Категории ограниченных $\big(\mathfrak{sp}(\mathrm{S}^2V \oplus \mathrm{S}^2V^*), \mathfrak{gl}(V)\big)$- и $\big(\mathfrak{sp}(\Lambda^2V \oplus \Lambda^2V^*), \mathfrak{gl}(V)\big)$-модулей

А. В. ПЕТУХОВ
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: alex--2@yandex.ru

УДК 512.552.8

Ключевые слова: голономные модули, $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модули, превратные пучки.

Аннотация

Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли над $\mathbb{C}$, а $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — редуктивная в $\mathfrak{g}$ подалгебра. Мы называем $\mathfrak{g}$-модуль M $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модулем, если M изоморфен прямой сумме конечномерных $\mathfrak{k}$-модулей. Мы называем $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль M ограниченным, если существует такое число $C_M \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, что для всякого простого конечномерного $\mathfrak{k}$-модуля E размерность изотипной компоненты E не превосходит $C_M \dim E$. Ограниченные $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модули задают полную подкатегорию категории $\mathfrak{g}$-модулей. Пусть V — конечномерное векторное пространство. Мы показываем, что категории ограниченных $\big(\mathfrak{sp}(\mathrm{S}^2V \oplus \mathrm{S}^2V^*), \mathfrak{gl}(V)\big)$-модулей и $\big(\mathfrak{sp}(\Lambda^2V \oplus \Lambda^2V^*), \mathfrak{gl}(V)\big)$-модулей изоморфны прямой сумме счётного числа копий категории представлений некоторого явно заданного колчана с соотношениями при некоторых мягких предположениях о размерности V.

Abstract

A. V. Petukhov, Categories of bounded $\big(\mathfrak{sp}(\mathrm{S}^2V \oplus \mathrm{S}^2V^*), \mathfrak{gl}(V)\big)$- *and* $\big(\mathfrak{sp}(\Lambda^2V \oplus \Lambda^2V^*), \mathfrak{gl}(V)\big)$*-modules*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 2, pp. 183—199.

Let $\mathfrak{g}$ be a reductive Lie algebra over $\mathbb{C}$ and $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ be a reductive in $\mathfrak{g}$ subalgebra. We call a $\mathfrak{g}$-module M a $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-module whenever M is a direct sum of finite-dimensional $\mathfrak{k}$-modules. We call a $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-module M bounded if there exists $C_M \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ such that for any simple finite-dimensional $\mathfrak{k}$-module E the dimension of the E-isotypic component is not more than $C_M \dim E$. Bounded $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-modules form a subcategory of the category of $\mathfrak{g}$-modules. Let V be a finite-dimensional vector space. We prove that the categories of bounded $\big(\mathfrak{sp}(\mathrm{S}^2V \oplus \mathrm{S}^2V^*), \mathfrak{gl}(V)\big)$-modules and $\big(\mathfrak{sp}(\Lambda^2V \oplus \Lambda^2V^*), \mathfrak{gl}(V)\big)$-modules are isomorphic to the direct sum of countably many copies of the category of representations of some explicitly described quiver with relations under some mild assumptions on the dimension of V.

1. Введение

Пусть $G_{\mathbb{R}}$ — вещественная полупростая группа Ли, $\mathfrak{g}$ — комплексификация алгебры Ли G, $\mathfrak{g}^\sigma \subset \mathfrak{g}$ — комплексная подалгебра Ли, ассоциированная с $\mathfrak{g}$ [3]. Пусть $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ — произвольная комплексная редуктивная подалгебра.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 2, с. 183—199.

Определение 1. Назовём $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-*модулем* $\mathfrak{g}$-модуль *с локально конечномерным действием* $\mathfrak{k}$, т. е. $\mathfrak{g}$-модуль, являющийся прямой суммой конечномерных $\mathfrak{k}$-модулей.

Описание неприводимых унитарных представлений группы $G_{\mathbb{R}}$ сводится к описанию простых бесконечномерных $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{\sigma})$-модулей [18]. В [26] И. Пенков, В. Серганова и Г. Цукерман заметили, что одно из определяющих свойств $(\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{\sigma})$-модулей конечной длины — конечномерность $\mathfrak{k}$-изотипных компонент — имеет смысл и для произвольной пары полупростых алгебр Ли $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$; такие модули были названы $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-*модулями конечного типа*. В [26] было показано, что если $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{sl}(V)$ и $\mathfrak{k}$ совпадает со своим нормализатором в $\mathfrak{g}$, то существует по крайней мере один простой бесконечномерный $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модуль конечного типа.

Определение 2. Модуль M пары $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$ называется *ограниченным*, если для какого-то числа C_M для всякого простого $\mathfrak{k}$-модуля E размерность изотипной компоненты E в M не больше $C_M\dim E$.

Пусть $\mathfrak{h}\subset\mathfrak{g}$ — подалгебра Картана. В [11] С. Фернандо показал, что описание простых конечномерных $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$-модулей сводится к описанию ограниченных $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$-модулей, а последние были классифицированы О. Матьё [21]. Это позволяет надеяться, что описание всех $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модулей сводится к описанию ограниченных $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модулей; последнее может быть получено отдельно (см. [22, 25, 27]).

Пусть V — конечномерное пространство размерности n_V, $W=\mathrm{S}^2V$ ($n_V\geqslant 3$) или $W=\Lambda^2V$ ($n_V\geqslant 5$). В этой работе мы покажем, что всякий простой бесконечномерный $\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{gl}(V)\big)$-модуль аннулируется идеалом Джозефа [15]. Мы также покажем, что категория ограниченных $(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{k})$-модулей, аннулируемых данным идеалом Джозефа, эквивалентна прямой сумме двух копий категории превратных пучков на W, гладких вдоль стратификации $\mathrm{GL}(V)$-орбитами. Отметим, что эти категории (в частности, их простые объекты) были описаны Т. Брейденом и М. Гринбергом [8].

2. Необходимые сведения

Основным полем для всех объектов работы является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$; все рассматриваемые многообразия алгебраичны. Обозначим через $\mathcal{T}X$ кокасательное расслоение к гладкому многообразию X, через T_xX — касательное пространство к X в точке $x\in X$, через T^*_xX — двойственное к T_xX пространство. Для гладкого подмногообразия Y гладкого многообразия X через $\mathrm{N}_{Y/X}$ и $\mathrm{N}^*_{Y/X}$ мы обозначим тотальные пространства нормального и конормального расслоения к Y в X соответственно. Через G мы обозначим присоединённую группу алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а через $K\subset G$ — связную редуктивную подгруппу с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$. Через B мы обозначим борелевскую подгруппу группы K.

Определение 3. Неприводимое многообразие X с действием группы K называется *сферическим*, если оно обладает открытой B-орбитой.

Допустим, что X квазиаффинно. Тогда связное K-многообразие X сферично, если и только если алгебра $\mathbb{C}[X]$ является ограниченной как $\mathfrak{k}$-модуль.

2.1. Ассоциированные многообразия $\mathfrak{g}$-модулей

Алгебра $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$ имеет естественную фильтрацию по степеням элементов:

$$0\subset\mathbb{C}\subset U_1\subset\ldots\subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} U_i.$$

Её ассоциированная градуированная алгебра

$$\operatorname{gr}\mathrm{U}(\mathfrak{g})=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}(U_{i+1}/U_i)$$

изоморфна $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Фильтрация $\{U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ задаёт фильтрацию произвольного идеала I алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$: $\{I\cap U_i\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$. Идеал $\operatorname{gr} I$ коммутативной алгебры $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ задаёт многообразие

$$\mathrm{V}(\operatorname{gr} I):=\{x\in\mathfrak{g}^*\mid f(x)=0 \text{ для всех } f\in\operatorname{gr} I\}.$$

В частности, если $I=\operatorname{Ann} M$ для какого-то $\mathfrak{g}$-модуля M, положим $\mathrm{GV}(M):=$ $:=\mathrm{V}(\operatorname{gr} I)$. Идеал $I\subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ называется *идеалом Джозефа*, если $\mathrm{V}(I)$ совпадает с минимальным по включению замыканием G-орбиты и I аннулирует какой-то простой $\mathfrak{g}$-модуль.

Теорема 1 [14]. *Многообразие* $\mathrm{GV}(M)$ *является замыканием одной орбиты* Gu *для всякого простого* $\mathfrak{g}$*-модуля* M*. Более того,* $0\in\overline{Gu}$.

Пусть M — $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$-модуль с фильтрацией

$$0\subset M_0\subset M_1\subset\ldots\subset M=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} M_i.$$

Назовём фильтрацию *степенной*, если

1) $U_iM_j=M_{i+j}$;
2) $\dim M_i<\infty$ для всякого $i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$.

Такая фильтрация однозначно задаётся конечномерным порождающим пространством M_0. Соответствующий ассоциированный градуированный объект $\operatorname{gr} M=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}} M_{i+1}/M_i$ является модулем над $\operatorname{gr}\mathrm{U}(\mathfrak{g})\cong\mathrm{S}(\mathfrak{g})$; мы положим

$$\mathrm{J}_M:=\{s\in\mathrm{S}(\mathfrak{g})\mid \text{существует такое } k\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, \text{ что } s^km=0 \text{ для всех } m\in\operatorname{gr} M\}.$$

Таким образом, каждому конечно порождённому $\mathfrak{g}$-модулю M мы поставили в соответствие многообразие

$$\mathrm{V}(M):=\{x\in\mathfrak{g}^*\mid f(x)=0 \text{ для всех } f\in\mathrm{J}_M\}.$$

Идеал J_M и многообразие $\mathrm{V}(M)$ не зависят от выбора фильтрации, но модуль $\operatorname{gr} M$ зависит.

Теорема 2 (Й. Бернштейн [20, с. 118]). *Пусть M — конечно порождённый $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда*

$$\dim \mathrm{V}(M) \geqslant \frac{1}{2} \dim \mathrm{GV}(M).$$

Обозначим через $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ центр алгебры $\mathrm{U}(\mathfrak{g})$.

Определение 4.

1. Будем говорить что $\mathfrak{g}$-модуль M *обладает характером*, если $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ действует на M скалярно, т. е. существует функция $\chi\colon \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$, такая что $zm = \chi(z)m$ для всех $z \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$ и $m \in M$.
2. Будем говорить что $\mathfrak{g}$-модуль M *обладает обобщённым характером*, если существует функция $\chi\colon \mathrm{Z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$, такая что для всякого $m \in M$ существует $k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, такое что $\bigl(z - \chi(z)\bigr)^k m = 0$ для всех $z \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g})$.

Всякий простой модуль обладает характером [10]. Пусть M — конечно порождённый $\mathfrak{g}$-модуль с обобщённым характером.

Теорема 3 (О. Габбер [12]). *Пусть $\tilde{V}$ — неприводимая компонента многообразия $\mathrm{V}(M)$, а $\mathcal{Z}$ — единственная G-орбита, открытая в*

$$G\tilde{V} := \{v' \in \mathfrak{g}^* \mid \text{существуют } g \in G \text{ и } v \in \mathrm{V}(M), \text{ такие что } v' = gv\}.$$

Тогда

$$\dim \tilde{V} \geqslant \frac{1}{2} \dim \mathcal{Z}.$$

Определение 5. Простой $\mathfrak{g}$-модуль M называется *голономным*, если

$$\dim \tilde{V} = \frac{1}{2} \dim G\tilde{V}$$

для всякой неприводимой компоненты $\tilde{V}$ многообразия $\mathrm{V}(M)$.

Следствие 1 (С. Фернандо [11]). *Векторное пространство*

$$\mathrm{V}(M)^{\perp} = \{g \in \mathfrak{g} \mid v(g) = 0 \text{ для всякого } v \in \mathrm{V}(M)\}$$

является алгеброй Ли, и $\mathrm{V}(M)$ — это $\mathrm{V}(M)^{\perp}$-многообразие.

Теорема 4 (С. Фернандо [11, следствие 2.7], В. Кац [16]). *Положим*

$$\mathfrak{g}[M] := \{g \in \mathfrak{g} \mid \dim(\mathrm{span}_{i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}}\{g^i m\}) < \infty \text{ для всякого } m \in M\}.$$

Тогда $\mathfrak{g}[M]$ есть алгебра Ли и $\mathfrak{g}[M] \subset \mathrm{V}(M)^{\perp}$.

Следствие 2. *Для всякого $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуля M $\mathrm{V}(M) \subset \mathfrak{k}^{\perp}$ и $\mathrm{V}(M)$ есть K-многообразие.*

Пусть M — это $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-модуль с $\mathfrak{k}$-инвариантным (как множество) конечномерным порождающим пространством M_0, J_M, $\mathrm{gr}\, M$ — ассоциированные градуированные объекты, построенные выше. $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-модули

$$\mathrm{J}_M^{-i}\{0\} := \{m \in \mathrm{gr}\, M \mid j_1 \cdots j_i m = 0 \text{ для всяких } j_1, \ldots, j_i \in \mathrm{J}_M\}$$

образуют возрастающую фильтрацию

$$0\subset \mathrm{J}_M^{-1}\subset\ldots\subset \operatorname{gr} M,$$

и

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathrm{J}_M^{-i}\{0\}=\operatorname{gr} M.$$

В силу того что кольцо $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$ нётерово, фильтрация стабилизируется, т. е. $\mathrm{J}_M^{-i}\{0\}=\operatorname{gr} M$ для какого-то i. Через $\overline{\operatorname{gr}} M$ мы обозначим соответствующий ассоциированный градуированный объект. Из определения следует, что $\overline{\operatorname{gr}} M$ — это $\mathrm{S}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}_M$-модуль. Допустим, что $f\,\overline{\operatorname{gr}} M=0$ для какого-то $f\in\mathrm{S}(\mathfrak{g})$. Тогда $f^i\operatorname{gr} M=0$, а следовательно, $f\in\mathrm{J}_M$. Поэтому аннулятор $\overline{\operatorname{gr}} M$ в $\mathrm{S}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}_M$ равен нулю.

Так как M конечно порождённый, $\operatorname{gr} M$ и $\overline{\operatorname{gr}} M$ также являются конечно порождёнными. Пусть $\tilde{M}_0$ — сохраняемое действием $\mathfrak{k}$ конечномерное порождающее пространство $\mathrm{S}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}_M$-модуля $\overline{\operatorname{gr}} M$. Имеется сюръективный гомоморфизм

$$\psi\colon \tilde{M}_0\otimes_{\mathbb{C}}(\mathrm{S}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}_M)\to\overline{\operatorname{gr}} M.$$

Положим

$$\operatorname{Rad} M:=\{m\in\overline{\operatorname{gr}} M\mid \text{существует } f\in\mathrm{S}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}_M,\ \text{такой что } fm=0 \text{ и } f\neq 0\}.$$

Пространство $\operatorname{Rad} M$ сохраняется действием $\mathfrak{k}$ и является $\mathrm{S}(\mathfrak{g})$-подмодулем $\overline{\operatorname{gr}} M$; $\tilde{M}_0\not\subset\operatorname{Rad} M$. Гомоморфизм ψ определяет инъективный гомоморфизм

$$\hat{\psi}\colon \mathrm{S}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}_M\to\tilde{M}_0^*\otimes_{\mathbb{C}}\overline{\operatorname{gr}} M.$$

Предложение 1. *Модуль M ограничен тогда и только тогда, когда K-сферично многообразие* $\mathrm{V}(M)$.

Доказательство. Пусть K-сферичны все неприводимые компоненты $\mathrm{V}(M)$. Тогда $\tilde{M}_0\otimes_{\mathbb{C}}(\mathrm{S}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}_M)$ — это ограниченный $\mathfrak{k}$-модуль. Поэтому $\mathfrak{k}$-модуль $\overline{\operatorname{gr}} M$ ограничен, а следовательно, $\mathfrak{k}$-ограничен и M.

Пусть M — ограниченный $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модуль. Тогда $\mathrm{S}(\mathfrak{g})/\mathrm{J}_M$ является $\mathfrak{k}$-ограниченным модулем, и следовательно, K-сферичны все неприводимые компоненты $\mathrm{V}(M)$. □

Следствие 3 [25]. *Пусть M — конечно порождённый ограниченный $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модуль. Тогда*

$$\dim\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}}\geqslant\frac{1}{2}\dim\mathrm{GV}(M).$$

Доказательство. Поскольку модуль M ограничен как $\mathfrak{k}$-модуль, то K-сферично и многообразие $\mathrm{V}(M)$. Поэтому $\dim\mathfrak{b}_{\mathfrak{k}}\geqslant\dim\mathrm{V}(M)$. С другой стороны,

$$\dim\mathrm{V}(M)\geqslant\frac{1}{2}\dim\mathrm{GV}(M).$$ □

2.2. Ограниченные весовые модули

В [25] И. Пенков и В. Серганова показали, что «ограниченность» — свойство не модуля M, а идеала $\operatorname{Ann} M$.

Теорема 5. *Пусть M и N — простые $(\mathfrak{g},\mathfrak{k})$-модули, такие что $\operatorname{Ann} M = \operatorname{Ann} N$. Если M ограниченный, то и N ограниченный.*

Мы будем использовать следующие обозначения:

— $\{\mathrm{e}_i\}_{i \leqslant n_W} \subset W$ — базис W, $\{\mathrm{e}_i^*\}_{i \leqslant n_W} \subset W^*$ — двойственный к нему базис;
— $\{\mathrm{e}_{i,j}\}_{i \leqslant n_W,\ j \leqslant n_W} \subset \mathfrak{gl}(W)$ — это матричные элементы $\mathrm{e}_i \otimes \mathrm{e}_j^*$;
— $\mathfrak{h}_W := \operatorname{span}\langle \mathrm{e}_{i,i}\rangle_{i \leqslant n_W}$.

Обозначим через $\mathrm{D}(W)$ алгебру полиномиальных дифференциальных операторов на W; она порождена операторами e_i и ∂_{e_i} для всех $i \leqslant n_W$. Положим

$$E := \mathrm{e}_1 \partial_{\mathrm{e}_1} + \ldots + \mathrm{e}_{n_W} \partial_{\mathrm{e}_{n_W}}.$$

Оператор $[E,\cdot]\colon \mathrm{D}(W) \to \mathrm{D}(W)$ полупрост, и $\mathrm{D}(W)$ есть прямая сумма собственных пространств $\{\mathrm{D}^i(W)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ относительно оператора $[E,\cdot]$.

Отметим, что $\mathfrak{h}_W$ есть подалгебра Картана полупростой алгебры $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$. Мы отождествим пространство $\mathfrak{h}_W^*$ с множеством наборов из n_W чисел (n_W-наборов). Фиксируем систему положительных корней $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$ в $\mathfrak{h}_W$, для которой ρ отождествляется с $(n_W, \ldots, 1)$. Пусть $\bar{\mu}$ — это n_W-набор, а μ — соответствующий вес. Обозначим простой модуль со старшим весом μ [10] через L_μ, а $\operatorname{Ann} \mathrm{L}_\mu$ через $\mathrm{I}(\mu)$. Идеал $I \subset \mathrm{U}(\mathfrak{g})$ называется *примитивным*, если I совпадает с аннулятором какого-то простого $\mathfrak{g}$-модуля; для всякого примитивного идеала $I \subset \mathrm{U}\big(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)\big)$ существует n_W-набор $\bar{\mu}$, такой что $I = \mathrm{I}(\mu)$ [10]. Обозначим через μ_0 набор

$$\left(n_W - \frac{1}{2}, n_W - \frac{3}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right).$$

Положим

$$\mathrm{D}^{\bar{0}}(W) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{D}^{2i}(W), \quad \mathrm{D}^{\bar{1}}(W) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{D}^{2i+1}(W).$$

Так как пространства $\{\mathrm{D}^i(W)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ задают $\mathbb{Z}$-градуировку алгебры $\mathrm{D}(W)$, пространства $\mathrm{D}^{\bar{0}}(W)$ и $\mathrm{D}^{\bar{1}}(W)$ задают $\mathbb{Z}_2$-градуировку алгебры $\mathrm{D}(W)$. Пространство $\operatorname{span}\langle \mathrm{e}_i\mathrm{e}_j, \mathrm{e}_i\partial_{\mathrm{e}_j}, \partial_{\mathrm{e}_i}\partial_{\mathrm{e}_j}, 1\rangle_{i,j \leqslant n_W}$ является алгеброй Ли относительно коммутатора; эта алгебра Ли изоморфна $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*) \oplus \mathbb{C}$. Отметим, что $\operatorname{span}\langle \mathrm{e}_i \partial_{\mathrm{e}_j}\rangle_{i,j \leqslant n_W}$ — это подалгебра Ли, изоморфная $\mathfrak{gl}(W)$. Включение $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*) \to \mathrm{D}(W)$ продолжается до гомоморфизма ассоциативных алгебр $\phi_{\mathfrak{sp}}\colon \mathrm{U}\big(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)\big) \to \mathrm{D}(W)$, и $\mathrm{I}(\mu_0) = \operatorname{Ker} \phi_{\mathfrak{sp}}$, $\mathrm{D}^{\bar{0}}(W) = \operatorname{Im} \phi_{\mathfrak{sp}}$.

2.3. Регулярные особенности

Пусть C — это гладкая неприводимая аффинная кривая. Пусть $\mathbb{C}[C]$ — алгебра регулярных на C функций, а $\mathrm{D}(C)$ — алгебра регулярных на C дифференциальных операторов. Пусть $(x) \subset \mathbb{C}[C]$ — это максимальный идеал, $x \in C$ — соответствующая ему точка. Положим

$$\mathrm{D}_x^{\geqslant 0}(C) := \{D \in \mathrm{D}(C) \mid Df \subset (x) \text{ для всякого } f \in (x)\}.$$

Будем говорить что $\mathrm{D}(C)$-модуль F имеет *регулярные особенности в* x, если для всякого конечномерного пространства $F_0 \subset F$ $\mathrm{D}_x^{\geqslant 0}(C)F_0$ — конечно порождённый $\mathbb{C}[C]$-модуль.

Пусть C^+ — гладкая компактная кривая, содержащая C как открытое подмножество. Мы будем говорить что $\mathrm{D}(C)$-модуль F имеет *регулярные особенности*, если для всякой точки $x \in C^+$ существует аффинная окрестность $C(x) \subset C^+$, такая что $x \in C(x)$ и $F \otimes_{\mathbb{C}[C]} \mathbb{C}[C \cap C(x)]$, рассматриваемый как $\mathrm{D}(C(x))$-модуль расширением с $C \cap C(x)$ до $C(x)$, имеет регулярные особенности в точке x.

Для гладкого многообразия X мы обозначим через $\mathcal{D}(X)$ пучок дифференциальных операторов на X.

Определение 6. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок $\mathcal{D}(X)$-модулей. Будем говорить что $\mathcal{F}$ имеет *регулярные особенности*, если $\mathcal{F}$ имеет регулярные особенности после ограничения на всякую гладкую неприводимую аффинную прямую.

3. Модули малого роста

Определение 7. Пусть M — $\mathfrak{g}$-модуль. Будем говорить что M является $\mathrm{Z}(\mathfrak{g})$-*конечным*, если $\dim \mathrm{Z}(\mathfrak{g})m < \infty$ для всякого $m \in M$;

$$\mathrm{Z}(\mathfrak{g})m := \{m' \in M \mid m' = zm \text{ для какого-то } m \in M \text{ и } z \in \mathrm{Z}(\mathfrak{g})\}.$$

Предложение 2. *Если M — бесконечномерный $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$-модуль, то* $\dim \mathrm{V}(M) \geqslant n_W$.

Доказательство. Многообразие $\mathrm{GV}(M)$ есть объединение $\mathrm{SP}(W \oplus W^*)$-орбит в $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)^*$. Единственная нильпотентная орбита наименьшей размерности имеет размерность $2n_W$. Так как $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$-модуль M бесконечномерен,

$$\dim \mathrm{V}(M) \geqslant \frac{1}{2} \dim \mathrm{GV}(M) \geqslant n_W$$

по теореме 2. □

Определение 8. Пусть M — это конечно порождённый $\mathrm{Z}(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*))$-конечный $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$-модуль. Мы будем говорить, что M *мал по росту*, если $\dim \mathrm{V}(M) \leqslant n_W$, т. е. $\dim \mathrm{V}(M)$ есть n_W или 0.

Малые по росту модули образуют полную подкатегорию категории $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$-модулей.

Пусть M — малый по росту бесконечномерный модуль со степенной фильтрацией $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$. *Числом Бернштейна* $\mathrm{b}(M)$ называется число

$$n_W! \lim_{i \to \infty} \frac{\dim M_i}{i^{n_W}}$$

[20, с. 78]; оно всегда конечное и целое.

Предложение 3. *Все малые по росту $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$-модули имеют конечную длину.*

Доказательство. Так как модуль M конечно порождённый, достаточно проверить его артиновость. Пусть $\ldots \subset M_{-i} \subset \ldots \subset M_{-0} = M$ — строго убывающая цепочка $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$-подмодулей. Так как алгебра $\mathrm{U}(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*))$ нётерова, подмодули M_{-i} конечно порождённые. Заметим, что или $\dim \mathrm{V}(M_{-i}) = n_W$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, или $\dim \mathrm{V}(M_{-i}) = 0$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Во втором случае $\dim \mathrm{M}_{-i} < \infty$, и следовательно, цепочка $\ldots \subset M_{-i}$ стабилизируется.

Теперь предположим, что $\dim \mathrm{V}(M_{-i}) = n_W$ для всех $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. Если $i \geqslant j$, то $\mathrm{b}(M_{-i}) \leqslant \mathrm{b}(M_{-j})$, т. е. последовательность $\{\mathrm{b}(M_{-i})\}_{i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}}$ нестрого убывает. Следовательно, существует $i \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$, такое что $\mathrm{b}(M_{-i}) = \mathrm{b}(M_{-j})$ для всех $j \geqslant i$. Поэтому $\dim \mathrm{V}(M_{-i}/M_{-j}) < n_W$, а следовательно, пространство M_{-i}/M_{-j} конечномерно для всякого $j \geqslant i$. Имеет место включение

$$M_{-i} \Big/ \bigcap_{j \geqslant i} M_{-j} \hookrightarrow \bigoplus_{j \geqslant i} M_{-i}/M_{-j},$$

где с правой стороны записана прямая сумма конечномерных $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$-модулей. Из того что модуль M_{-i} является $\mathrm{Z}(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*))$-конечным и конечно порождённым, следует, что только конечное число простых $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$-модулей появляется в прямой сумме справа. Следовательно, $M_{-i}/ \bigcap_{j \geqslant i} M_{-j}$ — конечномерный $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$-модуль. □

Предложение 4. *Пусть I — аннулятор простого бесконечномерного $\mathfrak{sp}(W \oplus W^*)$-модуля M малого роста. Тогда I — идеал Джозефа.*

Доказательство. Так как $\mathrm{GV}(M) \leqslant 2 \dim \mathrm{V}(M)$ (теорема 2), $\dim \mathrm{GV}(M) \leqslant 2n_W$. А в силу того что M бесконечномерен, I — идеал Джозефа. □

4. Построение $(\mathrm{D}(W), \mathfrak{k})$-модулей

Напомним, что K — связная редуктивная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{k}$ и борелевской подгруппой B. Пусть $\mathcal{G}$ — ассоциативная алгебра и $\psi\colon \mathrm{U}(\mathfrak{k}) \to \mathcal{G}$ — гомоморфизм ассоциативных алгебр, инъективный на $\mathfrak{k}$. Мы отождествляем $\mathfrak{k}$ с её образом при отображении ψ. Отметим, что $\mathcal{G}$-модуль может рассматриваться как $\mathfrak{k}$-модуль. Пусть M — это $\mathcal{G}$-модуль.

Определение 9 (ср. с определением 1). Модуль M называется $(\mathcal{G},\mathfrak{k})$-*модулем*, если он локально конечномерный как $\mathfrak{k}$-модуль.

Определение 10 (ср. с определением 2). Модуль M называется *ограниченным* $(\mathcal{G},\mathfrak{k})$-*модулем*, если он ограниченный как $\mathfrak{k}$-модуль.

Пусть W — сферический K-модуль. Тогда определён естественный гомоморфизм $\mathrm{U}(\mathfrak{k})\to\mathrm{D}(W)$.

Алгебра дифференциальных операторов $\mathrm{D}(W)$ имеет естественную степенную фильтрацию

$$0\subset\mathbb{C}[W]\subset D_1\subset\ldots\subset\mathrm{D}(W)=\bigcup_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant0}}D_i.$$

Ассоциированная градуированная алгебра

$$\operatorname{gr}\mathrm{D}(W)=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant0}}(D_{i+1}/D_i)$$

изоморфна $\mathbb{C}[\mathrm{T}^*W]$. Пусть M — $\mathrm{D}(W)$-модуль, обладающий конечномерным порождающим пространством M_{gen}. Пространство M_{gen} определяет фильтрацию $\{D_iM_{\mathrm{gen}}\}_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant0}}$ модуля M. Ассоциированное градуированное пространство

$$\operatorname{gr}M:=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}_{\geqslant0}}(D_{i+1}M_{\mathrm{gen}}/D_iM_{\mathrm{gen}})$$

является конечно порождённым $\mathbb{C}[\mathrm{T}^*W]$-модулем; мы обозначим носитель $\operatorname{gr}M$ как $\mathbb{C}[\mathrm{T}^*W]$-модуля через $\mathcal{V}(\operatorname{Loc}M)$. Так как конечно порождённые $\mathrm{D}(W)$-модули отождествляются с $\mathcal{D}(W)$-модулями, M соответствует какому-то $\mathcal{D}(W)$-модулю $\operatorname{Loc}M$. Многообразие $\mathcal{V}(\operatorname{Loc}M)$ сохраняется при умножении на скаляры и коизотропно в T^*W. Далее мы считаем, что M — конечно порождённый $(\mathrm{D}(W),\mathfrak{k})$-модуль.

Предложение 5. *Модуль M ограниченный, если и только если K-сферичны все неприводимые компоненты многообразия $\mathcal{V}(\operatorname{Loc}M)$.*

Доказательство. Доказательство дословно повторяет доказательство предложения 1. ☐

Всякий простой голономный $\mathcal{D}(W)$-модуль $\mathcal{M}$ задаётся парой (S,Y), где $S\subset W$ — неприводимое подмногообразие, а Y — $\mathcal{O}(S)$-когерентный $\mathcal{D}(S)$-модуль [7]. Пусть K_{ss} — связная односвязная полупростая группы с алгеброй Ли $[\mathfrak{k},\mathfrak{k}]$, $A(K)$ — центр K, а $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{k}$ — алгебра Ли $A(K)$.

Лемма 1. *Модуль M является $\mathfrak{k}$-ограниченным. Если M прост, то M обладает простым $\mathfrak{k}$-спектром. Соответствующий $\mathcal{D}(W)$-модуль $\operatorname{Loc}M$ голономный, имеет регулярные особенности и является гладким вдоль K-орбит W.*

Доказательство. Пусть $\phi_{\mathfrak{k}}^{-1}(0)\subset\mathrm{T}^*W$ — объединение конормальных расслоений к K-орбитам в W. В силу того что $\mathfrak{k}$ действует на M локально конечномерно, $\mathcal{V}(M)\subset\phi_{\mathfrak{k}}^{-1}(0)$. Так как размерности всех неприводимых компонент

$\phi_{\mathfrak{k}}^{-1}(0)$ равны n_W, а $\dim \mathcal{V}(M) \geqslant n_W$ [20], то $\mathcal{V}(M)$ есть объединение какого-то набора неприводимых компонент $\phi_{\mathfrak{k}}^{-1}(0)$. Поэтому модуль $\operatorname{Loc} M$ голономен.

Пусть $\tilde{V}$ — неприводимая компонента $\mathcal{V}(M)$; она является тотальным пространством конормального расслоения к K-орбите $S \subset W$. Так как многообразие W является K-сферическим, многообразие $\tilde{V}$ сферическое [23]. Поэтому M — ограниченный $\mathfrak{k}$-модуль по предложению 5. Положим теперь, что M прост. Так как алгебра $\mathrm{D}(W)^{\mathfrak{k}}$ коммутативна [19], M обладает свободным спектром [24, следствие 5.8].

Осталось показать, что $\operatorname{Loc} M$ имеет регулярные особенности; без ограничения общности считаем M простым. Пусть (S, Y) — пара, соответствующая $\operatorname{Loc} M$ [7]. Тогда многообразие S сохраняется при действии K. Так как многообразие W является K-сферическим, S обладает открытой K-орбитой. В силу того что модуль $\operatorname{Loc} M$ сохраняется группой K_{ss}, Y также сохраняется K_{ss}. Так как $\mathfrak{a}$ действует локально конечномерно на M, то $\mathfrak{a}$ действует локально конечномерно на $\Gamma\big(\mathrm{A}(K)s, M|_{\mathrm{A}(K)s}\big)$ для всякой точки $s \in S$. Поскольку K — фактор $K_{\mathrm{ss}} \times \mathrm{A}(K)$ по подгруппе, Y имеет регулярные особенности. Следовательно, $\operatorname{Loc} M$ имеет регулярные особенности (см. [7, 12.11]). $\square$

Лемма 2. *Если голономный* $\mathrm{D}(W)$*-модуль* $\operatorname{Loc} M$ *имеет регулярные особенности вдоль* K*-орбит в* W*, то действие* $\mathfrak{k}$ *на* M *локально конечномерно.*

Доказательство. Без ограничения общности считаем M простым. Пусть (S, Y) — пара, соответствующая $\operatorname{Loc} M$. Тогда S — K-орбита. Так как S является однородным пространством группы $K_{\mathrm{ss}} \times \mathrm{A}(K)$, пучок Y является K_{ss}-эквивариантным [7, 12.11]. Поскольку $\operatorname{Loc} M$ является K_{ss}-эквивариантным, $[\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ действует на M локально конечномерно. Поскольку $Y|_{\mathrm{A}(K)s}$ имеет регулярные особенности для всякой точки $s \in S$, $\mathfrak{a}$ действует локально конечномерно на $\Gamma\big(\mathrm{A}(K)s, M|_{\mathrm{A}(K)s}\big)$ для всякой точки $s \in S$. Поэтому $\mathfrak{a}$ действует локально конечномерно на M. Так как $\mathfrak{k} = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}] \oplus \mathfrak{a}$, то $\mathfrak{k}$ действует локально конечномерно на M. $\square$

По знаменитой теореме М. Касивары [17] категория голономных $\mathrm{D}(W)$-модулей с регулярными особенностями вдоль некоторой стратификации эквивалентна категории превратных пучков, гладких вдоль той же стратификации.

Следствие 4. *Категория ограниченных* $(\mathrm{D}(W), \mathfrak{k})$*-модулей эквивалентна категории превратных пучков на* W*, гладких вдоль всех* K*-орбит.*

Упомянутые категории превратных пучков для стратификации S^2V и $\Lambda^2 V$ орбитами группы $\mathrm{GL}(V)$ явно описаны [8]. В частности, в [8] авторы явно описали простые объекты этих категорий.

Теорема 6 (ср. с [24, следствие 5.8]). *Пусть* $\mathrm{D}(W)^{\mathfrak{k}}$ *совпадает с образом* $\mathrm{Z}(\mathfrak{k})$*. Пусть* E *— простой* $\mathfrak{k}$*-модуль. Тогда существует не более одного простого* $(\mathrm{D}(W), \mathfrak{k})$*-модуля* M*, такого что* $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{k}}(E, M) \neq 0$*.*

Для доказательства теоремы 6 нам потребуется следующая вспомогательная лемма.

Лемма 3. *Пусть E — простой конечномерный $\mathfrak{k}$-модуль. Тогда для всяких $n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 1}$ и $\phi\in\mathrm{Hom}(E,E\otimes\mathbb{C}^n)$ существуют $\phi_1,\ldots,\phi_s\in\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(E,E\otimes\mathbb{C}^n)$, такие что $\phi_i\in\mathrm{U}(\mathfrak{k})\phi\mathrm{U}(\mathfrak{k})$ и $\phi\in+_i\mathrm{U}(\mathfrak{k})\phi_i\mathrm{U}(\mathfrak{k})$.*

Доказать это утверждение предоставляется читателю.

Доказательство теоремы 6. Пусть R — изотипная компонента E в $\mathrm{D}(W)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{k})}E$, а pr — проекция $\mathrm{D}(W)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{k})}E$ на R. Для всякого $g\in\mathrm{D}(W)$ существует $g'\in\mathrm{D}(W)$, такое что $\mathrm{pr}(gm)=g'm$ для всякого $m\in E$, т. е. g' определяет гомоморфизм ϕ из E в R. Пусть ϕ_i — гомоморфизмы, определяемые леммой 3. Тогда для всякого i существует $g_i\in\mathrm{D}(W)$, такое что $g_im=\phi_im$ для всякого $m\in E$. Имеем, что $[g_i,k]m=0$ для всяких $k\in\mathfrak{k}$ и $m\in E$. Поскольку присоединённое действие $\mathfrak{k}$ на $\mathrm{D}(W)$ полупросто, то $g_i=c_i+a_i$ для некоторых $c_i,a_i\in\mathrm{D}(W)$, таких что $c_i\in\mathrm{D}(W)^{\mathfrak{k}}$ и $a_im=0$ для всех $m\in E$. Следовательно, $g_iE\subset\mathrm{U}(\mathfrak{k})E$ и $R=E$.

Пусть $\tilde{M}$ — единственный максимальный подмодуль в $\mathrm{D}(W)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{k})}E$, не содержащий $R=E$. Тогда фактор $\mathrm{D}(W)\otimes_{\mathrm{U}(\mathfrak{k})}E/\tilde{M}$ прост и с точностью до изоморфизма является единственным простым $(\mathrm{D}(W),\mathfrak{k})$-модулем, таким что $\dim\mathrm{Hom}_{\mathfrak{k}}(E,\cdot)\neq 0$. □

Пусть $\mathfrak{k}=\mathfrak{gl}(V)$, а W есть или Λ^2V, или S^2V. Тогда $\mathrm{D}(W)^{\mathfrak{k}}$ совпадает с образом $\mathrm{Z}(\mathfrak{k})$ [13]. Таким образом, для $\mathfrak{k}=\mathfrak{gl}(V)$ и $W=\Lambda^2V$ и S^2V условие теоремы 6 выполнено.

4.1. Полезный трюк

Напомним, что E — это оператор Эйлера и $\{\mathrm{D}^i(W)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — собственные E-пространства в $\mathrm{D}(W)$ (см. раздел 2.2). В этом разделе мы соотносим категорию $(\mathrm{D}(W),E)$-модулей с категорией $\mathrm{D}^{\bar{0}}(W)$-модулей (см. также [24]). Пусть M — локально конечномерный E-модуль. Зафиксируем $t\in\mathbb{C}$ и положим

$$M_t:=\{m\in M\mid (E-t)^nm=0 \text{ для какого-то } n\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}.$$

Определение 11. Мы будем говорить, что $\mathrm{D}(W)$-модуль M является $\mathrm{D}(W)$-*модулем с монодромией* $\mathrm{e}^{2\pi it}$, если $M=\bigoplus_{j\in\mathbb{Z}}M_{t+j}$.

Всякий простой $(\mathrm{D}(W),E)$-модуль является модулем с монодромией. Обозначим через δ_0 дельта-функцию в $0\in W$. Функции 1 и δ_0 порождают $\mathrm{D}(W)$-модули, обозначаемые нами $\mathrm{D}(W)1$ и $\mathrm{D}(W)\delta_0$.

Лемма 4. *Пусть M — простой $\mathrm{D}(W)$-модуль с монодромией $\mathrm{e}^{2\pi it}$. Предположим, что $\dim M_t<\infty$ и $n_W\geqslant 2$. Тогда M изоморфен одному из следующих модулей*: 0, $\mathrm{D}(W)1$, $\mathrm{D}(W)\delta_0$.

Доказательство. Допустим, что $\dim M_t\neq 0$. Тогда действие $\mathfrak{sl}(W)$ на M_t локально конечномерно, и следовательно, M — $(\mathrm{D}(W),\mathfrak{sl}(W))$-модуль. Так как модуль W является $\mathrm{SL}(W)$-сферическим, M является голономным $\mathrm{D}(W)$-модулем с регулярными особенностями по лемме 1. Обозначим через Sh соответствующий M простой превратный пучок. Пучок Sh конструктивен относительно стратификации $\big\{\{0\}, W-\{0\}\big\}$ пространства W. Так как

$$\pi_1(\{0\}) = \pi_1(W-\{0\}) = 0,$$

Sh является простым превратным пучком, соответствующим $\{0\}$ или $W-\{0\}$, в обоих случаях локальная система тривиальна. Эти два превратных пучка соответствуют $\mathrm{D}(W)$-модулям $\mathrm{D}(W)\delta_0$ и $\mathrm{D}(W)1$. Следовательно, M изоморфен или 0, или $\mathrm{D}(W)1$, или $\mathrm{D}(W)\delta_0$.

Допустим, что $M_t = 0$. Тогда или действие e_i на M локально конечномерно для всех $i \leqslant n_W$, или действие ∂_{e_i} локально конечномерно для всех i. В первом случае M изоморфен $\mathrm{D}(W)\delta_0$ по теореме Касивары. Во втором случае $\mathrm{D}(W)$ изоморфен $\mathrm{D}(W)1$ по той же теореме Касивары (мы можем поменять ролями e_i и ∂_{e_i}). $\square$

Напомним, что $\mathrm{D}(W) = \mathrm{D}^{\bar 0}(W) \oplus \mathrm{D}^{\bar 1}(W)$ есть $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра. Будем говорить, что $\mathrm{D}^{\bar 0}(W)$-модуль *имеет полумонодромию* $\mathrm{e}^{\pi i t}$, если M совпадает с прямой суммой $\bigoplus\limits_{j\in\mathbb{Z}} M_{t+2j}$. Обозначим через $(\mathrm{D}(W), E)$-mod категорию $\mathrm{D}(W)$-модулей с локально конечномерным действием E и через $(\mathrm{D}(W), E)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{2\pi i t}}$ подкатегорию $(\mathrm{D}(W), E)$-mod модулей с монодромией $\mathrm{e}^{2\pi i t}$ для всякого $t \in \mathbb{C}$. Аналогично мы определяем $(\mathrm{D}^{\bar 0}(W), E)$-mod и $(\mathrm{D}^{\bar 0}(W), E)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{\pi i t}}$. Знак $\cong$ используется нами для обозначения эквивалентности категорий. Для всякого $t \in \mathbb{C}$ определены функторы

$$\mathrm{Res}^{\mathrm{e}^{\pi i t}}_{\mathrm{e}^{2\pi i t}} \colon \mathrm{D}(W)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{2\pi i t}} \to \mathrm{D}^{\bar 0}(W)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{\pi i t}}, \quad M \mapsto \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_{t+2j},$$

$$\mathrm{Ind}^{\mathrm{e}^{2\pi i t}}_{\mathrm{e}^{\pi i t}} \colon \mathrm{D}^{\bar 0}(W)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{\pi i t}} \to \mathrm{D}(W)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{2\pi i t}}, \quad M \mapsto \mathrm{D}(W) \otimes_{\mathrm{D}^{\bar 0}(W)} M.$$

Теорема 7. *Функторы* Ind *и* Res *являются взаимно обратными эквивалентностями категорий* $(\mathrm{D}(W), E)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{2\pi i t}}$ *и* $(\mathrm{D}^{\bar 0}(W), E)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{\pi i t}}$.

Доказательство. Для $\mathrm{D}(W)$-модуля M с монодромией $\mathrm{e}^{2\pi i t}$ положим

$$M_{\bar t} := \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} M_{t+2j+1}.$$

Тогда $M = M_{\bar t} \oplus M_{\overline{t+1}}$, и это задаёт $\mathbb{Z}_2$-градуировку на $\mathrm{D}(W)$-модуле M.

Пусть $M_{\bar t}$ — $\mathrm{D}^{\bar 0}(W)$-модуль с полумонодромией $\mathrm{e}^{\pi i t}$. Тогда $\mathrm{D}(W)$-модуль $\mathrm{D}(W) \otimes_{\mathrm{D}^{\bar 0}(W)} M_{\bar t}$ является $\mathbb{Z}_2$-градуированным и имеет монодромию $\mathrm{e}^{2\pi i t}$. Более того, $\big(\mathrm{D}(W) \otimes_{\mathrm{D}^{\bar 0}(W)} M_{\bar t}\big)_{\bar t} = \mathrm{D}^{\bar 0}(W) \otimes_{\mathrm{D}^{\bar 0}(W)} M_{\bar t} = M_{\bar t}$. Поэтому функтор $\mathrm{Res}^{\mathrm{e}^{\pi i t}}_{\mathrm{e}^{2\pi i t}} \circ \mathrm{Ind}^{\mathrm{e}^{2\pi i t}}_{\mathrm{e}^{\pi i t}}$ тождествен.

Пусть M — $\mathrm{D}(W)$-модуль с монодромией $\mathrm{e}^{2\pi i t}$. Если $M_t = 0$, то M имеет конечную длину и с точностью до изоморфизма все его простые подфакторы —

это или $\mathrm{D}(W)1$, или $\mathrm{D}(W)\delta_0$. В каждом из этих случаев $M_{\bar t}\neq 0$. Определён естественный изоморфизм

$$\psi\colon \mathrm{D}(W)\otimes_{\mathrm{D}^{\bar 0}(W)} M_{\bar t}\to M.$$

Имеем

$$\big(\mathrm{D}(W)\otimes_{\mathrm{D}^{\bar 0}(W)} M_{\bar t}\big)_{\bar t}=\mathrm{D}(W)^{\bar 0}\otimes_{\mathrm{D}^{\bar 0}(W)} M_{\bar t}=M_{\bar t}.$$

Более того, отображение $\psi_{\bar t}\colon \big(\mathrm{D}(W)\otimes_{\mathrm{D}^{\bar 0}(W)} M_{\bar t}\big)_{\bar t}\to M_{\bar t}$ — изоморфизм. Поэтому $(M/\operatorname{Im}\psi)_{\bar t}=0$, и следовательно, $M/\operatorname{Im}\psi=0$. Это показывает, что функтор $\operatorname{Ind}_{\mathrm{e}^{\pi it}}^{\mathrm{e}^{2\pi it}}\circ\operatorname{Res}_{\mathrm{e}^{2\pi it}}^{\mathrm{e}^{\pi it}}$ тождествен. □

Следствие 5. *Верно, что*

$$(\mathrm{D}^{\bar 0}(W),E)\text{-mod}\cong(\mathrm{D}(W),E)\text{-mod}\oplus(\mathrm{D}(W),E)\text{-mod}.$$

Доказательство. Имеем, что

$$(\mathrm{D}^{\bar 0}(W),E)\text{-mod}\cong\bigoplus_{t\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}}(\mathrm{D}^{\bar 0}(W),E)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{2\pi it}},$$
$$(\mathrm{D}(W),E)\text{-mod}\cong\bigoplus_{t\in\mathbb{C}/\mathbb{Z}}(\mathrm{D}(W),E)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{2\pi it}}.$$

С другой стороны,

$$(\mathrm{D}^{\bar 0}(W),E)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{\pi it}}\cong(\mathrm{D}(W),E)\text{-mod}^{\mathrm{e}^{2\pi it}}.$$

Две полумонодромии $\mathrm{e}^{\pi it}$, $-\mathrm{e}^{\pi it}=\mathrm{e}^{\pi i(t+1)}$ связаны с одной монодромией $\mathrm{e}^{2\pi it}$, и

$$(\mathrm{D}^{\bar 0}(W),E)\text{-mod}\cong(\mathrm{D}(W),E)\text{-mod}\oplus(\mathrm{D}(W),E)\text{-mod}.$$ □

5. Категория $\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{gl}(V)\big)$-модулей

В этом разделе

$$K:=\mathrm{GL}(V),\quad \mathfrak{g}:=\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),$$

где $W:=\Lambda^2V$ ($n_V=2k$, $n_V\geqslant 5$) или $W=\mathrm{S}^2V$ ($n_V\geqslant 3$). Через n_W обозначена размерность W.

Лемма 5. *Пусть M — это простой ограниченный $\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{gl}(V)\big)$-модуль. Тогда $\operatorname{Ann}M$ является идеалом Джозефа.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\mathcal{Q}}$ — образ отображения моментов

$$\phi\colon \mathrm{T}^*\mathbb{P}(W\oplus W^*)\to\mathfrak{sp}(W\oplus W^*)^*,$$

$\mathcal{Q}_{\mathfrak{sp}}$ — наименьшее по включению замыкание ненулевой нильпотентной орбиты; оно изоморфно фактору $W\oplus W^*$ по $\mathbb{Z}_2$. Допустим, что $\mathrm{GV}(M)$ не $\bar{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{sp}}$ и не 0. Тогда по [9, 6.2] $\tilde{\mathcal{Q}}\subset\mathrm{GV}(M)$, а следовательно, $\dim\mathrm{GV}(M)\geqslant 2(2n_W-1)$. Поэтому $\dim\mathfrak{b}_{\mathfrak{sl}(V)}\geqslant 2n_W-1$ по следствию 3. Это неравенство не выполняется. □

Теорема 8. *Всякий простой ограниченный* $\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{gl}(V)\big)$*-модуль мал по росту.*

Доказательство. Так как $\operatorname{Ann} M$ — идеал Джозефа, $\mathrm{V}(M)\subset\bar{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{sp}}\cap\mathfrak{k}^{\perp}$. Из того, что $\dim\bar{\mathcal{Q}}_{\mathfrak{sp}}\cap\mathfrak{k}^{\perp}=n_W$, следует, что модуль M мал по росту. $\square$

Напомним, что всякий набор из n_W-чисел $\bar{\mu}$ задаёт примитивный идеал $\mathrm{I}(\mu)\subset\mathrm{U}\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*)\big)$ и что всякий примитивный идеал совпадает с $\mathrm{I}(\mu)$ для какого-то набора $\bar{\mu}$.

Определение 12. Назовём набор из n_W чисел *набором Шейла—Вейля*, если $\mu_i>\mu_j$ при $i>j$, $\mu_{n_W-1}>|\mu_{n_W}|$ и $\mu_i\in 1/2+\mathbb{Z}$ для всех $i\in\{1,\dots,n_W\}$. Набор $\bar{\mu}$ называется *положительным*, если $\mu_{n_W}>0$.

Идеал $\mathrm{I}(\mu)$ является идеалом Джозефа тогда и только тогда, когда μ — набор Шейла—Вейля [15].

Теорема 9. *Пусть M — бесконечномерный простой ограниченный* $\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{gl}(V)\big)$*-модуль, $\bar{\mu}$ — такой набор из n_W чисел, что* $\operatorname{Ann} M=\mathrm{I}(\mu)$. *Тогда $\bar{\mu}$ — набор Шейла—Вейля.*

Доказательство. Так как модуль M ограниченный, $\operatorname{Ann} M$ — идеал Джозефа. Тогда $\operatorname{Ann} M=\mathrm{I}(\mu)$ для некоторого n_W-набора Шейла—Вейля $\bar{\mu}$ [15]. $\square$

Теорема 10. *Пусть M — конечно порождённый* $\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{gl}(V)\big)$*-модуль и* $\mathrm{I}(\mu)\subset\operatorname{Ann} M$ *для некоторого набора Шейла—Вейля $\bar{\mu}$. Тогда M ограниченный.*

Доказательство. Так как M — $\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{gl}(V)\big)$-модуль, имеем, что $\mathrm{V}(M)\subset\mathfrak{gl}(V)^{\perp}\cap\mathcal{Q}_{\mathfrak{sp}}$. Отметим, что $\mathcal{Q}_{\mathfrak{sp}}$ — фактор $W\oplus W^*$ по $\mathbb{Z}_2$, а следовательно, $\mathfrak{gl}(V)^{\perp}\cap\mathcal{Q}_{\mathfrak{sp}}$ — фактор по $\mathbb{Z}_2$ объединения конормальных расслоений к $\mathrm{GL}(V)$-орбитам. Так как модуль W является $\mathrm{GL}(V)$-сферическим, указанные конормальные расслоения $\mathrm{GL}(V)$-сферические. Следовательно, все неприводимые компоненты $\mathrm{V}(M)$ являются $\mathrm{GL}(V)$-сферическими, и следовательно, модуль M является $\mathfrak{gl}(V)$-ограниченным по предложению 1. $\square$

Напомним, что $\bar{\mu}_0$ — это n_W-набор

$$\left(n_W-\frac{1}{2},\,n_W-\frac{3}{2},\dots,\frac{1}{2}\right),$$

а $\mu_0\subset\mathfrak{h}_W^*$ — соответствующий вес.

Теорема 11.

1. *Для любых двух положительных наборов Шейла—Вейля $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ категории ограниченных* $\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{gl}(V)\big)$*-модулей, аннулируемых* $\mathrm{I}(\mu_1)$ *и* $\mathrm{I}(\mu_2)$ *эквивалентны.*
2. *В частности, множество простых ограниченных* $\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{gl}(V)\big)$*-модулей отождествляется с множеством пар $(\bar{\mu},M)$, где $\bar{\mu}$ — положительный n_W-набор Шейла—Вейля, а M — простой ограниченный* $\big(\mathfrak{sp}(W\oplus W^*),\mathfrak{gl}(V)\big)$*-модуль, аннулируемый* $\mathrm{I}(\mu_0)$.

Доказательство. Пусть $\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ — два n_W-набора Шейла—Вейля. Категории ограниченных $(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*), \mathfrak{gl}(V))$-модулей, аннулируемых $\mathrm{I}(\mu_1)$ и $\mathrm{I}(\mu_2)$, эквивалентны [6]. □

Теорема 12. *Пусть $\bar{\mu}$ — n_W-набор Шейла—Вейля. Тогда категория $(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*), \mathfrak{gl}(V))$-модулей, аннулируемых $\mathrm{I}(\mu)$, эквивалентна прямой сумме двух копий категории превратных пучков на W, гладких вдоль $\mathrm{GL}(V)$-орбит.*

Доказательство. Категория $(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*), \mathfrak{gl}(V))$-модулей, аннулируемых $\mathrm{I}(\mu)$, эквивалентна категории $(\mathfrak{sp}(W \oplus W^*), \mathfrak{gl}(V))$-модулей, аннулируемых $\mathrm{I}(\mu_0)$. Последняя категория эквивалентна прямой сумме двух копий категории превратных пучков на W вдоль стратификации $\mathrm{GL}(V)$-орбитами (см. раздел 4.1). □

Мне хочется выразить благодарность моему научному руководителю Ивану Пенкову за его готовность всегда выслушать меня и за неоценимую помощь в работе над текстом.

6. Дополнение. Результаты Т. Брейдена и М. Гринберга

Фиксируем положительное целое число n. Пусть V — $\mathbb{C}$-векторное пространство размерности $2n$. Тогда категория превратных пучков на Λ^2V, гладких вдоль стратификации $\mathrm{GL}(V)$-орбитами, эквивалентна категории представлений следующего колчана с соотношениями A:

$$\mathrm{A}_0 \overset{p_0}{\underset{q_0}{\rightleftarrows}} \mathrm{A}_1 \overset{p_1}{\underset{q_1}{\rightleftarrows}} \ldots \overset{p_{n-2}}{\underset{q_{n-2}}{\rightleftarrows}} \mathrm{A}_{n-1} \overset{p_{n-1}}{\underset{q_{n-1}}{\rightleftarrows}} \mathrm{A}_n,$$

ξ_i и ν_i обратимы для всех i, $\xi_i = \nu_i$ для $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, где $\xi_i := 1 + q_{i-1}p_{i-1}$ для $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\nu_i := 1 + p_iq_i$ для $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Пусть R — это представление A. Если R прост, то все операторы $\{\nu_0^n, \nu_1^{n-1}\xi^1, \ldots, \xi_n^n\}$ пропорциональны тождественному оператору с одной и той же константой $c \in \mathbb{C}^*$. Мы назовём c *монодромией* R.

Множество собственных значений $1 + p_iq_i$ не зависит от i, и мы назовём его *множеством собственных значений* R. Если R прост, это множество состоит из одного элемента λ. Для выбранного собственного значения $\lambda \neq 1$ существует ровно одно простое представление A с собственным значением λ. Простые представления A с собственным значением 1 нумеруются вершинами колчана A.

По определению *носителем* R называется множество вершин A, соответствующих ненулевым векторным пространствам. Соответствующий R превратный пучок сосредоточен в 0, если и только если носитель R есть A_0. Ассоциированный с R превратный пучок гладок вдоль W, если и только если носитель R есть A_n.

Пусть теперь V — $\mathbb{C}$-векторное пространство размерности n. Категория превратных пучков на S^2V, гладких вдоль стратификации $\mathrm{GL}(V)$-орбитами, эквивалентна категории представлений следующего колчана с соотношениями B:

$$\mathrm{B}_0 \underset{q_0}{\overset{p_0}{\leftrightarrows}} \mathrm{B}_1 \underset{q_1}{\overset{p_1}{\leftrightarrows}} \ldots \underset{q_{n-2}}{\overset{p_{n-2}}{\leftrightarrows}} \mathrm{B}_{n-1} \underset{q_{n-1}}{\overset{p_{n-1}}{\leftrightarrows}} \mathrm{B}_n,$$

ξ_i и ν_i обратимы для всех i, $\xi_i^2 = \nu_i^2$ для $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $p_j\nu_{j+1} = -\nu_j p_j$, $q_j\nu_j = -\nu_{j+1}q_j$, $p_j\xi_{j+1} = -\xi_j p_j$, $q_j\xi_j = -\xi_{j+1}q_j$, когда обе стороны равенства определены; здесь $\xi_i := 1 + q_{i-1}p_{i-1}$ для $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\nu_i := 1 + p_i q_i$ для $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. Пусть R — это представление B. Если R прост, то все операторы $\{\nu_0^n, \nu_1^{n-1}\xi^1, \ldots, \xi_n^n\}$ пропорциональны тождественному отображению с одним и тем же коэффициентом $c \in \mathbb{C}^*$. Мы назовём c *монодромией* R.

Пусть R — простое представление B. Тогда множество собственных значений операторов $(-1)^i\xi_i$ состоит из одного элемента $\bar{\xi}$; множество собственных значений операторов $(-1)^i\nu_i$ состоит из одного элемента $\bar{\nu}$. Мы назовём пару $(\bar{\xi}, \bar{\nu})$ *спектром* R. Имеем или $\bar{\xi} = \bar{\nu} = 1$, или $\bar{\xi} = -\bar{\nu}$. Простые представления B со спектром $(1, 1)$ нумеруются внутренними точками B. Для $\lambda \neq \pm 1$ существует ровно одно представление B со спектром $(\lambda, -\lambda)$. Простые представления B со спектром $(1, -1)$ и $(-1, 1)$ нумеруются точками B.

По определению *носителем* R называется множество вершин B, соответствующих ненулевым векторным пространствам. Соответствующий R превратный пучок сосредоточен в 0, если и только если носитель R есть B_0. Ассоциированный с R превратный пучок гладок вдоль W, если и только если носитель R есть B_n.

Литература

[1] Винберг Э. Коммутативные однородные пространства и ко-изотропные симплектические действия // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56. — С. 1—60.

[2] Винберг Э., Кимельфельд Б. Однородные области на флаговых многообразиях и сферические подгруппы полупростых групп Ли // Функц. анализ и его прил. — 1978. — Т. 12, № 3. — С. 12—19.

[3] Винберг Э., Онищик А. Семинар по группам Ли и алгебраическим группам. — М.: УРСС, 1988.

[4] Винберг Э., Попов В. Теория инвариантов // Итоги науки и техн. Алгебраическая геометрия. — 1989. — Т. 4. — С. 137—315.

[5] Beilinson A. Localization of representations of reductive Lie algebras // Proc. of the Int. Congress of Mathematicians (Warsaw, 1983). — Warsaw: PWN, 1984. — P. 699—710.

[6] Bernstein J., Gelfand S. Tensor products of finite and infinite-dimensional representations of semisimple Lie algebras // Compositio Math. — 1980. — Vol. 41. — P. 245—285.

[7] Borel A. et al. Algebraic D-Modules. — Boston: Academic Press, 1987. — (Perspectives in Math.; Vol. 2).

[8] Braden T., Grinberg M. Perverse sheaves on rank stratifications // Duke Math. J. — 1999. — Vol. 96. — P. 317—362.

[9] Collingwood D., McGovern W. Nilpotent Orbits in Semisimple Lie Algebras. — New York: Van Nostrand, 1993. — (Van Nostrand Math. Ser.).

[10] Dixmier J. Algebres Enveloppantes. — Paris: Gauthier-Villars, 1974.

[11] Fernando S. Lie algebra modules with finite dimensional weight spaces. I // Trans. Amer. Math. Soc. — 1990. — Vol. 322. — P. 757—781.

[12] Gabber O. The integrability of the characteristic variety // Amer. J. Math. — 1981. — Vol. 103. — P. 445—468.

[13] Howe R., Umeda T. The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions // Math. Ann. — 1991. — Vol. 290. — P. 565—619.

[14] Joseph A. On the associated variety of the primitive ideal // J. Algebra. — 1984. — Vol. 88. — P. 238—278.

[15] Joseph A. Orbital varieties of the minimal orbit // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1998. — Vol. 31. — P. 17—45.

[16] Kac V. Constructing groups associated to infinite dimensional Lie algebras // Infinite-Dimensional Groups with Applications. Proc. of the Conf. on Infinite-Dimensional Groups. Berkeley 1984. — MSRI Publ., Vol. 4. — Berlin: Springer, 1985. — P. 167—216.

[17] Kashiwara M. The Riemann—Hilbert problem for holonomic systems // Publ. Res. Inst. Math. Sci. — 1984. — Vol. 20. — P. 319—365.

[18] Knapp A., Vogan D. Cohomological Induction and Unitary Representations. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1995. — (Princeton Math. Ser.; Vol. 45).

[19] Knop F. Weylgruppe und Momentabbildung // Invent. Math. — 1990. — Vol. 99. — P. 1—23.

[20] Krause G., Lenagan T. Growth of Algebras and Gelfand—Kirillov Dimension. — Amer. Math. Soc., 2000. — (Grad. Stud. Math.; Vol. 22).

[21] Mathieu O. Classification of irreducible weight modules // Ann. Inst. Fourier. — 2000. — Vol. 50. — P. 537—592.

[22] Milev T. Root Fernando—Kac subalgebras of finite type // J. Algebra. — 2011. — Vol. 336, no. 1. — P. 257—278.

[23] Panyushev D. On the conormal bundles of a G-stable subvariety // Manuscripta Math. — 1999. — Vol. 99. — P. 185—202.

[24] Penkov I., Serganova V. Bounded simple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{sl}(2))$-modules for $\operatorname{rk}\mathfrak{g} = 2$ // J. Lie Theory. — 2010. — Vol. 20. — P. 581—615.

[25] Penkov I., Serganova V. Bounded generalized Harish—Chandra modules // Ann. Inst. Fourier. — To appear.

[26] Penkov I., Serganova V., Zuckerman G. On the existence of $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$-modules of finite type // Duke Math. J. — 2004. — Vol. 125. — P. 329—349.

[27] Petukhov A. Bounded reductive subalgebras of $\mathfrak{sl}_n$ // Transform. Groups. — 2011. — Vol. 16, no. 4. — P. 1173—1182.

[28] Richardson R. Conjugacy classes of parabolic subgroups in semisimple algebraic groups // Bull. London Math. Soc. — 1974. — Vol. 6. — P. 21—24.