Псевдохарактеры на свободных группах, инвариантные относительно некоторых типов эндоморфизмов

Д. З. КАГАН
Московский государственный университет путей сообщения (*МИИТ*)
e-mail: dmikagan@gmail.com

УДК 512.543.76

Ключевые слова: нетривиальные псевдохарактеры, квазихарактеры, ограниченные когомологии, свободная группа, свободные произведения, эндоморфизмы.

Аннотация

Исследуются способы построения нетривиальных псевдохарактеров на свободной группе F_n, инвариантных относительно определённых типов эндоморфизмов. Найдены некоторые условия на эндоморфизмы свободной группы, при выполнении которых существует нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно этих эндоморфизмов. Исследованы свободные произведения $R = \tilde{R} * \prod\limits_{i=k}^{n} \langle r_i \rangle$, где один множитель — F_n, а другой — группа, на которой существует псевдохарактер. Для таких произведений получен аналогичный результат об условиях существования нетривиальных псевдохарактеров, инвариантных относительно некоторых эндоморфизмов.

Abstract

D. Z. Kagan, Pseudocharacters on free groups, invariant with respect to some types of endomorphisms, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 2, pp. 167—176.

We investigate methods for constructing nontrivial pseudocharacters on free group F_n invariant with respect to certain types of endomorphisms. We find some conditions for endomorphisms of the free group under which there is a nontrivial pseudocharacter that is invariant with respect to these endomorphisms. We consider free products $R = \tilde{R} * \prod\limits_{i=k}^{n} \langle r_i \rangle$, where one factor is F_n, and the other factor is a group on which there is a pseudocharacter. For such products we obtain a similar result about the conditions of existence of nontrivial pseudocharacters invariant with respect to certain endomorphisms.

Пусть G — произвольная группа. Напомним основные определения. Квазихарактером на группе G называется функция из группы G в пространство действительных чисел $\mathbb{R}$, для которой $f(xy) - f(x) - f(y) \leqslant \varepsilon$ для любых элементов x, y группы G и некоторого $\varepsilon > 0$. Псевдохарактер — это такой квазихарактер, что $\varphi(x^n) = n\varphi(x)$ для любого $x \in G$. Нетривиальный псевдохарактер — это псевдохарактер, для которого существуют такие $a, b \in G$, что $\varphi(ab) \neq \varphi(a) + \varphi(b)$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 2, с. 167—176.

Аддитивным характером (или просто характером) группы называется отображение из группы G в $\mathbb{R}$, для которого $f(ab) = f(a) + f(b)$ при любых $a, b \in G$. Также можно рассматривать квазихарактеры и псевдохарактеры как функции в произвольное банахово пространство. Все результаты, полученные для вещественных псевдохарактеров, автоматически переносятся на псевдохарактеры в произвольное банахово пространство.

Термины «псевдохарактер» и «квазихарактер» были введены А. И. Штерном. Исследованиями псевдохарактеров занимались В. А. Файзиев, Р. И. Григорчук, В. Г. Бардаков.

Существование псевдохарактеров связано со многими важными характеристиками групп, например с их группами когомологий, шириной вербальных подгрупп, устойчивостью уравнений на группах. Все псевдохарактеры произвольной группы G образуют вещественное линейное пространство, которое обозначается через $PX(G)$, аддитивные характеры составляют подпространство $X(G)$. В работах Р. И. Григорчука доказано, что имеет место изоморфизм пространств $H^{(2)}_{\mathrm{b},2}(G) \cong PX(G)/X(G)$, где $H^{(2)}_{\mathrm{b},2}(G)$ — это так называемая сингулярная часть второй группы когомологий $H^{(2)}_{\mathrm{b}}(G)$, т. е. фактор-пространство всех псевдохарактеров по аддитивным характерам изоморфно подпространству $H^{(2)}_{\mathrm{b},2}(G)$ второй группы ограниченных когомологий $H^{(2)}_{\mathrm{b}}(G)$. В частности, если фактор-пространство $PX(G)/X(G)$ бесконечномерно, то и вторая группа ограниченных когомологий также бесконечномерна.

Также доказано, что если на группе G существует нетривиальный псевдохарактер, то ширина любой вербальной подгруппы $V(G)$, заданной конечным собственным множеством слов V из коммутанта G', бесконечна относительно V. В частности, коммутант группы, на которой существует нетривиальный псевдохарактер, имеет бесконечную ширину относительно коммутаторов.

В [5] В. А. Файзиев доказал существование нетривиальных псевдохарактеров на свободных произведениях нееденичных групп, за исключением $Z_2 * Z_2$. Также в этой статье доказано, что на разрешимых группах нетривиальные псевдохарактеры не существуют. В [2] Р. И. Григорчуком доказано, что нетривиальные псевдохарактеры существуют на свободных произведениях с объединённой подгруппой и на HNN-расширениях при некоторых дополнительных условиях на эти группы. Также в [2] установлено, что нетривиальные псевдохарактеры существуют на группах с одним определяющим соотношением, имеющих не менее трёх образующих. Заметим, что на аменабельных группах (см. [1, 2]) все псевдохарактеры являются аддитивными. В [3, 4] доказаны некоторые обобщения теорем Григорчука, касающиеся аномальных произведений различных групп.

Данная работа посвящена исследованию нетривиальных псевдохарактеров на свободных группах, причём таких псевдохарактеров, которые не зависят от определённых типов эндоморфизмов. Вопрос о существовании нетривиальных псевдохарактеров свободной группы, инвариантных относительно некоторых её эндоморфизмов, ставится в работе [2] Р. И. Григорчука. Этот вопрос возникает в связи с задачей о существовании нетривиальных псевдохарактеров на группах с одним определяющим соотношением и двумя образующими. В данной статье рассматриваются некоторые частные случаи эндоморфизмов свободной группы и соответствующие им способы построения инвариантных псевдохарактеров.

Пусть $F_n = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ — свободная группа ранга n, порождённая a_i, и пусть на F_n задан эндоморфизм, при котором порождающие этой группы преобразуются следующим образом:

$$a_0 \to a_1, \quad a_1 \to a_2, \ldots, \quad a_{n-2} \to a_{n-1}, \quad a_{n-1} \to U_0(a_0, \ldots, a_{n-1}).$$

U_0 является элементом свободной группы $F_n = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$, поэтому мы можем рассмотреть несократимую запись элемента U_0 в порождающих a_i:

$$U_0 = a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} \ldots a_{i_s}^{k_s}.$$

Обозначим через U_{00} часть слова U_0, которая содержит все буквы $a_0^{\pm 1}$, лежащие в U_0, и ограничена ими, через U_{01} обозначим часть U_0, лежащую слева от U_{00}, а через U_{02} — часть U_0, лежащую справа от U_{00}. Таким образом, выполняется равенство $U_0 \equiv U_{01} U_{00} U_{02}$. Далее мы попытаемся наложить такие условия на U_0, чтобы на группе F_n можно было задать нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно описанного эндоморфизма.

Рассмотрим группу F_n как свободное произведение бесконечных циклических групп:

$$F_n = \langle a_0 \rangle * \langle a_1 \rangle * \ldots * \langle a_{n-1} \rangle.$$

Зададим на каждой группе $\langle a_i \rangle$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, отображение s:

$$s(a_i^p) = \begin{cases} 1, & p > 0, \\ -1, & p < 0. \end{cases}$$

Каждый элемент группы F_n представляется в виде произведения элементов из групп $\langle a_i \rangle$:

$$c = a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \ldots a_{i_p}^{r_p},$$

где соседние слоги $a_{i_j}^{r_j}$ и $a_{i_{j+1}}^{r_{j+1}}$ принадлежат разным циклическим подгруппам $\langle a_i \rangle$. Будем называть слогом некоторого элемента F_n подслово его несократимой записи $c = a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \ldots a_{i_p}^{r_p}$, имеющее вид a_i^r, справа и слева от которого уже не стоят буквы a_i.

Теперь определим на элементах группы F_n функции f и φ. Функцию f зададим как сумму значений отображения s на слогах каждого элемента:

$$f(a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \ldots a_{i_p}^{r_p}) = s(a_{i_1}^{r_1}) + s(a_{i_2}^{r_2}) + \ldots + s(a_{i_p}^{r_p}).$$

Таким образом, имеем равенство

$$f(a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \ldots a_{i_p}^{r_p}) = \operatorname{sgn}(r_1) + \operatorname{sgn}(r_2) + \ldots + \operatorname{sgn}(r_p),$$

где под $\operatorname{sgn}(r_i)$ мы понимаем знак r_i, т. е. функцию, принимающую значение $+1$, если $r_i > 0$, и -1, если $r_i < 0$. Функцию φ определим как предел значений f:

$$\varphi(g) = \lim_{r \to \infty} \frac{f(g^r)}{r}, \quad g \in F_n.$$

Утверждение. *Функция φ является нетривиальным псевдохарактером на группе F_n, если $n > 1$.*

Доказательство. Функция f является квазихарактером F_n. Действительно, рассмотрим произведение двух элементов группы F_n

$$c_1 = a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \dots a_{i_p}^{r_p}, \quad c_2 = a_{j_1}^{q_1} a_{j_2}^{q_2} \dots a_{j_t}^{q_t}.$$

Возможны три варианта.

Первый вариант: $i_p \neq j_1$. Тогда в произведении элементов c_1c_2 не происходит никаких сокращений и произведение представляется в виде

$$c_1c_2 = a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \dots a_{i_p}^{r_p} a_{j_1}^{q_1} a_{j_2}^{q_2} \dots a_{j_t}^{q_t}.$$

Поскольку в запись элемента c_1c_2 входят в точности те же буквы a_i и в тех же степенях, что и в слова c_1 и c_2 по отдельности, значение функции f на c_1c_2 равно сумме значений f на c_1 и c_2.

Второй вариант: $i_p = j_1$ и $r_p = -q_1$. Тогда слоги $a_{i_p}^{r_p}$, $a_{j_1}^{q_1}$, на которых отображение принимает противоположные значения, полностью сокращаются, не влияя на значение функции f, так как $s(a_{i_p}^{r_p}) = -s(a_{j_1}^{q_1})$. Далее произведение c_1c_2 сводится к произведения меньших слов

$$a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \dots a_{i_{p-1}}^{r_{p-1}} a_{j_2}^{q_2} \dots a_{j_t}^{q_t},$$

причём

$$f(c_1) + f(c_2) = f(a_{i_1}^{r_1} a_{i_2}^{r_2} \dots a_{i_{p-1}}^{r_{p-1}}) + f(a_{j_2}^{q_2} \dots a_{j_t}^{q_t}).$$

Таким образом, полные сокращения слогов на стыке c_1c_2 не оказывают влияния на значение функции.

Изменение значения функции $f(c_1c_2)$ по сравнению с суммой $f(c_1) + f(c_2)$ возможно только при третьем варианте, когда $i_p = j_1$ и $r_p \neq -q_1$. Тогда сокращения в произведении c_1c_2 останавливаются и на стыке появляется новый слог $a_{i_p}^{r_p+q_1}$. При любых значениях r_p и q_1 имеем равенство

$$|s(a_{i_p}^{p_r+q_1}) - s(a_{i_p}^{r_p}) - s(a_{i_1}^{r_1})| = 1,$$

и соответственно, в данном случае $|f(c_1c_2) - f(c_1) - f(c_2)| = 1$. Таким образом, при всех вариантах $|f(c_1c_2) - f(c_1) - f(c_2)| \leqslant 1$ для любых элементов $c_1, c_2 \in F_n$, а следовательно, функция f является квазихарактером на группе F_n.

Согласно лемме Штерна [6] для любого квазихарактера f на произвольной группе G существует псевдохарактер φ на той же группе G: $\varphi(g) = \lim\limits_{r\to\infty} f(g^r)/r$. Таким образом, и определённая нами функция φ является псевдохарактером. Покажем, что φ является нетривиальным псевдохарактером.

Псевдохарактер φ принимает нулевые значения на порождающих группы F_n, поскольку

$$f(a_i^p) = \pm 1, \quad \lim_{r\to\infty} \frac{f(a_i^r)}{r} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} = 0.$$

При этом $\varphi(a_0a_1) = 2$, следовательно, φ — нетривиальный псевдохарактер. Утверждение доказано. $\square$

Интересно посмотреть, при каких условиях на запись элемента U_0 можно гарантировать, что такой псевдохарактер будет инвариантен относительно эндоморфизма F_n, заданного отображениями порождающих

$$a_0 \to a_1, \ldots, \quad a_{n-2} \to a_{n-1}, \quad a_{n-1} \to U_0(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

Необходимо, чтобы для любого элемента $v \in F_n$ выполнялось $\varphi(v) = \varphi(v_1)$, где v_1 — результат применения к v рассматриваемого эндоморфизма.

Теорема 1. *Пусть $F_n = \langle a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle$ — свободная группа ранга n и на ней определён эндоморфизм, при котором*

$$a_0 \to a_1, \ldots, \quad a_{n-2} \to a_{n-1}, \quad a_{n-1} \to U_0(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

Если $U_0 = U_{00}$, несократимая запись U_0 начинается и заканчивается положительными степенями a_0 и $f(U_0) = 1$, то на свободной группе F_n существует нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно рассматриваемого эндоморфизма этой группы.

Доказательство. Из условий утверждения следует, что несократимая запись элемента U_0 в F_n начинается и заканчивается буквой a_0, одновременно в положительной степени. Покажем, что введённый выше квазихарактер f будет инвариантен относительно эндоморфизма. Функция f задаётся как сумма значений отображения s на всех слогах вида a_i^p, входящих в несократимую запись элемента v. Для любого элемента v группы F_n элемент v_1, т. е. элемент, являющийся результатом применения к v эндоморфизма, разбивается на слоги следующим образом: слоги a_j^p, $j = 0, 1, \ldots, n-2$, несократимой записи элемента v в порождающих свободной группы переходят в слоги a_{j+1}^p элемента v_1, причём эти слоги являются в точности такими. Поскольку слово U_0 начинается и кончается буквами $a_0^{\pm 1}$, то со слогами a_{j+1}^p, $j = 0, 1, \ldots, n-2$, при переходе $v \to v_1$ не может произойти никаких сокращений или расширений. По определению отображения s для таких слогов выполняется равенство $s(a_{j+1}^p) = s(a_j^p)$. Остаётся рассмотреть, куда переходят при эндоморфизме слоги элемента v вида a_{n-1}^p. Они переходят в слово U_0^p. Поскольку U_0 ограничено буквами $a_0^{\pm 1}$, каждый слог слова U_0^p является отдельным слогом слова v_1. Следовательно, v_1 состоит из слогов a_{j+1}^p, $j = 0, 1, \ldots, n-2$, получающихся прямым переходом из слогов a_j^p, $j = 0, 1, \ldots, n-2$, элемента v и слогов, входящих в слово U_0^p. Крайние слоги слова U_0^p являются степенями буквы a_0 и не могут объединиться или сократиться с соседними слогами. В силу того что слово U_0 начинается и заканчивается буквой a_0 с одинаковым знаком, никаких сокращений в слове U_0^p также не будет. Единственное изменение состоит в том, что сольются в один слог по два крайних слога рядом стоящих слов U_0, состоящие из степеней буквы a_0 с одинаковыми знаками.

Таким образом, значение функции f на элементе v_1 будет равно сумме значений отображения s на слогах a_{j+1}^p, получаемых прямым переходом из соответствующих слогов элемента v, и значений s на всех слогах слов U_0^p. Расписывая значения функции f на элементах v, v_1, получаем следующие формулы:

$$f(v) = \sum_{a_j^p \in v,\ j=0,1,\ldots,n-2} s(a_j^p) + \sum_{a_{n-1}^p \in v} s(a_{n-1}^p),$$

$$f(v_1) = \sum_{a_j^p \in v,\ j=0,1,\ldots,n-2} s(a_{j+1}^p) + \sum_{a_{n-1}^p \in v} f(U_0^p).$$

Для отображения s выполняется $s(a_j^p) = \operatorname{sgn}(p)$, поэтому $s(a_j^p) = s(a_{j+1}^p) = \operatorname{sgn}(p)$, $j = 0, 1, \ldots, n-2$. Для того чтобы выполнялось равенство $f(v) = f(v_1)$, достаточно, чтобы выполнялось равенство $s(a_{n-1}^p) = f(U_0^p)$ для любого числа p. Если $p = \pm 1$, это равенство, как следует из условий утверждения, выполняется. В общем случае слово U_0^p разбивается на слоги каждого из своих слагаемых, за исключением того, что на каждом стыке различных слов U_0 вместо двух разных слогов, равных степеням a_0 одного знака, появляется один слог, равный суммарной степени a_0. Всего таких стыков межу различными U_0 в слове U_0^p будет $|p|-1$. Предположим, что несократимая запись элемента U_0 заканчивается слогом a_0^c. Тогда

$$f(U_0^p) = pf(U_0) - (p-1)s(a_0^c)$$

при положительном p. Если p — отрицательное число, то

$$f(U_0^p) = pf(U_0) - (-p-1)s(a_0^{-c}) = pf(U_0) + (-p-1)s(a_0^c).$$

По условиям теоремы $f(U_0) = 1$ и $c > 0$, следовательно, $s(a_0^c) = 1$ по определению отображения s. Поэтому $f(U_0^p) = p - (p-1) = 1$ при положительном p и $f(U_0^p) = p + (-p-1) = -1$ при отрицательном p. Таким образом, вне зависимости от знака p значение функции $f(U_0^p) = \pm 1$ равно значению $s(a_{n-1}^p)$. Следовательно, равенство $f(U_0^p) = s(a_{n-1}^p)$ выполняется при любом p.

Таким образом, равенство $f(v) = f(v_1)$ выполняется для любого элемента $v \in F_n$ и функция f не изменяется при рассматриваемом эндоморфизме свободной группы. Псевдохарактер φ получается как предел функции f, поэтому он также инвариантен относительно данного эндоморфизма. Теорема доказана. □

Теперь докажем одно утверждение, похожее на предыдущее, в котором, однако, будет использован немного другой метод задания псевдохарактеров на свободных произведениях. В этом утверждении рассматривается свободное произведение произвольного числа бесконечных циклических групп и некоторой группы $\tilde{R}$, обладающей нетривиальным псевдохарактером: $R = \tilde{R} * \prod_{i=k}^{n} \langle r_i \rangle$. Предположим, что на таком произведении задан эндоморфизм, переводящий группу $\tilde{R}$ в себя. Если псевдохарактер, существующий на группе $\tilde{R}$, инвариантен относительно этого эндоморфизма, то на всём произведении также в некоторых случаях можно задать нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно данного отображения.

Теорема 2. *Пусть $R = \tilde{R} * \prod_{i=k}^{n} \langle r_i \rangle$ — свободное произведение некоторой группы $\tilde{R}$ и бесконечных циклических групп $\langle r_i \rangle$, $i = k, \ldots, n$, и пусть задан эндоморфизм θ группы R, переводящий $\tilde{R}$ в $\tilde{R}$ (являющийся эндоморфизмом на $\tilde{R}$),* *элементы r_i, $i = k, k+1, \ldots, n-1$, в r_{i+1}, а элемент r_n в некоторый элемент $h(\tilde{R}, r_k, \ldots, r_{n-1}, r_n)$, несократимая запись которого начинается и оканчивается буквами $r_k^{\pm 1}$. Пусть на группе $\tilde{R}$ существует нетривиальный псевдохарактер φ, причём этот псевдохарактер инвариантен относительно эндоморфизма θ на $\tilde{R}$. Предположим, что сумма степеней всех r_i, с которыми они входят в запись h, не равна 1 и выполняется одно из следующих условий:*

1) *несократимая запись элемента h начинается и оканчивается буквой r_k, одновременно в положительной или одновременно в отрицательной степени;*
2) *для произведения последнего и первого элементов группы $\tilde{R}$, принадлежащих несократимой записи элемента h, выполняется $f(b_s b_1) = f(b_s) + f(b_1)$ и $b_s b_1 \neq 1$.*

Тогда на группе R существует нетривиальный псевдохарактер, инвариантный относительно эндоморфизма θ.

Доказательство. Произвольный элемент c группы R представляется в несократимом виде $c = c_1 \ldots c_q$, где $c_i \in \tilde{R}$ или $c_i = r_j^p$, $j \in k, \ldots, n$, причём элементы c_i и c_{i+1} не лежат одновременно в группе $\tilde{R}$ или в одной из групп $\langle r_i \rangle$. Обозначим сумму степеней всех r_i, с которыми они входят в некоторое слово $r \in R$, через $p(r)$. Согласно условию теоремы $p(h) \neq 1$. По условию теоремы на группе $\tilde{R}$ существует нетривиальный псевдохарактер φ. Пусть $\alpha = \sum\limits_h \varphi(b_i)$, где b_i — это элементы группы $\tilde{R}$, входящие в несократимую запись $h = c_1 \ldots c_q$ элемента h в разложении

$$R = \tilde{R} * \prod_{i=k}^{n} \langle r_i \rangle. \tag{1}$$

Построим квазихарактер f_1 на группе R следующим образом: на группе $\tilde{R}$ возьмём f_1 тождественно равным φ, на произведении $\prod\limits_{i=k}^{n-1} \langle r_i \rangle$ зададим квазихарактер f_1 аддитивным, как сумму значений на порождающих. Положим $f_1(r_k) = \ldots = f_1(r_{n-1}) = f_1(r_n) = \chi$ для элементов, принадлежащих одной циклической группе, т. е. для элементов вида $c = r_j^s$ определим отображение f_1 следующим образом: $f_1(c) = s f_1(r_j) = s\chi$. Для произвольного элемента $c \in \prod\limits_{i=k}^{n} \langle r_i \rangle$ рассмотрим его несократимую форму $c = r_{i_1}^{p_1} \ldots r_{i_q}^{p_q}$ и зададим на нём функцию $f_1(c) = \sum\limits_j f_1(r_{i_j}^{p_j}) = p(c)\chi$. Для произвольного элемента c группы R возьмём его несократимую форму и разложим несократимую запись на слоги, каждый из которых принадлежит или группе $\tilde{R}$, или одной из циклических групп $\langle r_i \rangle$, $i = k, \ldots, n$. Рассмотрим разложение элемента c по слогам, $c = c_1 \ldots c_q$, и зададим функцию f_1 как сумму значений на слогах: $f_1(c) = \sum\limits_{i=1}^{q} f_1(c_i)$. Значение функции f_1 на элементе c получается из несократимой формы этого элемента как сумма двух слагаемых: значений функции φ

на слогах, являющихся элементами группы $\tilde{R}$, и значения $p\chi$ для элементов r_i^p, $i = k, k+1, \ldots, n$:

$$f_1(c_1 \ldots c_q) = \sum_{c_i \in \tilde{R}} \varphi(c_i) + \sum_{c_i = r_j^p} p\chi.$$

Докажем, что функция f_1 является квазихарактером на группе R, т. е. существует такое число ε, что для любых элементов $r_1, r_2 \in R$, выполняется неравенство

$$|f_1(r_1 r_2) - f_1(r_1) - f_1(r_2)| \leqslant \varepsilon.$$

Поскольку φ — нетривиальный псевдохарактер на группе $\tilde{R}$, существует число ε_1, для которого

$$|\varphi(\widetilde{r_1 r_2}) - \varphi(\widetilde{r}_1) - \varphi(\widetilde{r}_2)| \leqslant \varepsilon_1$$

для любых $\widetilde{r}_1, \widetilde{r}_2 \in \tilde{R}$. Пусть a, b — произвольные элементы R. Рассмотрим их несократимые записи в разложении (1): $a = a_1 \ldots a_{p_1}$, $b = b_1 \ldots b_{p_2}$. Если на стыке слов a, b никаких изменений не происходит, т. е. элементы a_{p_1} и b_1 принадлежат разным множителям в свободном произведении (1), то $f_1(ab) = f_1(a) + f_1(b)$. Если эти элементы a_{p_1} и b_1 взаимно-обратны, то независимо от того, принадлежат эти элементы группе $\tilde{R}$ или они принадлежат одной из циклических групп $\langle r_i \rangle$, выполняется равенство $f(a_{p_1}) = -f(b_1)$. Тогда эти элементы полностью сокращаются, не оказывая влияния на значение функции f_1, и $ab = a_1 \ldots a_{p_1-1} b_2 \ldots b_{p_2}$, $f_1(ab) = f_1(a_1 \ldots a_{p_1-1} b_2 \ldots b_{p_2})$.

Возможен вариант, когда элементы a_{p_1} и b_1 принадлежат одной подгруппе в разложении (1), но не являются взаимно-обратными. Предположим, что a_{p_1} и b_1 принадлежат одной циклической группе $\langle r_j \rangle$. Тогда $f_1(a_{p_1})$, $f_1(b_1)$ равны произведению степеней r_j, которые образуют эти элементы, на число χ. Значение $f_1(a_{p_1} b_1)$ равно степени элемента r_j, которую составляет $a_{p_1} b_1$, умноженной на χ, т. е. оно равно сумме степеней r_j, которые составляют a_{p_1} и b_1, умноженной на число χ. Тогда $f_1(a_{p_1} b_1) = f_1(a_{p_1}) + f_1(b_1)$, и, поскольку далее никаких сокращений или изменений на стыке слов a, b не происходит, $f_1(ab) = f_1(a) + f_1(b)$. Остаётся рассмотреть вариант, когда элементы a_{p_1} и b_1 принадлежат подгруппе $\tilde{R}$. Если эти элементы не взаимно-обратные, то выполняется

$$|f_1(a_{p_1} b_1) - f_1(a_{p_1}) - f_1(b_1)| \leqslant \varepsilon_1,$$

и, поскольку сокращения в записи ab на этом заканчиваются

$$|f_1(ab) - f_1(a) - f_1(b)| = |f_1(a_{p_1} b_1) - f_1(a_{p_1}) - f_1(b_1)| \leqslant \varepsilon_1.$$

Таким образом, $|f_1(ab) - f_1(a) - f_1(b)| \leqslant \varepsilon_1$. Итак, доказано, что f_1 — квазихарактер.

Для любого квазихарактера f_1 на произвольной группе G функция $f(g) = \lim\limits_{q\to\infty} f_1(g^q)/q$ является псевдохарактером. Таким образом можно ввести псевдохарактер f на группе R. Заметим, что этот псевдохарактер на подгруппе $\tilde{R}$ совпадает с псевдохарактером φ. Поскольку псевдохарактер φ является нетривиальным на $\tilde{R}$, то псевдохарактер f является нетривиальным и на группе R.

Нам нужно, чтобы f сохранял своё значение при описанном в условии теоремы эндоморфизме θ группы R. При этом элемент $\widetilde{r} \in \tilde{R}$ перейдёт в некоторый элемент $\widetilde{r}_1 \in \tilde{R}$, и по условиям теоремы $\varphi(\widetilde{r}_1) = \varphi(\widetilde{r})$, соответственно $f(\widetilde{r}_1) = f(\widetilde{r})$. Элементы r_i, $i = k, \dots, n-1$, перейдут в элементы r_{i+1}, и для них $f(r_i) = f(r_{i+1}) = \chi$. Элемент r_n переходит в элемент $h \in R$.

Можно рассмотреть несократимую запись элемента h в разложении (1) $h = c_1 \dots c_q$. С помощью этого разложения можно найти значение $f_1(h)$. Согласно описанному выше способу задания функции f_1 получим, что $f_1(h) = \alpha + p(h)\chi$. Необходимо, чтобы выполнялось условие $f_1(h) = f_1(r_n) = \chi$. Получаем уравнение $p(h)\chi + \alpha = \chi$. Его решение $\chi = -\alpha/(p(h) - 1)$. Поскольку рассматривается случай, когда сумма p_i из несократимой записи элемента $h = c_1 \dots c_q$ не равна 1, то это решение будет существовать. Таким образом мы можем определить число χ, с помощью которого задаётся функция f_1 на бесконечных циклических группах $\langle r_j \rangle$, $j = k, \dots, n-1, n$.

Рассмотрим произвольный элемент $c \in R$ и его несократимую запись $c = c_1 \dots c_q$. Функция f_1 определяется как сумма значений на слогах c_i. Поскольку запись элемента h ограничивается буквами $r_k^{\pm 1}$, а эти буквы могут появляться при рассматриваемом эндоморфизме только из букв r_n в составе слова h, никакие слоги элемента h не могут слиться или, наоборот, сократиться с другими слогами элемента c_{+1}, получающимися не из букв r_n. Под элементом c_{+1} мы понимаем элемент, в который переходит c при рассматриваемом эндоморфизме. Таким образом, все слоги элемента c_{+1} или являются слогами, образуемыми прямо из слогов элемента c, или слогами в составе слова h^p в произвольной степени p. Функция $f_1(c_{+1})$ является суммой значений на слогах первого типа и на словах h^p, образуемых из слогов r_n^p. Причём слова h^p ограничены с обоих краев буквами $r_k^{\pm 1}$. Слоги в записи элемента c, имеющие вид r_i^p, $i = k, \dots, n-1$, переходят в слоги r_{i+1}^p элемента c_{+1}. Для них выполняется равенство $f_1(r_i^p) = f_1(r_{i+1}^p) = p\chi$. Слог элемента c, равный некоторому $b \in \tilde{R}$, переходит в некоторый элемент b_1 также из группы $\tilde{R}$, и согласно условиям утверждения $f_1(b) = f_1(b_1)$.

Остаётся доказать только, что $f_1(c_n^p) = f_1(h^p)$. При $p = 1$ мы уже проверили верность этого равенства. При $|p| > 1$ при переходе $r_n^p \to h^p$ какие-то слоги на стыках рядом стоящих h могут слиться или сократиться. Такие изменения со слогами вида r_i^p в силу аддитивности задания f_1 на $\prod\limits_{i=k}^{n} \langle r_i \rangle$ не изменяют значение функции. Если h начинается и заканчивается буквами r_k в степенях одинакового знака, то на стыке двух слов h происходит слияние двух слогов, состоящих из степеней r_k, в один слог, на этом все изменения в слоговой структуре слова c_{+1} заканчиваются и значение функции f_1 также не меняется. Следовательно, если выполняется первое из возможных условий теоремы, функция f_1 является инвариантной относительно рассматриваемого эндоморфизма.

Если по краям слова h стоят противоположные степени r_k, то на стыке слов h они взаимно сокращаются, не влияя на значение $f_1(h^p)$, но в таком случае сокращения могут продолжаться. Никакие взаимные сокращения слогов типа r_j^q не изменяют функцию f_1, однако возможно появление на стыке рядом стоящих слов h произведения элементов из группы $\tilde{R}$. Первое такое произведение, которое может появиться, — это или произведение $b_s b_1$ крайнего правого элемента из группы $\tilde{R}$ в несократимой записи h и крайнего левого такого элемента, или произведение $b_1^{-1} b_s^{-1}$, если в рассматриваемом слове c_{+1} есть фрагмент h^{-p}. Мы рассматриваем случай, когда на краях слова h стоят противоположные степени r_k. Тогда по условиям теоремы должно выполняться второе из возможных условий, и $b_s \neq b_1^{-1}$, следовательно, дальнейшие изменения или сокращения на стыке рядом стоящих слов h не происходят. Кроме того, в данном случае согласно условиям утверждения псевдохарактер φ является аддитивным на произведении этих элементов $b_s b_1$, и $\varphi(b_s b_1) = \varphi(b_s) + \varphi(b_1)$, $\varphi(b_1^{-1} b_s^{-1}) = \varphi(b_1^{-1}) + \varphi(b_s^{-1})$. Таким образом, такое изменение слогов при переходе $c \to c_{+1}$ также не влияет на значение функции f_1. Следовательно, функция f_1 инвариантна относительно рассматриваемого нами эндоморфизма. Псевдохарактер f определяется как предел функции f_1 и, следовательно, также инвариантен относительно данного эндоморфизма. Таким образом, функция f является нетривиальным псевдохарактером на группе R, инвариантным относительно определённого в условии теоремы эндоморфизма. Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] Бардаков В. Г. О ширине вербальных подгрупп некоторых свободных конструкций // Алгебра и логика. — 1997. — Т. 36, № 5. — С. 494—517.

[2] Григорчук Р. И. Ограниченные когомологии групповых конструкций // Мат. заметки. — 1996. — Т. 59, вып. 4. — С. 546—550.

[3] Каган Д. З. О существовании нетривиальных псевдохарактеров на аномальных произведениях групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2004. — № 6. — С. 24—28.

[4] Каган Д. З. Псевдохарактеры на аномальных произведениях локально индикабельных групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 3. — С. 55—64.

[5] Файзиев В. А. Об устойчивости одного функционального уравнения на группах // Успехи мат. наук. — 1993. — Т. 48, № 1. — С. 193—194.

[6] Штерн А. И. Квазипредставления и псевдопредставления // Функц. анализ и его прил. — 1991. — Т. 25, № 2. — С. 70—73.