Обобщение первой теоремы Мальцева о нильпотентных полугруппах и нильпотентность сплетения полугрупп*

А. В. ТИЩЕНКО
Финансовый университет
при Правительстве Российской Федерации
e-mail: alextish@bk.ru

УДК 512.532

Ключевые слова: полугруппы, нильпотентность в смысле Мальцева, тождество, многообразие полугрупп, группы, [0-]простые полугруппы, сплетение полугрупп, равномерная периодичность.

Аннотация

Найдены все нильпотентные в смысле Мальцева [0-]простые полугруппы, что является обобщением первой теоремы Мальцева о нильпотентных (в смысле Мальцева) полугруппах. Доказано, что нильпотентность в смысле Мальцева сплетения полугрупп влечёт, в случае если пассивная полугруппа сплетения не является нильпотентной (в обычном смысле) полугруппой, тот факт, что активная полугруппа сплетения является конечной группой. Пассивная полугруппа сплетения при этом является равномерно периодической. Найдены необходимые и достаточные условия, при которых расширенное стандартное сплетение является нильпотентной в смысле Мальцева полугруппой, в случае если каждая из сплетаемых полугрупп порождает многообразие конечной ступени.

Abstract

A. V. Tishchenko, A generalization of the first Malcev theorem on nilpotent semigroups and nilpotency of the wreath product of semigroups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 2, pp. 201—221.

We describe all [0-]simple semigroups that are nilpotent in the sense of Malcev. This generalizes the first Malcev theorem on nilpotent (in the sense of Malcev) semigroups. It is proved that if the extended standard wreath product of semigroups is nilpotent in the sense of Malcev and the passive semigroup is not nilpotent, then the active semigroup of the wreath product is a finite nilpotent group. In addition to that, the passive semigroup is uniform periodic. There are found necessary and sufficient conditions under which the extended standard wreath product of semigroups is nilpotent in the sense of Malcev in the case where each of the semigroups of the wreath product generates a variety of finite step.

*Статья написана во время пребывания на стажировке на кафедре высшей алгебры Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова в феврале—марте 2011 года.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 2, с. 201—221.

В честь 70-летия А. В. Михалёва

1. Введение

Нильпотентные в смысле Мальцева полугруппы были введены как полугруппы, определяемые полугрупповыми тождествами, причём тождество n-ступенно нильпотентной полугруппы на классе групп задавало n-ступенно нильпотентные группы [11]. Вторая теорема работы А. И. Мальцева о нильпотентных полугруппах утверждала, что нильпотентные полугруппы (в смысле Мальцева), удовлетворяющие закону сокращения, вложимы в группу частных. Такое вложение существенно проще общих условий вложимости полугруппы в группу (см. [6, 12]). Как выяснилось позднее, такое обобщение с групп на полугруппы возможно не единственным образом [22, 28]. Оказалось, что периодические нильпотентные в смысле Мальцева полугруппы даже не являются локально конечными [2]. Это вообще довольно широкий класс полугрупп, содержащий 1) коммутативные полугруппы, 2) нильпотентные в обычном смысле полугруппы, 3) нильпотентные группы.

Тем не менее этот класс полугрупп достаточно интересен. Во-первых, изучение тождеств Мальцева привело к открытию слов Зимина Z_n, играющих важную роль в эквациональной характеризации локально конечных многообразий полугрупп [3, 13, 23]. Во-вторых, известны связи между нильпотентностью в смысле Мальцева мультипликативной полугруппы ассоциативного кольца с единицей (а также присоединённой полугруппы ассоциативного кольца) и нильпотентностью присоединённого кольца Ли [10]. В-третьих, в работе А. И. Мальцева было выделено понятие полугруппового тождества, которое рассматривалось в классе групп [11, 22], а позднее для ассоциативных колец и алгебр (см., например, [1, 25]).

В настоящей работе рассмотрены два вопроса, связанные с тождеством нильпотентности в смысле Мальцева на полугруппах. Первый вопрос касается возможности обобщения первой теоремы Мальцева о нильпотентных полугруппах на более широкий класс полугрупп, чем группы.

Вопрос 1.1. Какие классы полугрупп определяет тождество Мальцева ступени n на классе простых и 0-простых полугрупп?

Второй вопрос связан с конструкцией сплетения на полугруппах и возможностью определения сплетения полугрупповых многообразий, что является одним из вариантов обобщения произведения групповых многообразий [18, 19, 30].

Сплетения полугрупп неоднократно использовались в литературе для определения сплетений многообразий и псевдомногообразий полугрупп и моноидов [7, 9, 17, 18, 30]. В частности, в [18, 30] для определения сплетения многообразий использовано расширенное стандартное сплетение полугрупп. При изучении сплетения многообразий существенную роль играет следующий общий вопрос.

Вопрос 1.2. Пусть $\mathbf{W}$ и $\mathbf{Z}$ — классы полугрупп. Для каких полугрупп S и R, принадлежащих классу $\mathbf{Z}$, их расширенное стандартное сплетение $S\,w_1\,R$ принадлежит классу $\mathbf{W}$?

На первый вопрос получен исчерпывающий ответ. А именно, в разделе 3 показано, что на классе [0-]простых полугрупп нильпотентные в смысле Мальцева полугруппы индуцируют в точности нильпотентные группы и полугруппы Брандта над нильпотентными группами, т. е. уже достаточно узкий, обозримый класс полугрупп (теорема 3.1). Таким образом, получено обобщение первой теоремы Мальцева о нильпотентных (в смысле Мальцева) полугруппах.

Вопрос 1.2 ранее рассматривался для разных классов в ряде работ [8, 18, 20, 24, 26, 32]. В данной работе он исследуется в случае, когда $\mathbf{W}$ совпадает с классом $\mathbf{M}$ всех нильпотентных в смысле Мальцева полугрупп. В разделе 4 показывается, что если расширенное стандартное сплетение $S\,w_1\,R$ полугрупп нильпотентно в смысле Мальцева, то, как правило, активная полугруппа сплетения является конечной группой, а пассивная полугруппа является равномерно периодической, т. е. порождает периодическое многообразие (теорема 4.1).

Периодические многообразия с разных точек зрения были охарактеризованы в работе [14]. Полугруппы таких многообразий допускают хорошее структурное описание (разложение в полурешётку архимедовых компонент), если периодическое многообразие не содержит пятиэлементной вполне 0-простой полугруппы Брандта. Дальнейшее уточнение структуры полугрупп периодического многообразия получается, если удалить из него «плохие» нильполугруппы, т. е. те, которые не являются нильпотентными. В результате приходим к многообразиям конечной ступени (см. [14]). В разделе 5 формулируются и доказываются основные результаты работы, которые существенно используют структурную теорию полугрупп для многообразий конечной ступени.

Полный ответ на вопрос 1.2 в работе дан в случае, если $\mathbf{W} = \mathbf{M}$, а класс $\mathbf{Z}$ совпадает с классом $\mathbf{FS}$ всех полугрупп, порождающих многообразие конечной ступени (см. [14, 21, 23]). Отметим, что в работах [14, 23] такие многообразия назывались многообразиями конечного индекса, но позднее было предложено заменить термин. В обзоре [21] было объяснено изменение терминологии. Полученная теорема с учётом результатов [20] позволяет также дать ответ на поставленный вопрос в случае, если $\mathbf{Z} = \mathbf{W} = \mathbf{M} \cap \mathbf{FS}$. Основная теорема (теорема 5.1) и её следствие обобщают теорему Баумслага [24]. Таким образом, при решении вопроса 1.2 пока не рассмотрены два случая, а именно: 1) случай, когда периодическое многообразие содержит пятиэлементную полугруппу Брандта, 2) случай, когда периодическое многообразие содержит ненильпотентную счётно порождённую коммутативную нильполугруппу индекса 2.

В разделе 2 приводятся необходимые определения и факты из теории полугрупп и многообразий.

Отметим, что теорема 5.1 и следствие 5.3 из неё были анонсированы в заметке [15].

2. Предварительные сведения

Будем придерживаться обычной терминологии теории полугрупп и теории многообразий (см., например, [5, 22]). Напомним некоторые определения. Элемент a полугруппы S называется *периодическим*, если он удовлетворяет равенству $a^{m+n} = a^m$ для некоторых натуральных чисел m, n. При этом если m и n — наименьшие числа с таким свойством, то m называется *индексом*, n — *периодом* элемента a. *Порядком* периодического элемента называется число l элементов в моногенной полугруппе $\langle a \rangle$, порождённой элементом a. Легко убедиться, что $l = m+n-1$. Если элемент полугруппы не является периодическим, то он порождает бесконечную моногенную полугруппу. В этом случае говорят, что элемент a имеет *бесконечный порядок*.

Пусть X — бесконечное множество, называемое *алфавитом*. Будем предполагать, что X содержит буквы $x, y, z, x_1, \ldots$ с индексами или без индексов. Как обычно, обозначим через X^+ *свободную полугруппу* над алфавитом X, т. е. множество всех непустых слов над алфавитом X с операцией конкатенации в качестве операции умножения. Иногда удобно присоединять пустое слово 1 к X^+ и иметь *свободный моноид* X^*. Отношение равенства на словах обозначается знаком $\equiv$. Слово u называется *подсловом* слова w, если $w \equiv w_1 u w_2$ для некоторых $w_1, w_2 \in X^*$. Если $w = 1$, то u называется *началом* слова w.

Нетривиальным полугрупповым тождеством над X называется двухэлементное подмножество $\{u, v\} \subset X^+$, обычно записываемое как равенство $u = v$. Полугруппа S *удовлетворяет* тождеству $u = v$, если равенство $\varphi(u) = \varphi(v)$ справедливо в S при любом гомоморфизме $\varphi\colon X^+ \to S$.

Полугруппа называется *равномерно периодической*, если в ней верно некоторое тождество вида

$$x^m = x^{m+n}. \tag{2.1}$$

Полугруппа S называется *нильполугруппой индекса* m, если в ней истинно тождество

$$x^m = 0.$$

Полугруппа S называется *нильпотентной ступени* m, если в ней истинно тождество

$$x_1 x_2 \ldots x_m = 0.$$

Непустое слово w назовём *линейным*, если любая переменная входит в него не более одного раза.

Пусть $x, y, z_1, \ldots, z_k, \ldots$ — переменные в счётном алфавите X. Определим слова

$$U_0 = x,\ V_0 = y, \ldots,\ U_{k+1} = U_k z_{k+1} V_k,\ V_{k+1} = V_k z_{k+1} U_k \tag{2.2}$$

для любого целого $k \geqslant 1$. Полугруппа называется *нильпотентной в смысле Мальцева ступени* k, если в ней истинно тождество

$$U_k = V_k. \tag{2.3}$$

Слова (2.2) и тождество (2.3) впервые определил А. И. Мальцев в 1953 году (см. [11]). Им было доказано, что группа является нильпотентной ступени k тогда и только тогда, когда в ней истинно тождество (2.3). Таким образом, вышеприведённое определение можно рассматривать как обобщение важного понятия нильпотентности групп на полугруппы. Очевидно, что истинность тождества $U_k = V_k$ в полугруппе влечёт истинность в ней тождества $U_{k+1} = V_{k+1}$. В дальнейшем всякое начало (в частности, пустое подслово 1) слов $U_k(x, y, z_1, \ldots, z_k)$ и $V_k(x, y, z_1, \ldots, z_k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ будем называть *мальцевским словом*. Нетрудно вычислить, что слова U_k и V_k имеют длину $2^{k+1} - 1$. При этом переменные x, y, z_1 имеют в точности 2^{k-1} вхождений в слова U_k и V_k.

Справедлива следующая лемма (см. [4, с. 139, упражнение 5]).

Лемма 2.1. *Всякая периодическая конечно порождённая нильпотентная группа конечна.*

Как обычно, для полугруппы S через E обозначается множество всех её идемпотентов, через $\mathrm{Gr}\, S$ — объединение всех подгрупп в S, через $N(S) = SES$ — идеал, порождённый в S множеством всех идемпотентов. Множество $Q \subseteq S$ называется *квазиидеалом* полугруппы S, если $SQ \cap QS \subseteq Q$ (см. [5, с. 120, упражнение 3]). Полугруппа S называется *строгим расширением* своего квазиидеала Q, если существуют такие отображения $\varphi\colon S \to Q$ и $\psi\colon S \to Q$, что $st = \varphi(s)t$ и $ts = t\psi(s)$ для любого $t \in Q$ (см. [16]).

Многообразие полугрупп называется *многообразием конечной ступени*, если все нильполугруппы в нём нильпотентны. Такие многообразия были охарактеризованы в [14].

Теорема [14, теорема 2; 23]. *Следующие условия для многообразия полугрупп* $\mathbf{V}$ *эквивалентны*:

1) $\mathbf{V}$ *имеет конечную ступень*;

1′) *каждая нильполугруппа из* $\mathbf{V}$ *нильпотентна*;

2) $\mathbf{V}$ *состоит из полурешёток нильпотентных расширений вполне простых полугрупп*;

3) *многообразие* $\mathrm{var}\{xy = yx,\ x^2 = 0\}$ *не содержится в* $\mathbf{V}$;

4) *в* $\mathbf{V}$ *выполняется тождество*

$$x_1 \ldots x_k y_1 \ldots y_k z_1 \ldots z_k = x_1 \ldots x_k (y_1 \ldots y_k)^n z_1 \ldots z_k$$

для некоторых $k \geqslant 1$ *и* $n \geqslant 2$;

5) *каждая полугруппа* S *из* V *обладает следующими свойствами*:

   а) *фактор-полугруппа* $S/N(S)$ *нильпотентна*;

   б) *множество* $\mathrm{Gr}\, S$ — *квазиидеал в* S;

   в) $N(S)$ *является строгим расширением своего квазиидеала* $\mathrm{Gr}\, S$.

Условие 5) было получено в [16] как изменение соответствующей характеризации, полученной в [14].

Замечание. Всякое нильпотентное в смысле Мальцева многообразие конечной ступени локально конечно.

Этот факт следует из [14, предложение 3], периодичности указанного многообразия и леммы 2.1 о локальной конечности периодического нильпотентного многообразия групп.

Полугруппу назовём *FS-полугруппой*, если она порождает многообразие конечной ступени.

Сплетением полугрупп S и R при помощи правого R-полигона A называется полугруппа $T = (S\ w\ R \mid A)$, определённая на декартовом произведении $\mathrm{F}(A, S) \times R$, где $\mathrm{F}(A, S)$ — множество всех функций из A в S, а умножение задаётся по формуле

$$(f, p)(g, q) = (f^p g, pq), \quad (f^p g)(a) = f(a)g(ap)$$

для любого $a \in A$ [17, 18, 29]. При этом R называется активной полугруппой, а S — пассивной полугруппой сплетения. В нашем случае нас интересует прежде всего сплетение полугрупп с точки зрения сплетения многообразий полугрупп, а именно с точки зрения выполнения в нём некоторых тождеств. При изучении сплетений многообразий полугрупп была выделена операция моноидного сплетения многообразий [17, 18, 30] как наиболее удачная. Сплетение называется *стандартным*, если полигон $A = A_R$ совпадает с полугруппой R. Сплетение полугрупп $T = (S\ w\ R \mid A)$ называется *расширенным стандартным*, если полигон A совпадает с наименьшим моноидом R^1, содержащим полугруппу R. Стандартное сплетение обозначается $T = S\ w\ R$. Расширенное стандартное сплетение обозначается $T = S\ w_1\ R$. Для полугруппы R с единицей расширенное стандартное сплетение совпадает со стандартным.

Известно, что моноидное сплетение многообразий полугрупп порождается всевозможными расширенными стандартными сплетениями, в которых пассивная полугруппа принадлежит первому сплетаемому многообразию, а активная — второму [17, 18]. Поэтому в работе основной акцент сделан на решении задачи о нильпотентности в смысле Мальцева для расширенных стандартных сплетений.

Перечислим ряд обозначений, используемых в дальнейшем. Через ${}^q f$ обозначается функция из $\mathrm{F}(A, S)$, значения которой вычисляются по формуле ${}^q f(a) = f(aq)$ для любых $a \in R$, $q \in R^1$. Через $\bar{c}$ обозначается постоянная функция из R^1 в S, принимающая значение $c \in S$. Для любого подмножества K полугруппы R через $\langle K \rangle$ обозначается подполугруппа, порождённая этим множеством K в R.

Через $C(m, n)$ обозначена моногенная полугруппа, определяемая соотношением $b^m = b^{m+n}$ с образующим элементом b. Для циклической группы $m = 1$ и применяется обычное более короткое обозначение $C(n)$. Двухэлементная полурешётка далее обозначается $\mathrm{Sl}_2 = \{0, 1\}$.

Напомним, что полугруппы Брандта согласно [5, теорема 3.9] — это в точности инверсные вполне 0-простые полугруппы, а также в точности полугруппы, изоморфные рисовской полугруппе матричного типа $M^0(G; I, I; \Delta)$, у которых сэндвич-матрица является единичной матрицей Δ. В частности, эта матрица квадратная, хотя множество индексов I может быть бесконечным. Обозначим через $\mathrm{B}(G, n)$ полугруппу Брандта со структурной группой G и индексным множеством I мощности n. Здесь n может быть и бесконечным кардиналом. При $n = 1$ полугруппа $\mathrm{B}(G, 1)$ просто является группой с внешне присоединённым нулём, т. е. G^0.

3. Нильпотентные в смысле Мальцева [0-]простые полугруппы

В этом разделе полностью описаны указанные в его названии полугруппы. Как обычно, термин [0-]простая полугруппа означает, что либо полугруппа простая, либо 0-простая.

Теорема 3.1. *Всякая* [0-]*простая полугруппа нильпотентна в смысле Мальцева тогда и только тогда, когда она является либо нильпотентной группой, либо вполне* 0*-простой полугруппой Брандта над нильпотентной группой.*

Лемма 3.1. *Идемпотентная полугруппа нильпотентна в смысле Мальцева тогда и только тогда, когда она является полурешёткой.*

Доказательство. Заметим, что в любой прямоугольной связке истинно тождество $xyx = x$. С другой стороны, нетрудно проверить по индукции, что мальцевские слова (2.2) обладают свойством

$$U_{2m-1} = xU'_{2m-1}y, \quad V_{2m-1} = yV'_{2m-1}x, \quad U_{2m} = xU'_{2m}x, \quad V_{2m} = yV'_{2m}y$$

для любого целого числа $m \geqslant 1$. Следовательно, для любых двух различных элементов a, b прямоугольной связки имеем

$$U_{2m}(a, b, a, \ldots, a) = aua = a, \quad V_{2m}(a, b, a, \ldots, a) = bvb = b.$$

Таким образом, если S — неодноэлементная прямоугольная связка, то тождество $U_{2m} = V_{2m}$ ложно в ней при любом целом $m \geqslant 1$.

Пусть теперь S — произвольная связка. Как известно, она представляет собой полурешётку прямоугольных связок [5, теорема 4.6 и упражнение 1 к § 4.2]. Если S содержит хотя бы одну неодноэлементную прямоугольную связку, то она не является нильпотентной в смысле Мальцева. В противном случае S — полурешётка. Полурешётка коммутативна и поэтому, очевидно, нильпотентна в смысле Мальцева ступени 1. □

Лемма 3.2. *Бициклическая полугруппа не является нильпотентной в смысле Мальцева полугруппой.*

Доказательство. Пусть $B = \langle a, b \mid ab = 1 \rangle$ — бициклическая полугруппа. Положим $x = a$, $y = b$, $z_1 = \ldots = z_k = b$. По индукции легко вывести, что $\{U_k, V_k\} = \{b^{m-1}, b^m a\}$, где $m = 2^k$. Но эти два элемента различны в B. Следовательно, тождество (2.3) ложно в B при любом целом $k \geqslant 1$. □

Предложение 3.1. *Вполне простая полугруппа нильпотентна в смысле Мальцева тогда и только тогда, когда она является нильпотентной группой. Вполне 0-простая полугруппа нильпотентна в смысле Мальцева тогда и только тогда, когда она является полугруппой Брандта над нильпотентной группой.*

Доказательство. Пусть вполне простая полугруппа S нильпотентна в смысле Мальцева. Всякая вполне простая полугруппа, не являющаяся группой, гомоморфно отображается на неодноэлементную прямоугольную связку. Последнее невозможно по лемме 3.1. Следовательно, S — группа. Оставшаяся часть первого утверждения вытекает из результатов А. И. Мальцева [11].

Докажем второе утверждение. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ — вполне 0-простая полугруппа, нильпотентная в смысле Мальцева. Как известно, S содержит подгруппу, изоморфную группе G. Следовательно, G — нильпотентная группа. Допустим, что сэндвич-матрица P в строке λ содержит два ненулевых элемента $p_{\lambda i}$ и $p_{\lambda j}$. Тогда S содержит вполне простую подполугруппу $T = H_{i\lambda} \cup H_{j\lambda}$, которая гомоморфно отображается на двухэлементную полугруппу левых нулей. По лемме 3.1 это невозможно. Следовательно, сэндвич-матрица P содержит в точности один ненулевой элемент в каждой строке. Аналогично P содержит в точности один ненулевой элемент в каждом столбце. Нетрудно проверить, что вполне 0-простая полугруппа, представленная в виде рисовской полугруппы матричного типа с сэндвич-матрицей P, обладающей свойством содержать в каждой строке и в каждом столбце в точности один ненулевой элемент, удовлетворяет условиям леммы 3.8 из [5]. Следовательно, S — полугруппа Брандта в силу леммы 3.8 из [5].

Обратно, пусть S — полугруппа Брандта над нильпотентной группой G. Согласно теореме 3.9 из [5] S изоморфна рисовской полугруппе матричного типа с единичной сэндвич-матрицей над группой G^0 с нулём. Вычислим значения u_k и v_k слов U_k и V_k при заданном гомоморфизме

$$\varphi(x) = (i, f, \lambda), \quad \varphi(y) = (j, g, \mu), \quad \varphi(z_s) = (l_s, h_s, \nu_s) \quad (s = 1, \ldots, k).$$

Тогда

$$u_1 = \varphi(U_1) = (i, f, \lambda)(l_1, h_1, \nu_1)(j, g, \mu) = (i, f p_{\lambda l_1} h_1 p_{\nu_1 j} g, \mu).$$

Заметим, что $u_1 \neq 0$ в том и только том случае, если $\lambda = l_1$, $j = \nu_1$. При этом если $u_1 \neq 0$, то $u_1 = (i, U_1(f, g, h_1), \mu)$.

Аналогично

$$v_1 = \varphi(V_1) = (j, g, \mu)(l_1, h_1, \nu_1)(i, f, \lambda) = (i, g p_{\mu l_1} h_1 p_{\nu_1 i} f, \lambda).$$

Заметим, что $v_1 \neq 0$ в том и только том случае, если $\mu = l_1$, $i = \nu_1$. При этом если $v_1 \neq 0$, то $v_1 = (j, V_1(f, g, h_1), \lambda)$. Поэтому если $u_1 = 0$ или $v_1 = 0$, то $u_2 = u_1 \varphi(z_2) v_1 = 0$ и $v_2 = v_1 \varphi(z_2) u_1 = 0$. В частности, получаем, что для коммутативной группы G в любом случае $u_2 = v_2$ верно в $\mathrm{B}(G, n)$.

Если же $u_1 \neq 0$ и $v_1 \neq 0$, то $i = \nu_1 = j$, $\lambda = l_1 = \mu$. Следовательно, в этом случае имеем $\varphi(x) = (i, f, \lambda)$, $\varphi(y) = (i, g, \lambda)$, т. е. $\varphi(x), \varphi(y) \in H_{i\lambda}$. Таким образом, если u_1, v_1 не равны нулю, то $u_1, v_1 \in H_{i\lambda}$. Повторяя это рассуждение, получим на некотором шаге, что либо оба значения u_s, v_s равны нулю, либо $u_s, v_s \in H_{i\lambda}$. В последнем случае имеем, что

$$\begin{aligned} u_{s+1} &= u_s\varphi(z_{s+1})v_s = U_{s+1}(f, g, h_1, \ldots, h_{s+1}),\\ v_{s+1} &= v_s\varphi z_{s+1}u_s = V_{s+1}(f, g, h_1, \ldots, h_{s+1}). \end{aligned}$$

Следовательно, для нильпотентной группы ступени $k \geqslant 2$ в любом случае имеем $u_k = v_k$. □

Из приведённого доказательства получаем следующую оценку ступени нильпотентности вполне 0-простой полугруппы.

Следствие 3.1. *Если группа G нильпотентная ступени $k \geqslant 2$, то полугруппа Брандта над группой G нильпотентная в смысле Мальцева ступени k. Если группа G коммутативная, то полугруппа Брандта $\mathrm{B}(G, n)$ над группой G нильпотентная в смысле Мальцева ступени 2 при $n \geqslant 2$ и коммутативная при $n = 1$.*

Доказательство теоремы 3.1. Достаточность следует из предложения 3.1. Пусть S — нильпотентная в смысле Мальцева [0-]простая полугруппа. По теореме 6.5 из [27] бициклическая полугруппа делит любую [0-]простую полугруппу, которая не является вполне [0-]простой. Поэтому по лемме 3.2 любая нильпотентная в смысле Мальцева [0-]простая полугруппа является вполне 0-простой полугруппой. Теперь необходимость следует из предложения 3.1. □

4. Сплетения, нильпотентность в смысле Мальцева и периодичность

Основным результатом настоящего раздела является теорема, показывающая, что нильпотентность в смысле Мальцева сплетения полугрупп, как правило, влечёт за собой равномерную периодичность обеих сплетаемых полугрупп.

Теорема 4.1. *Если полугруппа S нильпотентна (в обычном смысле), а полугруппа R нильпотентна в смысле Мальцева, то их расширенное стандартное сплетение $T = S\ w_1\ R$ нильпотентно в смысле Мальцева. Если расширенное стандартное сплетение $T = S\ w_1\ R$ нильпотентно в смысле Мальцева, причём S не является нильпотентной, то R — конечная нильпотентная группа, а S — нильпотентная в смысле Мальцева равномерно периодическая полугруппа.*

Напомним, что полугруппа называется равномерно периодической, если в ней выполнено некоторое тождество периодичности (2.1).

Для доказательства теоремы 4.1 предварительно докажем ряд лемм, которые могут представлять самостоятельный интерес, так как в них содержатся количественные оценки ступени нильпотентности сплетения. Предварительно напомним метод построения тождеств в сплетении $T = (S\ w\ R \mid A)$ полугрупп S и R при помощи правого R-полигона A, указанный в [17, 18].

Пусть X — счётный алфавит переменных $x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots$. Для слов u и v запись $u \equiv v$ означает графическое совпадение. Пусть имеется тождество

$$u = v, \tag{4.1}$$

где $u \equiv y_1 \ldots y_k$ и $v \equiv z_1 \ldots z_l$ — слова в алфавите X, причём среди букв $y_1, \ldots, y_k, z_1, \ldots, z_l$ могут быть и одинаковые. Сделаем подстановку

$$\varphi(y_i) = (f_i, p_i), \quad \varphi(z_j) = (g_j, q_j)$$

и, применяя правило умножения в сплетении полугрупп, получим следующие равенства:

$$\begin{gathered} p_1 \ldots p_k = q_1 \ldots q_l, \\ f_1(a) f_2(ap_1) \ldots f_k(ap_1 \ldots p_{k-1}) = g_1(a) g_2(aq_1) \ldots g_l(aq_1 \ldots q_{l-1}). \end{gathered} \tag{4.2}$$

Пусть тождество

$$\tilde{u} = \tilde{v}, \tag{4.3}$$

получено из равенства (4.2) заменой каждого множителя вида $f_i(ap_1 \ldots p_{i-1})$ и $g_j(aq_1 \ldots q_{j-1})$ на переменную из X таким образом, что выполнено следующее условие:

два множителя заменяются на одну и ту же букву в том и только том случае, если их символы функций совпадают, а их аргументы равны тождественно в полугруппе R при $a = 1$. $(*)$

Лемма 4.1 [18, теорема 3.5]. *Эквивалентны следующие условия*:

а) *тождество* (4.1) *истинно в моноидном сплетении* $\mathbf{U}\ w\ \mathbf{V}$ *многообразий полугрупп*;

б) *тождество* (4.1) *истинно в любом расширенном стандартном сплетении* $S\ w_1\ R$ *полугрупп, в котором* $S \in \mathbf{U}$ *и* $R \in \mathbf{V}$;

в) *в многообразии* $\mathbf{V}$ *истинно тождество* (4.1), *а в многообразии* $\mathbf{U}$ *истинно тождество* (4.3).

Если расширенное стандартное сплетение $T = S\ w_1\ R$ удовлетворяет тождеству Мальцева (2.3), то, делая в нём подстановку

$$\varphi(x) = (f, p), \quad \varphi(y) = (h, r), \quad \varphi(z_i) = (g_i, q_i)$$

и применяя правило умножения в сплетении, получаем равенства

$$\begin{gathered} U_k(p, r, q_1, \ldots, q_k) = V_k(p, r, q_1, \ldots, q_k), \\ f(a) g_1(ap) h(apq_1) g_2(apq_1 r) \ldots = h(a) g_1(ar) h(arq_1) g_2(arq_1 p) \ldots, \end{gathered} \tag{4.4}$$

которые должны быть справедливы для любых функций $f, h, g_1, \ldots, g_k \in \mathrm{F}(R^1, S)$ и любых $p, r, q_1, \ldots, q_k \in R$, $a \in R^1$. Как отмечалось в [18], в (4.4) можно считать, что $a = 1$. Заметим, что в (4.4) аргументами функций являются элементы вида au, где $a \in R^1$ и u — некоторое мальцевское слово в R.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 4.2. *Если полугруппа S нильпотентна ступени m, а полугруппа R нильпотентна в смысле Мальцева ступени k_1, то расширенное стандартное сплетение $T = S\ w_1\ R$ нильпотентно в смысле Мальцева ступени* $k = \max\{k_1, \log_2(m+1) - 1\}$.

Лемма 4.3. *Если расширенное стандартное сплетение $T = S\ w_1\ R$ нильпотентно в смысле Мальцева ступени k и $m = 2^{k+1} - 1$, то либо R — периодическая группа, в которой порядок любого элемента не превосходит $m - 1$, либо S — нильполугруппа индекса m, удовлетворяющая тождеству*

$$yx^{m-1} = 0. \tag{4.5}$$

Доказательство. Положим в равенстве (4.4) $a = 1$ и $p = r = q_i = b$ $(i = 1, \ldots, k)$. В результате получим равенство

$$f(1)g_1(b)h(b^2)g_2(b^3)\ldots = h(1)g_1(b)f(b^2)g_2(b^3)\ldots. \tag{4.6}$$

Аргументами функций в (4.6) служат неотрицательные целые степени элемента $b \in R$, а именно $b^0 = 1, b, \ldots, b^{m-1}$. При этом, возможно, R содержит такой элемент b, что все степени $\{b^j \mid 1 \leqslant j \leqslant m-1\}$ не равны единице 1 полугруппы R. Тогда либо R не является группой, либо она содержит элемент, порядок которого больше $m - 1$. Иначе R является группой и каждый её элемент b имеет порядок j, где j, вообще говоря, зависит от b, но удовлетворяет неравенствам $1 \leqslant j \leqslant m - 1$. В последнем случае R — группа ограниченной экспоненты $(m-1)!$.

В первом случае по лемме 4.1 истинность тождества Мальцева (2.3) в расширенном стандартном сплетении влечёт истинность тождества $yx^{m-1} = zx^{m-1}$ в S, так как первые множители $f(1)$ и $h(1)$ входят в различные части равенства (4.6) и только по одному разу. Из последнего тождества и вытекает, что $x^m = yx^{m-1}$ и x^m — правый нуль в S. По лемме 3.1 нильпотентная в смысле Мальцева полугруппа S не может содержать неодноэлементную подполугруппу правых нулей. Следовательно, элемент x^m — нуль в S, а S — нильполугруппа индекса m с тождеством (4.5). □

Лемма 4.4. *Если расширенное стандартное сплетение $T = S\ w_1\ R$ нильпотентно в смысле Мальцева ступени k и R содержит элемент, порядок которого больше $m - 1$, где $m = 2^{k+1} - 1 = 2n + 1$, то в S истинно тождество*

$$x_0z_1x_1\ldots z_nx_n = y_0z_1y_1\ldots z_ny_n. \tag{4.7}$$

Более того, S — нильпотентная полугруппа ступени m с тождеством (4.5).

Доказательство. Если R содержит элемент, порядок которого больше $m-1$, то в равенстве (4.6) все аргументы различны при $a = 1$ и $p = r = q_i = b$ $(i = 1, \ldots, k)$. Согласно лемме 4.1 в S истинно тождество (4.7). В силу леммы 4.3 S — нильполугруппа индекса m, т. е. $x^m = 0$. Полагая в (4.7) $y_n = x^m$, получим, что в S истинно тождество, в котором левая часть есть линейное слово длины m, а правая часть есть нуль 0. Следовательно, S — нильпотентная полугруппа ступени m. □

Лемма 4.5. *Если R — группа, в которой существует строго возрастающая цепь подгрупп $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_k$, $R_i = \langle q_1, \ldots, q_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, k)$, то истинность тождества Мальцева* (2.3) *в сплетении $T = S\ w_1\ R$ индуцирует на S истинность тождества нильпотентности ступени $m = 2^{k+1} - 1$.*

Доказательство. Полагая в равенстве (4.4) $a = p = r = 1$, получаем в качестве аргументов функций из (4.4) последовательность мальцевских слов в R

$$1,\ q_1,\ q_1q_2,\ q_1q_2q_1,\ q_1q_2,\ q_1q_3, \ldots . \tag{4.8}$$

Покажем, что в последовательности (4.8) любые два элемента различны. В самом деле, пусть $u = v$ для некоторых мальцевских слов последовательности (4.8). Допустим, что j — максимальный индекс элементов q_i, которые встречаются в записи слов u и v. Если q_j встречается в записи u, но не в записи v, то $u \equiv u_1q_ju_2$, где $u_1, u_2 \in R_{j-1}$. Тогда из равенства $v = u_1q_ju_2$ получим, что $q_j = u_1^{-1}vu_2^{-1} \in R_{j-1}$. Приходим к противоречию с условием строгого возрастания цепи подгрупп $\{R_i\}$. Пусть теперь $u \equiv u_1q_ju_2$, $v \equiv v_1q_jv_2$ и $u = v$. Тогда, очевидно, $u_1 \equiv v_1$. Поэтому, умножая равенство $u = v$ на $(u_1q_j)^{-1}$ слева, получаем $u_2 = v_2$. Последнее равенство уже справедливо для мальцевских слов в подгруппе R_{j-1}. Используя индуктивное предположение, имеем $u_2 \equiv v_2$. Отсюда следует, что $u \equiv v$.

Тождество (2.3) в сплетении T индуцирует равенство

$$f(1)g(1)h(q_1)g_2(q_1)h(q_1q_2)\ldots = h(1)g(1)f(q_1)g_2(q_1)f(q_1q_2)\ldots . \tag{4.9}$$

Согласно доказанному выше все мальцевские слова среди аргументов множителей в (4.9) различны. Следовательно, по лемме 4.1 равенство (4.9) влечёт на S тождество (4.7), в котором $n = 2^k - 1$. Из (4.7) легко следует тождество $yx^{2n} = x^{2n+1} = x^{2n}y$. Как и в лемме 4.4, отсюда легко следует истинность в S тождества нильпотентности ступени $2n + 1$. □

Следствие 4.1. *Если сплетение $T = S\ w_1\ R$ удовлетворяет тождеству Мальцева* (2.3), *R — группа и S не является нильпотентной полугруппой, то R — конечная нильпотентная группа.*

Доказательство. Если R содержит элемент бесконечного порядка, то S — нильпотентная полугруппа в силу леммы 4.4, что противоречит условию следствия. Пусть R — бесконечная периодическая нильпотентная группа. Как известно, R не может быть конечно порождённой по лемме 2.1. Следовательно, в R можно выделить бесконечную возрастающую цепь подгрупп

$$\langle q_1 \rangle \subset \langle q_1, q_2 \rangle \subset \ldots \subset \langle q_1, \ldots q_i \rangle \subset \ldots .$$

По лемме 4.5 получаем, что S является нильпотентной полугруппой. Полученное противоречие показывает, что группа R конечна. Очевидно, что R нильпотентна как гомоморфный образ сплетения T. □

Всякой паре конгруэнций α на S и δ на R соответствует эквивалентность $\alpha\ w\ \delta$, определённая на сплетении $T = (S\ w\ R \mid A)$ следующим условием:

$(f,p)\ \alpha\, w\, \delta\ (g,q)$ в том и только том случае, если $p\ \delta\ q$ и $f(a)\ \alpha\ g(a)$ при любом $a \in A$. Легко проверить, что эквивалентность $\alpha\ w\ \delta$ стабильна слева. В случае же, если δ — нулевая конгруэнция на R, соответствующая эквивалентность α' на сплетении T является также и стабильной справа. В самом деле, $\big((f,p),(g,p)\big)(h,r) = \big((f^p h, pr),(g^p h, pr)\big)$. При этом $f(a)h(ap)\ \alpha\ g(a)h(ap)$ для любого $a \in A$. Таким образом, верна следующая лемма.

Лемма 4.6. *Всякой конгруэнции α на S в сплетении $T = (S\ w\ R \mid A)$ соответствует конгруэнция α', определённая следующим условием: $(f,p)\ \alpha'\ (g,q)$ в том и только том случае, если $p = q$ и $f(a)\ \alpha\ g(a)$ для любого $a \in A$. Более того, если $\bigcap\{\alpha_i \mid i \in I\}$ — нулевая конгруэнция на S, то $\bigcap\{\alpha'_i \mid i \in I\}$ — нулевая конгруэнция в сплетении T.*

В дальнейшем существенно используются некоторые леммы о гомоморфизмах сплетений из [18].

Лемма 4.7 [18, предложение 2.6].

1. *Если N — подполугруппа в S, то сплетение $T_0 = (N\ w\ R \mid A)$ — подполугруппа сплетения $T = (S\ w\ R \mid A)$.*
2. *Если $\varphi\colon S \to S_1$ — сюръективный гомоморфизм, то $\varphi'\colon T \to Q$, где $Q = (S_1\ w\ R \mid\ )$, $\varphi'(f,r) = (\varphi(f), r)$ и $\big(\varphi(f)\big)(a) = \varphi\big(f(a)\big)$ для любого $a \in A$, также сюръективный гомоморфизм.*

Лемма 4.8 [18, следствие 2.12]. *Если полугруппа Q делит R, то расширенное стандартное сплетение $S\ w_1\ Q$ делит расширенное стандартное сплетение $S\ w_1\ R$.*

Лемма 4.9. *Если расширенное стандартное сплетение $T = S\ w_1\ R$ нильпотентно в смысле Мальцева, то S — равномерно периодическая полугруппа.*

Доказательство. Если R не является периодической группой ограниченной экспоненты, то по лемме 4.3 S — нильполугруппа конечного индекса. Пусть теперь R — группа. Если S нильпотентна, то она, очевидно, равномерно периодическая. Если S не является нильпотентной, то согласно следствию 4.1 группа R конечна. Если S содержит элемент t и $N = \langle t\rangle$ — бесконечная моногенная полугруппа, то $T_0 = N\ w_1\ R$ делит сплетение $T = S\ w_1\ R$ по лемме 4.7. Гомоморфизм N на циклическую группу $C(p)$ простого порядка p индуцирует гомоморфизм T_0 на сплетение $T_p = C(p)\ w_1\ R$. Если теперь выбрать p взаимно простым с порядком группы R, то по теореме Баумслага T_p не является нильпотентной группой и, следовательно, не является нильпотентной в смысле Мальцева полугруппой. Таким образом, S — периодическая полугруппа.

Предположим, что S не является равномерно периодической. Тогда существует последовательность элементов $\{s_i\}$ $(i = 1, 2, \dots)$, порождающих моногенные полугруппы возрастающих порядков $l(1) < l(2) < \ldots < l(i) < \ldots$. Пусть $l(i) = m(i) + n(i) - 1$, где $m(i)$ — индекс элемента s_i, а $n(i)$ — период этого элемента. Можно считать, что последовательность $\{s_i\}$ выбрана таким образом, что либо индексы элементов, либо их периоды монотонно неограниченно возрастают.

Пусть неограниченно возрастает последовательность индексов элементов $\{s_i\}$. Тогда, переходя к фактор-полугруппам в первом сплетаемом множителе, получим, что сплетения $D_i = C(m(i), 1)\ w_1\ R$ делят сплетение T. В этом случае по лемме 4.6 сплетение T_0 разложимо в подпрямое произведение полугрупп D_i, и поэтому T_0 принадлежит многообразию, порождённому полугруппой T. Тогда T_0 нильпотентно в смысле Мальцева, что противоречит доказанному выше. Случай неограниченности последовательности периодов рассматривается аналогично. □

Доказательство теоремы 4.1. Первое утверждение следует из леммы 4.2. Пусть сплетение $T = S\ w_1\ R$ нильпотентно в смысле Мальцева. Равномерная периодичность S следует из леммы 4.9. Если S не является нильпотентной, то согласно леммам 4.3 и 4.4 R — равномерно периодическая группа, а по следствию 4.1 эта группа конечна. □

5. Основные результаты

В этом разделе решается задача о нильпотентности в смысле Мальцева расширенного стандартного сплетения полугрупп конечной ступени. Основная теорема даёт обобщение теоремы Баумслага о нильпотентности сплетения групп, хотя последняя и используется при доказательстве.

Теорема Баумслага. *Стандартное сплетение двух неодноэлементных групп нильпотентно тогда и только тогда, когда активная группа сплетения — конечная p-группа, а пассивная группа сплетения — нильпотентная p-группа ограниченной экспоненты.*

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 5.1. *Расширенное стандартное сплетение $S\ w_1\ R$ неодноэлементных полугрупп S и R, принадлежащих некоторому многообразию конечной ступени, нильпотентно в смысле Мальцева тогда и только тогда, когда каждая из этих полугрупп нильпотентна в смысле Мальцева и выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) *S — нильпотентная полугруппа*;
2) *R — конечная нильпотентная группа нечётного порядка, S — полурешётка нильпотентных полугрупп*;
3) *R — конечная p-группа для нечётного простого p, S — полурешётка идеальных нильпотентных расширений нильпотентных p-групп, экспоненты которых являются ограниченными в совокупности*;
4) *R — конечная 2-группа, S — идеальное нильпотентное расширение нильпотентной 2-группы ограниченной экспоненты.*

Для доказательства теоремы 5.1 предварительно докажем ряд лемм. Ниже будут производиться вычисления значений мальцевских слов U_k и V_k в сплетениях при различных значениях переменных и будут проверяться равенства (4.2) и (4.3). Значения слов U_k и V_k в сплетении будем обозначать, как правило, u_k и v_k соответственно.

Лемма 5.1. *Стандартное сплетение* $\mathrm{Sl}_2 \; w \; C(2)$ *двухэлементной полурешётки* Sl_2 *и группы* $C(2)$ *порядка* 2 *не является нильпотентной в смысле Мальцева полугруппой.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Sl}_2 = \{0, 1\}$ и $C(2) = \langle b \mid b^3 = b \rangle$. Тогда $b^2 = e$ — единица группы $C(2)$. В тождестве Мальцева (2.3) при $k = 1$ положим

$$\varphi(x) = (f, e), \quad \varphi(y) = (\bar{1}, e), \quad \varphi(z_1) = (\bar{1}, b).$$

Вычисляя значения слов U_1 и V_1, получаем

$$u_1 = (f, e)(\bar{1}, b)(\bar{1}, e) = (f, b), \quad v_1 = (\bar{1}, e)(\bar{1}, b)(f, e) = ({}^b f, b).$$

В качестве функции f выберем такую, что $f(e) = 0$ и $f(b) = 1$. Тогда ${}^b f \neq f$ и $u_1 \neq v_1$. Положим $z_{2l} = (\bar{1}, e)$ и $z_{2l+1} = (\bar{1}, b)$. Вычисляя значения u_k и v_k по индукции, получим, что для чётных $k = 2l$ имеем

$$u_{2l} = u_{2l-1}(\bar{1}, e)v_{2l-1} = (f, b)(\bar{1}, e)({}^b f, b) = (f^{b^2} f, b^2) = (f, e),$$
$$v_{2l} = v_{2l-1}(\bar{1}, e)u_{2l-1} = ({}^b f, b)(\bar{1}, e)(f, b) = \big(({}^b f)^2, b^2\big) = ({}^b f, e).$$

Для нечётных $k = 2l + 1$ получим

$$u_{2l+1} = u_{2l}(\bar{1}, b)v_{2l} = (f, e)(\bar{1}, b)({}^b f, e) = (f^{b^2} f, b) = (f, b),$$
$$v_{2l+1} = v_{2l}(\bar{1}, b)u_{2l} = ({}^b f, e)(\bar{1}, b)(f, e) = ({}^b f, b).$$

Следовательно, для выбранных значений переменных $u_k \neq v_k$ для всех положительных целых значений k. Таким образом, тождество (2.3) ложно в сплетении при любом положительном целом k. $\square$

Пусть G — полугруппа и $G^0 = G \cup \{0\}$ — полугруппа, полученная из G внешним присоединением нуля 0, т. е. $a0 = 0a = 0$ для любого $a \in G^0$. Тогда G^0 является полугруппой с нулём, но без нетривиальных делителей нуля.

Лемма 5.2. *Пусть* R *— конечная группа и стандартное сплетение* $T_1 = G \; w \; R$ *является нильпотентной в смысле Мальцева полугруппой. Тогда сплетение* $T = G^0 \; w \; R$ *нильпотентно в смысле Мальцева в том и только том случае, если* R *— конечная нильпотентная группа нечётного порядка.*

Доказательство. Пусть сплетение $T = G^0 \; w \; R$ является нильпотентной в смысле Мальцева полугруппой. Согласно следствию 4.1 группа R конечная и нильпотентная (как проекция T). Согласно лемме 4.6 сплетение T можно гомоморфно отобразить на $T_0 = \mathrm{Sl}_2 \; w \; R$. Если R имеет чётный порядок, то по теореме Силова в ней есть элемент порядка 2. В этом случае $\mathrm{Sl}_2 \; w \; C(2)$ делит T_0 по лемме 4.8, что противоречит лемме 5.1. Следовательно, R — конечная нильпотентная группа нечётного порядка.

Обратно, пусть R — конечная группа нечётного порядка, нильпотентная ступени l. Положим в тождестве (2.3)

$$\varphi(x) = (f, p), \quad \varphi(y) = (h, r), \quad \varphi(z_i) = (g_i, q_i).$$

Значения слов U_n и V_n в сплетении T обозначим (u_n, s_n) и (v_n, t_n). Очевидно, что $s_l = t_l$. Предположим, что $u_l \neq v_l$. Через $z(u)$ обозначим множество нулей функции u, т. е. множество $z(u) = \{r \in R\colon u(r) = 0\}$. Покажем, что если $z(u_n) \neq z(v_n)$ при $n \geqslant l$, то суммарное число нулей $|z(u_n)| + |z(v_n)|$ увеличивается с ростом n. В самом деле,

$$(u_{n+1}, s_{n+1}) = (u_n, s_n)(g_{n+1}, q_{n+1})(v_n, s_n) = (u_n \cdot {}^{s_n}g_{n+1} \cdot {}^{s_n q_{n+1}}v_n, s_n q_{n+1} s_n),$$
$$(v_{n+1}, s_{n+1}) = (v_n, s_n)(g_{n+1}, q_{n+1})(u_n, s_n) = (v_n \cdot {}^{s_n}g_{n+1} \cdot {}^{s_n q_{n+1}}v_n, s_n q_{n+1} s_n).$$

Заметим, что в полугруппе без нетривиальных делителей нуля справедливы равенства

$$z(u_{n+1}) = z(u_n) \cup z({}^{b}v_n) \cup z({}^{s_n}g_{n+1}), \quad z(v_{n+1}) = z(v_n) \cup z({}^{b}u_n) \cup z({}^{s_n}g_{n+1}), \tag{5.1}$$

где $b = s_n q_{n+1}$. Если $b = e$, где e — единица группы R, то $z(u_{n+1}) = z(v_{n+1})$. Пусть $b \neq e$. Если $z({}^{s_n}g_{n+1}) \not\subseteq z(u_n) \cap z(v_n)$, то число нулей функции u_{n+1} или v_{n+1} увеличивается по сравнению с числом нулей функции u_n или v_n.

Пусть $z({}^{s_n}g_{n+1}) \subseteq z(u_n) \cap z(v_n)$. Если $z({}^{b}v_n) \not\subseteq z(u_n)$ или $z({}^{b}u_n) \not\subseteq z(v_n)$, то $z(u_{n+1}) \supset z(u_n)$ или $z(v_{n+1}) \supset z(v_n)$ соответственно. Пусть теперь $z({}^{b}v_n) \subseteq \subseteq z(u_n)$ и $z({}^{b}u_n) \subseteq z(v_n)$. Отметим, что $|z(u)| = |z({}^{b}u)|$ для любой функции $u \in \mathrm{F}(R, G^0)$. Следовательно,

$$|z(u_n)| = |z({}^{b}u_n)| \leqslant |z(v_n)| = |z({}^{b}v_n)| \leqslant |z(u_n)|.$$

Отсюда получаем, что мощности всех этих множеств равны, а следовательно, $z({}^{b}v_n) = z(u_n)$ и $z({}^{b}u_n) = z(v_n)$. Нетрудно заметить, что из $z(u) = z(v)$ следует, что $z({}^{a}u) = z({}^{a}v)$ для любого $a \in R$. Поэтому $z({}^{b^2}u_n) = z({}^{b}v_n) = z(u_n)$. Элемент b имеет нечётный порядок, и поэтому $b = b^{2i}$ для некоторого целого положительного числа i. В этом случае $z({}^{b}u_n) = z\bigl({}^{b^{2i}}u_n\bigr) = z(u_n)$. Следовательно, $z(v_n) = z(u_n)$. Аналогично $z({}^{b}v_n) = z(v_n)$. Из последних двух равенств и равенств (5.1) следует, что тогда $z(v_{n+1}) = z(u_{n+1})$. Таким образом, доказано, что если $z(v_n) \neq z(u_n)$, то

$$|z(v_{n+1})| + |z(u_{n+1})| > |z(v_n)| + |z(u_n)|.$$

Более того, $z(v_d) = z(u_d)$, где $d = l + 2|R|$, так как $|z(u)| \leqslant |R|$ для любой функции $u \in \mathrm{F}(R, G^0)$.

Пусть теперь m — ступень нильпотентности полугруппы $T_1 = G \ w \ R$ и $k = d + m$. Если $a \in R$ и $a \in z(u_k)$, то $u_k(a) = v_k(a) = 0$. Если же $a \notin z(u_k)$, то $a \notin z(u_d) = z(v_d)$. Заметим, что

$$\begin{aligned} U_{d+m}(x, y, z_1, \ldots, z_d, \ldots, z_{d+m}) &= U_m(U_d, V_d, z_{d+1}, \ldots, z_{d+m}), \\ V_{d+m}(x, y, z_1, \ldots, z_d, \ldots, z_{d+m}) &= V_m(U_d, V_d, z_{d+1}, \ldots, z_{d+m}). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Поэтому $u_k(a)$ и $v_k(a)$ — значения функций-проекций слов U_m и V_m в сплетении T_1, являющемся нильпотентной в смысле Мальцева полугруппой ступени m. Лемма доказана. □

Следствие 5.1. *Если R и G — группы и $|R| > 1$, то стандартное сплетение $T_1 = G^0 \,w\, R$ является нильпотентной в смысле Мальцева полугруппой тогда и только тогда, когда либо $|G| = 1$ и R — конечная нильпотентная группа нечётного порядка, либо R — конечная p-группа для нечётного простого числа p, а G — нильпотентная p-группа ограниченной экспоненты.*

Доказательство. Следствие вытекает из леммы 5.2 и теоремы Баумслага. □

Следствие 5.2. *Если R — группа и $S = \bigcup\{G_\alpha \mid \alpha \in E\}$ — полурешётка групп G_α $(\alpha \in E)$, содержащая не менее двух компонент, то стандартное сплетение $T_1 = S \,w\, R$ является нильпотентной в смысле Мальцева полугруппой тогда и только тогда, когда либо S — полурешётка и R — конечная нильпотентная группа нечётного порядка, либо R — конечная p-группа для нечётного простого числа p и S — полурешётка нильпотентных ступени k p-групп ограниченной экспоненты $n = p^i$.*

Доказательство. Как известно, S является подпрямым произведением групп и групп с нулём [31, предложение 2]. Используя следствие 5.1 и лемму 4.6, получим требуемое утверждение. □

Лемма 5.3. *Если S — равномерно периодическая FS-полугруппа, то $\mathrm{Gr}\, S = ESE$, где $\mathrm{Gr}\, S$ — множество элементов в S, принадлежащих какой-либо подгруппе. Кроме того, $N(S) = SES = S(\mathrm{Gr}\, S)S$.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из леммы 2 в [16]. Второе утверждение очевидно. □

Лемма 5.4. *Пусть R — конечная нильпотентная группа. Если S — FS-полугруппа и сплетение $T_1 = (\mathrm{Gr}\, S) \,w\, R$ нильпотентно в смысле Мальцева, то сплетение $T = S \,w\, R$ также нильпотентно в смысле Мальцева.*

Доказательство. Рассмотрим значения (u_k, s_k) и (v_k, t_k) слов U_k и V_k в сплетении T при заданных значениях переменных

$$\varphi(x) = (f, p), \quad \varphi(y) = (h, r), \quad \varphi(z_i) = (g_i, q_i) \ \ (i = 1, \ldots, k).$$

В силу нильпотентности группы R справедливы равенства $t_k = s_k$ при $k \geqslant k_0$ для некоторого k_0. По теореме 2 из [14] для FS-полугруппы фактор-полугруппа $S/N(S)$ нильпотентна, где $N(S)$ — идеал, порождённый множеством $\mathrm{Gr}\, S$.

Значения функций $u_k(a)$ и $v_k(a)$ могут быть представлены как произведения $m = 2^{k+1} - 1$ элементов из S. Поэтому если m не меньше ступени нильпотентности полугруппы $S/N(S)$, то $u_k(a), v_k(a) \in N(S)$ при всех $a \in R$. Учитывая равенства (5.2), можно считать, что значения переменных x и y в сплетении равны (u, s) и (v, t), причём $u(a), v(a) \in N(S)$ при всех $a \in R$. Если S — полурешётка E полугрупп S_α $(\alpha \in E)$, то по лемме 4.6 существует гомоморфизм сплетения T на $T_0 = E \,w\, R$, индуцированный гомоморфизмом S на E. Согласно следствию 5.2 можно считать, что при любом $a \in R$ значения $u(a)$ и $v(a)$ принадлежат одной и той же компоненте полурешёточного разложения S. Заметим, что для всех n верны равенства

$$\begin{aligned} u_{n+1}(a) &= u_n(a)g_{n+1}(as_n)v_n(as_nq_{n+1}),\\ v_{n+1}(a) &= v_n(a)g_{n+1}(as_n)u_n(as_nq_{n+1}). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Введём обозначения $s_0 = s$ и $b_n = s_nq_{n+1}$ $(n = 0, 1, \dots)$.

Из равенств (5.3) имеем

$$\begin{aligned} &u_1(a) = u(a)g_1(as_0)v(ab_0),\\ &v_1(a) = v(a)g_1(as_0)u(ab_0);\\ &u_2(a) = u_1(a)g_2(as_1)v_1(ab_1) =\\ &\quad = u(a)g_1(as_0)v(ab_0)g_2(as_1)\dots v(ab_1)g_1(ab_1s_0)u(ab_1b_0),\\ &v_2(a) = v_1(a)g_2(as_1)u_1(ab_1) =\\ &\quad = v(a)g_1(as_0)u(ab_0)g_2(as_1)\dots u(ab_1)g_1(ab_1s_0)v(ab_1b_0),\dots \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\begin{aligned} &u_{2k}(a) = u(a)g_1(as_0)v(ab_0)g_2(as_1)\dots v(ab_{2k-1}\dots b_2b_1)\times\\ &\quad\times g_1(ab_{2k-1}\dots b_1s_0)u(ab_{2k-1}\dots b_1b_0),\\ &v_{2k}(a) = v(a)g_1(as_0)u(ab_0)g_2(as_1)\dots u(ab_{2k-1}\dots b_2b_1)\times\\ &\quad\times g_1(ab_{2k-1}\dots b_1s_0)v(ab_{2k-1}\dots b_1b_0). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Формулы (5.4) можно доказать индукцией по n. При этом для чётного $n = 2k$ аргументами функции u в разложении (5.4) служат элементы

$$ab_0,\ ab_1, \dots,\ ab_n, \dots,\ ab_{i_1}b_{i_2}\dots b_{i_{2l}}, \dots,$$

где $n \geqslant i_1 > \dots > i_{2l} \geqslant 0$, $0 \leqslant 2l \leqslant n$, а аргументами функции v в разложении (5.4) служат элементы

$$ab_0,\ ab_1b_0,\ ab_2b_0, \dots,\ ab_{j_1}b_{j_2}\dots b_{j_{2l-1}}, \dots,$$

где $n \geqslant j_1 > \dots > j_{2l} \geqslant 0$, $0 < 2l - 1 \leqslant n$.

Пусть $|R| = d$. Элемент $u_{2k}(a)$ в своём разложении (5.4) имеет множители

$$u(a),\ u(ab_1b_0),\ u(ab_2b_0), \dots,\ u(ab_{i_1}b_{i_2}\dots b_{i_{2l}}), \dots,$$

где $2k \geqslant i_1 > \dots > i_{2l} \geqslant 0$ и $0 \leqslant 2l \leqslant 2k$. В частности, в разложении (5.4) $u_{2k}(a)$ содержит множители

$$u(a),\ u(ab_1b_0),\ u(ab_3b_2b_1b_0), \dots,\ u(ab_{2k-1}\dots b_1b_0).$$

При этом если выбрать $k = d$, то последовательность

$$1,\ b_1b_0,\ b_3b_2b_1b_0, \dots,\ b_{2k-1}\dots b_1b_0$$

содержит $d + 1$ элемент группы R. Поэтому среди этих элементов есть хотя бы два одинаковых. Пусть $b_{2j-1}\dots b_1b_0 = b_{2l-1}\dots b_1b_0$, где $l > j$. Тогда $b_{2l-1}\dots b_{2j+1}b_{2j} = 1$. Произведя необходимую перенумерацию, можем считать, что $b_{2l-1}\dots b_1b_0 = 1$. В этом случае из (5.4) получим разложение

$$u_{2l}(a) = u(a)g_1(as_0)\dots g_1(ab_{2l-1}\dots b_1s_0)u(a).$$

Полагая $u(a) = s_1'es_1''$, так как $u(a) \in N(S) = SES$, из (5.4) получим, что

$$u_{2l}(a) = s_1'es_1'' \dots s_1'es_1'' = s_1'e(es_1'' \dots s_1'e)es_1'' = s_1'eces_1'',$$

где $c = ece \in S_\alpha \cap \operatorname{Gr} S = G_\alpha$ по лемме 5.3.

Пусть теперь $e \in S_\alpha$, $e^2 = e$, $s_1'e \in S_\beta$, $es_1'' \in S_\gamma$. Так как элементы $s_1'ee_\alpha$, $e_\alpha es_1''$ делят элемент c, то $\alpha \leqslant \beta\gamma$. Поэтому

$$u_{2l}(a) = s_1'eces_1'' = s_1'ee_\alpha ce_\alpha es_1'' \in S_\alpha G_\alpha S_\alpha = G_\alpha.$$

Таким образом, $u_{2l}(a) \in \operatorname{Gr} S$ при любом $a \in R$. Кроме того, независимо от исходных значений переменных $l \leqslant d$. Из равенств (5.3) имеем

$$u_{2l+1}(a) = u_{2l}(a)g_{2l+1}(as_{2l})v_{2l}(ab_{2l}), \quad v_{2l+1}(a) = v_{2l}(a)g_{2l+1}(as_{2l})u_{2l}(ab_{2l}).$$

Согласно лемме 5.3 получим, что элементы $u_{2l+1}(a)$, $v_{2l+1}(a)$ снова принадлежат $\operatorname{Gr} S$. Более того, если эти элементы принадлежат группе G_δ, то они представляют собой значения слов u_{2l+1}, v_{2l+1} от некоторых элементов в G_δ, т. е. всё умножение в разложении (5.4) фактически спускается в компоненту G_δ. Согласно следствию 5.2 $u_{2l}(a) = v_{2l}(a)$, если $2l \geqslant m$, где m — ступень нильпотентности сплетения T_1. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 5.1. Необходимость. Пусть сплетение $T = S w_1 R$ нильпотентно в смысле Мальцева, но при этом S не является нильпотентной полугруппой. Тогда по теореме 4.1 R — конечная нильпотентная группа. Если бы R содержала элементы чётного порядка, то в силу лемм 3.1, 4.8, 5.1 и известного строения FS-полугрупп S содержала бы только один идемпотент.

Согласно предположению в этом случае $\operatorname{Gr} S = G$ содержит более одного элемента. По теореме Баумслага нильпотентность $G\ w\ R$ влечёт, что R — конечная 2-группа, а G — нильпотентная 2-группа ограниченной экспоненты. Имеет место случай 4) теоремы 5.1.

Пусть теперь R — нильпотентная конечная группа нечётного порядка. Если FS-полугруппа S содержит нетривиальные подгруппы, то, используя лемму 4.6 и следствие 5.2, получаем, что R — конечная p-группа, а $\operatorname{Gr} S$ — полурешётка нильпотентных p-групп некоторой ступени k и ограниченной экспоненты $n = p^i$. При этом имеет место случай 3). Если же S не содержит нетривиальных групп, то имеет место случай 2) теоремы 5.1.

Достаточность. В случае 1) нильпотентность в смысле Мальцева сплетения полугрупп следует из теоремы 4.1. В случаях 2) и 3) она следует из леммы 5.4 и следствия 5.2, а в случае 4) — из леммы 5.4 и теоремы Баумслага. □

Из теоремы 5.1 и теоремы 2.1 из [20] несложным образом извлекается следствие.

Следствие 5.3. *Расширенное стандартное сплетение $S\ w_1\ R$ неодноэлементных полугрупп S и R принадлежит нильпотентному в смысле Мальцева многообразию конечной ступени тогда и только тогда, когда каждая из этих полугрупп принадлежит некоторому нильпотентному в смысле Мальцева многообразию конечной ступени и выполнено хотя бы одно из следующих условий*:

1) S — *нильпотентная полугруппа*;
2) R — *конечная* p*-группа для некоторого простого числа* p*, а* S — *идеальное нильпотентное расширение нильпотентной* p*-группы ограниченной экспоненты.*

Автор выражает свою благодарность профессору А. В. Михалёву за полезные обсуждения и замечания. Автор также благодарит анонимного рецензента за внимательное чтение рукописи и ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению изложения.

Литература

[1] Голубчик И. З., Михалёв А. В. О многообразиях алгебр с полугрупповым тождеством // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1982. — № 2. — С. 8—11.

[2] Зимин А. И. О полугруппах, нильпотентных в смысле Мальцева // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1980. — № 6. — С. 23—29.

[3] Зимин А. И. Блокирующие множества термов // Мат. сб. — 1982. — Т. 119, № 3. — С. 363—375.

[4] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1972.

[5] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 1. — М.: Мир, 1972.

[6] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 2. — М.: Мир, 1972.

[7] Кошелев Ю. Г. Об одной ассоциативной операции на множестве всех многообразий моноидов // Соврем. алгебра. Вып. 4. — 1976. — С. 107—117.

[8] Кошелев Ю. Г. Регулярность и идемпотентность сплетения полугрупп // Соврем. алгебра. Вып. 4. — 1976. — С. 97—106.

[9] Кошелев Ю. Г. Ассоциативность умножения многообразий полугрупп // Междунар. конф. по алгебре, посв. памяти А. И. Мальцева. Тезисы докл. по теории моделей и алгебр. систем. — Новосибирск, 1989. — С. 63.

[10] Красильников А. Н. О полугрупповой и лиевской нильпотентности ассоциативных алгебр // Мат. заметки. — 1997. — Т. 62, № 4. — С. 510—519.

[11] Мальцев А. И. Нильпотентные полугруппы // Избранные труды. Т. 1. Классическая алгебра. — М.: Наука, 1976. — С. 335—339.

[12] Мальцев А. И. О включении ассоциативных систем в группы // Избранные труды. Т. 1. Классическая алгебра. — М.: Наука, 1976. — С. 39—45.

[13] Сапир М. В. Существенно бесконечно базируемые конечные полугруппы // Мат. сб. — 1987. — Т. 133, № 2. — С. 154—166.

[14] Сапир М. В., Суханов Е. В. О многообразиях периодических полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1981. — № 4. — С. 48—55.

[15] Тищенко А. В. О нильпотентности в смысле А. И. Мальцева сплетения полугрупп // Успехи мат. наук. — 1988. — Т. 43, № 5. — С. 221—222.

[16] Тищенко А. В. Замечание о полугрупповых многообразиях конечного индекса // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1990. — № 7. — С. 79—83.

[17] Тищенко А. В. О различных определениях сплетения полугрупповых многообразий // Фундамент. и прикл. мат. — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 233—249.

[18] Тищенко А. В. Сплетения многообразий и полуархимедовы многообразия полугрупп // Тр. ММО. — 1996. — Т. 57. — С. 318—338.

[19] Тищенко А. В. Упорядоченный моноид полугрупповых многообразий относительно сплетения // Фундамент. и прикл. мат. — 1999. — Т. 5, вып. 1. — С. 283—305.

[20] Тищенко А. В. Сплетение полугрупп и многообразия конечного индекса // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 889—902.

[21] Шеврин Л. Н., Верников Б. М., Волков М. В. Решётки многообразий полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 2009. — № 3. — С. 3—36.

[22] Шеврин Л. Н., Волков М. В. Тождества полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1985. — № 11. — С. 3—47.

[23] Шеврин Л. Н., Суханов Е. В. Структурные аспекты теории многообразий полугрупп // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1989. — № 6. — С. 3—39.

[24] Baumslag G. Wreath products and p-groups // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1959. — Vol. 55. — P. 224—231.

[25] Golubchik I. Z., Mikhalev A. V. A note on varieties of semiprime rings with semigroup identities // J. Algebra. — 1978. — Vol. 54. — P. 42—45.

[26] Hunter R. P. Some results on wreath product of semigroups // Bull. Soc. Math. Belg. — 1966. — Vol. 18. — P. 3—16.

[27] Jones P. R. Analogues of the bicyclic semigroup in simple semigroups without idempotents // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A. — 1987. — Vol. 106. — P. 11—24.

[28] Neumann B. H., Taylor T. Subsemigroups of nilpotent groups // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. — 1963. — Vol. 274, no. 1. — P. 1—4.

[29] Skornyakov L. A. Regularity of the wreath product of monoids // Semigroup Forum. — 1979. — Vol. 18, no. 1. — P. 83—86.

[30] Tilson B. Categories as algebra: an essential ingredient in the theory of monoids // J. Pure Appl. Algebra. — 1987. — Vol. 48, no. 1-2. — P. 83—198.

[31] Tishchenko A. V. On the Brown—McCoy radical in semigroups // Math. Nachr. — 1974. — Vol. 63. — P. 401—411.

[32] Tishchenko A. V. Simplicity of wreath product of semigroups with fixed passive semigroup // Semigroup Forum. — 1994. — Vol. 49. — P. 275—287.