Экспонента сложности матричного умножения

Д. В. ЖДАНОВИЧ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: Zhdanovichdv@mail.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: трилинейные тензоры, тернарные отношения, ранг тензора, ёмкость отношения, сложность вычисления произведения матриц.

Аннотация

В 1990 году Д. Копперсмит и С. Виноград опубликовали оценку количества арифметических операций, необходимых для вычисления произведения квадратных матриц размера $n \times n$, равную $O(n^{2{,}3755})$. В настоящей работе проведена систематизация теоретического инструментария, использование которого привело к этой оценке. Одним из результатов проведённой систематизации является улучшение оценки Д. Копперсмита и С. Винограда до $O(n^{2{,}373})$.

Abstract

D. V. Zhdanovich, The matrix capacity of a tensor, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 2, pp. 107—166.

In 1990, D. Coppersmith and S. Winograd published an estimate of the amount of arithmetic operations necessary for the multiplication of square matrices $n \times n$, which equals $O(n^{2.3755})$. In this article, we make a systematization of the theoretical instruments that were used by D. Coppersmith and S. Winograd for their estimate. The improved estimate $O(n^{2.373})$ is one of the results of this systematization.

Введение

Экспонентой сложности матричного умножения (матричной экспонентой) называется минимальное число ω, такое что для любого $\varepsilon > 0$ и для любого достаточно большого числа n количество арифметических операций, необходимых для вычисления произведения двух матриц размера $n \times n$, не превосходит $n^{\omega+\varepsilon}$.

Существование классического алгоритма вычисления произведения двух матриц приводит к оценке $\omega \leqslant 3$. В 1969 году В. Штрассен [10] опубликовал алгоритм, который использует всего семь умножений для вычисления произведения двух матриц размера 2×2. Из существования этого алгоритма следует, что экспонента сложности матричного умножения оценивается величиной, равной $\log_2 7 \approx 2{,}808\ldots$.

Результат В. Штрассена вызвал значительный интерес и привёл к серии работ различных авторов, посвящённых вопросу улучшения оценки экспоненты

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 2, с. 107—166.

сложности матричного умножения. В настоящее время наилучший результат опубликован в работе [5], в которой Д. Копперсмит и С. Виноград получили оценку матричной экспоненты, равную $2{,}3755\ldots$.

Не претендуя на полноту изложения, отметим серию результатов, которые, в конечном итоге, привели к оценке Д. Копперсмита и С. Винограда.

В 1978 году В. Пан [7] получил оценку матричной экспоненты, равную $2{,}781\ldots$, и тем самым улучшил оценку В. Штрассена. В. Пан, рассматривая задачу оценки сложности матричного произведения как задачу о ранге матричного тензора

$$\langle n\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_{i,j}y_{j,l}z_{l,i},$$

разработал технику трилинейного агрегирования, позволяющую строить представления некоторых трилинейных тензоров в виде суммы небольшого количества разложимых тензоров.

Отметим, что эквивалентность задачи оценки трудоёмкости билинейных алгоритмов и задачи оценки ранга трилинейных тензоров была известна до опубликования работы В. Пана. Но именно В. Пан убедительно продемонстрировал, что задачу оценки матричной экспоненты наиболее эффективно решать в виде задачи оценки ранга соответствующего трилинейного тензора.

В 1979 году была опубликована работа [4], в которой приведён некоторый приближённый алгоритм вычисления произведения матриц. Основное свойство этого алгоритма состояло в том, что для любой наперёд заданной погрешности существовал метод вычисления произведения матриц с трудоёмкостью, равной $O(n^{2{,}7799})$.

Строго говоря, в [4] не утверждалось, что оценка матричной экспоненты равна $2{,}7799\ldots$, но в 1980 году появилась работа Д. Бини [3], в которой было приведено доказательство того, что из существования приближённого алгоритма следует существование точного алгоритма с такой же оценкой трудоёмкости.

На языке трилинейных тензоров задача оценки трудоёмкости билинейных алгоритмов в классе приближённых алгоритмов эквивалента задаче оценки предельного ранга тензора. В англоязычной литературе для этого ранга, как правило, используется название «λ-ранг». В настоящей статье используется название «предельный ранг», так как можно показать, что тензоры, имеющие λ-ранг меньше некоторого числа r, лежат в замыкании (являются пределом) множества тензоров, у которых обычный ранг равен r.

Результат Д. Бини оказался очень продуктивным, поскольку техника трилинейного агрегирования В. Пана позволяла генерировать большую серию примеров тензоров с хорошей оценкой предельного ранга. Во всех дальнейших работах использовались различные трилинейные тензоры, всё более и более непохожие на изначальный матричный тензор, но имеющие хорошую оценку предельного ранга.

В этой серии работ отметим работу А. Шёнхаге [9], в которой автор использовал хорошую оценку предельного ранга тензора, являющегося прямой суммой двух матричных тензоров. На языке билинейных алгоритмов этот тензор соответствует произведению двух пар независимых друг от друга матриц, а хорошая оценка предельного ранга означает существование быстрого приближённого алгоритма вычисления этих произведений. Содержательный смысл этой работы состоял в том, что А. Шёнхаге удалось извлечь из этого алгоритма максимум информации, касающейся алгоритма произведения одной пары матриц. В конечном итоге А. Шёнхаге получил оценку, равную $2{,}5479\ldots$.

В дальнейшем снова В. Штрассен [11] сумел улучшить оценку матричной экспоненты до 2,4785, использовав тензор, ещё более непохожий на матричный тензор. В своей работе В. Штрассен оценивал некоторую характеристику тензора, которую он называл «τ-значение».

В настоящей работе это понятие формализовано и получило название матричной ёмкости трилинейного тензора. Неформально это понятие означает то, сколько информации, позволяющей оценивать ранг матричного тензора, заложено в некотором произвольном трилинейном тензоре.

Д. Копперсмит и С. Виноград в работе [5] развили идею В. Штрассена в применении к тензорам с ещё более сложной структурой. Оригинальная идея Д. Копперсмита и С. Винограда состояла в том, что они сумели применить нетривиальный факт из аддитивной теории чисел [2] для оценки того, что в настоящей статье называется симметрической ёмкостью отношения, согласованного с трилинейным тензором.

Основная цель настоящей статьи состояла в том, чтобы выделить из результатов Д. Копперсмита и С. Винограда универсальный инструмент для оценки матричной ёмкости трилинейных тензоров.

В разделе 1 приведено формализованное изложение рассматриваемой задачи. Основным понятием является асимптотический ранг трилинейного тензора, а предельный ранг выступает в качестве инструмента для оценки асимптотического ранга. Также в этом разделе определяется матричная ёмкость тензора и приводятся различные её свойства. Отметим в этом разделе теорему 1.2, из которой следует, например, известная τ-теорема А. Шёнхаге.

В разделе 2 вводится понятие симметрической ёмкости взвешенных тринарных отношений. Смысл этого понятия состоит в том, что если отношение является согласованным с тензором, его матричную ёмкость можно оценивать через симметрическую ёмкость отношения в соответствии с теоремой 2.1. Отметим, что Д. Копперсмит и С. Виноград в своей работе также неявным образом использовали взвешенные отношения.

В разделах 3 и 4 рассматривается специальный класс отношений, которые были названы константными отношениями. Для этого класса отношений нам, опираясь на идеи Д. Копперсмита и С. Винограда, удалось получить алгоритмически вычислимую оценку симметрической ёмкости.

В разделе 5 полученный результат проиллюстрирован на примере одного из тензоров, который рассматривали Д. Копперсмит и С. Виноград. В частности, они получили свою оценку матричной экспоненты, равную $2{,}3755\ldots$, используя тензорный квадрат рассматриваемого тензора. Рассматривая четвёртую тензорную степень этого тензора, нам удалось получить оценку матричной экспоненты, равную $2{,}373\ldots$.

Последний раздел содержит вспомогательные факты, требующиеся по ходу изложения.

1. Различные ранги тензоров

1.1. Трилинейные тензоры

Пусть V, W, U — конечномерные линейные пространства над произвольным полем F. Тогда определено пространство трилинейных тензоров $V \otimes W \otimes U$.

Приведём примеры тензоров.

Если через $\mathrm{M}_{n,m}(F)$ обозначить линейное пространство матриц размера $n \times m$, то матричному умножению $\mathrm{M}_{n,m} \otimes \mathrm{M}_{m,k} \to \mathrm{M}_{n,k}$ соответствует трилинейный тензор

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{k} x_{i,j} \otimes y_{j,l} \otimes z_{l,i}.$$

Этот тензор будем обозначать через $\langle n, m, k \rangle$. Если необходимо подчеркнуть, над каким полем рассматриваются матрицы, то будем использовать обозначение $\langle n, m, k \rangle_F$. В случае если числа n, m и k равны между собой, соответствующий тензор $\langle n, n, n \rangle$ будем называть *матричным* и обозначать через $\langle n \rangle$.

Пусть задано натуральное число n и зафиксированы линейно независимые наборы векторов $v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_n$, $u_1, \ldots, u_n$ из пространств V, W, U соответственно. Тогда определён тензор

$$(v_1 \otimes w_1 \otimes u_1) + (v_2 \otimes w_2 \otimes u_2) + \ldots + (v_n \otimes w_n \otimes u_n),$$

который будет обозначаться через $\Psi(n)$.

Иногда для удобства восприятия в записи тензоров будем опускать знак тензорного произведения. Например, тензор $\Psi(n)$ можно записать в виде

$$v_1 w_1 u_1 + v_2 w_2 u_2 + \ldots + v_n w_n u_n.$$

Определение 1.1. Тензор $\varphi_1 \in V_1 \otimes W_1 \otimes U_1$ будем называть редукцией тензора $\varphi_2 \in V_2 \otimes W_2 \otimes U_2$, если существуют линейные отображения $f\colon V_2 \to V_1$, $g\colon W_2 \to W_1$, $h\colon U_2 \to U_1$, такие что $(f \otimes g \otimes h)(\varphi_2) = \varphi_1$.

Например, тензор $\langle m \rangle$ является редукцией тензора $\langle n \rangle$, если $m \leqslant n$, а тензор $\langle k, n, m \rangle$ является редукцией тензора $\Psi(knm)$.

Утверждение 1.1. *Если тензор φ_2 является редукцией тензора φ_1, а тензор φ_3 является редукцией тензора φ_2, то тензор φ_3 является редукцией тензора φ_1.*

Определение 1.2. Два тензора φ_1 и φ_2 будем называть эквивалентными, если они являются редукциями друг друга.

Определение 1.3. Тензор $\psi \in V \otimes W \otimes U$ называется разложимым, если существуют такие векторы $v \in V$, $w \in W$, $u \in U$, что верно равенство $\psi = v \otimes w \otimes u$.

Например, тензор $\Psi(n)$ разложим при $n = 1$ и не является разложимым при $n \geqslant 2$.

1.2. Ранги тензоров

Определение 1.4. Рангом $\mathrm{rk}(\varphi)$ тензора $\varphi \in V \otimes W \otimes U$ называется минимальное число r, такое что существуют разложимые тензоры $\psi_1, \ldots, \psi_r$ и выполнено равенство $\varphi = \psi_1 + \ldots + \psi_r$.

Например, ранг тензора $\Psi(n)$ равен n, а ранг тензора

$$\sum_{i,j,k} v_i \otimes w_j \otimes u_k$$

равен единице.

Если необходимо подчеркнуть, над каким полем рассматривается тензор φ, будет использоваться обозначение $\mathrm{rk}(\varphi, F)$.

Утверждение 1.2. *Если тензор ϕ является редукцией тензора φ, то верно неравенство $\mathrm{rk}(\phi) \leqslant \mathrm{rk}(\varphi)$.*

Утверждение 1.3. *Тензор ϕ является редукцией тензора $\Psi(n)$ тогда и только тогда, когда верно неравенство $\mathrm{rk}(\phi) \leqslant n$.*

1.3. Матричная экспонента

Определение 1.5. Экспонентой сложности матричного умножения (матричной экспонентой) будем называть такое минимальное число ω_F, что для любого $\varepsilon > 0$ верна оценка $\mathrm{rk}(\langle n \rangle_F) = O(n^{\omega_F + \varepsilon})$.

Все имеющиеся оценки для числа ω_F не зависят от поля F, поэтому матричную экспоненту будем обозначать через ω.

1.4. Асимптотический ранг тензора

Если заданы два трилинейных тензора φ_1 и φ_2, принадлежащих пространствам $V_1 \otimes W_1 \otimes U_1$ и $V_2 \otimes W_2 \otimes U_2$ соответственно, то тензор $\varphi_1 \otimes \varphi_2$ будем рассматривать как трилинейный тензор в пространстве $(V_1 \otimes V_2) \otimes (W_1 \otimes W_2) \otimes (U_1 \otimes U_2)$, используя естественное отождествление этого пространства и пространства $(V_1 \otimes W_1 \otimes U_1) \otimes (V_2 \otimes W_2 \otimes U_2)$.

Например, для интересующих нас тензоров верны следующие утверждения.

Утверждение 1.4. *Тензоры $\Psi(n_1) \otimes \Psi(n_2)$ и $\Psi(n_1 n_2)$ эквивалентны.*

Утверждение 1.5. *Тензор $\langle n_1, m_1, k_1 \rangle \otimes \langle n_2, m_2, k_2 \rangle$ эквивалентен тензору $\langle n_1 n_2, m_1 m_2, k_1 k_2 \rangle$.*

Также верны следующие утверждения.

Утверждение 1.6. *Если тензор ϕ_1 является редукцией тензора φ_1, а тензор ϕ_2 является редукцией тензора φ_2, то тензор $\phi_1 \otimes \phi_2$ является редукцией тензора $\varphi_1 \otimes \varphi_2$.*

Утверждение 1.7. *Пусть заданы два разложимых трилинейных тензора ψ_1, ψ_2. Тогда тензор $\psi_1 \otimes \psi_2$ также разложим.*

Утверждение 1.8. *Для любых двух тензоров φ_1, φ_2 верно неравенство*

$$\mathrm{rk}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \leqslant \mathrm{rk}(\varphi_1)\,\mathrm{rk}(\varphi_2).$$

Тензор $\varphi^k = \varphi^{\otimes k}$ естественным образом представляется в виде трилинейного тензора пространства $V^{\otimes k} \otimes W^{\otimes k} \otimes U^{\otimes k}$. Следовательно, определена последовательность $c_k = \mathrm{rk}(\varphi^k)$. Отметим, что из утверждения 1.8 следует неравенство

$$\mathrm{rk}(\varphi^{a+b}) = \mathrm{rk}(\varphi^a \otimes \varphi^b) \leqslant \mathrm{rk}(\varphi^a)\,\mathrm{rk}(\varphi^b).$$

Из этого замечания и следствия 6.1 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.9. *Для любого тензора φ последовательность $r_k = \sqrt[k]{\mathrm{rk}(\varphi^k)}$ имеет предел r при k, стремящемся к бесконечности, причём верно неравенство $r \leqslant r_k$ при любом k.*

Определение 1.6. Асимптотическим рангом $\mathrm{r}(\varphi)$ тензора φ будем называть определённый в утверждении 1.9 предел.

Например, асимптотический ранг тензора $\Psi(n)$ равен n. Для матричных тензоров верно следующее утверждение, по сути доказанное в пионерской работе В. Штрассена [10].

Утверждение 1.10. *Для любого натурального числа n асимптотический ранг тензора $\langle n \rangle$ равен n^ω.*

Непосредственно из определения вытекает следующее равенство для асимптотических рангов.

Утверждение 1.11. *Для тензора φ и произвольного натурального числа l верно равенство*

$$\mathrm{r}(\varphi^l) = \mathrm{r}(\varphi)^l.$$

В то же время для асимптотического ранга произведения произвольных тензоров верна только оценка сверху, вытекающая из утверждения 1.8.

Утверждение 1.12. *Для любых двух тензоров φ_1, φ_2 верно неравенство*

$$\mathrm{r}(\varphi_1 \otimes \varphi_2) \leqslant \mathrm{r}(\varphi_1)\mathrm{r}(\varphi_2).$$

Также верно неравенство, которое следует из утверждения 1.2.

Утверждение 1.13. *Если тензор ϕ является редукцией тензора φ, то верно неравенство*

$$\mathrm{r}(\phi) \leqslant \mathrm{r}(\varphi).$$

1.5. Предельный ранг тензора

Основным инструментом для получения оценок сверху на асимптотический ранг является понятие предельного ранга тензора. Опишем это понятие более подробно.

Пусть задано поле F и символ λ обозначает некий формальный параметр. Тогда определено поле формальных рядов Лорана $F((\lambda))$ с соответствующим нормированием. Если задано линейное пространство S над полем F, то через $S((\lambda))$ будем обозначать топологическое тензорное произведение $S \mathbin{\widehat{\otimes}_F} F((\lambda))$. Любой элемент $s((\lambda)) \in S((\lambda))$ представляется в виде $s((\lambda)) = \sum\limits_{n=d}^{\infty} s_n \lambda^n$, где элемент s_n принадлежит пространству S, а d может быть любым целым числом. Степенью $\mathrm{d}(s((\lambda)))$ элемента $s((\lambda))$ назовём такое максимальное число d, что для всех $k < d$ имеем $s_k = 0$.

Определение 1.7. Пусть задан тензор $\varphi \in V \otimes W \otimes U$. Тогда λ-представлением тензора φ будем называть любой тензор

$$\psi(\lambda) \in V \otimes W \otimes U((\lambda)),$$

такой что выполнены следующие условия:

1) степень тензора $\psi(\lambda)$ неотрицательна;
2) $\psi_0 = \varphi$.

Другими словами, тензор $\psi(0)$ определён и равен φ.

Определение 1.8. Предельным рангом $\mathrm{r}_\lambda(\varphi)$ тензора $\varphi \in V \otimes W \otimes U$ называется такое минимальное число r, что существует λ-представление в виде тензора $\psi(\lambda) \in V \otimes W \otimes U((\lambda))$, для которого верно равенство $\mathrm{rk}\big(\psi(\lambda), F((\lambda))\big) = r$.

На языке билинейных алгоритмов в [3] была доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для любого тензора $\varphi \in V \otimes W \otimes U$ выполнено неравенство $\mathrm{r}(\varphi) \leqslant \mathrm{r}_\lambda(\varphi)$.*

1.6. Примеры λ-представлений

Приведём примеры оценок асимптотического ранга различных тензоров, которые использовались при улучшении оценок матричной экспоненты.

Тензор Шёнхаге определяется равенством

$$\Phi_{\mathrm{Sg}}(k,n) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_i y_j z_{i,j} + u_{i,j} v_{i,j} w),$$

причём должны быть выполнены следующие условия: $\sum\limits_{i=1}^{k} u_{i,j} = 0$ при любом j и $\sum\limits_{j=1}^{n} v_{i,j} = 0$ при любом i.

Так как в определении тензора Шёнхаге участвует сумма $2kn$ слагаемых, каждое из которых является разложимым тензором, то его ранг и, соответственно, асимптотический ранг оцениваются величиной, равной $2kn$.

В то же время для тензора Шёнхаге существует λ-представление

$$\Phi_{\mathrm{Sg}}(k,n)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n}(x_i+\lambda u_{i,j})(y_j+\lambda v_{i,j})(z_{i,j}+\lambda^{-2}w)-\\ -\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}y_j\right)(\lambda^{-2}w)+O(\lambda),$$

истинность которого проверяется непосредственными вычислениями. Из существования указанного λ-представления следует, что асимптотический ранг тензора Шёнхаге оценивается сверху величиной, равной $kn+1$.

Тензор Штрассена задаётся равенством

$$\Phi_{\mathrm{Sh}}(q)=\sum_{i=1}^{q}x_i^{[1]}y_0^{[0]}z_i^{[1]}+x_0^{[0]}y_i^{[1]}z_i^{[1]}.$$

Смысл верхних индексов в этой формуле будет пояснён ниже.

Для тензора Штрассена существует λ-представление

$$\Phi_{\mathrm{Sh}}(q)=\sum_{i=1}^{q}(x_0+\lambda x_i)(y_0+\lambda y_i)(\lambda^{-1}z_i)+x_0y_0\left(-\lambda^{-1}\sum_{i=1}^{q}z_i\right)+O(\lambda),$$

из которого следует оценка на предельный и асимптотический ранг тензора $\Phi_{\mathrm{Sh}}(q)$, равная $q+1$.

Простой тензор Копперсмита—Винограда задаётся равенством

$$\Phi_{\mathrm{cw}}(q)=\sum_{s=1}^{q}\bigl(x_0^{[0]}y_s^{[1]}z_s^{[1]}+x_s^{[1]}y_0^{[0]}z_s^{[1]}+x_s^{[1]}y_s^{[1]}z_0^{[0]}\bigr).$$

В то же время верно λ-представление

$$\Phi_{\mathrm{cw}}(q)=\lambda^{-2}\sum_{s=1}^{q}(x_0+\lambda x_s)(y_0+\lambda y_s)(z_0+\lambda z_s)-\\ -\lambda^{-3}\left(x_0+\lambda^2\sum_{s=1}^{q}x_s\right)\left(y_0+\lambda^2\sum_{s=1}^{q}y_s\right)\left(z_0+\lambda^2\sum_{s=1}^{q}z_s\right)+(\lambda^{-3}-q\lambda^{-2})x_0y_0z_0+O(\lambda),$$

из которого следует оценка на предельный и асимптотический ранг тензора $\Phi_{\mathrm{cw}}(q)$, равная $q+2$.

Тензор Копперсмита—Винограда задаётся равенством

$$\Phi_{\mathrm{CW}}(q)=\sum_{s=1}^{q}\bigl(x_0^{[0]}y_s^{[1]}z_s^{[1]}+x_s^{[1]}y_0^{[0]}z_s^{[1]}+x_s^{[1]}y_s^{[1]}z_0^{[0]}\bigr)+\\ +x_0^{[0]}y_0^{[0]}z_{q+1}^{[2]}+x_0^{[0]}y_{q+1}^{[2]}z_0^{[0]}+x_{q+1}^{[2]}y_0^{[0]}z_0^{[0]}.$$

Для тензора $\Phi_{\mathrm{CW}}(q)$ верно равенство

$$\Phi_{\mathrm{CW}}(q) = \lambda^{-2}\sum_{s=1}^{q}(x_0+\lambda x_s)(y_0+\lambda y_s)(z_0+\lambda z_s) - \\ -\lambda^{-3}\Big(x_0+\lambda^2\sum_{s=1}^{q}x_s\Big)\Big(y_0+\lambda^2\sum_{s=1}^{q}y_s\Big)\Big(z_0+\lambda^2\sum_{s=1}^{q}z_s\Big) + \\ +(\lambda^{-3}-q\lambda^{-2})(x_0+\lambda^3 x_{q+1})(y_0+\lambda^3 y_{q+1})(z_0+\lambda^3 z_{q+1}) + O(\lambda),$$

из которого следует оценка на предельный и асимптотический ранг тензора $\Phi_{\mathrm{CW}}(q)$, равная $q+2$.

1.7. Тензорный показатель

Пусть задан ненулевой тензор ϕ. Условимся считать, что тензор $\phi^{\otimes 0}$ эквивалентен ненулевому разложимому тензору. Тогда тензор $\phi^{\otimes 0}$ является редукцией любого ненулевого тензора φ.

Определение 1.9. Пусть тензор ϕ не является разложимым. Тогда тензорным показателем $\mathrm{ord}_\phi(\varphi)$ ненулевого тензора φ по основанию ϕ назовём максимальное целое число l, такое что тензор $\phi^{\otimes l}$ является редукцией тензора φ.

Например, рассмотрим матричные тензоры $\langle n\rangle$ и $\langle m\rangle$. Тогда из утверждения 1.5 следует, что $\mathrm{ord}_{\langle n\rangle}(\langle m\rangle) = [\log_n m]$, где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Непосредственно из определения вытекают следующие оценки.

Утверждение 1.14. *Пусть заданы ненулевые тензоры ϕ, φ, натуральное число t, и пусть тензор ϕ неразложим. Тогда верны неравенства*

$$\frac{1}{t}\,\mathrm{ord}_\phi(\varphi) - 1 < \mathrm{ord}_{\phi^{\otimes t}}(\varphi) \leqslant \frac{1}{t}\,\mathrm{ord}_\phi(\varphi).$$

Из утверждений 1.1 и 1.6 вытекают следующие оценки.

Утверждение 1.15. *Пусть задан неразложимый тензор ϕ и ненулевой тензор ψ, являющийся редукцией тензора φ. Тогда верно неравенство*

$$\mathrm{ord}_\phi(\psi) \leqslant \mathrm{ord}_\phi(\varphi).$$

Утверждение 1.16. *Пусть заданы ненулевой тензор φ и неразложимые тензоры ϕ, ψ. Тогда верно неравенство*

$$\mathrm{ord}_\phi(\varphi) \geqslant \mathrm{ord}_\phi(\psi)\,\mathrm{ord}_\psi(\varphi).$$

Утверждение 1.17. *Тензорный показатель удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{ord}_\phi(\varphi\otimes\psi) \geqslant \mathrm{ord}_\phi(\varphi) + \mathrm{ord}_\phi(\psi)$$

для любых ненулевых тензоров φ, ψ и неразложимого тензора ϕ.

Также верна следующая оценка сверху на тензорный показатель.

Утверждение 1.18. *Для любого ненулевого тензора φ и любого неразложимого тензора ϕ верно неравенство*

$$\operatorname{ord}_\phi(\varphi) \leqslant \log_{\mathrm{r}(\phi)} \mathrm{r}(\varphi).$$

Доказательство. В соответствии с определением тензорного показателя тензор $\phi^{\operatorname{ord}_\phi(\varphi)}$ является редукцией тензора φ. Из утверждений 1.11 и 1.13 следует цепочка неравенств

$$\mathrm{r}(\phi)^{\operatorname{ord}_\phi(\varphi)} = \mathrm{r}\big(\phi^{\operatorname{ord}_\phi(\varphi)}\big) \leqslant \mathrm{r}(\varphi),$$

которая доказывает утверждение. □

1.8. Тензорный логарифм

Для любого ненулевого тензора φ и любого неразложимого тензора ϕ определена последовательность $c_k = \operatorname{ord}_\phi(\varphi^k)$. Отметим, что из утверждения 1.17 вытекает неравенство

$$\operatorname{ord}_\phi(\varphi^{a+b}) = \operatorname{ord}_\phi(\varphi^a \otimes \varphi^b) \geqslant \operatorname{ord}_\phi(\varphi^a) + \operatorname{ord}_\phi(\varphi^b),$$

а из утверждений 1.18 и 1.11 вытекает неравенство

$$\operatorname{ord}_\phi(\varphi^k) \leqslant k \log_{\mathrm{r}(\phi)} \mathrm{r}(\varphi).$$

Из этих замечаний и следствия 6.2 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.19. *Для любого ненулевого тензора φ и любого неразложимого тензора ϕ последовательность*

$$l_k = \frac{\operatorname{ord}_\phi(\varphi^k)}{k}$$

имеет предел при k, стремящемся к бесконечности.

Определение 1.10. Тензорным логарифмом $\log_\phi \varphi$ будем называть предел, определённый в утверждении 1.19.

Из утверждения 1.18 и определения тензорного логарифма следует верхняя оценка на логарифм.

Утверждение 1.20. *Для любого ненулевого тензора φ и любого неразложимого тензора ϕ и верно неравенство*

$$\log_\phi \varphi \leqslant \log_{\mathrm{r}(\phi)} \mathrm{r}(\varphi).$$

Из этой оценки и из утверждения 1.10 следует, что для матричных тензоров верно следующее утверждение.

Утверждение 1.21. *Для любых натуральных n и m, не равных единице, верно равенство*

$$\log_{\langle n\rangle} \langle m\rangle = \log_n m.$$

Приведём необходимые свойства тензорного логарифма.

Утверждение 1.22. *Для любого ненулевого тензора φ, любого неразложимого тензора ϕ и любого натурального числа t верны равенства*

$$\log_\phi \varphi^{\otimes t} = t \log_\phi \varphi, \quad \log_{\phi^{\otimes t}} \varphi = \frac{1}{t} \log_\phi \varphi.$$

Доказательство. Первое равенство следует из определения тензорного логарифма. В самом деле,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{ord}_\phi((\varphi^{\otimes t})^{\otimes k})}{k} = t \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{ord}_\phi(\varphi^{\otimes kt})}{kt} = t \log_\phi \varphi.$$

Второе равенство непосредственно следует из утверждения 1.14. □

Утверждение 1.23. *Пусть заданы ненулевой тензор φ и неразложимые тензоры ϕ, ψ. Тогда верно неравенство*

$$\log_\phi \varphi \geqslant \log_\phi \psi \log_\psi \varphi.$$

Доказательство. В соответствии с утверждением 1.16 верно неравенство

$$\mathrm{ord}_\phi(\varphi^{\otimes k}) \geqslant \mathrm{ord}_\phi(\psi^{\otimes t}) \,\mathrm{ord}_{\psi^{\otimes t}}(\varphi^{\otimes k})$$

для любых натуральных k и t. Разделим обе части этого неравенства на k и устремим k к бесконечности. Тогда в соответствии с определением тензорного логарифма получаем неравенство

$$\log_\phi \varphi \geqslant \mathrm{ord}_\phi(\psi^{\otimes t}) \log_{\psi^{\otimes t}} \varphi.$$

Из утверждения 1.22 вытекает оценка

$$\log_\phi \varphi \geqslant \frac{\mathrm{ord}_\phi(\psi^{\otimes t})}{t} \log_\psi \varphi.$$

Устремляя t к бесконечности, получаем требуемое. □

Непосредственным следствием утверждений 1.15 и 1.17 являются следующие утверждения.

Утверждение 1.24. *Пусть задан неразложимый тензор ϕ и ненулевой тензор ψ, являющийся редукцией тензора φ. Тогда верно неравенство*

$$\log_\phi \psi \leqslant \log_\phi \varphi.$$

Утверждение 1.25. *Тензорный логарифм удовлетворяет неравенству*

$$\log_\phi(\varphi \otimes \psi) \geqslant \log_\phi \varphi + \log_\phi \psi$$

для любых ненулевых тензоров φ, ψ и неразложимого тензора ϕ.

1.9. Тензорный ранг

Определение 1.11. Пусть задан неразложимый тензор ϕ. Тогда тензорным (ϕ-)рангом ненулевого тензора φ будем называть величину, равную $\mathrm{r}(\phi)^{\log_\phi \varphi}$, и обозначать её через $\mathrm{r}_\phi(\varphi)$.

Непосредственными следствиями утверждений 1.20, 1.22, 1.24, 1.25 являются следующие утверждения.

Утверждение 1.26. *Для любого ненулевого тензора φ и любого неразложимого тензора ϕ верно неравенство*

$$\mathrm{r}_\phi(\varphi) \leqslant \mathrm{r}(\varphi).$$

Утверждение 1.27. *Для любого ненулевого тензора φ, любого неразложимого тензора ϕ и любого натурального числа t верны равенства*

$$\mathrm{r}_\phi(\varphi^{\otimes t}) = \mathrm{r}_\phi(\varphi)^t, \quad \mathrm{r}_{\phi^{\otimes t}}(\varphi) = \mathrm{r}_\phi(\varphi).$$

Утверждение 1.28. *Пусть задан неразложимый тензор ϕ и ненулевой тензор ψ, являющийся редукцией тензора φ. Тогда верно неравенство*

$$\mathrm{r}_\phi(\psi) \leqslant \mathrm{r}_\phi(\varphi).$$

Утверждение 1.29. *Тензорный ранг удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{r}_\phi(\varphi \otimes \psi) \geqslant \mathrm{r}_\phi(\varphi)\mathrm{r}_\phi(\psi)$$

для любых ненулевых тензоров φ, ψ и неразложимого тензора ϕ.

Отметим следующее свойство тензора $\Psi(n)$.

Утверждение 1.30. *Для любого неразложимого тензора ϕ и любого натурального $n \geqslant 2$ верно равенство*

$$\mathrm{r}_\phi\bigl(\Psi(n)\bigr) = n.$$

Доказательство. Из утверждения 1.3 вытекают следующие неравенства для последовательности $c_k = \mathrm{ord}_\phi(\Psi(n)^{\otimes k})$:

$$\mathrm{rk}(\phi^{\otimes c_k}) \leqslant n^k < \mathrm{rk}\bigl(\phi^{\otimes (c_k+1)}\bigr).$$

Извлечём корень c_k-й степени из всех частей этого неравенства,

$$\bigl(\mathrm{rk}(\phi^{\otimes c_k})\bigr)^{1/c_k} \leqslant n^{k/c_k} < \Bigl(\mathrm{rk}\bigl(\phi^{\otimes (c_k+1)}\bigr)\Bigr)^{(1/(c_k+1))\cdot((c_k+1)/c_k)},$$

и устремим k к бесконечности. В соответствии с определением асимптотического ранга и тензорного логарифма получаем равенство

$$\mathrm{r}(\phi) = n^{1/\log_\phi \Psi(n)},$$

которое доказывает требуемое. □

1.10. Матричный ранг тензоров

Утверждение 1.31. *Для любого ненулевого тензора φ и любых натуральных чисел $n, m \geqslant 2$ верно равенство*

$$\mathrm{r}_{\langle n\rangle}(\varphi) = \mathrm{r}_{\langle m\rangle}(\varphi).$$

Доказательство. В самом деле, из утверждений 1.10, 1.23, 1.21 следуют неравенства

$$\mathrm{r}_{\langle n\rangle}(\varphi) = n^{\omega \log_{\langle n\rangle} \varphi} \geqslant n^{\omega \log_{\langle n\rangle} \langle m\rangle \log_{\langle m\rangle} \varphi} = \\ = n^{\omega \log_n m \log_{\langle m\rangle} \varphi} = m^{\omega \log_{\langle m\rangle} \varphi} = \mathrm{r}_{\langle m\rangle}(\varphi).$$

Противоположное неравенство доказывается аналогично. □

Доказанное утверждение делает корректным следующее определение.

Определение 1.12. Матричным рангом $\mathrm{rm}(\varphi)$ тензора φ будем называть число, равное $\mathrm{r}_{\langle n\rangle}(\varphi)$, где n — любое натуральное число, большее либо равное двум.

Например, матричный ранг тензора $\langle n\rangle$ равен n^{ω}.

Непосредственными следствиями утверждений 1.26—1.30 являются следующие утверждения.

Утверждение 1.32. *Для любого ненулевого тензора φ верно неравенство*

$$\mathrm{rm}(\varphi) \leqslant \mathrm{r}(\varphi).$$

Утверждение 1.33. *Для любого ненулевого тензора φ и любого натурального числа t верны равенства*

$$\mathrm{rm}(\varphi^{\otimes t}) = \mathrm{rm}(\varphi)^t.$$

Утверждение 1.34. *Пусть тензор ψ является редукцией тензора φ. Тогда верно неравенство*

$$\mathrm{rm}(\psi) \leqslant \mathrm{rm}(\varphi).$$

Утверждение 1.35. *Матричный ранг удовлетворяет неравенству*

$$\mathrm{rm}(\varphi \otimes \psi) \geqslant \mathrm{rm}(\varphi)\,\mathrm{rm}(\psi)$$

для любых ненулевых тензоров φ, ψ.

Утверждение 1.36. *Для любого натурального $n \geqslant 2$ верно равенство*

$$\mathrm{rm}\big(\Psi(n)\big) = n.$$

1.11. Матричная ёмкость тензоров

Пусть задано пространство трилинейных тензоров $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$. Тогда каждый элемент σ группы подстановок S_3 определяет естественное отображение

$$\sigma\colon V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to V_{\sigma(1)} \otimes V_{\sigma(2)} \otimes V_{\sigma(3)}.$$

Пусть, например, элемент σ является транспозицией, которая переставляет числа 1 и 2. Тогда

$$\sigma(\langle n, m, k\rangle) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} x_{i,j} \otimes y_{j,l} \otimes z_{l,i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{l=1}^{k} y_{j,l} \otimes x_{i,j} \otimes z_{l,i}.$$

Последний тензор в этой цепочке эквивалентен тензору

$$\sum_{l=1}^{k} \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} y_{l,j} \otimes x_{j,i} \otimes z_{i,l} = \langle k, m, n \rangle.$$

Поставим в соответствие каждому тензору φ его мультипликативную симметризацию

$$S(\varphi) = \bigotimes_{\sigma \in S_3} \sigma(\varphi).$$

Например, симметризация тензора $\langle n, m, k \rangle$ эквивалентна тензору

$$\langle n^2m^2k^2, n^2m^2k^2, n^2m^2k^2 \rangle.$$

Определение 1.13. Матричной ёмкостью $\mathrm{c}(\varphi)$ тензора φ будем называть число, равное $\sqrt[6]{\mathrm{rm}\big(S(\varphi)\big)}$.

Например, матричный ранг тензора

$$\langle n^2m^2k^2, n^2m^2k^2, n^2m^2k^2 \rangle = \langle n^2m^2k^2 \rangle$$

равен $(nmk)^{2\omega}$. Следовательно, матричная ёмкость тензора $\langle n, m, k \rangle$ равна $(nmk)^{\omega/3}$.

Из того факта, что для любого натурального числа t и любого элемента $\sigma \in \mathrm{S}_3$ тензор $\sigma(\varphi^{\otimes t})$ эквивалентен тензору $\big(\sigma(\varphi)\big)^{\otimes t}$, и из утверждения 1.33 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.37. *Для тензора φ и произвольного натурального числа t верно следующее равенство*:

$$\mathrm{c}(\varphi^{\otimes t}) = \mathrm{c}(\varphi)^t.$$

Заметим, что если тензор ϕ является редукцией тензора φ, то для любого $\sigma \in \mathrm{S}_3$ тензор $\sigma(\phi)$ также является редукцией тензора $\sigma(\varphi)$. Из этого факта и из утверждения 1.34 следует следующее утверждение.

Утверждение 1.38. *Если тензор ϕ является редукцией тензора φ, то для матричных ёмкостей верно неравенство*

$$\mathrm{c}(\phi) \leqslant \mathrm{c}(\varphi).$$

Из утверждения 1.35 и из равенства $S(\varphi \otimes \psi) = S(\varphi) \otimes S(\psi)$ вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.39. *Для любых тензоров φ и ψ выполнено неравенство*

$$\mathrm{c}(\varphi \otimes \psi) \geqslant \mathrm{c}(\varphi)\mathrm{c}(\psi).$$

Заметим, что асимптотический ранг тензора является инвариантом относительно действия подстановок. Значит, верно равенство $\mathrm{r}\big(\sigma(\varphi)\big) = \mathrm{r}(\varphi)$ для любого $\sigma \in \mathrm{S}_3$. Следовательно, можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 1.40. *Для любого тензора φ выполнено неравенство*

$$\mathrm{c}(\varphi) \leqslant \mathrm{r}(\varphi).$$

Доказательство. Следующая цепочка неравенств доказывает утверждение:

$$\mathrm{c}(\varphi) = \sqrt[6]{\mathrm{rm}\big(S(\varphi)\big)} \leqslant \sqrt[6]{\mathrm{r}\big(S(\varphi)\big)} \leqslant \sqrt[6]{\prod_{\sigma \in \mathrm{S}_3} \mathrm{r}\big(\sigma(\varphi)\big)} = \mathrm{r}(\varphi). \qquad \square$$

Также из утверждения 1.36 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.41. *Для любого натурального $n \geqslant 2$ верно равенство*

$$\mathrm{c}\big(\Psi(n)\big) = n.$$

1.12. Прямая сумма тензоров

Пусть заданы различные линейные пространства V_1, V_2, W_1, W_2, U_1, U_2 и заданы два тензора $\varphi \in V_1 \otimes W_1 \otimes U_1$ и $\psi \in V_2 \otimes W_2 \otimes U_2$. Тогда определён тензор

$$\varphi \oplus \psi \in (V_1 \oplus V_2) \otimes (W_1 \oplus W_2) \otimes (U_1 \oplus U_2).$$

Тензор $\varphi \oplus \psi$ будем называть *прямой суммой тензоров* φ и ψ.

Например, тензор $\Psi(n)$ является прямой суммой разложимых тензоров.

Непосредственно из определений следует утверждение.

Утверждение 1.42. *Тензоры φ и ψ являются редукциями тензора $\varphi \oplus \psi$.*

Если задан тензор φ и неотрицательное целое число k, то запись $k \odot \varphi$ будет обозначать прямую сумму k штук тензоров, эквивалентных тензору φ. Так как тензор $k \odot \varphi$ эквивалентен тензору $\Psi(k) \otimes \varphi$, то из утверждений 1.39 и 1.41 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 1.43. *Для матричной ёмкости тензора $k \odot \varphi$ верна следующая оценка*:

$$\mathrm{c}(k \odot \varphi) \geqslant k \cdot \mathrm{c}(\varphi).$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1.2. *Пусть заданы тензоры φ_1 и φ_2. Тогда для матричной ёмкости тензора $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ верна следующая оценка*:

$$\mathrm{c}(\varphi_1 \oplus \varphi_2) \geqslant \mathrm{c}(\varphi_1) + \mathrm{c}(\varphi_2).$$

Доказательство. Тензорное произведение некоммутативно, но все мономы, составленные из тензоров φ_1, φ_2 и имеющие одинаковую степень по этим тензорам, являются эквивалентными тензорами.

Соответственно, можно воспользоваться биномом Ньютона для вычисления степени тензора $\varphi_1 \oplus \varphi_2$:

$$(\varphi_1 \oplus \varphi_2)^{\otimes k} = \bigoplus_{i=0}^{k} C_i^k \odot \big(\varphi_1^{\otimes i} \otimes \varphi_2^{\otimes (k-i)}\big).$$

Из утверждения 1.42 следует, что тензор $C_i^k \odot \left(\varphi_1^{\otimes i} \otimes \varphi_2^{\otimes(k-i)}\right)$ является редукцией тензора $(\varphi_1 \oplus \varphi_2)^{\otimes k}$ для любого i.

Обозначим через c_1 значение матричной ёмкости тензора φ_1, а через c_2 значение матричной ёмкости тензора φ_2. Из утверждений 1.37, 1.38, 1.43, 1.39 следует, что верна следующая цепочка неравенств:

$$\mathrm{c}(\varphi_1 \oplus \varphi_2)^k = \mathrm{c}\big((\varphi_1 \oplus \varphi_2)^{\otimes k}\big) \geqslant \mathrm{c}\Big(C_i^k \odot \left(\varphi_1^{\otimes i} \otimes \varphi_2^{\otimes(k-i)}\right)\Big) \geqslant$$
$$\geqslant C_i^k \cdot \mathrm{c}\big(\varphi_1^{\otimes i} \otimes \varphi_2^{\otimes(k-i)}\big) \geqslant C_i^k \cdot \mathrm{c}(\varphi_1^{\otimes i}) \cdot \mathrm{c}\big(\varphi_2^{\otimes(k-i)}\big) = C_i^k c_1^i c_2^{k-i}.$$

Зафиксируем неотрицательные вещественные числа α и β, такие что $\alpha + \beta = 1$. Тогда будем использовать последовательности индексов $i_k = \lfloor \alpha k \rfloor$ и $j_k = \lceil \beta k \rceil$. Заметим, что $i_k + j_k = k$ для любого натурального k.

В соответствии с формулой Стирлинга для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших k выполнено неравенство

$$C_{i_k}^k \geqslant (\alpha^{-\alpha}\beta^{-\beta} - \varepsilon)^k.$$

Тогда верна оценка

$$\mathrm{c}(\varphi_1 \oplus \varphi_2)^k \geqslant (\alpha^{-\alpha}\beta^{-\beta} - \varepsilon)^k c_1^{i_k} c_2^{j_k}.$$

Так как

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{(\alpha^{-\alpha}\beta^{-\beta} - \varepsilon)^k c_1^{i_k} c_2^{j_k}} = (\alpha^{-\alpha}\beta^{-\beta} - \varepsilon) c_1^{\alpha} c_2^{\beta},$$

то в силу произвольности ε верна оценка

$$\mathrm{c}(\varphi_1 \oplus \varphi_2) \geqslant \left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{c_2}{\beta}\right)^{\beta}.$$

Если выбрать $\alpha = c_1/(c_1 + c_2)$ и $\beta = c_2/(c_1 + c_2)$, то

$$\left(\frac{c_1}{\alpha}\right)^{\alpha} \left(\frac{c_2}{\beta}\right)^{\beta} = c_1 + c_2,$$

т. е. верна оценка

$$\mathrm{c}(\varphi_1 \oplus \varphi_2) \geqslant c_1 + c_2. \qquad \square$$

1.13. Тензор Шёнхаге

По сути, технология получения оценок матричной экспоненты выглядит следующим образом. Предположим, что для тензора φ известна оценка снизу матричной ёмкости в виде функционального выражения $f(\omega)$ от матричной экспоненты. Предположим также, что известно число r, являющееся оценкой сверху асимптотического ранга тензора φ. Тогда из утверждения 1.40 следует, что матричная экспонента оценивается сверху корнем уравнения $r = f(\rho)$.

Например, верно следующее утверждение, более известное как τ-теорема Шёнхаге [9], которое является прямым следствием теоремы 1.2.

Утверждение 1.44. *Пусть задан набор чисел* $\{(n_i, m_i, k_i) \mid i = 1, \ldots, s\}$ *и существует число* r*, являющееся оценкой сверху асимптотического ранга прямой суммой тензоров*

$$\bigoplus_{i=1}^{s} \langle n_i, m_i, k_i \rangle.$$

Тогда матричная экспонента ω *меньше либо равна* 3τ*, где число* τ *является корнем уравнения*

$$r = \sum_{i=1}^{s} (n_i m_i k_i)^\tau.$$

В качестве примера рассмотрим редукцию тензора Шёнхаге

$$\Phi_{\mathrm{Sg}}(k, n) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} (x_i y_j z_{i,j} + u_{i,j} v_{i,j} w),$$

которая получается добавлением условий $u_{i,n} = 0$ и $v_{k,j} = 0$ к условиям $\sum\limits_{i=1}^{k} u_{i,j} = 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} v_{i,j} = 0$. Соответствующая редукция будет эквивалентна тензору $\langle k, 1, n \rangle \oplus \langle 1, (k-1)(n-1), 1 \rangle$.

Так как предельный ранг тензора Шёнхаге оценивается сверху числом $kn+1$, то такая же оценка верна и для построенной редукции. Используя τ-теорему и то, что предельный ранг оценивает асимптотический ранг, получаем, что матричная экспонента ω оценивается утроенным корнем уравнения

$$kn + 1 = (kn)^\tau + \big((k-1)(n-1)\big)^\tau.$$

Выбрав числа k и n, равные 4, Шёнхаге получил оценку на матричную экспоненту, равную $2{,}5479\ldots$.

2. Ёмкости отношений

2.1. Тернарные отношения согласованные с тензором

Пусть заданы конечные множества X, Y, Z. Тогда определено их декартово произведение $X \times Y \times Z$. *Тернарным отношением* (или просто отношением) будем называть подмножество T в декартовом произведении $X \times Y \times Z$.

Взвешенным отношением назовём пару, состоящую из отношения T и числовой функции $v\colon T \to \mathbb{R}_{>0}$. Отношение T будем называть *подстилающим* отношением, а функцию v будем называть *весовой функцией*. Взвешенное отношение будем обозначать через T_v и называть просто отношением, если из контекста будет ясно, является отношение взвешенным или нет.

Пусть на линейных пространствах V, W, U задана градуировка элементами конечных множеств X, Y, Z соответственно, т. е.

$$V = \bigoplus_{x \in X} V^{[x]}, \quad W = \bigoplus_{y \in Y} W^{[y]}, \quad U = \bigoplus_{z \in Z} U^{[z]}.$$

Тогда на пространстве $V \otimes W \otimes U$ естественным образом возникает градуировка элементами множества $X \times Y \times Z$:

$$V \otimes W \otimes U = \bigoplus_{(x,y,z)} V^{[x]} \otimes W^{[y]} \otimes U^{[z]}.$$

С тензором $\varphi \in V \otimes W \otimes U$ и соответствующей градуировкой свяжем тернарное отношение $T(\varphi) \subset X \times Y \times Z$ следующим образом. Тройка (x, y, z) принадлежит отношению $T(\varphi)$ тогда и только тогда, когда проекция $\varphi^{[x][y][z]}$ тензора φ на подпространство $V^{[x]} \otimes W^{[y]} \otimes U^{[z]}$ не равна нулю.

Взвешенное отношение T_v будем называть *согласованным* с тензором φ, если существует соответствующая градуировка, такая что подстилающее отношение T совпадает с отношением $T(\varphi)$, а значение весовой функции $v(t)$ не превосходит значения матричной ёмкости тензора $\varphi^{[t]}$ для любого $t \in T$.

2.2. Примеры согласованных отношений

Рассмотрим, например, тензор Штрассена

$$\Phi_{\mathrm{Sh}}(q) = \sum_{i=1}^{q} x_i^{[1]} y_0^{[0]} z_i^{[1]} + x_0^{[0]} y_i^{[1]} z_i^{[1]}.$$

Верхние индексы задают градуировку в соответствующих линейных пространствах. Отношение $T_{\mathrm{Sh}} = T\big(\Phi_{\mathrm{Sh}}(q)\big)$ — это множество $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$.

Тензоры

$$\Phi_{\mathrm{Sh}}(q)^{[1,0,1]} = \sum_{i=1}^{q} x_i^{[1]} y_0^{[0]} z_i^{[1]}, \quad \Phi_{\mathrm{Sh}}(q)^{[0,1,1]} = \sum_{i=1}^{q} x_0^{[0]} y_i^{[1]} z_i^{[1]}$$

эквивалентны тензорам $\langle q,1,1\rangle$ и $\langle 1,1,q\rangle$ соответственно. Следовательно, их матричные ёмкости оцениваются снизу величиной, равной $q^{\omega/3}$. Соответственно, взвешенное отношение $T_{\mathrm{Sh}}(q)$ является согласованным с тензором Штрассена:

$$\begin{array}{rcll} t & = & (1,0,1), & (0,1,1), \\ v(t) & = & q^{\omega/3}, & q^{\omega/3}. \end{array}$$

Аналогичным образом отношение $T_{\mathrm{cw}}(q)$

$$\begin{array}{rclll} t & = & (0,1,1), & (1,0,1), & (1,1,0), \\ v(t) & = & q^{\omega/3}, & q^{\omega/3}, & q^{\omega/3} \end{array}$$

является согласованным с простым тензором Копперсмита—Винограда, а отношение $T_{\mathrm{CW}}(q)$

$$\begin{array}{rcllllll} t & = & (0,1,1), & (1,0,1), & (1,1,0), & (2,0,0), & (0,2,0), & (0,0,2), \\ v(t) & = & q^{\omega/3}, & q^{\omega/3}, & q^{\omega/3} & 1, & 1, & 1 \end{array}$$

является согласованным с тензором Копперсмита—Винограда.

Подход, применённый Д. Копперсмитом и С. Виноградом в [5], позволяет оценивать снизу матричную ёмкость тензора φ через матричные ёмкости проекций $\varphi^{[x][y][z]}$ при некоторых предположениях о множестве $T(\varphi)$. Для того чтобы проиллюстрировать этот подход, необходимо провести работу с абстрактными тернарными отношениями.

2.3. Морфизмы отношений

Пусть заданы конечные множества X_1, X_2, X_3 и их декартово произведение $X_1 \times X_2 \times X_3$. Тогда для любой перестановки σ индексов $\{1, 2, 3\}$ определено естественное отображение

$$\sigma\colon X_1 \times X_2 \times X_3 \to X_{\sigma(1)} \times X_{\sigma(2)} \times X_{\sigma(3)}.$$

Пусть заданы два тернарных отношения $T_1 \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ и $T_2 \subset Y_1 \times Y_2 \times Y_3$. Тогда отображение $f\colon T_1 \to T_2$ будем называть *морфизмом* отношений, если существуют перестановка σ и отображения множеств $f_i\colon X_i \to Y_{\sigma^{-1}(i)}$, такие что ограничение композиции отображений

$$X_1 \times X_2 \times X_3 \xrightarrow{f_1 \times f_2 \times f_3} Y_{\sigma^{(-1)}(1)} \times Y_{\sigma^{(-1)}(2)} \times Y_{\sigma^{(-1)}(3)} \xrightarrow{\sigma} Y_1 \times Y_2 \times Y_3$$

на отношение T_1 совпадает с отображением f.

Морфизм f будем называть *внутренним*, если перестановку σ можно выбрать тождественной.

Отношения T_1 и T_2 будем называть *эквивалентными*, если существует биекция $f\colon T_1 \to T_2$, являющаяся внутренним морфизмом. Например, тернарные отношения $\{(0,0,0),(0,1,1)\}$ и $\{(0,0,0),(1,1,0)\}$ не эквивалентны, но в то же время любое биективное отображение из одного отношения в другое является морфизмом.

Биективные (внутренние) морфизмы из отношения T в себя будем называть (внутренними) *автоморфизмами*. Например, любая биекция отношения $\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ в себя является автоморфизмом, причём внутренним автоморфизмом является только тождественное отображение. Любая биекция отношения $\{(0,0,0),(0,1,1),\ldots,(0,k,k)\}$ в себя является внутренним автоморфизмом.

Пусть заданы два взвешенных отношения. Тогда морфизм их подстилающих отношений будем называть *морфизмом взвешенных отношений*, если он сохраняет вес элементов. Аналогичным образом определяются автоморфизмы и эквивалентность взвешенных отношений.

2.4. Редукция отношений

Любое подмножество $T' \subset T$ подстилающего отношения взвешенного отношения T_v можно превратить во взвешенное отношение, если функцию v ограничить на подмножество T'. В этом случае соответствующее взвешенное отношение будем обозначать через T'_v.

Определение 2.1. Отношение $T'_{v'}$ будем называть редукцией отношения T_v, если подстилающее отношение T является подмножеством множества $X_1 \times X_2 \times X_3$ и существуют подмножества $X_{R,i} \subset X_i$, такие что отношение

$$R_v = (T \cap X_{R,1} \times X_{R,2} \times X_{R,3})_v$$

эквивалентно отношению $T'_{v'}$.

Если $X_i = X_{R,i} \cup \{a\}$ и $X_j = X_{R,j}$ при $j \neq i$, то будем говорить, что редукция получена исключением значения a i-й координаты.

Например, исключение значения 0 первой координаты редуцирует отношение $T = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ к отношению $\{(1,0,0)\}$. Исключение значения 1 первой координаты редуцирует то же отношение T к отношению $\{(0,1,0),(0,0,1)\}$.

Понятие редукции отношений тесно связано с понятием редукцией тензоров. А именно, пусть задана редукция R_v отношения T_v, согласованного с тензором φ. Тогда путём отображения в нуль подпространства $V_i^{[x_i]}$, где $x_i \notin X_{R,i}$, строится тензор ψ, который является редукцией тензора φ и для которого отношение R_v является согласованным. Таким образом, верно следующее утверждение.

Утверждение 2.1. *Пусть задан тензор φ и согласованное с ним отношение T_v. Тогда любая редукция отношения T_v является согласованным отношением для некоторого тензора, который является редукцией тензора φ.*

Отметим простейшие свойства редукций отношений.

Утверждение 2.2. *Пусть отношение $T_{1,v}$ является редукцией отношения $T_{2,v}$, а отношение $T_{2,v}$ является редукцией отношения $T_{3,v}$. Тогда отношение $T_{1,v}$ является редукцией отношения $T_{3,v}$.*

Утверждение 2.3. *Пусть задана редукция R_v отношения T_v. Тогда для любого отношения T', являющегося подмножеством отношения T, отношение $(T' \cap R)_v$ является редукцией отношения T'_v.*

2.5. Ёмкость отношений

Определение 2.2. Весом $\mathrm{v}(T_v)$ взвешенного отношения T_v будем называть сумму $\sum\limits_{t \in T} v(t)$.

В дальнейшем не будут делаться различия между подстилающим отношением T и взвешенным отношением T_v, если весовая функция v тождественно равна единице. Например, запись $\mathrm{v}(T)$ означает мощность отношения T.

Определение 2.3. Отношение $T \subset X \times Y \times Z$ будем называть несвязанным, если для любых неравных элементов $t_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $t_2 = (x_2, y_2, z_2) \in T$ их координаты также неравны: $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$.

Например, отношение $\{(0,0,0),(1,2,1),(2,1,2)\}$ является несвязанным, а отношение $\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ не является несвязанным.

Взвешенное отношение T_v будем называть несвязанным, если его подстилающее отношение является несвязанным отношением.

Отметим, что теорема 1.2 позволяет оценивать матричную ёмкость тензора φ, если множество $T(\varphi)$ является несвязанным отношением.

Определение 2.4. Ёмкостью $\mathrm{C}(T_v)$ взвешенного отношения T_v будем называть максимальное число C, для которого существует несвязанное отношение R_v веса C, являющееся редукцией отношения T_v.

Например, ёмкость любого несвязанного отношения равна его весу.

Из утверждения 2.1 и теоремы 1.2 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.4. *Для матричной ёмкости тензора φ и согласованного с ним взвешенного отношения T_v верна оценка $\mathrm{c}(\varphi) \geqslant \mathrm{C}(T_v)$.*

Непосредственно из определений вытекают следующие утверждения.

Утверждение 2.5. *Для взвешенного отношения T_v справедливо неравенство $\mathrm{C}(T_v) \leqslant \mathrm{v}(T_v)$.*

Утверждение 2.6. *Если отношение R_v является редукцией отношения T_v, то верно неравенство $\mathrm{C}(T_v) \geqslant \mathrm{C}(R_v)$.*

2.6. Декартово произведение отношений

Пусть заданы два тернарных отношения T и S, являющиеся подмножествами множеств $X_1 \times X_2 \times X_3$ и $Y_1 \times Y_2 \times Y_3$ соответственно. Тогда декартово произведение $T \times S$ будем рассматривать как тернарное отношение в множестве

$$(X_1 \times Y_1) \times (X_2 \times Y_2) \times (X_3 \times Y_3),$$

используя естественное отождествление этого множества и множества

$$(X_1 \times X_2 \times X_3) \times (Y_1 \times Y_2 \times Y_3).$$

Если заданы взвешенные отношения T_v и S_u, то определим весовую функцию на отношении $T \times S$ как произведение весовых функций v и u, т. е. $(vu)(t,s) = v(t)u(s)$ для любых элементов $t \in T$ и $s \in S$. Тем самым определено взвешенное отношение

$$T_v \times S_u = (T \times S)_{vu}.$$

Декартово произведение отношений имеет прямую связь с тензорным произведением трилинейных тензоров, лежащих в пространствах с соответствующей градуировкой. Например, из определения декартова произведения и утверждения 1.39 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.7. *Пусть заданы взвешенные отношения T_{1,v_1}, T_{2,v_2}, согласованные с тензорами φ_1 и φ_2 соответственно. Тогда отношение $T_{1,v_1} \times T_{2,v_2}$ является согласованным с тензором $\varphi_1 \otimes \varphi_2$.*

Непосредственно из определений вытекают следующие утверждения.

Утверждение 2.8. *Для любых взвешенных отношений* T_v *и* S_u *верно равенство* $\mathrm{v}(T_v \times S_u) = \mathrm{v}(T_v)\mathrm{v}(S_u)$.

Утверждение 2.9. *Для любых взвешенных отношений* T_v *и* S_u *отношения* $T_v \times S_u$ *и* $S_u \times T_v$ *эквивалентны.*

Утверждение 2.10. *Декартово произведение несвязанных отношений является несвязанным отношением.*

Утверждение 2.11. *Пусть отношения* R_{1,v_1} *и* R_{2,v_2} — *редукции отношений* T_{1,v_1} *и* T_{2,v_2} *соответственно. Тогда отношение* $R_{1,v_1} \times R_{2,v_2}$ — *редукция отношения* $T_{1,v_1} \times T_{2,v_2}$.

Отметим, что не каждая редукция отношения $T_{1,v_1} \times T_{2,v_2}$ является декартовым произведением редукций отношений T_{1,v_1} и T_{2,v_2}.

Утверждение 2.12. *Для ёмкостей взвешенных отношений* T_{1,v_1} *и* T_{2,v_2} *верно неравенство* $\mathrm{C}(T_{1,v_1} \times T_{2,v_2}) \geqslant \mathrm{C}(T_{1,v_1})\mathrm{C}(T_{2,v_2})$.

2.7. Асимптотическая ёмкость отношений

Отношение $T^k = T^{\times k}$ естественным образом представляется в виде тернарного отношения в множестве $(X^{\times k}) \times (Y^{\times k}) \times (Z^{\times k})$. Из утверждения 2.12 следует неравенство

$$\mathrm{C}(T_v^{a+b}) = \mathrm{C}(T_v^a \times T_v^b) \geqslant \mathrm{C}(T_v^a)\mathrm{C}(T_v^b)$$

для любых натуральных a и b. Также из утверждений 2.5 и 2.8 вытекает, что справедливо неравенство $\mathrm{C}(T_v^k) \leqslant (\mathrm{v}(T_v))^k$. Из этих замечаний вытекает, что последовательность $c_k = \mathrm{C}(T_v^k)$ удовлетворяет условиям следствия 6.3. Следовательно, верно следующее утверждение.

Утверждение 2.13. *Для любого взвешенного отношения* T_v *последовательность* $c_k = \sqrt[k]{\mathrm{C}(T_v^k)}$ *имеет предел при* k*, стремящемся к бесконечности.*

Определение 2.5. Асимптотической ёмкостью $\mathrm{c_{as}}(T_v)$ отношения T_v будем называть предел, определённый в утверждении 2.13.

Из утверждений 2.4 и 2.7 вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.14. *Для матричной ёмкости тензора* φ *и согласованного с ним отношения* T_v *верна оценка* $\mathrm{c}(\varphi) \geqslant \mathrm{c_{as}}(T_v)$.

Сформулируем простейшие свойства асимптотической ёмкости в виде следующих утверждений.

Утверждение 2.15. *Для любого отношения* T_v *верно неравенство* $\mathrm{c_{as}}(T_v) \geqslant \mathrm{C}(T_v)$.

Утверждение 2.16. *Для любого отношения* T_v *и любого натурального числа* n *верна формула* $\mathrm{c_{as}}(T_v^n) = \mathrm{c_{as}}(T_v)^n$.

Утверждение 2.17. *Если отношение* R_v *является редукцией отношения* T_v*, то верно неравенство* $\mathrm{c_{as}}(T_v) \geqslant \mathrm{c_{as}}(R_v)$.

Утверждение 2.18. *Для любых двух отношений T_{1,v_1}, T_{2,v_2} верно неравенство $\mathrm{c_{as}}(T_{1,v_1} \times T_{2,v_2}) \geqslant \mathrm{c_{as}}(T_{1,v_1}) \cdot \mathrm{c_{as}}(T_{2,v_2})$.*

2.8. Симметрическая ёмкость отношений

Пусть задано множество $X_1 \times X_2 \times X_3$. Как было указано выше, каждый элемент σ группы подстановок S_3 определяет естественное отображение

$$\sigma\colon X_1 \times X_2 \times X_3 \to X_{\sigma(1)} \times X_{\sigma(2)} \times X_{\sigma(3)}.$$

Если отношение T взвешенное с функцией v, то отношение $\sigma(T)$ также естественным образом является взвешенным с функцией, определяемой равенством $v_\sigma\big(\sigma(t)\big) = v(t)$. Обозначим соответствующее взвешенное отношение через $\sigma(T_v)$.

Утверждение 2.19. *Пусть отношение R_v является редукцией отношения T_v. Тогда отношение $\sigma(R_v)$ является редукцией отношения $\sigma(T_v)$ для любого $\sigma \in \mathrm{S}_3$.*

Утверждение 2.20. *Для любого $\sigma \in \mathrm{S}_3$ отношения T_v и $\sigma(T_v)$ имеют одинаковые ёмкости.*

Утверждение 2.21. *Пусть заданы два отношения T_{1,v_1} и T_{2,v_2}. Тогда отношения $\sigma(T_{1,v_1} \times T_{2,v_2})$ и $\sigma(T_{1,v_1}) \times \sigma(T_{2,v_2})$ являются эквивалентными для любого $\sigma \in \mathrm{S}_3$.*

Утверждение 2.22. *Для любого $\sigma \in \mathrm{S}_3$ отношения T_v и $\sigma(T_v)$ имеют одинаковые асимптотические ёмкости.*

Определение 2.6. Отношение T_v будем называть симметричным, если для любого $\sigma \in \mathrm{S}_3$ отношение $\sigma(T_v)$ эквивалентно отношению T_v.

Поставим в соответствие взвешенному отношению T_v его симметризацию

$$\mathrm{S}(T_v) = \bigtimes_{\sigma \in \mathrm{S}_3} \sigma(T_v).$$

Утверждение 2.23. *Для любого взвешенного отношения T_v его симметризация $\mathrm{S}(T_v)$ является симметричным отношением.*

Утверждение 2.24. *Отношения $\mathrm{S}(T_{1,v_1} \times T_{2,v_2})$ и $\mathrm{S}(T_{1,v_1}) \times \mathrm{S}(T_{2,v_2})$ эквивалентны для любых отношений T_{1,v_1} и T_{2,v_2}.*

Определение 2.7. Симметрической ёмкостью $\mathrm{c}(T_v)$ взвешенного отношения T_v будем называть число, равное $\sqrt[6]{\mathrm{C}\big(\mathrm{S}(T_v)\big)}$.

Теорема 2.1. *Пусть задано взвешенное отношение T_v, согласованное с тензором φ. Тогда для матричной ёмкости тензора φ верна оценка $\mathrm{c}(\varphi) \geqslant \mathrm{c}(T_v)$.*

Доказательство. Пусть задана такая градуировка, что подстилающее отношение T совпадает с отношением $T(\varphi)$.

Для любого $\sigma \in \mathrm{S}_3$ верно равенство $T\big(\sigma(\varphi)\big) = \sigma\big(T(\varphi)\big)$. Следовательно, из утверждения 2.7 вытекает равенство $T\big(\mathrm{S}(\varphi)\big) = \mathrm{S}\big(T(\varphi)\big)$. Из утверждения 2.14 следует неравенство $\mathrm{c}\big(\mathrm{S}(\varphi)\big) \geqslant \mathrm{C}\big(\mathrm{S}(T_v)\big)$. Понятно, что верно равенство

$\mathrm{c}\big(\mathrm{S}(\varphi)\big) = \mathrm{c}(\varphi)^6$. Следовательно, верно неравенство $\mathrm{c}(\varphi)^6 \geqslant \mathrm{C}\big(\mathrm{S}(T_v)\big)$, которое доказывает теорему. □

Сформулируем полезные свойства симметрической ёмкости отношений.

Утверждение 2.25. *Если отношение T_v является симметричным, то его симметрическая ёмкость равна асимптотической ёмкости*: $\mathrm{c}(T_v) = \mathrm{c}_{\mathrm{as}}(T_v)$.

Утверждение 2.26. *Для отношения T_v и произвольного натурального числа k верно равенство* $\mathrm{c}(T_v^k) = \mathrm{c}(T_v)^k$.

Утверждение 2.27. *Если отношение R_v является редукцией отношения T_v, то для симметрических ёмкостей верно неравенство* $\mathrm{c}(R_v) \leqslant \mathrm{c}(T_v)$.

Утверждение 2.28. *Для любого отношения T_v выполнено неравенство* $\mathrm{c}(T_v) \geqslant \mathrm{c}_{\mathrm{as}}(()T_v)$.

2.9. Степень элемента

Определение 2.8. Пусть задано взвешенное отношение T_v с подстилающим отношением $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$. Тогда взвешенной степенью $\mathrm{v}_{T_v}(x)$ элемента $x \in X_i$ назовём число, равное весу отношения $T_{x,v}$, где подстилающее отношение T_x определяется следующим образом:

$$T_x = \{t = (x_1, x_2, x_3) \in T \mid x_i = x\}.$$

Если отношение T является взвешенным с единичной функцией, то взвешенную степень элемента $x \in X_i$ будем называть *степенью элемента* и использовать обозначение $\mathrm{d}_T(x)$. Заметим, что в этом случае величина $\mathrm{d}_T(x)$ равна мощности множества T_x.

Если из контекста понятно, какое отношение имеется в виду, то будут использоваться записи $\mathrm{v}(x)$ и $\mathrm{d}(x)$.

Отметим следующее свойство введённого понятия.

Утверждение 2.29. *Для любого взвешенного отношения T_v и фиксированного индекса i верно равенство*

$$\sum_{x \in X_i} \mathrm{v}(x) = \mathrm{v}(T_v).$$

2.10. Степенной вес отношения

С отношением $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ естественным образом связан ориентированный граф $G(T)$ с трёхцветной раскраской рёбер.

Множество вершин графа $\mathrm{V}\big(G(T)\big)$ совпадает с множеством T. Множество дуг $\mathrm{L}_{X_i}(T) = \mathrm{L}\big(G_{X_i}(T)\big)$, имеющих цвет X_i, определяется следующим образом. Две различные вершины $t = (x_1, x_2, x_3)$, $r = (y_1, y_2, y_3)$ соединены дугой (t, r), если выполнено равенство $x_i = y_i$. Объединение множеств дуг различных цветов $\bigcup\limits_{i=1}^{3} \mathrm{L}_{X_i}(T)$ будем обозначать через $\mathrm{L}(T)$.

Определение 2.9. Пусть задано взвешенное отношение T_v с подстилающим отношением $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$, и пусть задано ребро $l = (t, r) \in \mathrm{L}(T)$. Тогда вес конечного элемента r будем называть весом ребра l и обозначать его через $\mathrm{v}(l)$.

Определение 2.10. Пусть задано взвешенное отношение T_v с подстилающим отношением $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ и зафиксирован индекс i. Взвешенной степенью цвета X_i элемента $t \in T$ назовём число, равное

$$\mathrm{v}_{X_i}(t) = \sum_{l=(t,r)\in \mathrm{L}_{X_i}(T)} \mathrm{v}(l).$$

Если отношение T взвешенное с единичной функцией, то для взвешенной степени цвета X_i будем использовать обозначение $\mathrm{d}_{X_i}(t)$ и называть её степенью цвета X_i.

Определение 2.11. Степенным весом $\mathrm{V}_{X_i}(T_v)$ цвета X_i отношения T_v назовём число, равное

$$\sum_{t\in T} \mathrm{v}_{X_i}(t).$$

Степенным весом $\mathrm{V}(T_v)$ отношения T_v назовём число, равное

$$\mathrm{v}_{X_1}(T_v) + \mathrm{v}_{X_2}(T_v) + \mathrm{v}_{X_3}(T_v).$$

Отметим, что отношение T является несвязанным тогда и только тогда, когда граф $G(T)$ является несвязанным множеством, т. е. множество его рёбер является пустым. Из этого замечания вытекает следующее утверждение.

Утверждение 2.30. *Отношение T_v является несвязанным тогда и только тогда, когда его степенной вес равен нулю*: $\mathrm{V}(T_v) = 0$.

2.11. Грубая оценка ёмкости отношения

Используем утверждение 2.30 для доказательства следующей оценки.

Утверждение 2.31. *Для ёмкости отношения T_v справедлива следующая оценка*:

$$\mathrm{C}(T_v) \geqslant \mathrm{v}(T_v) - \mathrm{V}(T_v).$$

Доказательство. Будем последовательно строить редукции $T_v^{(j)}$, исключая значения координат по следующему алгоритму.

Положим $T_v^{(0)} = T_v$. Если отношение $T_v^{(j)}$ не является несвязанным, то найдём такие индекс i и элемент $x \in X_i$, что мощность подстилающего отношения T_x больше единицы. Тогда построим редукцию $T_v^{(j+1)}$ путём исключения значения x координаты X_i (см. раздел 2.4).

Понятно, что для некоторого n отношение $T_v^{(n)}$ окажется несвязанным и алгоритм остановит работу.

Проследим за изменением веса и степенного веса отношения $T_v^{(j)}$ на каждом шаге алгоритма.

Вес редукции уменьшается на величину c_j, равную весу отношения $T_{x,v}^{(j)}$, т. е. верно равенство

$$\mathrm{v}\big(T_v^{(j+1)}\big) = \mathrm{v}\big(T_v^{(j)}\big) - \mathrm{v}\big(T_{x,v}^{(j)}\big).$$

Степенной вес отношения также уменьшается на некоторую величину d_j, т. е.

$$\mathrm{V}\big(T_v^{(j+1)}\big) = \mathrm{V}\big(T_v^{(j)}\big) - d_j,$$

причём для величины d_j верна оценка $d_j \geqslant c_j$. Действительно, так как мощность множества $T_x^{(j)}$ больше либо равна двум, то для каждого элемента $t \in T_x^{(j)}$ существует дуга в графе $G\big(T_x^{(j)}\big)$, заканчивающаяся в элементе t и, соответственно, имеющая вес, равный $\mathrm{v}(t)$. Так как в ходе редукции эти дуги заведомо пропадают, то степенной вес уменьшается на величину, не меньшую чем $\mathrm{v}\big(T_{x,v}^{(j)}\big)$.

Для несвязанного отношения $T^{(n)}$ имеем

$$0 = \mathrm{V}\big(T_v^{(n)}\big) = \mathrm{V}(T_v) - (d_0 + \ldots + d_{n-1}),$$

т. е.

$$d_0 + \ldots + d_{n-1} = \mathrm{V}(T_v).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\mathrm{C}(T_v) \geqslant \mathrm{v}\big(T_v^{(n)}\big) = \\ &\quad = \mathrm{v}(T_v) - (c_0 + \ldots + c_{n-1}) \geqslant \mathrm{v}(T_v) - (d_0 + \ldots + d_{n-1}) = \mathrm{v}(T_v) - \mathrm{V}(T_v). \quad \square \end{aligned}$$

3. Константные отношения

3.1. Константные отношения

Определим отношения, для которых ниже будет показано, как можно эффективно оценивать их симметрические ёмкости.

Определение 3.1. Отношение $T \subset X \times Y \times Z$ будем называть константным, если существуют вложения

$$\rho_X \colon X \hookrightarrow \mathbb{Z}, \quad \rho_Y \colon Y \hookrightarrow \mathbb{Z}, \quad \rho_Z \colon Z \hookrightarrow \mathbb{Z},$$

где $\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел и константа $s \in \mathbb{Z}$ такая, что

$$\rho_X(x) + \rho_Y(y) + \rho_Z(z) = s$$

для любого элемента $t = (x, y, z) \in T$.

Взвешенное отношение T_v будем называть *константным*, если его подстилающее отношение является константным.

Примером неконстантного отношения может служить множество $\{(x, y, z_1), (x, y, z_2)\}$. Также неконстантным отношением является множество таких троек (a, b, c) элементов поля из двух элементов, что $a + b + c = 0$.

Примеры константных отношений возникают достаточно естественным образом в множестве троек целых чисел, причём без ограничения общности можно считать, что константное отношение является конечным подмножеством в множестве троек неотрицательных целых чисел. При такой реализации для константного отношения

$$T \subset \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$$

определена верхняя граница

$$R(T) = \max_{(x,y,z) \in T} \bigl\{ \max\{x, y, z\} \bigr\}.$$

Соответствующую константу s будем обозначать через $S(T)$.

Например, отношение $T = \{(5,0,1),(3,2,1),(0,2,4)\}$ является константным, причём $S(T) = 6$ и $R(T) = 5$.

Приведём полезные свойства константных отношений.

Утверждение 3.1. *Подмножество константного отношения является константным отношением.*

Утверждение 3.2. *Декартово произведение константных отношений является константным отношением.*

Отметим ещё одно свойство константных отношений, вытекающее из того, что две известные координаты элемента константного отношения однозначно определяют третью координату.

Утверждение 3.3. *Пусть отношение T константно. Тогда множества рёбер различных цветов графа $G(T)$ попарно не пересекаются.*

3.2. Оценка ёмкости декартовых произведений константных отношений

Утверждение 3.4. *Пусть задано константное взвешенное отношение T_v, для которого подстилающее отношение реализовано в виде подмножества множества $\mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0} \times \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, и пусть для нечётного простого числа $M > R(T)$ задано множество Эрдёша—Турана* (см. *определение* 6.1)

$$B = \left\{ b_1, b_2, \ldots, b_{M'} \;\middle|\; 0 \leqslant b_i < \frac{M}{2} \right\}$$

мощности M'. Тогда для любого натурального числа N ёмкость константного отношения T_v^N оценивается следующим образом:

$$\mathrm{C}(T_v^N) \geqslant M' \left(\frac{\mathrm{v}(T_v^N)}{M^2} - \frac{\mathrm{V}(T_v^N)}{M^3} \right).$$

Доказательство. Схема доказательства выглядит следующим образом. Зафиксируем число N и определим некоторым образом параметрическое множество редукций отношения T_v^N $\{T(w)_v \mid w \in W\}$, а на множестве параметров W зададим некоторое распределение вероятностей. Тогда ёмкость отношений $\mathrm{C}(T(w)_v)$ является случайной величиной. Обозначим эту величину через C.

Для любой случайной величины верен следующий факт: вероятность того, что её значение больше либо равно среднему, не равна нулю. В нашем случае это означает, что существует $\bar{w} \in W$, при котором верно неравенство $\mathrm{C}(T(\bar{w})_v) \geqslant \mathrm{E}(C)$, где $\mathrm{E}(C)$ обозначает среднее значение.

Так как отношения $T(w)_v$ являются редукциями отношения T_v, то верно неравенство $\mathrm{C}(T_v^N) \geqslant \mathrm{E}(C)$.

Для оценки ёмкости отношений $T(w)_v$ можно воспользоваться утверждением 2.31:

$$\mathrm{C}(T(w)_v) \geqslant \mathrm{v}(T(w)_v) - \mathrm{V}(T(w)_v).$$

Вес и цветной вес также являются случайными величинами v и V. Так как среднее суммы случайных величин всегда равно сумме средних, то верно неравенство

$$\mathrm{E}(C) \geqslant \mathrm{E}(v) - \mathrm{E}(V).$$

Следовательно, верна оценка

$$\mathrm{C}(T_v^N) \geqslant \mathrm{E}(v) - \mathrm{E}(V).$$

Ниже будет построено множество редукций $\{T(w)_v \mid w \in W\}$ со следующим свойством. Если задать равномерное распределение вероятностей на множестве параметров W, то будут верны следующие равенства для средних:

$$\mathrm{E}(v) = M' \left(\frac{\mathrm{v}(T_v^N)}{M^2} \right), \quad \mathrm{E}(V) = M' \left(\frac{\mathrm{v}(T_v^N)}{M^3} \right),$$

из которых будет следовать утверждение.

Перейдём к доказательству утверждения. Обозначим через $\mathbb{Z}_M$ множество неотрицательных целых чисел, меньших M. Так как число M больше, чем граница $R(T)$, то отношение T является подмножеством множества $\mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_M \times \mathbb{Z}_M$.

Зафиксируем натуральное число N. В качестве множества параметров W будем рассматривать множество упорядоченных наборов целых чисел $(u_x, u_y, w_1, \ldots, w_N)$, таких что каждое число принадлежит множеству $\mathbb{Z}_M$.

Для элемента $w \in W$ определим тройку $F = \big(F_X(w), F_Y(w), F_Z(w)\big)$ отображений

$$F_X(w)\colon \mathbb{Z}_M^{\times N} \to \mathbb{Z}_M, \quad F_Y(w)\colon \mathbb{Z}_M^{\times N} \to \mathbb{Z}_M, \quad F_Z(w)\colon \mathbb{Z}_M^{\times N} \to \mathbb{Z}_M$$

следующим образом:

$$F_X(w)(x_1, \ldots, x_N) = u_x + w_1 x_1 + \ldots + w_N x_N \pmod M,$$
$$F_Y(w)(y_1, \ldots, y_N) = u_y + w_1 y_1 + \ldots + w_N y_N \pmod M,$$
$$F_Z(w)(z_1, \ldots, z_N) = \frac{u_x + u_y + w_1(S(T) - z_1) + \ldots + w_N(S(T) - z_N)}{2} \pmod M.$$

Отметим, что операция деления на 2 является корректно определённой, так как число M нечётно.

В связи с тем, что множество $T \subset \mathbb{Z}_M^{\times 3}$ является константным с константой $S(T)$, для любого элемента

$$t = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \big((x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N), (z_1, \ldots, z_N)\big) \in T^{\times N}$$

выполнено равенство

$$F_X(w)(\bar{x}) + F_Y(w)(\bar{y}) = 2F_Z(w)(\bar{z}) \pmod M.$$

Построим отношение $T(w)_v$, исключая значения координат, образы которых под действием отображений $F_X(w)$, $F_Y(w)$, $F_Z(w)$ не принадлежат множеству Эрдёша—Турана B. Из того, что все числа из множества B меньше, чем $M/2$, следует, что для любого элемента $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ из подстилающего отношения $T(w)$ верно числовое равенство

$$F_X(w)(\bar{x}) + F_Y(w)(\bar{y}) = 2F_Z(w)(\bar{z}).$$

Из определения множества Эрдёша—Турана следует, что элемент $t = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in T^{\times N}$ принадлежит отношению $T(w)$ тогда и только тогда, когда верны равенства

$$F_X(w)(\bar{x}) = F_Y(w)(\bar{y}) = F_Z(w)(\bar{z}) \in B.$$

Зададим равномерное распределение вероятностей на множестве W.

Вычислим среднее значение $\mathrm{E}(v)$. С этой целью для фиксированного элемента $t = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in T^N$ и числа $b \in B$ определим случайную величину $\eta_{t,b}$, равную весу $\mathrm{v}(t)$, если

$$F_X(w)(\bar{x}) = F_Y(w)(\bar{y}) = F_Z(w)(\bar{z}) = b,$$

и равную нулю в противном случае. Тогда для случайных величин верно равенство

$$v = \sum_{t \in T^N,\ b \in B} \eta_{t,b}.$$

Аналогичное равенство верно и для средних значений

$$\mathrm{E}(v) = \sum_{t \in T^N,\ b \in B} \mathrm{E}(\eta_{t,b}).$$

Для любых $t = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in T^N$ и $b \in B$ среднее значение случайной величины $\eta_{t,b}$ равно произведению веса $\mathrm{v}(t)$ и вероятности события

$$F_X(w)(\bar{x}) = b, \quad F_Y(w)(\bar{y}) = b, \quad F_Z(w)(\bar{z}) = b.$$

Заметим, что это событие однозначно определяется первыми двумя равенствами, так как из них следует третье равенство. Таким образом, требуется вычислить вероятность события

$$F_X(w)(\bar{x}) = b, \quad F_Y(w)(\bar{y}) = b.$$

Так как в функцию $F_X(w)$ входит слагаемое u_x, а в функцию $F_Y(w)$ это слагаемое не входит, то случайные величины $F_X(w)(\bar{x})$ и $F_Y(w)(\bar{y})$ являются независимыми для любых фиксированных $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Следовательно, искомая вероятность равна произведению вероятностей событий

$$F_X(w)(\bar{x}) = b, \quad F_Y(w)(\bar{y}) = b.$$

По построению функций $F_X(w)$ и $F_Y(w)$ вероятность этих событий равна $1/M$. В самом деле, уравнение

$$u_x + w_1x_1 + \ldots + w_Nx_N = b \pmod{M}$$

имеет ровно M^{N+1} решений в множестве W, а мощность множества W равна M^{N+2}, значит, вероятность события $F_X(w)(\bar{x}) = b$ равна $M^{N+1}/M^{N+2} = 1/M$.

Следовательно, среднее значение случайной величины $\eta_{t,b}$ равно $\mathrm{v}(t)/M^2$. Поэтому для среднего значения случайной величины v верна следующая цепочка равенств:

$$\mathrm{E}(v) = \sum_{t\in T^N,\ b\in B} \mathrm{E}(\eta_{t,b}) = \sum_{t\in T^N,\ b\in B} \frac{\mathrm{v}(t)}{M^2} = M' \frac{\mathrm{v}(T_v^N)}{M^2}.$$

Вычислим значение $\mathrm{E}(V)$. Для этого воспользуемся сначала утверждением 3.3, из которого следует равенство

$$\mathrm{V}(T(w)_v) = \mathrm{V}_X(T(w)_v) + \mathrm{V}_Y(T(w)_v) + \mathrm{V}_Z(T(w)_v).$$

Цветные степенные веса отношения $T(w)_v$ также определяют случайные величины V_X, V_Y, V_Z, и для их средних значений верно равенство

$$\mathrm{E}(V) = \mathrm{E}(V_X) + \mathrm{E}(V_Y) + \mathrm{E}(V_Z).$$

Вычислим значение $\mathrm{E}(V_X)$. С этой целью для фиксированного элемента $l = (t_1, t_2) \in \mathrm{L}_X(T^N)$ и числа $b \in B$ определим случайную величину $\eta_{l,b}$, равную весу ребра $\mathrm{v}(l)$, если две случайные величины $\eta_{t_1,b}$, $\eta_{t_2,b}$ одновременно не равны нулю, и равную нулю в противном случае. Тогда верно равенство

$$V_X = \sum_{l\in \mathrm{L}_X(T^N),\ b\in B} \eta_{l,b}.$$

Аналогичное равенство верно и для средних значений.

Среднее значение случайной величины $\eta_{l,b}$ для $l = (t_1, t_2)$, где $t_1 = (\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$, $t_2 = (\bar{x}, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$, равно произведению веса ребра l и вероятности события, при котором выполняются равенства

$$F_X(w)(\bar{x}) = b, \quad F_Y(w)(\bar{y}_1) = b, \quad F_Y(w)(\bar{y}_2) = b.$$

Так как векторы $\bar{y}_1$ и $\bar{y}_2$ не равны друг другу, то линейные формы от случайных величин $u_x, u_y, w_1, \ldots, w_N$, которые определяют функции

$$F_X(w)(\bar{x}), \quad F_Y(w)(\bar{y}_1), \quad F_Y(w)(\bar{y}_2),$$

являются линейно независимыми над полем из M элементов. Следовательно, случайные величины $F_X(w)(\bar{x})$, $F_Y(w)(\bar{y}_1)$ и $F_Y(w)(\bar{y}_2)$ независимы. Значит, вероятность требуемого события равна $1/M^3$. Следовательно, для величины $\mathrm{E}(V_X)$ верно равенство

$$\mathrm{E}(V_X) = M' \cdot \frac{\mathrm{V}_X(T_v)}{M^3}.$$

Для случайных величин V_Y и V_Z аналогичным образом доказываются такие же равенства, из которых следует требуемое равенство. □

3.3. Объём отношений

Используем утверждения 3.4 и 6.2 для оценки асимптотической ёмкости константных отношений. С этой целью выясним, как ведут себя цветные степенные веса относительно декартова произведения. Сформулируем следующее определение.

Определение 3.2. Пусть задано взвешенное отношение T_v с подстилающим отношением $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$. Объёмом $\mathrm{sq}_{T_v}(x)$ элемента $x \in X_i$ назовём число, равное величине $\mathrm{v}_{T_v}(x) \cdot \mathrm{d}_T(x)$. Объёмом $\mathrm{sq}_{X_i}(T_v)$ цвета X_i отношения T_v назовём величину, равную $\sum\limits_{x \in X_i} \mathrm{sq}_T(x)$.

В качестве иллюстрации этого понятия рассмотрим согласованное с тензором Штрассена взвешенное отношение $T_{\mathrm{Sh}}(q)$:

$$\begin{array}{ccll} t & = & (1,0,1), & (0,1,1), \\ v(t) & = & q^{\omega/3}, & q^{\omega/3}. \end{array}$$

Множества X_1 и X_2 состоят из двух элементов $\{0,1\}$. В обоих случаях степень элемента 0 равна 1, а его вес равен $q^{\omega/3}$. Следовательно, объём элемента 0 равен $q^{\omega/3}$. Так как объём элемента 1 вычисляется аналогично, то цветные объёмы равны

$$\mathrm{sq}_{X_1}\big(T_{\mathrm{Sh}}(q)\big) = 2q^{\omega/3}, \quad \mathrm{sq}_{X_2}\big(T_{\mathrm{Sh}}(q)\big) = 2q^{\omega/3}.$$

Множество X_3 состоит из одного элемента. Его степень равна 2, вес равен $2q^{\omega/3}$, следовательно, его объём равен $4q^{\omega/3}$. Для цветного объёма $\mathrm{sq}_{X_3}\big(T_{\mathrm{Sh}}(q)\big)$ верно равенство

$$\mathrm{sq}_{X_3}\big(T_{\mathrm{Sh}}(q)\big) = 4q^{\omega/3}.$$

Как показывает следующее утверждение, цветной степенной вес и цветной объём отношения тесно связаны между собой.

Утверждение 3.5. *Для любого отношения T_v верна формула*

$$\mathrm{V}_{X_i}(T_v) = \mathrm{sq}_{X_i}(T_v) - \mathrm{v}(T_v).$$

Доказательство. Отметим сначала, что для любого элемента $t = (x_1, x_2, x_3) \in T$ и для любого $i = 1,2,3$ верна формула $\mathrm{v}_{X_i}(t) = \mathrm{v}(x_i) - \mathrm{v}(t)$.

В самом деле, для любой дуги $(t, r) \in \mathrm{L}_{X_i}(T)$ её конец r определяет вес дуги и характеризуется тем, что он принадлежит множеству T_{x_i} и не совпадает с элементом t. Тогда утверждение доказывается прямыми вычислениями:

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_{X_i}(T_v) &= \sum_{t\in T} \mathrm{v}_{X_i}(t) = \sum_{t=(x_1,x_2,x_3)\in T} \big(\mathrm{v}(x_i) - \mathrm{v}(t)\big) = \\ &= \sum_{x\in X_i} \sum_{t\in T_x} \mathrm{v}(x) - \sum_{t\in T} \mathrm{v}(t) = \sum_{x\in X_i} \mathrm{v}(x) \sum_{t\in T_x} 1 - \mathrm{v}(T_v) = \\ &= \sum_{x\in X_i} \mathrm{v}(x)\cdot \mathrm{d}(x) - \mathrm{v}(T_v). \qquad \square\end{aligned}$$

Как показывает следующее утверждение, цветной объём ведёт себя мультипликативным образом относительно декартова произведения.

Утверждение 3.6. *Для любых взвешенных отношений T_v и S_u и для любого индекса i верно равенство $\mathrm{sq}_{X_i}(T_v \times S_u) = \mathrm{sq}_{X_i}(T_v)\mathrm{sq}_{X_i}(S_u)$.*

Ниже потребуется следующее понятие.

Определение 3.3. Пусть задано взвешенное отношение T_v. Объёмом $\mathrm{sq}(T_v)$ отношения T_v назовём величину, равную следующему среднему геометрическому:

$$\sqrt[3]{\mathrm{sq}_{X_1}(T_v)\cdot \mathrm{sq}_{X_2}(T_v)\cdot \mathrm{sq}_{X_3}(T_v)}.$$

Например, объём отношения $T_{\mathrm{Sh}}(q)$ равен $2\cdot 2^{1/3}\cdot q^{\omega/3}$.

3.4. Асимптотическая ёмкость константных отношений

Утверждение 3.7. *Для асимптотической ёмкости константного отношения T_v верна следующая оценка*:

$$\mathrm{c_{as}}(T_v) \geqslant \frac{\mathrm{v}(T_v)^2}{\max\limits_i \mathrm{sq}_{X_i}(T_v)}.$$

Доказательство. Обозначим через v вес отношения $\mathrm{v}(T_v)$, а через s максимум цветных объёмов: $s = \max\limits_i \mathrm{sq}_{X_i}(T_v)$.

Предположим, что подстилающее отношение T является несвязанным. Тогда для любого элемента $x \in X_i$ его степень $\mathrm{d}(x)$ равна 1, если существует такой элемент $t \in T$, что его i-я координата равна x. Из утверждения 2.29 следует равенство

$$\mathrm{sq}_{X_i}(T) = \sum_{x\in X_i} \mathrm{v}(x)\mathrm{d}(x) = \sum_{x\in X_i} \mathrm{v}(x) = \mathrm{v}(T_v).$$

Следовательно, верно равенство $s = v$. В этом случае оценка из формулировки утверждения является верной, так как для несвязанных отношений верна следующая цепочка равенств:

$$\mathrm{c_{as}}(T_v) = \mathrm{C}(T_v) = \mathrm{v}(T_v) = \frac{v^2}{s}.$$

Если отношение T не является несвязанным, то существуют индекс i и такой элемент $x \in X_i$, что верно неравенство $\mathrm{d}(x) > 1$. Тогда снова из утверждения 2.29 следует строгое неравенство

$$\mathrm{sq}_{X_i}(T_v) = \sum_{x \in X_i} \mathrm{v}(x)\mathrm{d}(x) > \sum_{x \in X_i} \mathrm{v}(x) = \mathrm{v}(T_v),$$

а значит, выполнено неравенство $s > v$.

Определим последовательность чисел a_N следующим образом:

$$a_N = \frac{\max_i \mathrm{sq}_{X_i}(T_v^{\times N})}{\mathrm{v}(T_v^{\times N})} = \left(\frac{s}{v}\right)^N.$$

Неравенство $s > v$ гарантирует, что последовательность a_N стремится к бесконечности при $N \to \infty$.

Из утверждений 3.2, 3.3, 3.5, 3.6 и 2.8 вытекает, что справедлива следующая цепочка равенств:

$$\mathrm{V}(T_v^{\times N}) = \sum_i \mathrm{V}_{X_i}(T_v^{\times N}) =$$
$$= \sum_i \mathrm{sq}_{X_i}(T_v^{\times N}) - 3 \cdot \mathrm{v}(T_v^{\times N}) = \sum_i \big(\mathrm{sq}_{X_i}(T_v)\big)^N - 3 \cdot \big(\mathrm{v}(T_v)\big)^N.$$

Если отношение T_v не является несвязанным, то из этой формулы следует, что существует конечный ненулевой предел

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\mathrm{V}(T_v^{\times N})}{s^N} = a,$$

причём число a принимает значения из множества $\{1, 2, 3\}$ в зависимости от того, для скольких i цветные объёмы $\mathrm{sq}_{X_i}(T_v)$ совпадают с максимумом s.

Выберем последовательность простых чисел p_n так, что для любого n существует натуральное число N_n, для которого выполнено неравенство

$$N_n \cdot a_{N_n} \leqslant p_n \leqslant (N_n + 1) \cdot a_{N_n+1}.$$

Реализуем отношение T как подмножество в множестве $\mathbb{Z}_{R(T)} \times \mathbb{Z}_{R(T)} \times \mathbb{Z}_{R(T)}$. Так как последовательность p_n стремится к бесконечности, то для всех достаточно больших n выполнено неравенство $p_n > R(T)$. Следовательно, ёмкость отношения $T_v^{\times N_n}$ можно оценить в соответствии с утверждениями 3.4 и 6.2:

$$\mathrm{C}(T_v^{\times N_n}) \geqslant p_n^{\alpha(p_n)} \left(\frac{\mathrm{v}(T_v^{\times N_n})}{p_n^2} - \frac{\mathrm{V}(T_v^{\times N_n})}{p_n^3} \right) = \frac{\mathrm{v}(T_v^{\times N_n})}{p_n^{2-\alpha(p_n)}} - \frac{\mathrm{V}(T_v^{\times N_n})}{p_n^{3-\alpha(p_n)}},$$

где последовательность $\alpha(p_n)$ стремится к единице при $n \to \infty$, т. е. $\alpha(p_n) = 1 + o(1)$.

Из выбора последовательности p_n следует, что выполнено неравенство

$$\frac{\mathrm{v}(T_v^{\times N_n})}{p_n^{2-\alpha(p_n)}} \geqslant \frac{v^{N_n}}{((N_n + 1) \cdot a_{N_n+1})^{1+o(1)}}.$$

В соответствии с определением последовательности a_N это неравенство можно переписать следующим образом:

$$\frac{\mathrm{v}(T_v^{\times N_n})}{p_n^{2-\alpha(p_n)}} \geqslant \frac{1}{(N_n+1)^{1+o(1)}} \left(\frac{v^2}{s}\right)^{N_n+o(N_n)}.$$

Также из выбора последовательности p_n и соответствующей эквивалентности следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и для любых достаточно больших n выполнено неравенство

$$\frac{\mathrm{V}(T_v^{\times N_n})}{p_n^{3-\alpha(p_n)}} \leqslant \frac{a \cdot s^{N_n} \cdot (1+\varepsilon)}{(N_n \cdot a_{N_n})^{2+o(1)}},$$

которое можно переписать следующим образом:

$$\frac{\mathrm{V}(T_v^{\times N_n})}{p_n^{3-\alpha(p_n)}} \leqslant \frac{a \cdot (1+\varepsilon)}{N_n^{2+o(1)}} \left(\frac{v^2}{s}\right)^{N_n+o(N_n)}.$$

Следовательно, ёмкость отношения $T_v^{\times N_n}$ оценивается снизу величиной

$$\left(\frac{1}{(N_n+1)^{1+o(1)}} - \frac{a \cdot (1+\varepsilon)}{N_n^{2+o(1)}}\right) \left(\frac{v^2}{s}\right)^{N_n+o(N_n)}.$$

Из этой оценки вытекает требуемое неравенство

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[N_n]{\mathrm{C}(T_v^{\times N_n})} \geqslant \frac{v^2}{s}. \qquad \square$$

3.5. Предварительная оценка симметрической ёмкости константных отношений

Для того чтобы воспользоваться утверждением 3.7, требуется вычислить вес и цветные объёмы симметризации взвешенного отношения. Из утверждения 2.8 следует, что для любого взвешенного отношения T_v верно равенство $\mathrm{v}\big(\mathrm{S}(T_v)\big) = \mathrm{v}(T_v)^6$. Из утверждения 3.6 следует, что для любого взвешенного отношения T_v и любого индекса i верно равенство $\mathrm{sq}_{X_i}\big(\mathrm{S}(T_v)\big) = \mathrm{sq}(T_v)^6$. Из этих замечаний вытекает следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если взвешенное отношение T_v является константным, то для его симметрической ёмкости верна оценка*

$$\mathrm{c}(T_v) \geqslant \frac{\mathrm{v}(T_v)^2}{\mathrm{sq}(T_v)}.$$

3.6. Примеры

Рассмотрим тензор Штрассена

$$\Phi_{\mathrm{Sh}}(q) = \sum_{i=1}^{q} x_i^{[1]} y_0^{[0]} z_i^{[1]} + x_0^{[0]} y_i^{[1]} z_i^{[1]}.$$

Выше было показано, что следующее взвешенное отношение $T_{\mathrm{Sh}}(q)$

$$\begin{array}{rcll} t & = & (1,0,1), & (0,1,1), \\ v(t) & = & q^{\omega/3}, & q^{\omega/3} \end{array}$$

является согласованным с тензором Штрассена. Вес этого отношения равен $2q^{\omega/3}$. Цветные объёмы отношения и объём отношения $T_{\mathrm{Sh}}(q)$ вычислены в качестве примера в разделе 3.3. В частности, объём равен $2 \cdot 2^{1/3} \cdot q^{\omega/3}$.

В соответствии с теоремой 3.1 симметрическая ёмкость этого отношения оценивается снизу величиной

$$\frac{(2q^{\omega/3})^2}{2 \cdot 2^{1/3} \cdot q^{\omega/3}} = 2^{2/3} q^{\omega/3}.$$

Отметим, что В. Штрассен в [11], по сути, получил такую же оценку, но совсем другим методом. Отметим также, что можно показать, что эта величина в точности равна симметрической ёмкости отношения $T_{\mathrm{Sh}}(q)$.

Так как асимптотический ранг тензора Штрассена оценивается сверху величиной $q+1$, то матричная экспонента оценивается сверху значением корня уравнения $q+1 = 2^{2/3} q^{\tau/3}$. Оптимизируя эту оценку по q, В. Штрассен получил оценку на матричную экспоненту, равную $2{,}4785\ldots$ при $q = 5$.

Рассмотрим простой тензор Копперсмита—Винограда. Напомним, что отношение $T_{\mathrm{cw}}(q)$

$$\begin{array}{rclll} t & = & (0,1,1), & (1,0,1), & (1,1,0), \\ v(t) & = & q^{\omega/3}, & q^{\omega/3}, & q^{\omega/3} \end{array}$$

является согласованным с простым тензором Копперсмита—Винограда. Вес этого отношения равен $3q^{\omega/3}$, объём равен $5q^{\omega/3}$. В соответствии с теоремой 3.1 симметрическая ёмкость этого отношения оценивается снизу величиной $(9/5) \cdot q^{\omega/3} = 1{,}8 \cdot q^{\omega/3}$. Эта оценка приводит к оценке $2{,}4714\ldots$ на матричную экспоненту.

Ниже будет показано, что существует более сильная оценка симметрической ёмкости отношения $T_{\mathrm{cw}}(q)$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{4}} q^{\omega/3} \approx 1{,}889\ldots \cdot q^{\omega/3}.$$

Причина этого эффекта состоит в том, что теорема 3.1 даёт точный результат только для однородных отношений, т. е. таких отношений, у которых степени $\mathrm{d}_T(x)$ равны между собой для любых $x \in X_i$ при любом фиксированном индексе i.

4. Функция Копперсмита—Винограда

4.1. Разбиения на множествах

Пусть задано конечное множество X. Тогда вектор

$$A = (a_x \mid a_x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0},\ x \in X)$$

будем называть *разбиением* числа z на множестве X, если выполнено равенство $\sum\limits_{x\in X} a_x = z$. Для обозначения разбиения будем использовать стандартную запись $A \vdash_X z$. Например, если число z равно 1, то его разбиение задаёт распределение вероятностей на множестве X. Если все координаты разбиения являются целыми числами, то такое разбиение будем называть *целочисленным* разбиением.

Пусть задано целочисленное разбиение $A = (a_x) \vdash_X N$. Тогда через X^A будем обозначать подмножество в множестве $X^{\times N}$, состоящее из таких элементов $(x_1, \ldots, x_N) \in X^{\times N}$, что для любого $x \in X$ количество индексов i, для которых x_i совпадает с x, равно a_x.

Вычислим мощность множества X^A. Для этого заметим, что на множестве $X^{\times N}$ определено естественное действие симметрической группы S_N, причём для любого целочисленного разбиения $A = (a_x) \vdash_X N$ множество X^A является орбитой этого действия. Зафиксируем какой-нибудь элемент $\bar{x} \in X^A$ и заметим, что стабилизатор этого элемента изоморфен прямому произведению симметрических групп $\bigtimes\limits_{x\in X} \mathrm{S}_{a_x}$. Так как мощность орбиты равна отношению мощности группы и мощности стабилизатора, то верна формула

$$|X^A| = \frac{|S_N|}{\prod\limits_{x\in X} |S_{a_x}|} = \frac{N!}{\prod\limits_{x\in X} a_x!}.$$

Вообще, если задано целочисленное разбиение $A = (a_x) \vdash_X N$, то через $\binom{N}{A}$ будем обозначать величину, вычисляемую в соответствии с формулой $N!/\prod\limits_{x\in X} a_x!$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Утверждение 4.1. *Пусть задано конечное множество X и целочисленное разбиение $A \vdash_X N$. Тогда справедливо равенство*

$$|X^A| = \binom{N}{A}.$$

Пусть задано взвешенное отношение T_v и целочисленное разбиение $D = (d_t) \vdash_T N$ натурального числа N. Так как для подстилающих отношений верно включение $T^D \subset T^{\times N}$, то определено взвешенное отношение T_v^D, причём вес каждого элемента $\mathbf{t} \in T^D$ равен

$$\prod_{t\in T} \mathrm{v}(t)^{d_t}.$$

Будем обозначать эту величину через v_T^D. Принимая во внимание утверждение 4.1, получаем следующее утверждение.

Утверждение 4.2. *Пусть задано взвешенное отношение T_v и целочисленное разбиение $D \vdash_T N$. Тогда для веса отношения T_v^D верна формула*

$$\mathrm{v}(T_v^D) = \binom{N}{D} v_T^D.$$

Отметим, что отношение T_v^D необязательно является редукцией отношения T_v^N.

Пусть заданы конечные множества X_1, X_2, X_3 и разбиения

$$(A_i \mid A_i \vdash_{X_i} z_i,\ i = 1, 2, 3).$$

Тогда вектор разбиений (A_i) будем называть *набором* разбиений, если все числа z_i равны между собой.

Пусть задано отношение $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ и разбиение $D = (d_t) \vdash_T z$. Тогда можно превратить отношение T во взвешенное отношение T_d, рассматривая разбиение D как весовую функцию. Отметим, что верно равенство $\mathrm{v}(T_d) = z$.

В соответствии с определением 2.8 можно рассмотреть множества взвешенных степеней $A_i = \{a_{i,x} = \mathrm{v}_{T_d}(x) \mid x \in X_i\}$. Из утверждения 2.29 следует, что множество A_i является разбиением числа z на множестве X_i для любого $i = 1, 2, 3$.

Таким образом, приведённая конструкция определяет отображение из множества разбиений числа z на отношении $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ в множество наборов разбиений $\{A_1, A_2, A_3\}$ числа z на множествах X_1, X_2, X_3.

Набор разбиений A_i на множествах X_i будем называть *согласованным* с разбиением D, если он является образом разбиения D относительно этого отображения.

Более явное определение выглядит следующим образом. Набор разбиений $A_i = (a_{i,x})$ на множествах X_i согласован с разбиением D, если для любого i и любого $x \in X_i$ выполнено равенство

$$a_{i,x} = \sum_{t=(x_1,x_2,x_3)\in T,\ x_i = x} d_t.$$

Согласованный набор для разбиения D на отношении T будем обозначать через $\bar{D}$. Например, пусть для отношения $\{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\} \subset \{0,1\}^{\times 3}$ задано разбиение $(d_t) = (1,1,1)$. Тогда согласованный набор разбиений $\overline{(d_t)}$ равен $\big((2,1),(2,1),(2,1)\big)$.

Два разбиения D_1, D_2 на отношении T будем называть *эквивалентными* ($D_1 \sim D_2$), если они определяют один и тот же согласованный набор, т. е. $\bar{D}_1 = \bar{D}_2$.

4.2. Разбиения и редукции отношений

Пусть задано взвешенное отношение T_v с подстилающим отношением $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ и набор целочисленных разбиений $(A_i \mid A_i \vdash_{X_i} N)$. Тогда через $T_v^{(A_i)}$ будем обозначать редукцию отношения T_v^N, полученную исключением значений координат, не принадлежащих множествам $X_i^{A_i}$.

Если отношение T является константным, то из утверждений 3.2 и 3.1 следует, что отношение $T^{(A_i)}$ также является константным. Следовательно, можно применить теорему 3.1 для оценки симметрической ёмкости отношения $T_v^{(A_i)}$. Для этого необходимо вычислить его вес и объём.

Утверждение 4.3. *Пусть задано отношение T и целочисленное разбиение $D \vdash_T N$. Тогда верно включение $T^D \subset T^{\bar{D}}$.*

Утверждение 4.4. *Пусть задано отношение $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ и набор целочисленных разбиений $(A_i \mid A_i \vdash_{X_i} N)$. Тогда отношение $T^{(A_i)}$ является несвязанным объединением отношений T^D по всем разбиениям из класса эквивалентности, определяемым набором (A_i), т. е.*

$$T^{(A_i)} = \bigsqcup_{\bar{D}=(A_i)} T^D.$$

Доказательство. На отношении $T^{\times N}$ естественным образом действует симметрическая группа S_N, причём отношение $T^{(A_i)}$ является инвариантным множеством относительно этого действия. Следовательно, оно разбивается в несвязанное объединение орбит этого действия, каждая из которых является отношением вида T^D для некоторого целочисленного разбиения D. Тогда из утверждения 4.3 следует требуемое. □

Отметим, что, вообще говоря, отношение $T^{(A_i)}$ может оказаться пустым.

Утверждения 4.2 и 4.4 позволяют вычислить вес отношения $T_v^{(A_i)}$.

Утверждение 4.5. *Для веса непустого отношения $T_v^{(A_i)}$ верна формула*

$$\mathrm{v}\big(T_v^{(A_i)}\big) = \sum_{\bar{D}=(A_i)} \binom{N}{D} v_T^D.$$

Вычислим объём отношения $T_v^{(A_i)}$. Для этого сначала зафиксируем элемент $\mathbf{x}$ из $X_j^{A_j}$ для некоторого индекса $j = 1, 2, 3$ и вычислим его степень, т. е. мощность множества $T_{\mathbf{x}}^{(A_i)}$.

Как было отмечено в доказательстве утверждения 4.4, на отношении $T^{(A_i)}$ естественным образом действует симметрическая группа S_N. На множестве $X_j^{A_j}$ также определено естественное действие группы S_N.

Заметим, что эти действия являются согласованными относительно проекции отношения $T^{(A_i)}$ на множество $X_j^{A_j}$. Отсюда следует, что мощности множеств $T_{\mathbf{x}}^{(A_i)}$ одинаковы для любых $\mathbf{x} \in X_j^{A_j}$. Следовательно, для степени элемента $\mathbf{x}$ верна формула

$$\mathrm{d}_{T^{(A_i)}}(\mathbf{x}) = \frac{\big|T^{(A_i)}\big|}{\big|X_j^{A_j}\big|}.$$

Так как действие группы S_N сохраняет вес элементов взвешенного отношения $T_v^{(A_i)}$, то аналогичным образом можно показать, что для цветного веса любого элемента $\mathbf{x} \in X_j^{A_j}$ верна формула

$$\mathrm{v}_{T_v^{(A_i)}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathrm{v}\big(T_v^{(A_i)}\big)}{\big|X_j^{A_j}\big|}.$$

В соответствии с определением 3.2 объём любого элемента $\mathbf{x} \in X_j^{A_j}$ равен

$$\mathrm{sq}_{T_v^{(A_i)}}(\mathbf{x}) = \frac{\left|T^{(A_i)}\right| \mathrm{v}\bigl(T_v^{(A_i)}\bigr)}{\left|X_j^{A_j}\right|^2},$$

а объём отношения $T_v^{(A_i)}$ цвета X_j равен

$$\mathrm{sq}_{X_j}(T_v^{(A_i)}) = \frac{\left|T^{(A_i)}\right| \mathrm{v}\bigl(T_v^{(A_i)}\bigr)}{\left|X_j^{A_j}\right|}.$$

Учитывая утверждения 4.1, 4.4, 4.5, получаем следующее утверждение.

Утверждение 4.6. *Для объёма цвета X_j непустого отношения $T_v^{(A_i)}$ верна формула*

$$\mathrm{sq}_{X_j}(T_v^{(A_i)}) = \frac{\Bigl(\sum\limits_{\bar{D}=(A_i)} \binom{N}{D}\Bigr)\Bigl(\sum\limits_{\bar{D}=(A_i)} \binom{N}{D} v_T^D\Bigr)}{\binom{N}{A_j}}.$$

Применим теорему 3.1 для оценки симметрической ёмкости отношения $T_v^{(A_i)}$.

Утверждение 4.7. *Пусть отношение T_v является константным и для целочисленного набора $(A_i \mid A_i \vdash_{X_i} N)$ отношение $T^{(A_i)}$ непусто. Тогда симметрическая ёмкость отношения $T_v^{(A_i)}$ оценивается снизу величиной*

$$\sqrt[3]{\binom{N}{A_1}\binom{N}{A_2}\binom{N}{A_3}} \cdot \frac{\sum\limits_{\bar{D}=(A_i)} \binom{N}{D} v_T^D}{\sum\limits_{\bar{D}=(A_i)} \binom{N}{D}}.$$

4.3. Функция Копперсмита—Винограда

Пусть на конечном множестве X задано распределение вероятностей (α_x). Тогда рассмотрим энтропию $h(\alpha_x)$ этого распределения (см. определение 6.2). Для обозначения экспоненты энтропии будем использовать запись $H(\alpha_x) = \exp\{h(\alpha_x)\}$.

Функция $H(\alpha_x)$ естественным образом возникает в следующей ситуации.

Утверждение 4.8. *Пусть задано конечное множество X и для любого натурального числа N задано целочисленное разбиение $A(N) = (a(N)_x) \vdash_X N$. Пусть для любого фиксированного элемента $x \in X$ последовательность $a(N)_x/N$ сходится при $N \to \infty$ к числу α_x. Тогда вектор (α_x) является распределением вероятностей, для которого верна формула*

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{\binom{N}{A(N)}} = H(\alpha_x).$$

Пусть на отношении $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ задано распределение вероятностей Δ. Тогда определён согласованный набор (см. раздел 4.1) $\Delta_i \vdash_{X_i} \Delta$ распределений вероятностей на множествах X_i.

Определение 4.1. Пусть задано взвешенное отношение T_v. Тогда значение функции Копперсмита—Винограда для распределении вероятностей Δ на подстилающем отношении T определим формулой

$$\sqrt[3]{H(\Delta_1)H(\Delta_2)H(\Delta_3)} \cdot v_T^{\Delta}.$$

Функцию Копперсмита—Винограда будем обозначать через $\mathrm{cw}(\Delta)$.

Приведём пример. Пусть задано отношение

$$T = \{t_1 = (1,0,0),\, t_2 = (0,1,0),\, t_3 = (0,0,1)\}$$

и вероятностное распределение $\Delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. Припишем веса q_1, q_2, q_3 и вероятности δ_1, δ_2, δ_3 элементам t_1, t_2, t_3. Тогда функция Копперсмита—Винограда $\mathrm{cw}(\Delta)$ имеет следующий весьма громоздкий вид:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{\delta_1+\delta_2}\right)^{\delta_1+\delta_2}\left(\frac{1}{\delta_3}\right)^{\delta_3}\left(\frac{1}{\delta_1+\delta_3}\right)^{\delta_1+\delta_3}\left(\frac{1}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{1}{\delta_2+\delta_3}\right)^{\delta_2+\delta_3}\left(\frac{1}{\delta_1}\right)^{\delta_1}} \times \\ \times q_1^{\delta_1} q_2^{\delta_2} q_3^{\delta_3}.$$

Определение 4.2. Пусть задано взвешенное отношение T_v. Тогда значение функции Копперсмита—Винограда на этом отношении определим формулой

$$\max_{\Delta \vdash_T 1} \mathrm{cw}(\Delta).$$

Для функции Копперсмита—Винограда, определённой на множестве отношений, будем использовать обозначение $\mathrm{cw}(T_v)$.

Можно показать, что значение функции Копперсмита—Винограда является верхней оценкой для симметрической ёмкости любого взвешенного отношения, но этот факт не является целью настоящей работы.

Ниже будет показано, что значение функции Копперсмита—Винограда является нижней оценкой симметрической ёмкости для некоторых классов константных отношений.

4.4. Корректирующий фактор

Определим следующую функцию.

Определение 4.3. Пусть задано взвешенное отношение T_v. Тогда значение корректирующего фактора для распределении вероятностей Δ на подстилающем отношении T определим формулой

$$\frac{1}{v_T^{\Delta}} \cdot \frac{\max\limits_{\Delta' \sim \Delta}\left(H(\Delta')v_T^{\Delta'}\right)}{\max\limits_{\Delta'' \sim \Delta} H(\Delta'')}.$$

Корректирующий фактор будем обозначать через $\mathrm{cf}(\Delta)$.

Отметим два простых свойства корректирующего фактора.

Утверждение 4.9. *Пусть весовая функция взвешенного отношения T_v равна константе. Тогда для любого распределения Δ корректирующий фактор равен единице*: $\mathrm{cf}(\Delta) = 1$.

Утверждение 4.10. *Пусть подстилающее отношение T взвешенного отношения T_v обладает свойством, что мощность каждого класса эквивалентности разбиений равна единице. Тогда для любого распределения Δ корректирующий фактор равен единице*: $\mathrm{cf}(\Delta) = 1$.

4.5. Оценка симметрической ёмкости константных отношений

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть задано константное отношение T_v. Тогда для его симметрической ёмкости верна следующая оценка*:

$$\mathrm{c}(T_v) \geqslant \max_{\Delta \vdash_T 1} \bigl(\mathrm{cw}(\Delta) \cdot \mathrm{cf}(\Delta)\bigr).$$

Доказательство. Зафиксируем распределение вероятностей $\Delta = (\delta_t)$ на отношении $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$. Выберем последовательность целочисленных разбиений

$$D(N) = (d(N)_t) \vdash_T N,$$

такую что для любого фиксированного $t \in T$ последовательность $d(N)_t/N$ сходится к δ_t.

Обозначим через $\bigl(A_1(N), A_2(N), A_3(N)\bigr)$ последовательность согласованных наборов $\bigl(A_i(N)\bigr) = \overline{D(N)}$. Тогда последовательность $\bigl(A_i(N)\bigr)/N$ покоординатно сходится к согласованному набору $(\Delta_i) = \bar{\Delta}$.

В соответствии с утверждением 2.27 верна оценка $\mathrm{c}(T_v^N) \geqslant \mathrm{c}\bigl(T_v^{\overline{D(N)}}\bigr)$. Применяя утверждение 4.7, получаем оценку снизу

$$\sqrt[3]{\binom{N}{A_1(N)}\binom{N}{A_2(N)}\binom{N}{A_3(N)}} \cdot \frac{\sum\limits_{D' \sim D(N)} \binom{N}{D'} v_T^{D'}}{\sum\limits_{D'' \sim D(N)} \binom{N}{D''}}$$

для симметрической ёмкости отношения $T_v^{\overline{D(N)}}$.

Из утверждения 4.8 вытекает равенство

$$\lim_{N \to \infty} \sqrt[3 \cdot N]{\binom{N}{A_1(N)}\binom{N}{A_2(N)}\binom{N}{A_3(N)}} = \sqrt[3]{H(\Delta_1)H(\Delta_2)H(\Delta_3)}.$$

Количество слагаемых в сумме

$$\sum_{D' \sim D(N)} \binom{N}{D'} v_T^{D'}$$

не превосходит количества целочисленных разбиений (d_t) числа N элементами множества T. Каждое число d_t неотрицательно и не превосходит N и, соответственно, может принимать только $N+1$ значение. Следовательно, количество соответствующих разбиений не превосходит величины $(N+1)^{|T|}$. Значит, верна оценка

$$\max_{D'\sim D(N)}\left(\binom{N}{D'}v_T^{D'}\right) \leqslant \sum_{D'\sim D(N)}\binom{N}{D'}v_T^{D'} \leqslant (N+1)^{|T|}\max_{D'\sim D(N)}\left(\binom{N}{D'}v_T^{D'}\right).$$

Так как верно равенство

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt[N]{(N+1)^{|T|}} = 1,$$

получаем, что

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt[N]{\sum_{D'\sim D(N)}\binom{N}{D'}v_T^{D'}} = \max_{\Delta'\sim\Delta}\bigl(H(\Delta')v_T^{\Delta'}\bigr).$$

Аналогичным образом получаем равенство

$$\lim_{N\to\infty}\sqrt[N]{\sum_{D''\sim D(N)}\binom{N}{D''}} = \max_{\Delta''\sim\Delta}\bigl(H(\Delta'')\bigr).$$

Следовательно, верно неравенство

$$\mathrm{c}(T_v) \geqslant \lim_{N\to\infty}\sqrt[N]{\mathrm{c}\bigl(T_v^{\overline{D(N)}}\bigr)} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt[3]{H(\Delta_1)H(\Delta_2)H(\Delta_3)}\cdot\frac{v_T^{\Delta}}{v_T^{\Delta}}\cdot\frac{\max\limits_{\Delta'\sim\Delta}\bigl(H(\Delta')v_T^{\Delta'}\bigr)}{\max\limits_{\Delta''\sim\Delta}H(\Delta'')} = \mathrm{cw}(\Delta)\mathrm{cf}(\Delta)$$

для любого фиксированного распределения вероятностей Δ. □

5. Вычисление симметрических ёмкостей

Для удобства вычислений симметрических ёмкостей отношений проделаем сначала некоторую техническую работу.

5.1. Инвариантные распределения

Пусть $\mathrm{Aut}(T_v)$ обозначает группу автоморфизмов взвешенного отношения T_v.

Если задано отображение $f\colon X\to Y$ конечных множеств и на множестве X задано распределение вероятностей $\Delta = (\delta_x)$, то через Δ_f будем обозначать индуцированное распределение вероятностей на множестве Y.

Определение 5.1. Пусть задано взвешенное отношение T_v. Распределение вероятностей Δ на подстилающем отношении T будем называть инвариантным, если верно равенство $\Delta = \Delta_f$ для любого автоморфизма $f \in \mathrm{Aut}(T_v)$. Множество всех инвариантных распределений будем обозначать через $\Xi(T_v)$.

В этом разделе будет показано, что для вычисления значения функции Копперсмита—Винограда на отношении T_v достаточно ограничиться множеством $\Xi(T_v)$.

Утверждение 5.1. *Пусть задано отношение $T \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ и перестановка индексов σ. Пусть задан автоморфизм f отношения T и отображения множеств $f_i\colon X_{\sigma(i)} \to X_i$, такие что ограничение композиции $\sigma \circ (f_1 \times f_2 \times f_3)$ на отношение T совпадает с отображением f. Пусть на отношении T задано распределение вероятностей Δ и согласованный набор вероятностей $\bar{\Delta} = (\Delta_i)$. Тогда для согласованного набора $\bar{\Delta}_f = \big((\Delta_f)_i\big)$ верно равенство энтропий $h\big((\Delta_f)_{\sigma^{-1}(i)}\big) = h(\Delta_i)$.*

Доказательство. Из условия следует, что для любого i следующая диаграмма является коммутативной:

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & T \\ \downarrow & & \downarrow \\ X_{\sigma(i)} & \xrightarrow{f_i} & X_i \end{array}.$$

Следовательно, верно равенство $(\Delta_f)_i = \big(\Delta_{\sigma(i)}\big)_{f_i}$. Из утверждения 6.3 следует неравенство $h\big((\Delta_f)_i\big) \geqslant h\big(\Delta_{\sigma(i)}\big)$. Так как для отображения f существует обратное отображение, то верно и противоположное неравенство. □

Определим понятие *усреднения* распределений вероятностей. Пусть задан набор $F = \{f \mid f\colon X \to X\}$ биективных отображений. Тогда усреднение Δ_F — это распределение вероятностей

$$\Delta_F = \frac{1}{|F|} \sum_{f \in F} \Delta_f.$$

Если Δ является распределением вероятностей на подстилающем отношении T, то через $\tilde{\Delta}$ будем обозначать усреднённое распределение $\Delta_{\mathrm{Aut}(T_v)}$.

Утверждение 5.2. *Пусть задано взвешенное отношение T_v и распределение вероятностей $\Delta = (\delta_t)$ на подстилающем отношении. Тогда справедлива оценка*

$$\mathrm{cw}(\tilde{\Delta}) \geqslant \mathrm{cw}(\Delta).$$

Доказательство. Подстилающее отношение T разбивается на некоторое количество орбит T_i относительно действия группы $\mathrm{Aut}(T_v)$. Распределение $\tilde{\Delta}$ характеризуется тем, что оно постоянно на элементах любой орбиты и вероятность события T_i относительно распределения $\tilde{\Delta}$ совпадает с вероятностью этого события относительно распределения Δ.

Так как автоморфизмы сохраняют веса элементов отношения T, получаем, что элементы фиксированной орбиты имеют одинаковый вес. Следовательно, случайные величины v_{Δ_f} совпадают для любых автоморфизмов f. А значит, случайная величина v_{Δ} совпадает со случайной величиной $v_{\tilde{\Delta}}$. Отсюда вытекает, что для сравнения значений функции Копперсмита—Винограда достаточно рассмотреть согласованные наборы распределений вероятностей $\bar{\Delta} = (\Delta_i)$ и $\bar{\tilde{\Delta}} = (\tilde{\Delta}_i)$ и сравнить значение величин $\sqrt[3]{H(\tilde{\Delta}_1)H(\tilde{\Delta}_2)H(\tilde{\Delta}_3)}$ и $\sqrt[3]{H(\Delta_1)H(\Delta_2)H(\Delta_3)}$.

Так как отображение $A \to \bar{A}$ является линейным на множестве разбиений, то для любого фиксированного i верна формула

$$\tilde{\Delta}_i = \frac{1}{|\operatorname{Aut}(T_v)|} \sum_{f \in \operatorname{Aut}(T_v)} (\Delta_f)_i.$$

В соответствии с утверждением 5.1, если f является автоморфизмом, то существует подстановка σ_f, такая что для любого i справедливо равенство $h\big((\Delta_f)_i\big) = h(\Delta_{\sigma_f(i)})$.

Применяя утверждение 6.4, получаем, что верно неравенство

$$h(\tilde{\Delta}_i) \geqslant \frac{1}{|\operatorname{Aut}(T_v)|} \sum_{f \in \operatorname{Aut}(T_v)} h\big(\Delta_{\sigma_f(i)}\big).$$

Так как σ_f является подстановкой, то верно неравенство

$$h(\tilde{\Delta}_1) + h(\tilde{\Delta}_2) + h(\tilde{\Delta}_3) \geqslant h(\Delta_1) + h(\Delta_2) + h(\Delta_3),$$

из которого вытекает требуемое. □

Из доказанного утверждения и определения функции Копперсмита—Винограда вытекает следующее утверждение.

Утверждение 5.3. *Пусть задано взвешенное отношение T_v. Тогда верно равенство*

$$\operatorname{cw}(T_v) = \max_{\Delta \in \tilde{\Xi}_{T_v}} \operatorname{cw}(\Delta).$$

5.2. Матричная ёмкость простого тензора Копперсмита—Винограда

Воспользуемся отношением $T_{\mathrm{cw}}(q)$ из раздела 2.2 для оценки матричной ёмкости простого тензора Копперсмита—Винограда. Так как для этого отношения выполнены условия утверждения 4.9, то корректирующий фактор равен 1 для любого распределения вероятностей на соответствующем подстилающем отношении.

Из утверждения 5.3 следует, что для вычисления симметрической ёмкости этого отношения достаточно вычислить максимум функции Копперсмита—Винограда на инвариантных распределениях вероятностей.

Так как любая перестановка элементов $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ является автоморфизмом отношения $T_{\mathrm{cw}}(q)$, то единственным инвариантным распределением является вектор $(1/3,1/3,1/3)$. Функция Копперсмита—Винограда на этом распределении принимает значение $(3/\sqrt[3]{4})q^{\omega/3}$. Следовательно, эта величина является оценкой снизу матричной ёмкости простого тензора Копперсмита—Винограда.

Так как оценка сверху асимптотического ранга простого тензора Копперсмита—Винограда равна $q+2$, то матричная экспонента ω оценивается корнем уравнения $(q+2)=(3/\sqrt[3]{4})q^{\tau/3}$. Оптимизируя эту оценку по q, Д. Копперсмит и С. Виноград получили оценку $2{,}4036\ldots$ на матричную экспоненту.

5.3. Матричная ёмкость тензора Копперсмита—Винограда

Оценим матричную ёмкость тензора Копперсмита—Винограда через симметрическую ёмкость согласованного с ним отношения $T_{\mathrm{CW}}(q)$ из раздела 2.2.

Пусть задано некоторое разбиение

$$D=(d_{0,1,1},\ d_{1,0,1},\ d_{1,1,0},\ d_{2,0,0},\ d_{0,2,0},\ d_{0,0,2})$$

на отношении T_{CW}. Тогда отображение

$$D\to\bar{D}=\big((a_0,a_1,a_2),\ (b_0,b_1,b_2),\ (c_0,c_1,c_2)\big)$$

выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_0&=d_{0,1,1}+d_{0,2,0}+d_{0,0,2},\\
a_1&=d_{1,0,1}+d_{1,1,0},\\
a_2&=d_{2,0,0},\\[4pt]
b_0&=d_{1,0,1}+d_{2,0,0}+d_{0,0,2},\\
b_1&=d_{0,1,1}+d_{1,1,0},\\
b_2&=d_{0,2,0},\\[4pt]
c_0&=d_{1,1,0}+d_{0,2,0}+d_{2,0,0},\\
c_1&=d_{1,0,1}+d_{0,1,1},\\
c_2&=d_{0,0,2}.
\end{aligned}$$

Понятно, что по согласованному набору $\bar{D}$ разбиение D восстанавливается однозначно. Следовательно, выполнены условия утверждения 4.10, т. е. корректирующий фактор равен 1 для любого распределения вероятностей.

В соответствии с утверждением 5.3 можно ограничиться множеством инвариантных распределений вероятностей для оценки симметрической ёмкости отношения $T_{\mathrm{CW}}(q)$. В данном случае орбитами группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\big(T_{\mathrm{CW}}(q)\big)$ являются множества

$$\{(0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0)\},\quad \{(2,0,0),\ (0,2,0),\ (0,0,2)\}.$$

Следовательно, любое инвариантное распределение задаётся числами a, b, такими что выполнено равенство $3a + 3b = 1$. Число a — это вероятность события $(0, 1, 1)$, число b — вероятность события $(2, 0, 0)$. Функция Копперсмита—Винограда как функция от чисел a и b равна

$$\frac{(q^{\omega/3})^{3a}}{(a + 2b)^{a+2b}(2a)^{2a}(b)^b}.$$

Так как асимптотический ранг тензора Копперсмита—Винограда оценивается величиной $q + 2$, то матричная экспонента оценивается корнем уравнения

$$q + 2 = \frac{q^{a\tau}}{(a + 2b)^{a+2b}(2a)^{2a}(b)^b}.$$

Оптимизируя эту оценку по q, a, b, Д. Копперсмит и С. Виноград получили оценку 2,3871 . . . на матричную экспоненту.

5.4. Корректирующий фактор инвариантных распределений

Оценка из предыдущего раздела не является окончательной оценкой, которую получили Д. Копперсмит и С. Виноград. Для того чтобы продвинуться дальше, заметим следующее.

Пусть задано взвешенное отношение T_v и распределение вероятностей Δ на подстилающем отношении T. Пусть в классе эквивалентности, определяемом распределением Δ, лежит некоторое инвариантное распределение Γ. Тогда для любого автоморфизма $f \in \mathrm{Aut}(T_v)$ распределение Δ_f также лежит в этом же классе эквивалентности. В самом деле, верна цепочка неравенств

$$\bar{\Delta}_f = \bar{\Gamma}_f = \bar{\Gamma} = \bar{\Delta},$$

т. е. распределение Δ_f лежит в классе эквивалентности, определяемом распределением Δ. Так как отображение $D \to \bar{D}$ линейно, отсюда следует, что и усреднённое распределение $\tilde{\Delta}$ также лежит в этом же классе.

Из этого замечания следует утверждение.

Утверждение 5.4. *Пусть подстилающее отношение взвешенного отношения T_v обладает свойством, что в каждом классе эквивалентности находится не более одного инвариантного распределения. Тогда симметрическая ёмкость отношения оценивается снизу максимумом значений функции Копперсмита—Винограда по множеству инвариантных распределений*:

$$\mathrm{c}(T_v) \geqslant \max_{\Gamma \in \Xi} \mathrm{cw}(\Gamma).$$

Доказательство. В самом деле, из утверждения 6.4 следует неравенство $H(\tilde{\Delta}) \geqslant H(\Delta)$ для любого распределения вероятностей. Из условия следует, что если распределения Δ и $\tilde{\Delta}$ лежат в одном классе эквивалентности, то распределение $\tilde{\Delta}$ является единственным инвариантным распределением в этом классе. Следовательно, в этом случае верно равенство

$$\max_{\Delta'' \sim \Delta} H(\Delta'') = H(\tilde{\Delta})$$

и для корректирующего фактора верно неравенство

$$\mathrm{cf}(\Delta) = \frac{1}{v_T^{\Delta}} \cdot \frac{\max\limits_{\Delta' \sim \Delta} \bigl(H(\Delta') v_T^{\Delta'}\bigr)}{\max\limits_{\Delta'' \sim \Delta} H(\Delta'')} \geqslant \frac{1}{v_T^{\Delta}} \cdot \frac{H(\tilde{\Delta}) v_T^{\tilde{\Delta}}}{H(\tilde{\Delta})} = \frac{v_T^{\tilde{\Delta}}}{v_T^{\Delta}}.$$

Значит, для любого инвариантного распределения Γ верна оценка

$$\mathrm{c}(T_v) \geqslant \mathrm{cw}(\Gamma) \cdot \mathrm{cf}(\Gamma) \geqslant \mathrm{cw}(\Gamma) \frac{v_T^{\tilde{\Gamma}}}{v_T^{\Gamma}} = \mathrm{cw}(\Gamma). \qquad \square$$

5.5. Приведение подобных

Пусть заданы два отношения $T, S \subset \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. Тогда определено естественное отображение декартова произведения $T \times S$ в множество $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$: если заданы элементы $t = (a_t, b_t, c_t) \in T$ и $s = (a_s, b_s, c_s) \in S$, то элементу $(t, s) \in T \times S$ ставится в соответствие элемент $(a_t + a_s, b_t + b_s, c_t + c_s) \in \mathbb{Z}^{\times 3}$. Эту процедуру будем называть *приведением подобных*, а образ отношения $T \times S$ будем называть *приведённым отношением* и обозначать через $T + S$. Отметим, что если отношения T и S являются константными, то приведённое отношение $T + S$ также является константным.

Например, подстилающее отношение T_{CW} согласованного с тензором Копперсмита—Винограда отношения $T_{\mathrm{CW}}(q)$, выглядит следующим образом:

$$\{(0,1,1),\ (1,0,1),\ (1,1,0),\ (0,0,2),\ (0,2,0),\ (2,0,0)\}.$$

Тогда приведённое отношение $2 \cdot T_{\mathrm{CW}} = T_{\mathrm{CW}} + T_{\mathrm{CW}}$ имеет вид

$$\{(0,0,4),\ (0,4,0),\ (4,0,0),\ (0,1,3),\ (0,3,1),\ (1,0,3),\ (3,0,1),\ (1,3,0),\ (3,1,0),\\ (0,2,2),\ (2,0,2),\ (2,2,0),\ (2,1,1),\ (1,2,1),\ (1,1,2)\}.$$

5.6. Тензорный квадрат тензора Копперсмита—Винограда

Представим тензор Копперсмита—Винограда в следующем виде:

$$\Phi_{\mathrm{CW}}(q) = \varphi^{[011]} + \varphi^{[101]} + \varphi^{[110]} + \varphi^{[002]} + \varphi^{[020]} + \varphi^{[200]},$$

где тензоры $\varphi^{[011]}$, $\varphi^{[101]}$, $\varphi^{[110]}$ эквиваленты тензорам $\langle 1, 1, q\rangle$, $\langle q, 1, 1\rangle$, $\langle 1, q, 1\rangle$ соответственно, а тензоры $\varphi^{[002]}$, $\varphi^{[020]}$, $\varphi^{[200]}$ эквиваленты тензору $\langle 1, 1, 1\rangle$.

Из утверждения 2.7 следует, что декартов квадрат отношения $T_{\mathrm{CW}}(q)$

$$v(t) \;=\; \begin{array}{cccccc} (0,1,1) & (1,0,1) & (1,1,0) & (2,0,0) & (0,2,0) & (0,0,2), \\ q^{\omega/3} & q^{\omega/3} & q^{\omega/3} & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

является согласованным отношением с тензорным квадратом $\Phi_{\mathrm{CW}}(q)^{\otimes 2}$.

Отметим, что в соответствии с утверждением 3.2 отношение $T_{\mathrm{CW}}(q)^{\times 2}$ является константным и к нему можно применить разработанную технику. Однако можно показать, что таким способом нельзя получить выигрыш в оценке матричной экспоненты.

Для улучшения оценки матричной экспоненты Д. Копперсмит и С. Виноград привели подобные слагаемые и оценили матричную ёмкость тензора $\Phi_{\mathrm{CW}}(q)$ через симметрическую ёмкость приведённого отношения.

Для каждого элемента (i,j,k) приведённого отношение $2 \cdot T_{\mathrm{CW}}$ обозначим через $\varphi(q)^{[ijk]}$ соответствующий тензор, а через c_{ijk} оценку его матричной ёмкости. В качестве оценок c_{ijk} будут использоваться оценки симметрической ёмкости отношений, подстилающие отношения которых являются прообразами элементов (i,j,k) относительно операции приведения. Соответствующие отношения будем обозначать через $T(q)^{[i,j,k]}$.

Отметим, что приведённое отношение $2 \cdot T_{\mathrm{CW}}$ является симметричным (см. определение 2.6) и разбивается на четыре орбиты действия группы S_3 (см. раздел 5.5). Выберем по одному представителю из каждой орбиты: $(4,0,0)$, $(3,1,0)$, $(2,2,0)$, $(2,1,1)$.

Тензор $\varphi(q)^{[400]}$, соответствующий элементу $(4,0,0)$, равен

$$\varphi^{[200]}\varphi^{[200]},$$

и его матричная ёмкость равна 1. Следовательно, значение c_{400} можно положить равным 1.

Тензор $\varphi(q)^{[310]}$ равен сумме

$$\varphi^{200}\varphi^{110} + \varphi^{110}\varphi^{200}.$$

Если расписать его в соответствии с обозначениями из раздела 1.6, то он примет вид

$$\sum_{s=1}^{q}\bigl(x_{s,q+1}^{[1,2]} y_{s,0}^{[1,0]} z_{0,0}^{[0,0]} + x_{q+1,s}^{[2,1]} y_{0,s}^{[0,1]} z_{0,0}^{[0,0]}\bigr),$$

из которого видно, что тензор $\varphi(q)^{[310]}$ эквивалентен тензору $\langle 1, 2q, 1\rangle$. Следовательно, $c_{310} = (2q)^{\omega/3}$.

Сделаем по этому поводу простое замечание.

Утверждение 5.5. *Пусть тензор φ является суммой тензоров*:

$$\varphi = \varphi^{[a_1,b_1,c_1]} + \ldots + \varphi^{[a_n,b_n,c_n]},$$

где каждый тензор $\varphi^{[a_i,b_i,c_i]}$ эквивалентен тензору $\langle 1, q_i, 1\rangle$, а отношение $\{(a_1,b_1,c_1),\ldots,(a_n,b_n,c_n)\}$ является согласованным с тензором φ. Тогда если верны равенства $c_1 = \ldots = c_n$ и верны попарные неравенства $a_i \neq a_j$ и $b_i \neq b_j$, то тензор φ эквивалентен тензору $\langle 1, q_1 + \ldots + q_n, 1\rangle$.

Воспользуемся этим утверждением для вычисления матричной ёмкости тензора $\varphi(q)^{[220]}$.

Тензор $\varphi(q)^{[220]}$ равен следующей сумме:

$$\varphi^{[110]}\varphi^{[110]} + \varphi^{[200]}\varphi^{[020]} + \varphi^{[020]}\varphi^{[200]}.$$

Слагаемое $\varphi^{[110]}\varphi^{[110]}$ эквивалентно тензору $\langle 1, q^2, 1\rangle$, слагаемые $\varphi^{[200]}\varphi^{[020]}$ и $\varphi^{[020]}\varphi^{[200]}$ эквивалентны тензору $\langle 1,1,1\rangle$. Отношение

$$(11,11,00),\ (20,02,00),\ (02,20,00)$$

является согласованным с тензором $\varphi(q)^{[220]}$. Следовательно, тензор $\varphi(q)^{[220]}$ эквивалентен тензору $\langle 1, q^2+2, 1\rangle$. Значит, верно равенство $c_{220} = (q^2+2)^{\omega/3}$.

Тензор $\varphi(q)^{[211]}$, соответствующий элементу $(2,1,1)$, равен

$$\varphi^{[200]}\varphi^{[011]} + \varphi^{[011]}\varphi^{[200]} + \varphi^{[110]}\varphi^{[101]} + \varphi^{[101]}\varphi^{[111]},$$

и к нему неприменимо утверждение 5.5. Для оценки его матричной ёмкости воспользуемся разработанной техникой оценки через функцию Копперсмита—Винограда.

Отношение $T(q)^{[211]}$

$$\begin{array}{rcc} & T & v \\ t_1 = & \big((0,2),(1,0),(1,0)\big) & q^{\omega/3} \\ t_2 = & \big((2,0),(0,1),(0,1)\big) & q^{\omega/3} \\ u_1 = & \big((1,1),(1,0),(0,1)\big) & q^{2\cdot(\omega/3)} \\ u_2 = & \big((1,1),(0,1),(1,0)\big) & q^{2\cdot(\omega/3)} \end{array}$$

является согласованным с тензором $\varphi(q)^{[211]}$ и константным, так как оно подмножество константного отношения $T_{\mathrm{CW}}(q)^{\times 2}$.

Легко проверить, что отношение $T(q)^{[211]}$ удовлетворяет условиям утверждения 4.10. Следовательно, для оценки его симметрической ёмкости можно ограничиться вычислением функции Копперсмита—Винограда на инвариантных распределениях. В данном случае множества $\{t_1, t_2\}$ и $\{u_1, u_2\}$ являются орбитами группы $\mathrm{Aut}\big(T(q)^{[211]}\big)$. Значит, любое инвариантное распределение задаётся двумя числами α и β, соответствующими первой и второй орбите, такими что $2\alpha + 2\beta = 1$. Функция Копперсмита—Винограда как функция от α и β равна

$$\sqrt[3]{\frac{4}{\alpha^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}} \cdot q^{(2\alpha+4\beta)(\omega/3)}.$$

В данном случае максимум можно легко вычислить, так как верно равенство

$$\sqrt[3]{\frac{4}{\alpha^{2\alpha}(2\beta)^{2\beta}}} \cdot q^{(2\alpha+4\beta)(\omega/3)} = \sqrt[3]{4 \cdot \frac{(2q^{\omega})^{2\alpha}}{(2\alpha)^{2\alpha}}\,\frac{(q^{2\omega})^{2\beta}}{(2\beta)^{2\beta}}}.$$

Из утверждения 6.5 следует, что максимум этого выражения по α и β равен

$$\sqrt[3]{4(2q^{\omega}+q^{2\omega})} = (4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}.$$

Полученные результаты представим в виде таблицы.

Представитель орбиты	Мощность орбиты (m_{ijk})	Оценка матричной ёмкости (c_{ijk})
$(4,0,0)$	3	1
$(3,1,0)$	6	$(2q)^{\omega/3}$
$(2,2,0)$	3	$(q^2+2)^{\omega/3}$
$(2,1,1)$	3	$(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}$

Покажем, что приведённое отношение $2 \cdot T_{\mathrm{CW}}(q)$ удовлетворяет условиям утверждения 5.4. Любое инвариантное распределение Δ задаётся набором положительных чисел $\delta_{(400)}$, $\delta_{(310)}$, $\delta_{(220)}$, $\delta_{(211)}$, удовлетворяющих условию

$$3 \cdot \delta_{(400)} + 6 \cdot \delta_{(310)} + 3 \cdot \delta_{(220)} + 3 \cdot \delta_{(211)} = 1.$$

Любое распределение $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ из согласованного набора $\bar{\Delta}$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 2 \cdot \delta_{(400)} + 2 \cdot \delta_{(310)} + \delta_{(220)},\\
\alpha_1 &= 2 \cdot \delta_{(310)} + 2 \cdot \delta_{(211)},\\
\alpha_2 &= 2 \cdot \delta_{(220)} + \delta_{(211)},\\
\alpha_3 &= 2 \cdot \delta_{(310)},\\
\alpha_4 &= \delta_{(400)}.
\end{aligned}$$

Из этих формул видно, что инвариантное распределение Δ однозначно восстанавливается по известным значениям α_i. Следовательно, можно применить утверждение 5.4, из которого следует, что симметрическая ёмкость приведённого отношения $2 \cdot T_{\mathrm{CW}}(q)$ оценивается снизу величиной

$$f(\Delta, q, \omega) = \frac{c_{400}^{m_{400}\delta_{(400)}} c_{310}^{m_{310}\delta_{(310)}} c_{220}^{m_{220}\delta_{(220)}} c_{211}^{m_{211}\delta_{(211)}}}{\alpha_0^{\alpha_0}\alpha_1^{\alpha_1}\alpha_2^{\alpha_2}\alpha_3^{\alpha_3}\alpha_4^{\alpha_4}}.$$

Так как в соответствии с утверждением 1.12 асимптотический ранг квадрата тензора Копперсмита—Винограда оценивается величиной равной $(q+2)^2$, то матричная экспонента оценивается корнем уравнения $(q+2)^2 = f(\Delta, q, \tau)$ при фиксированных Δ и q. Оптимизируя эту оценку по Δ и q, Д. Копперсмит и С. Виноград получили оценку 2,3754... на матричную экспоненту, которая являлась лучшей в течение долгого времени.

5.7. Комментарии к вычислениям Д. Копперсмита и С. Винограда

На первый взгляд может показаться, что вычисления для тензорного квадрата дали лучшую оценку матричной ёмкости и матричной экспоненты за счёт применения функции Копперсмита—Винограда к оценке симметрической ёмкости отношения $T(q)^{[211]}$. Тем не менее это не так. Более того, можно показать, что использование только функции Копперсмита—Винограда не улучшает оценку матричной ёмкости тензора за счёт рассмотрения степеней тензора.

Причина улучшения оценки лежит в том, что для вычисления матричной ёмкость тензоров $\varphi(q)^{[310]}$ и $\varphi(q)^{[220]}$, наоборот, использовалась не функция Копперсмита—Винограда, а утверждение 5.5. Проиллюстрируем сказанное на простом примере. Пусть задан тензор

$$x_1^{[1]}y_1^{[0]}z^{[0]} + \ldots + x_n^{[1]}y_n^{[0]}z^{[0]} + x_{n+1}^{[0]}y_{n+1}^{[1]}z^{[0]} + \ldots + x_{2n}^{[0]}y_{2n}^{[1]}z^{[0]}.$$

Без всякой функции Копперсмита—Винограда понятно, что матричная ёмкость этого тензора равна $(2n)^{\omega/3} = 2^{\omega/3}n^{\omega/3}$. В то же время отношение $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ является константным. Следовательно, можно применить разработанную технику, которая даёт оценку матричной ёмкости этого тензора $2^{2/3}n^{\omega/3}$. Если про матричную экспоненту известно только то, что $\omega \geqslant 2$, то вторая оценка заведомо хуже первой.

Если использовать функцию Копперсмита—Винограда для оценки ёмкостей тензоров $\varphi(q)^{[310]}$ и $\varphi(q)^{[220]}$, то, в конечном итоге, оценка матричной экспоненты не изменится и останется такой же, как в разделе 5.3.

5.8. Корректирующий фактор для отношения $4 \cdot T_{\mathrm{CW}}$

Проведём аналогичные рассуждения и вычисления применительно к четвёртой степени тензора Копперсмита—Винограда.

Рассмотрим приведённое отношение $4 \cdot T_{\mathrm{CW}}$. На этом отношении также действует симметрическая группа S_3 как группа автоморфизмов. Представители орбит действия этой группы следующие:

$$(8,0,0),\ (7,1,0),\ (6,2,0),\ (6,1,1),\ (5,3,0),\\ (5,2,1),\ (4,4,0),\ (4,3,1),\ (4,2,2),\ (3,3,2).$$

Мощности орбит равны 3, 6, 6, 3, 6, 6, 3, 6, 3, 3 соответственно.

Любое распределения вероятностей Δ_i из согласованного набора $\bar{\Delta}$, где Δ — инвариантное распределение, определяется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 2 \cdot \delta_{(800)} + 2 \cdot \delta_{(710)} + 2 \cdot \delta_{(620)} + 2 \cdot \delta_{(530)} + \delta_{440},\\
\alpha_1 &= 2 \cdot \delta_{(710)} + 2 \cdot \delta_{(611)} + 2 \cdot \delta_{(521)} + 2 \cdot \delta_{(431)},\\
\alpha_2 &= 2 \cdot \delta_{(620)} + 2 \cdot \delta_{(521)} + 2 \cdot \delta_{(422)} + \delta_{(332)},\\
\alpha_3 &= 2 \cdot \delta_{(530)} + 2 \cdot \delta_{(431)} + 2 \cdot \delta_{(332)},\\
\alpha_4 &= 2 \cdot \delta_{(440)} + 2 \cdot \delta_{(431)} + \delta_{(422)},\\
\alpha_5 &= 2 \cdot \delta_{(530)} + 2 \cdot \delta_{(521)},\\
\alpha_6 &= 2 \cdot \delta_{(620)} + \delta_{(611)},\\
\alpha_7 &= 2 \cdot \delta_{(710)},\\
\alpha_8 &= \delta_{(800)}.
\end{aligned}$$

Если рассмотреть эти равенства как линейные уравнения относительно переменных $\delta_{(ijk)}$, то в полученной системе имеем девять уравнений и десять переменных. Так как число уравнений меньше числа неизвестных, то значения переменных восстанавливаются неоднозначно. Следовательно, утверждение 5.4 неприменимо и в этом случае придётся иметь дело с корректирующим фактором.

Ранг полученной системы уравнений равен 9. Зафиксируем решение d_{ijk} соответствующей однородной системы линейных уравнений:

$$d_{800}=0,\quad d_{710}=0,\quad d_{620}=0,\quad d_{611}=0,\quad d_{530}=-1,$$
$$d_{521}=1,\quad d_{440}=2,\quad d_{431}=-1,\quad d_{422}=-2,\quad d_{322}=2.$$

Отметим, что корректирующий фактор заведомо равен единице для таких распределений Δ, на которых достигается максимум энтропии в классе эквивалентных распределений.

Если в классе эквивалентности есть инвариантные распределения, то максимум энтропии в этом классе достигается на одном из этих распределений. В рассматриваемом случае, если распределение Δ является инвариантным, то множество всех инвариантных распределений из класса эквивалентности распределения Δ параметрически задаётся следующим образом: $\Delta(t)=(\delta_{(ijk)}+t\cdot d_{ijk})$, где значение параметра t такое, что верно неравенство $\delta_{ijk}+t\cdot d_{ijk}\geqslant 0$ для любой координаты вектора $\Delta(t)$.

Методами дифференциального анализа можно показать, что если для инвариантного распределения Δ верно равенство

$$\frac{\delta_{(530)}\delta_{(431)}\delta_{(422)}}{\delta_{(521)}\delta_{(440)}\delta_{(332)}}=1,$$

то на этом распределении достигается максимум энтропии в соответствующем классе эквивалентности.

Ниже будет использоваться следующее распределение Δ, для которого выполнено это условие:

$$\delta_{(800)}=0,\quad \delta_{(710)}=0{,}0000164797,\quad \delta_{(620)}=0,\quad \delta_{(611)}=0{,}00164269,$$
$$\delta_{(530)}=0{,}0049392,\quad \delta_{(521)}=0{,}00943876,\quad \delta_{(440)}=0{,}0136874,$$
$$\delta_{(431)}=0{,}045491,\quad \delta_{(422)}=0{,}0723693,\quad \delta_{(332)}=0{,}125863.$$

5.9. Оценка ёмкости отношения $4\cdot T_{\mathrm{CW}}$

Для вычисления значения функции Копперсмита—Винограда необходимо оценить матричные ёмкости тензоров, соответствующих представителям орбит действия группы S_3.

Отметим, что матричную ёмкость тензоров, соответствующих элементами $(8,0,0)$, $(7,1,0)$, $(6,2,0)$, $(5,3,0)$, $(4,4,0)$, можно вычислить, используя утверждение 5.5. Результат применения утверждения 5.5 представим в виде таблицы.

Представитель орбиты	Мощность орбиты (m_{ijk})	Оценка матричной ёмкости (c_{ijk})
$(8,0,0)$	3	1
$(7,1,0)$	6	$(4q)^{\omega/3}$
$(6,2,0)$	6	$(6q^2+4)^{\omega/3}$
$(5,3,0)$	6	$(4q^3+12q)^{\omega/3}$
$(4,4,0)$	3	$(q^4+12q^2+6)^{\omega/3}$

Если предполагать, что верно неравенство $\omega \geqslant 2{,}373$, то при $q = 5$ верны следующие оценки матричной ёмкости соответствующих тензоров.

Представитель орбиты	Оценка матричной ёмкости (c_{ijk})
$(8,0,0)$	1
$(7,1,0)$	10,6934
$(6,2,0)$	53,7439
$(5,3,0)$	149,216
$(4,4,0)$	223,069

Перейдём к более сложным тензорам. Воспользуемся равенством $4 \cdot T_{\mathrm{CW}} = 2 \cdot T_{\mathrm{CW}} + 2 \cdot T_{\mathrm{CW}}$ и вычислениями раздела 5.6.

Тензор $\varphi^{[611]}$, соответствующий элементу $(6,1,1)$, запишем в виде

$$\varphi^{[400]}\varphi^{[211]} + \varphi^{[211]}\varphi^{[400]} + \varphi^{[310]}\varphi^{[301]} + \varphi^{[301]}\varphi^{[310]}.$$

Ему соответствует взвешенное отношение $T(q)^{[611]}$:

$$\begin{array}{ll}
\qquad T^{[611]} & \qquad v \\
t_1 = \big((4,2),(0,1),(0,1)\big) & (4q^{2\omega} + 8q^{\omega})^{1/3} \\
t_2 = \big((2,4),(1,0),(1,0)\big) & (4q^{2\omega} + 8q^{\omega})^{1/3} \\
u_1 = \big((3,3),(1,0),(0,1)\big) & \quad (2q)^{2\omega/3} \\
u_2 = \big((3,3),(0,1),(1,0)\big) & \quad (2q)^{2\omega/3}.
\end{array}$$

Дадим пояснения к этой таблице.

Рассмотрим, например, тензор $\varphi^{[301]}\varphi^{[310]}$. Из утверждения 1.39 следует, что его матричную ёмкость можно оценить через матричные ёмкости тензоров $\varphi^{[301]}$ и $\varphi^{[310]}$,

$$\mathrm{c}\big(\varphi^{[301]}\varphi^{[310]}\big) \geqslant \mathrm{c}\big(\varphi^{[301]}\big)\mathrm{c}\big(\varphi^{[310]}\big),$$

которые вычислены в разделе 5.6.

С другой стороны, в соответствии с определением декартова произведения отношений элементу $([301], [310])$ соответствует элемент $\big((3,3),(0,1),(1,0)\big)$ в отношении $2 \cdot (2 \cdot T_{\mathrm{CW}})$.

Оценим симметрическую ёмкость отношения $T(q)^{[611]}$. Для этого ещё раз воспользуемся результатами раздела 5.6. Заметим, что подстилающее отношение $T^{[611]}$ эквивалентно отношению $T^{[211]}$ из раздела 5.6, а взвешенные отношения $T(q)^{[611]}$ и $T(q)^{[211]}$ имеют одинаковую группу автоморфизмов. Следовательно, можно аналогичным образом получить следующую оценку симметрической ёмкости отношения $T^{[611]}$:

$$c_{611} = \sqrt[3]{4(8q^{2\omega} + 16q^{\omega} + (2q)^{2\omega})}.$$

При предположении $\omega \geqslant 2{,}373$ и при $q = 5$ получаем оценку $c_{611} = 66{,}3607$.

Тензор $\varphi^{[521]}$, соответствующий элементу $(5,2,1)$, имеет вид

$$\varphi^{[400]}\varphi^{[121]} + \varphi^{[121]}\varphi^{[400]} + \varphi^{[310]}\varphi^{[211]} + \varphi^{[211]}\varphi^{[310]} + \varphi^{[301]}\varphi^{[220]} + \varphi^{[220]}\varphi^{[301]}.$$

Ему соответствует взвешенное отношение $T(q)^{[521]}$:

$$\begin{array}{cc}
T^{[521]} & v \\
t_1 = \big((4,1),(0,2),(0,1)\big) & (4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3} \\
t_2 = \big((1,4),(2,0),(1,0)\big) & (4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3} \\
t_3 = \big((3,2),(1,1),(0,1)\big) & (2q)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3} \\
t_4 = \big((2,3),(1,1),(1,0)\big) & (2q)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3} \\
t_5 = \big((3,2),(0,2),(1,0)\big) & (2q)^{\omega/3}(q^2+2)^{\omega/3} \\
t_5 = \big((2,3),(2,0),(0,1)\big) & (2q)^{\omega/3}(q^2+2)^{\omega/3}.
\end{array}$$

Множества

$$T_1 = \{t_1, t_2\}, \quad T_2 = \{t_3, t_4\}, \quad T_3 = \{t_5, t_6\}$$

являются орбитами группы автоморфизмов отношения $T(q)^{[521]}$. Зададим инвариантное распределение $\Delta_{521} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, где число α соответствует орбите T_1, число β — орбите T_2, число γ — орбите T_3 и верно равенство $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 1$. Обозначим вес элемента t_1 через a, вес элемента t_3 через b, а вес элемента t_5 через c. Тогда функция Копперсмита—Винограда примет следующий вид:

$$\mathrm{cw}(\Delta_{521}) = \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha^{2\alpha}(\beta+\gamma)^{2(\beta+\gamma)}(\alpha+\gamma)^{2(\alpha+\gamma)}(2\beta)^{2\beta}}} \cdot a^{2\alpha} b^{2\beta} c^{2\gamma}.$$

Если положить $q = 5$ и

$$\alpha = 0{,}007256094628502436, \qquad \beta = 0{,}31746552811957224, \quad \gamma = 0{,}17527837724170733$$

и предположить, что $\omega \geqslant 2{,}373$, то получаем оценку c_{521} снизу для матричной ёмкости тензора $\varphi^{[521]}$, равную 235,633.

Тензор $\varphi^{[431]}$, соответствующий элементу $(4,3,1)$, имеет вид

$$\varphi^{[400]}\varphi^{[031]} + \varphi^{[031]}\varphi^{[400]} + \varphi^{[310]}\varphi^{[121]} + \varphi^{[121]}\varphi^{[310]} + \\ + \varphi^{[301]}\varphi^{[130]} + \varphi^{[130]}\varphi^{[301]} + \varphi^{[220]}\varphi^{[211]} + \varphi^{[211]}\varphi^{[220]}.$$

Ему соответствует взвешенное отношение $T(q)^{[431]}$

$$\begin{array}{cc}
T^{[431]} & v \\
t_1 = \big((4,0),(0,3),(0,1)\big) & (2q)^{\omega/3} \\
t_2 = \big((0,4),(3,0),(1,0)\big) & (2q)^{\omega/3} \\
t_3 = \big((3,1),(1,2),(0,1)\big) & (2q)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3} \\
t_4 = \big((1,3),(2,1),(1,0)\big) & (2q)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3} \\
t_5 = \big((3,1),(0,3),(1,0)\big) & (2q)^{\omega/3}(2q)^{\omega/3} \\
t_6 = \big((1,3),(3,0),(0,1)\big) & (2q)^{\omega/3}(2q)^{\omega/3} \\
t_7 = \big((2,2),(2,1),(0,1)\big) & (q^2+2)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3} \\
t_8 = \big((2,2),(1,2),(1,0)\big) & (q^2+2)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}.
\end{array}$$

Множества

$$T_1 = \{t_1, t_2\}, \quad T_2 = \{t_3, t_4\}, \quad T_3 = \{t_5, t_6\}, \quad T_4 = \{t_7, t_8\}$$

являются орбитами группы автоморфизмов отношения $T(q)^{[431]}$. Зададим инвариантное распределение $\Delta_{431} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, где число α соответствует орбите T_1, число β — орбите T_2, число γ — орбите T_3, число δ — орбите T_4 и верно равенство $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 1$. Обозначим вес элемента t_1 через a, вес элемента t_3 через b, вес элемента t_5 через c, а вес элемента t_7 через d. Тогда функция Копперсмита—Винограда примет следующий вид:

$$\mathrm{cw}(\Delta_{431}) = \sqrt[3]{\frac{2}{\alpha^{2\alpha}(\beta+\gamma)^{2(\beta+\gamma)}(\alpha+\gamma)^{2(\alpha+\gamma)}(\beta+\delta)^{2(\beta+\delta)}(2\delta)^{2\delta}}} \cdot a^{2\alpha} b^{2\beta} c^{2\gamma} d^{2\delta}.$$

Если положить $q = 5$ и

$$\alpha = 0{,}00033677561687919414, \quad \beta = 0{,}066638261148488422,$$
$$\gamma = 0{,}012911822101598204, \quad \delta = 0{,}4201131407966383$$

и предположить, что $\omega \geqslant 2{,}373$, то получаем оценку c_{431} снизу для матричной ёмкости тензора $\varphi^{[431]}$, равную 472,789.

Тензор $\varphi^{[422]}$, соответствующий элементу $(4, 2, 2)$, имеет вид

$$\varphi^{[400]}\varphi^{[022]} + \varphi^{[022]}\varphi^{[400]} + \varphi^{[310]}\varphi^{[112]} + \varphi^{[112]}\varphi^{[310]} +$$
$$+ \varphi^{[301]}\varphi^{[121]} + \varphi^{[121]}\varphi^{[301]} + \varphi^{[220]}\varphi^{[202]} + \varphi^{[202]}\varphi^{[220]} + \varphi^{[211]}\varphi^{[211]}.$$

Ему соответствует взвешенное отношение $T(q)^{[422]}$:

$T^{[422]}$	v
$t_1 = \big((4,0),(0,2),(0,2)\big)$	$(q^2+2)^{\omega/3}$
$t_2 = \big((0,4),(2,0),(2,0)\big)$	$(q^2+2)^{\omega/3}$
$t_3 = \big((3,1),(1,1),(0,2)\big)$	$(2q)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}$
$t_4 = \big((1,3),(1,1),(2,0)\big)$	$(2q)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}$
$t_5 = \big((3,1),(0,2),(1,1)\big)$	$(2q)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}$
$t_6 = \big((1,3),(2,0),(1,1)\big)$	$(2q)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}$
$t_7 = \big((2,2),(2,0),(0,2)\big)$	$\big((q^2+2)^{\omega/3}\big)^2$
$t_8 = \big((2,2),(0,2),(2,0)\big)$	$\big((q^2+2)^{\omega/3}\big)^2$
$t_9 = \big((2,2),(1,1),(1,1)\big)$	$\big((4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}\big)^2.$

Множества

$$T_1 = \{t_1, t_2\}, \quad T_2 = \{t_3, t_4, t_5, t_6\}, \quad T_3 = \{t_7, t_8\}, \quad T_4 = \{t_9\}$$

являются орбитами группы автоморфизмов отношения $T(q)^{[422]}$. Зададим инвариантное распределение $\Delta_{422} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, где число α соответствует орбите T_1, число β — орбите T_2, число γ — орбите T_3, число δ — орбите T_4 и верно равенство $2\alpha+4\beta+2\gamma+\delta=1$. Обозначим вес элемента t_1 через a, вес элемента t_3 через b, вес элемента t_7 через c, а вес элемента t_9 через d. Тогда функция Копперсмита—Винограда примет следующий вид:

$$\operatorname{cw}(\Delta_{422}) = \sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^{2\alpha}(2\beta)^{4\beta}(2\gamma+\delta)^{2\gamma+\delta}(\alpha+\beta+\gamma)^{4(\alpha+\beta+\gamma)}(2\beta+\delta)^{2(2\beta+\delta)}}} \times \\ \times a^{2\alpha}b^{4\beta}c^{2\gamma}d^{\delta}.$$

Если положить $q=5$ и

$$\alpha = 0{,}0003367756167877737, \quad \beta = 0{,}03977504179086229, \\ \gamma = 0{,}14242216003378116, \quad \delta = 0{,}555381961535413$$

и предположить, что $\omega \geqslant 2{,}373$, то получаем оценку c_{422} снизу для матричной ёмкости тензора $\varphi^{[422]}$, равную 605,439.

Тензор $\varphi^{[332]}$, соответствующий элементу $(3,3,2)$, имеет вид

$$\varphi^{[310]}\varphi^{[022]} + \varphi^{[022]}\varphi^{[310]} + \varphi^{[301]}\varphi^{[031]} + \varphi^{[031]}\varphi^{[301]} + \varphi^{[130]}\varphi^{[202]} + \\ + \varphi^{[202]}\varphi^{[130]} + \varphi^{[220]}\varphi^{[112]} + \varphi^{[112]}\varphi^{[220]} + \varphi^{[211]}\varphi^{[121]} + \varphi^{[121]}\varphi^{[211]}.$$

Ему соответствует взвешенное отношение $T(q)^{[332]}$

$T^{[332]}$	v
$t_1 = \big((3,0),(1,2),(0,2)\big)$	$(2q)^{\omega/3}(q^2+2)^{\omega/3}$
$t_2 = \big((0,3),(2,1),(2,0)\big)$	$(2q)^{\omega/3}(q^2+2)^{\omega/3}$
$t_3 = \big((1,2),(3,0),(0,2)\big)$	$(2q)^{\omega/3}(q^2+2)^{\omega/3}$
$t_4 = \big((2,1),(0,3),(2,0)\big)$	$(2q)^{\omega/3}(q^2+2)^{\omega/3}$
$t_5 = \big((3,0),(0,3),(1,1)\big)$	$\big((2q)^{\omega/3}\big)^2$
$t_6 = \big((0,3),(3,0),(1,1)\big)$	$\big((2q)^{\omega/3}\big)^2$
$t_7 = \big((2,1),(2,1),(0,2)\big)$	$(q^2+2)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}$
$t_8 = \big((1,2),(1,2),(2,0)\big)$	$(q^2+2)^{\omega/3}(4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}$
$t_9 = \big((2,1),(1,2),(1,1)\big)$	$\big((4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}\big)^2$
$t_{10} = \big((1,2),(2,1),(1,1)\big)$	$\big((4q^{2\omega}+8q^{\omega})^{1/3}\big)^2.$

Множества

$$T_1 = \{t_1,t_2,t_3,t_4\}, \quad T_2 = \{t_5,t_6\}, \quad T_3 = \{t_7,t_8\}, \quad T_4 = \{t_9,t_{10}\}$$

являются орбитами группы автоморфизмов отношения $T(q)^{[332]}$. Зададим инвариантное распределение $\Delta_{332} = \{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$, где число α соответствует орбите T_1, число β — орбите T_2, число γ — орбите T_3, число δ — орбите T_4 и верно равенство $4\alpha+2\beta+2\gamma+2\delta=1$. Обозначим вес элемента t_1 через a, вес элемента t_5

через b, вес элемента t_7 через c, а вес элемента t_9 через d. Тогда функция Копперсмита—Винограда примет следующий вид:

$$\mathrm{cw}(\Delta_{332}) = \sqrt[3]{\frac{1}{(\alpha+\beta)^{4(\alpha+\beta)}(\alpha+\gamma+\delta)^{4(\alpha+\gamma+\delta)}}} \times \\ \times \sqrt[3]{\frac{1}{(2\alpha+\gamma)^{2(2\alpha+\gamma)}(2\beta+2\delta)^{2\beta+2\delta}}} \cdot a^{4\alpha}b^{2\beta}c^{2\gamma}d^{2\delta}.$$

Если положить $q=5$ и

$$\alpha = 0{,}01313681440261794, \quad \beta = 0{,}00011178331577663299, \\ \gamma = 0{,}15626079332914175, \quad \delta = 0{,}31735379454468365$$

и предположить, что $\omega \geqslant 2{,}373$, то получаем оценку c_{332} снизу для матричной ёмкости тензора $\varphi^{[332]}$, равную 793,543.

Полученные оценки при $q=5$ и $\omega \geqslant 2{,}373$ представим в виде таблицы.

Представитель орбиты	Мощность орбиты (m_{ijk})	Оценка матричной ёмкости (c_{ijk})
$(8,0,0)$	3	1
$(7,1,0)$	6	10,6934
$(6,2,0)$	6	53,7439
$(5,3,0)$	6	149,216
$(4,4,0)$	3	223,069
$(6,1,1)$	3	66,3607
$(5,2,1)$	6	235,633
$(4,3,1)$	6	472,789
$(4,2,2)$	3	605,439
$(3,3,2)$	3	793,543

Функция Копперсмита—Винограда для инвариантного распределения $\Delta = \{\delta_{(ijk)}\}$ на отношении $4 \cdot T_{\mathrm{CW}}$ имеет вид

$$g(\Delta, q, \omega) = \frac{\prod\limits_{i+j+k=8,\ i\geqslant j\geqslant k\geqslant 0} c_{ijk}^{m_{ijk}\delta_{(ijk)}}}{\prod\limits_{i=0}^{8} \alpha_i^{\alpha_i}}.$$

Если использовать распределение Δ из раздела 5.8, то имеем следующую оценку снизу для матричной ёмкости четвёртой степени тензора Копперсмита—Винограда:

$$\mathrm{c}\big(\Phi_{\mathrm{CW}}(5)\big) \geqslant 2401{,}21.$$

Так как в соответствии с утверждением 1.12 асимптотический ранг четвёртой степени тензора Копперсмита—Винограда $\Phi_{\mathrm{CW}}(5)$ оценивается сверху величиной $(5+2)^4 = 2401$, то получаем противоречие. Следовательно, верна оценка

$$\omega < 2{,}373.$$

6. Вспомогательные факты

6.1. Лемма Фекете

Леммой Фекете принято называть следующее утверждение.

Утверждение 6.1. *Пусть задана такая последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, что для любых натуральных чисел a и b выполнено неравенство $c_{a+b} \leqslant c_a + c_b$. Тогда существует такой предел $c = \lim\limits_{k\to\infty} c_k/k$, что $c \leqslant c_k/k$ при любом натуральном k.*

Мы использовали некоторые следствия из леммы Фекете.

Следствие 6.1. *Пусть задана такая последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, что при любых неотрицательных целых числах a и b выполнено неравенство $c_{a+b} \leqslant c_a c_b$. Тогда существует такой предел $c = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k}$, что $c \leqslant \sqrt[k]{c_k}$ при любом натуральном k.*

Следствие 6.2. *Пусть задана такая последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, что для любых натуральных чисел a и b выполнено неравенство $c_{a+b} \geqslant c_a + c_b$. Пусть существует такая константа $C > 0$, что выполнено неравенство $c_k \leqslant kC$ для любого k. Тогда существует такой предел $c = \lim\limits_{k\to\infty} c_k/k$, что $c \geqslant c_k/k$ при любом натуральном k.*

Следствие 6.3. *Пусть задана такая последовательность $\{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ неотрицательных чисел, что при любых неотрицательных целых числах a и b выполнено неравенство $c_{a+b} \geqslant c_a c_b$. Пусть существует такая константа $C > 0$, что выполнено неравенство $c_k \leqslant C^k$ для любого k. Тогда существует такой предел $c = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k}$, что $c \geqslant \sqrt[k]{c_k}$ при любом натуральном k.*

6.2. Множества Эрдёша—Турана

В работе [6] рассматривались следующие множества целых чисел.

Определение 6.1. Множество целых чисел $B \subset \mathbb{Z}$ будем называть множеством Эрдёша—Турана, если в нём не содержатся трёхчленные арифметические прогрессии с ненулевой разностью.

Эквивалентное определение состоит в следующем. Если $a, b, c \in B$, то из равенства $a + b = 2 \cdot c$ следует равенство $a = b = c$.

Существование достаточно плотных множеств Эрдёша—Турана гарантируется следующим утверждением, доказанным в работах [2, 8].

Утверждение 6.2. *Для любого натурального числа* $M \geqslant 2$ *существует множество Эрдёша—Турана* $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_{M'} \mid 0 \leqslant b_i < M/2\}$ *мощности* $M' = M^{\alpha(M)}$, *где* $\alpha(M) \to 1$ *при* $M \to \infty$.

6.3. Энтропия распределения вероятностей

Пусть на конечном множестве X задано распределение вероятностей

$$\left(\alpha_x \;\middle|\; \alpha_x \geqslant 0,\ \sum_{x \in X} \alpha_x = 1\right).$$

Определение 6.2. Энтропией $h(\alpha_x)$ распределения вероятностей (α_x) называется число

$$-\sum_{x \in X,\ \alpha_x \neq 0} \alpha_x \ln \alpha_x.$$

Пусть на конечном множестве X задано распределение вероятностей $\Delta = (\delta_x)$ и отображение конечных множеств $f\colon X \to Y$. Тогда на множестве Y определено распределение вероятностей $\Delta_f = (\delta_{f,y})$, где число $\delta_{f,y}$ равно вероятности события $f(x) = y$.

Доказательство следующего утверждения можно найти, например, в [1].

Утверждение 6.3. *Пусть на конечном множестве* X *задано распределение вероятностей* $\Delta = (\delta_x)$ *и задано отображение конечных множеств* $f\colon X \to Y$. *Тогда верно неравенство* $h(\Delta) \geqslant h(\Delta_f)$.

Полезными являются также следующие факты.

Утверждение 6.4 [1]. *Пусть на конечном множестве* X *заданы распределения вероятностей* $\Delta^{(i)} = \bigl(\delta_x^{(i)}\bigr)$ *в количестве* k *штук, т. е.* $i = 1, \ldots, k$. *Пусть задано распределение вероятностей* $(\alpha_i \mid i = 1, \ldots, k)$. *Тогда определено распределение вероятностей*

$$\Delta = \left(\delta_x \;\middle|\; \delta_x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot \delta_x^{(i)}\right),$$

для энтропии которого верно следующее неравенство:

$$h(\Delta) \geqslant \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \cdot h\bigl(\Delta^{(i)}\bigr).$$

Утверждение 6.5. *Пусть заданы положительные числа* $q_1, q_2, \ldots, q_n$. *Тогда максимум выражения*

$$\frac{q_1^{\alpha_1}}{\alpha_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{q_2^{\alpha_2}}{\alpha_2^{\alpha_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{q_n^{\alpha_n}}{\alpha_n^{\alpha_n}}$$

по всем распределениям вероятностей (α_i) *равен* $q_1 + q_2 + \ldots + q_n$.

Литература

[1] Духин А. А. Теория информации. — М.: Гелиос АРВ, 2007.

[2] Behrend F. On sets of integers which contain no three in arithmetic progression // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1946. — Vol. 32. — P. 331—332.

[3] Bini D. Relations between exact and approximate bilinear algorithms // Calcolo. — 1980. — Vol. 17. — P. 87—97.

[4] Bini D., Capovani M., Lotti G., Romani F. $O(n^{2.7799})$ complexity for matrix multiplication. Strassen algorithm is not optimal // Inform. Process. Lett. — 1979. — Vol. 8, no. 5. — P. 234—235.

[5] Coppersmith D., Winograd S. Matrix multiplication via arithmetic progressions // J. Symbol. Comput. — 1990. — Vol. 9. — P. 251—280.

[6] Erdős P., Turan P. On some sequences of integer // J. London Math. Soc. — 1936. — Vol. 11. — P. 261—264.

[7] Pan V. Strassen algorithm is not optimal. Trilinear technique of aggregating, uniting and canceling for constructing fast algorithms for matrix multiplication // Proc. 19th Ann. IEEE Symp. on Foundation of Computer Science. — Ann Arbor, 1978. — P. 166—176.

[8] Salem R., Spencer D. On sets of integers which contain no three in arithmetic progression // Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. — 1942. — Vol. 28. — P. 561—563.

[9] Schönhage A. Partial and total matrix multiplication // SIAM J. Comput. — 1981. — Vol. 10, no. 3. — P. 434—456.

[10] Strassen V. Gaussian elimination is not optimal // Numer. Math. — 1969. — Vol. 13. — P. 354—356.

[11] Strassen V. Relative bilinear complexity and matrix multiplication // J. Reine Angew. Math. — 1987. — Vol. 375/376. — P. 406—443.