \varphi(r \cdot 1) = r \cdot \varphi(1).$$

Обратно, если $\varphi(r) = r \cdot \varphi(1)$, то

$$\varphi(rs) = (rs)\varphi(1) = r\big(s\varphi(1)\big) = r\varphi(s).$$

2. E-кольцо K коммутативно.

Пусть $x \in K$ и L_x — эндоморфизм левого умножения на x ($L_x(y) = xy$), а R_x — эндоморфизм правого умножения на x ($R_x(y) = yx$). Из п. 1 следует, что $L_x = R_{L_x(1)} = R_x$. Из этого следует, что $xy = L_x(y) = R_x(y) = yx$.

Предложение 1.1 [8]. *Следующие утверждения равносильны*:

1) *K — E-кольцо*;
2) *если $\varphi \in \mathsf{E}(K^+)$ и $\varphi(1) = 0$, то $\varphi = 0$*;
3) *кольцо $\mathsf{E}(K^+)$ коммутативно.* □

Отметим, что из п. 1 следует, что аддитивная группа E-кольца K является $\mathcal{E}$-замкнутым модулем над кольцом $\mathbb{Z}$ и над кольцом K. Действительно, если K^+ — аддитивная группа E-кольца K, то существует канонический изоморфизм $K^+ \cong \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} K^+$, а значит, K^+ — $\mathcal{E}$-замкнутая группа. На первый взгляд может показаться, что для абелевой группы G существование изоморфизма $G \cong \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} G$ равносильно тому, что кольцо $\mathsf{E}(G)$ индуцирует на группе G структуру E-кольца. Однако из приведённого ниже результата Р. Гёбеля, С. Шелаха и Л. Стрюнгманна [7] следует, что класс $\mathcal{E}$-замкнутых групп шире класса E-групп.

Теорема 1.2 [7]. *Пусть λ — бесконечное кардинальное число, удовлетворяющее условию $\lambda^{\aleph_0} = \lambda$. Тогда существует некоммутативное кольцо K мощности λ, такое что $\operatorname{End}_{\mathbb{Z}} K^+ \cong K$.* □

2. Теорема о коммутативности

Пусть теперь A — произвольная Φ-алгебра с единицей (коммутативность и ассоциативность не предполагаются), являющаяся Φ-модулем без кручения ранга n, т. е. $V = \mathrm{k}A$ — n-мерная k-алгебра. Любой элемент из V может быть представлен, очевидно, как $\alpha^{-1}a$, где $\alpha \in \Phi$, $a \in A$. Левое и правое умножение на элемент $\alpha^{-1}a$ индуцирует линейный оператор на k-пространстве V, причём ограничение этого оператора на A даёт эндоморфизм Φ-модуля A тогда и только тогда, когда $\alpha^{-1}a \in A$. В самом деле, если $\alpha^{-1}a \in A$, то умножение на этот элемент даёт эндоморфизм Φ-модуля A. Обратно, если умножение на $\alpha^{-1}a$ является эндоморфизмом Φ-модуля A, то $\alpha^{-1}a \cdot 1 = \alpha^{-1}a$ лежит в A.

Для произвольного элемента a из Φ-алгебры A рассмотрим два эндоморфизма Φ-модулей:

$$L_a\colon A \to A, \quad x \mapsto ax, \qquad R_a\colon A \to A, \quad x \mapsto xa.$$

В Φ-модуле $\operatorname{End}_\Phi A$ рассмотрим подмодули

$$L = \{L_a \mid a \in A\}, \qquad R = \{R_a \mid a \in A\}.$$

Лемма 2.1. *Отображения $\theta_l\colon A \to L$, $a \mapsto L_a$, и $\theta_r\colon A \to R$, $a \mapsto R_a$, являются изоморфизмами Φ-модулей.*

Доказательство. То, что θ_l и θ_r — сюръективные модульные гомоморфизмы, очевидно. Инъективность следует из наличия единицы в алгебре A: $\theta_l(a) = 0$ влечёт $a \cdot 1 = a = 0$; $\theta_r(a) = 0$ влечёт $1 \cdot a = a = 0$. Лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Для Φ-алгебры A имеют место разложения в прямую сумму подмодулей*:

$$\operatorname{End}_\Phi A = L \oplus H = R \oplus H,$$

где $H = \{\varphi \in \operatorname{End}_\Phi A \mid \varphi(1) = 0\}$.

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{End}_\Phi A = L \oplus H$. Пусть ψ — произвольный эндоморфизм Φ-модуля A. Тогда $\psi - L_{\psi(1)} \in H$, а значит, $\operatorname{End}_\Phi A = L + H$. Учитывая, что $L \cap H = 0$, получаем, что $\operatorname{End}_\Phi A = L \oplus H$.

Аналогично показывается, что $\operatorname{End}_\Phi A = R \oplus H$. □

Теорема 2.3. *Пусть A — произвольная Φ-алгебра без кручения конечного ранга. Следующие условия равносильны*:

1) A — *$\mathcal{E}$-замкнутый Φ-модуль*;
2) $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\mathrm{End}_\Phi A)$;
3) $\mathsf{E}(A)$ — *коммутативная алгебра.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как $A \cong \mathrm{End}_\Phi A$, то $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\mathrm{End}_\Phi A)$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Так как L — подмодуль Φ-модуля $\mathrm{End}_\Phi A$ и $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(L) = \mathrm{r}(\mathrm{End}_\Phi A)$, то любой элемент f из $\mathrm{End}_\Phi A$ имеет вид $\alpha^{-1}L_a$, где $a \in A$, $\alpha \in \Phi$. Следовательно, для любого x из A

$$f(x) = \alpha^{-1}(ax) = (\alpha^{-1}a)(x) = L_{\alpha^{-1}a}(x).$$

Взяв в качестве x единицу, получим, что $L_{\alpha^{-1}a}(1) = \alpha^{-1}a$ принадлежит A, т. е. $f = L_{\alpha^{-1}a}$ — эндоморфизм левого умножения (элемент из L). Следовательно, $L = \mathrm{End}_\Phi A$. Аналогично $R = \mathrm{End}_\Phi A$. Тогда для любого a из A найдётся такой b из A, что $L_a = R_b$. Так как $a = L_a(1) = R_b(1) = b$, то $L_a = R_a$. Следовательно, Φ-алгебра $\mathsf{E}(A)$ коммутативна.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть $\mathsf{E}(A)$ — коммутативная Φ-алгебра. Рассмотрим разложение $\mathrm{End}_\Phi A = L \oplus H = R \oplus H$ из леммы 2.2. Пусть ψ — произвольный элемент из H и $a \in A$. Тогда

$$\psi(a) = \psi L_a(1) = L_a\psi(1) = 0.$$

Следовательно, $\psi = 0$ и $H = 0$. Таким образом, $\mathrm{End}_\Phi A = L = R \cong A$. □

Следующая теорема по доказательству вполне аналогична теореме 2.3. Она уточняет строение алгебры A.

Теорема 2.4. *Пусть A — Φ-алгебра без кручения конечного ранга, такая что* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(\mathrm{End}_\Phi A)$. *Тогда A — коммутативно-ассоциативная алгебра с единицей, изоморфная алгебре* $\mathsf{E}(A)$.

Доказательство. В силу теоремы 2.3 алгебра A как Φ-модуль естественным образом отождествляется с алгеброй $\mathsf{E}(A)$. Таким образом, a priori в Φ-модуле A имеется две мультипликативные операции $*$ и $\cdot$, превращающие его в Φ-алгебру. Первая имелась на A изначально, а вторая индуцируется композицией эндоморфизмов. Покажем, что эти операции совпадают. Для этого заметим сначала, что у этих операций имеется общий, и притом единственный, нейтральный элемент 1, соответствующий тождественному оператору правого (левого) умножения.

Пусть теперь R_x^* и R_x — операторы правого умножения на элемент x относительно операций $*$ и $\cdot$ соответственно. Тогда для любого элемента $b \in A$ найдётся такой элемент $c \in A$, что $R_b^* = R_c$. Следовательно, для любого элемента $a \in A$ имеет место равенство $a * b = a \cdot c$. Положим $a = 1$. Тогда $b = 1 * b = 1 \cdot c = c$, т. е. $a * b = a \cdot b$. Теорема доказана. □

3. Оценка ранга Ф-модуля эндоморфизмов в коммутативном случае

Введём следующие обозначения. Для произвольного Ф-модуля M рассмотрим следующую последовательность:

$$E_0(M) = M_0, \quad E_1(M) = \operatorname{End}_\Phi M, \ldots, \quad E_i(M) = \operatorname{End}_\Phi\big(E_{i-1}(M)\big), \ldots .$$

Всюду ниже для упрощения обозначений $E_i(M)$ будем обозначать через E_i. Предполагаем в дальнейшем, что M — Ф-модуль без кручения конечного ранга. Положим $\varepsilon_i = \mathrm{r}(E_i)$ и рассмотрим бесконечную последовательность

$$\varepsilon(M) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i, \ldots),$$

которую будем называть *ε-характеристикой* модуля M.

Имеет место очевидная цепочка включений Ф-алгебр

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_i \subseteq \ldots$$

и цепочка неравенств соответствующих им рангов

$$\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \ldots \leqslant \varepsilon_i \leqslant \ldots .$$

Из результатов предыдущего раздела сразу получаем следствие.

Следствие 3.1. *Пусть $i \geqslant 2$. Тогда следующие утверждения равносильны*:

1) E_i — *коммутативная алгебра хотя бы для одного* i;
2) $E_i = E_{i-1}$ *хотя бы для одного* i;
3) $E_1 = E_2 = \ldots = E_i = \ldots$;
4) $\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}$ *хотя бы для одного* i;
5) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_i = \ldots$. □

Следствие 3.2. *Если хотя бы для одного натурального i алгебра E_i не коммутативна, то последовательность рангов $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ строго возрастает, т. е. $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \ldots < \varepsilon_i < \ldots$.* □

В разделе 2 мы видели, что некоторые аддитивные условия влекут мультипликативные свойства и наоборот. Такие явления в алгебре встречаются нередко. Основной целью настоящего раздела является следующая задача: из условия коммутативности алгебры E_1 вывести оценку на её ранг по отношению к рангу исходного модуля M, т. е. оценить сверху ε_1 через ε_0. Хорошо известно, что при условии коммутативности алгебры E_i её ранг ε_1 может оказаться меньше ε_0. Может ли он оказаться больше ε_0? В общем случае ответ нам не известен, хотя достаточно вероятно, что он отрицателен.

Далее нам удобно будет использовать *рациональную оболочку* $\mathrm{k}M$ модуля M и тот очевидный факт, что $\mathrm{r}(M) = \dim_{\mathrm{k}} \mathrm{k}M$. Рассмотрим следующие хорошо известные факты из линейной алгебры.

Теорема 3.3 [9]. *Пусть* k_n *— алгебра* $(n \times n)$*-матриц над полем* k *и* A *— произвольная коммутативная подалгебра в* k_n*. Тогда*

$$\dim_{\mathrm{k}} A \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right] + 1,$$

причём равенство достигается. □

В частности, если $n = 1, 2, 3$, то оценка сверху имеет тот же вид: 1, 2, 3.

Теорема 3.4 [6]. *В условиях теоремы* 3.3*, если* A *— двупорождённая алгебра и в алгебре* A *нет нильпотентных элементов, то* $\dim_{\mathrm{k}} A \leqslant n$*.* □

Теорема 3.5. *Если* k *— поле нулевой характеристики и в коммутативной подалгебре* A *алгебры* k_n *нет нильпотентных элементов, то* $\dim_{\mathrm{k}} A \leqslant n$*.*

Доказательство. В этом случае A как алгебра с тривиальным радикалом раскладывается в прямую сумму конечных расширений поля k и, как нетрудно проверить, является однопорождённой алгеброй. Следовательно, по теореме Гамильтона—Кэли $\dim_{\mathrm{k}} A \leqslant n$. □

Из приведённых выше фактов непосредственно следует следующая оценка ε_1 через ε_0.

Теорема 3.6. *Пусть* E_1 *— коммутативная алгебра. Тогда*

1) $\varepsilon_1 \leqslant \left[\frac{{\varepsilon_0}^2}{4}\right] + 1$, *в частности, при* $\varepsilon_0 = 1, 2, 3$ *имеет место неравенство* $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$;
2) *если* $\mathrm{k}E_1$ *— двупорождённая алгебра, то* $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$;
3) *если* k *— поле нулевой характеристики и в алгебре* $\mathrm{k}E_1$ *нет нильпотентных элементов, то* $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$*.* □

Заметим, что в случае $\mathcal{E}$-замкнутых абелевых групп без кручения конечного ранга алгебра $\mathbb{Q}E_1$ не содержит нильпотентных элементов (см. [2, § 6]), а значит, выполняется неравенство $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$.

4. $\mathcal{E}$-замкнутые абелевы группы

Если G — $\mathcal{E}$-замкнутая группа, то будем считать, что на ней определено ассоциативное кольцо с единицей, индуцированное некоторым фиксированным изоморфизмом $\alpha\colon G \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} G$.

В случае когда $\Phi = \mathbb{Z}$, из теоремы 2.3 выводим следствие.

Следствие 4.1. *Для кольца без кручения* K *конечного ранга следующие утверждения равносильны*:

1) $K^+ \cong \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} K^+$;
2) $\mathrm{r}(K^+) = \mathrm{r}(\operatorname{End}_{\mathbb{Z}} K^+)$;
3) $\mathsf{E}(K^+)$ *— коммутативное кольцо*;
4) $\mathsf{E}(K^+)$ *—* E*-кольцо.* □

Отметим, что равносильность условий 3) и 4) данного следствия вытекает из предложения 1.1, а равносильность условий 1) и 4) была доказана Ш. Фейгельстоком, Ю. Хаусен и Р. Рафаэлем в [5].

Использование леммы 2.2 позволяет нам найти другие достаточные условия, при выполнении которых $\mathcal{E}$-замкнутая группа обязательно является E-группой.

Предложение 4.2. *Если для $\mathcal{E}$-замкнутой группы G выполняется хотя бы одно из следующих условий, то $\mathsf{E}(G)$ — коммутативное кольцо (т. е. G — E-группа).*

1. *G — неразложимая группа.*
2. *$r_p(G) < \infty$ для любого простого p.*

Доказательство. 1. Так как G — неразложимая группа, то из

$$G \cong \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} G = L \oplus H = R \oplus H$$

следует, что $H = 0$ и $\operatorname{End}_{\mathbb{Z}} G = L = R$, а значит, кольцо $\mathsf{E}(G)$ коммутативно.

2. Так как

$$G \cong \operatorname{End}_{\mathbb{Z}} G = L \oplus H,$$

где $L \cong G$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеет место прямое разложение

$$G = H_1 \oplus \ldots \oplus H_n \oplus G_n, \quad \text{где} \quad G_n = H_{n+1} \oplus G_{n+1},$$

причём $H_i \cong H$ и $G_i \cong G$ при всех i. Тогда из условия $r_p(G) < \infty$ при любом простом p вытекает, что $r_p(H) = 0$ при любом простом p. Следовательно, $H = 0$ или H — ненулевая делимая группа. В первом случае получаем, что $\operatorname{End}_{\mathbb{Z}} G = L = R$, а значит, кольцо $\mathsf{E}(G)$ коммутативно. Во втором же случае (если он возможен) получаем, что G — нередуцированная $\mathcal{E}$-замкнутая группа, следовательно, $G \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$ (см. пример 1.2). Очевидно, что тогда кольцо $\mathsf{E}(G)$ снова коммутативно. □

Важную роль при работе с кольцами эндоморфизмов играет конечная топология. Пусть G — абелева группа. *Конечная топология* на кольце $\mathsf{E}(G)$ задаётся базой окрестностей нуля, состоящей из идеалов

$$U_X = \{\varphi \in \mathsf{E}(G) \mid \varphi(X) = 0\}$$

для всех конечных подмножеств X группы G. Интерес для нас представляет следующий непосредственно вытекающий из определения факт: кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(G)$ группы G дискретно в конечной топологии тогда и только тогда, когда существует такое конечное подмножество $X \subseteq G$, что из $\alpha(X) = 0$ вытекает $\alpha = 0$ для любого $\alpha \in \mathsf{E}(G)$.

Далее нам понадобятся так называемые самомалые группы, введённые Д. Арнольдом и Ч. Мёрли [4] в 1975 году (см. также [2, § 31]).

Определение 4.1. Группа G называется *самомалой*, если образ всякого гомоморфизма $\varphi\colon G \to \bigoplus_{i\in I} G_i$, где $G_i \cong G$ для всех i, I — произвольное индексное множество, содержится в сумме конечного числа некоторых групп G_i.

Теорема 4.3 [4]. *Для группы G следующие условия эквивалентны*:

1) *G не самомалая группа*;
2) *существует цепь $B_1 \subset B_2 \subset \ldots \subset B_n \subset \ldots$ собственных подгрупп группы G, таких что $G = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$ и $\operatorname{Ann}(B_n) \neq 0$ для всех n.* □

Здесь $\operatorname{Ann}(B_n) = \{\alpha \in \mathsf{E}(G) \mid \alpha(B_n) = 0\}$.

Предложение 4.4 [4]. *Если кольцо $\mathsf{E}(G)$ дискретно в конечной топологии, то G — самомалая группа.* □

Теперь мы можем сформулировать основной результат данного раздела.

Теорема 4.5. *Для $\mathcal{E}$-замкнутой группы G следующие утверждения равносильны*:

1) *G — E-группа*;
2) *$\mathsf{E}(G)$ дискретно в конечной топологии*;
3) *G — самомалая группа.*

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Если G — E-группа, то по предложению 1.1 из $\alpha(1_G) = 0$ вытекает, что $\alpha = 0$ для любого $\alpha \in \mathsf{E}(G)$. Таким образом, кольцо $\mathsf{E}(G)$ дискретно в конечной топологии.

Импликация 2) $\Longrightarrow$ 3) непосредственно следует из предложения 4.4.

Докажем импликацию 3) $\Longrightarrow$ 1). Предположим противное: G не является E-группой. По лемме 2.2 имеем прямое разложение $\operatorname{End} G = L \oplus U_1$, где $L = \{L_g \mid g \in G\} \cong G$, которое индуцирует разложения на группе G:

$$G = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n \oplus G_n, \quad G_n = H_{n+1} \oplus G_{n+1},$$

где $H_i \cong U_1$ и $G_i \cong G$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Поскольку G не является E-группой, то по предложению 1.1 все H_i отличны от нуля.

Пусть $G_0 = \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} G_k$ и $B_k = H_1 \oplus \ldots \oplus H_k \oplus G_0$. Тогда подгруппы B_k группы G удовлетворяют всем условиям теоремы 4.3, а значит, G не является самомалой группой. Получили противоречие. □

Из доказанной теоремы и предложения 1.1 получаем следствие.

Следствие 4.6. *Если G — $\mathcal{E}$-замкнутая группа, то её кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(G)$ коммутативно тогда и только тогда, когда существует элемент $g \in G$, такой что из $\alpha(g) = 0$ следует, что $\alpha = 0$ для любого $\alpha \in \mathsf{E}(G)$.* □

Следующий результат был также получен Д. Арнольдом и Ч. Мёрли при изучении самомалых групп.

Теорема 4.7 [4]. *Для счётной группы G следующие условия равносильны*:

1) *$\mathsf{E}(G)$ дискретно в конечной топологии*;
2) *$\mathsf{E}(G)$ — счётное кольцо.* □

Теперь из теорем 4.5 и 4.7 получаем положительное решение проблемы Фейгельстока—Хаусен—Рафаэля для счётных абелевых групп.

Следствие 4.8. *Если G — счётная $\mathcal{E}$-замкнутая группа, то её кольцо эндоморфизмов $\mathsf{E}(G)$ коммутативно, т. е. любая счётная $\mathcal{E}$-замкнутая группа является E-группой.* $\square$

Литература

[1] Давыдова О. И. Факторно делимые абелевы группы ранга 1 // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 3. — С. 25—33.

[2] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал, 2006.

[3] Arnold D. M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[4] Arnold D., Murley C. E. Abelian groups A such that $\mathrm{Hom}(A, -)$ preserves direct sums of copies of A // Pacific J. Math. — 1975. — Vol. 56, no. 1. — P. 7—20.

[5] Feigelstock S., Hausen J., Raphael R. Groups which map onto their endomorphism rings // Abelian Groups and Modules. Proc. of the Int. Conf. in Dublin, Ireland, August 10—14, 1998 / P. C. Eklof, ed. — Basel: Birkhäuser, 1999. — Trends Math. — P. 231—239.

[6] Gerstenhaber M. On dominance and varieties of commuting matrices // Ann. Math. — 1961. — Vol. 73. — P. 324—348.

[7] Göbel R., Shelah S., Strüngmann L. Generalized E-rings. — 2004. — `arXiv:math/0404271`.

[8] Schultz P. The endomorphism ring of the additive group of a ring // J. Aust. Math. Soc. — 1973. — Vol. 15. — P. 60—69.

[9] Schur I. Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen // J. Reine Angew. Math. — 1905. — Vol. 130. — P. 66—76.