Модули над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп с ограничением минимаксности

О. Ю. ДАШКОВА
Днепропетровский национальный университет, Украина
e-mail: odashkova@yandex.ru

УДК 512.544

Ключевые слова: минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль, локально разрешимая группа, групповое кольцо.

Аннотация

Пусть $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел, A — $\mathbb{Z}G$-модуль, такой что $A/C_A(G)$ не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, $C_G(A) = 1$, G — локально разрешимая группа. Рассматривается система $L_{\mathrm{nm}}(G)$ всех подгрупп $H \leqslant G$, для которых фактор-модули $A/C_A(H)$ не являются минимаксными $\mathbb{Z}$-модулями. Автор изучает $\mathbb{Z}G$-модули, для которых $L_{\mathrm{nm}}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество. Доказано, что локально разрешимая группа G, удовлетворяющая заданным условиям, разрешима, и описана структура группы G.

Abstract

O. Yu. Dashkova, Modules over integer group rings of locally soluble groups with minimax restriction, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 3, pp. 25—37.

Let $\mathbb{Z}$ be the ring of integers, A be a $\mathbb{Z}G$-module, where $A/C_A(G)$ is not a minimax $\mathbb{Z}$-module, $C_G(A) = 1$, and G is a locally soluble group. Let $L_{\mathrm{nm}}(G)$ be the system of all subgroups $H \leqslant G$ such that quotient modules $A/C_A(H)$ are not minimax $\mathbb{Z}$-modules. The author studies $\mathbb{Z}G$-modules A such that $L_{\mathrm{nm}}(G)$ satisfies the minimal condition as an ordered set. It is proved that a locally soluble group G with these conditions is soluble. The structure of the group G is described.

1. Введение

Пусть A — векторное пространство над полем F. Подгруппы группы $\mathrm{GL}(F, A)$ всех автоморфизмов пространства A называются линейными группами. Если A имеет конечную размерность над полем F, $\mathrm{GL}(F, A)$ можно рассматривать как группу невырожденных $(n \times n)$-матриц, где $n = \dim_F A$. Конечномерные линейные группы играют особую роль в различных областях математики, физики и естествознания и изучались достаточно много. В случае когда пространство A имеет бесконечную размерность над полем F, ситуация

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 3, с. 25—37.

кардинально меняется. Бесконечномерные линейные группы исследовались мало. Изучение этого класса групп требует дополнительных ограничений.

В [10] было введено понятие центральной размерности бесконечномерной линейной группы. Пусть H — подгруппа группы $\mathrm{GL}(F, A)$. H действует на фактор-пространстве $A/C_A(H)$ естественным образом. Авторы определяют $\operatorname{cent}\dim_F H$ как $\dim_F\bigl(A/C_A(H)\bigr)$. Говорят, что подгруппа H имеет конечную центральную размерность, если $\operatorname{cent}\dim_F H$ конечна; H имеет бесконечную центральную размерность, если $\operatorname{cent}\dim_F H$ бесконечна.

Пусть $G \leqslant \mathrm{GL}(F, A)$. В [10] была рассмотрена система $\mathbf{L}_{\mathrm{id}}(G)$ всех подгрупп группы G, имеющих бесконечную центральную размерность. Чтобы исследовать бесконечномерные линейные группы, которые по своей структуре близки к конечномерным, следует рассмотреть случай, когда система $\mathbf{L}_{\mathrm{id}}(G)$ «достаточно мала». Так, в [10] изучались локально разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathbf{L}_{\mathrm{id}}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество. Разрешимые бесконечномерные линейные группы, у которых $\mathbf{L}_{\mathrm{id}}(G)$ удовлетворяет условию максимальности, исследовались в [12].

Если $G \leqslant \mathrm{GL}(F, A)$, то A можно рассматривать как FG-модуль. Естественным обобщением этого случая является рассмотрение $\mathbf{R}G$-модуля A, где $\mathbf{R}$ — кольцо, структура которого близка к структуре поля. При этом обобщением понятия центральной размерности подгруппы линейной группы является понятие коцентрализатора подгруппы, введённое в [6]. Пусть A — $\mathbf{R}G$-модуль, где $\mathbf{R}$ — кольцо, G — группа. Если $H \leqslant G$, то фактор-модуль $A/C_A(H)$, рассматриваемый как $\mathbf{R}$-модуль, называется коцентрализатором подгруппы H в модуле A.

Исследование алгебраических систем, удовлетворяющих условиям минимальности и максимальности, остаётся достаточно актуальным. Примерами таких систем являются классы нётеровых и артиновых модулей. Напомним, что модуль называется артиновым, если упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию минимальности. Модуль называется нётеровым, если упорядоченное множество его подмодулей удовлетворяет условию максимальности. Естественным обобщением классов артиновых и нётеровых модулей является класс минимаксных модулей [13, гл. 7]. $\mathbf{R}$-модуль A называется минимаксным, если он обладает конечным рядом подмодулей, каждый фактор которого является либо нётеровым $\mathbf{R}$-модулем, либо артиновым $\mathbf{R}$-модулем.

В [3] исследовались такие $\mathbf{R}G$-модули A, что $\mathbf{R}$ — дедекиндова область и коцентрализатор группы G в модуле A не является артиновым $\mathbf{R}$-модулем. Была рассмотрена упорядоченная относительно обычного включения подгрупп система $L_{\mathrm{nad}}(G)$ всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются артиновыми $\mathbf{R}$-модулями. Исследовались такие $\mathbf{R}G$-модули A, что система $L_{\mathrm{nad}}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество, а группа G локально разрешима. В [1] изучался случай, когда система $L_{\mathrm{nad}}(G)$ удовлетворяет условию максимальности как упорядоченное множество, а группа G разрешима. Аналогичная задача для случая, когда $\mathbf{R}$ является кольцом целых чисел, рассматривалась в [4].

В [2] изучались такие $\mathbf{R}G$-модули A, что $\mathbf{R}$ — кольцо целых чисел, а коцентрализатор группы G в модуле A не является нётеровым $\mathbf{R}$-модулем. На системе $L_{\mathrm{nnd}}(G)$ всех подгрупп группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются нётеровыми $\mathbf{R}$-модулями, введён порядок относительно обычного включения подгрупп. Исследовались такие $\mathbf{R}G$-модули A, что система $L_{\mathrm{nnd}}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество, а группа G локально разрешима.

В настоящей работе рассматривается обобщение двух данных проблем. Изучаются такие $\mathbf{R}G$-модули A, что $\mathbf{R}$ — кольцо целых чисел, коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbf{R}$-модулем, а группа G локально разрешима. Пусть $L_{\mathrm{nm}}(G)$ — система всех подгрупп группы группы G, коцентрализаторы которых в модуле A не являются минимаксными $\mathbf{R}$-модулями. На $L_{\mathrm{nm}}(G)$ введён порядок относительно обычного включения подгрупп. Если система $L_{\mathrm{nm}}(G)$ удовлетворяет условию минимальности как упорядоченное множество, будем говорить, что группа G удовлетворяет условию min-nm. В работе обобщаются результаты о бесконечномерных линейных группах, полученные в [10].

Далее всюду рассматривается $\mathbf{R}G$-модуль A, такой что $C_G(A) = 1$, $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел.

Основными результатами работы являются следующие теоремы 1.1 и 1.2.

Теорема 1.1. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль, G — локально разрешимая группа и в случае, когда коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, G удовлетворяет условию* min-nm. *Тогда группа G разрешима.*

Теорема 1.2. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль, G — локально разрешимая группа. Предположим, что коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем и G удовлетворяет условию* min-nm. *Тогда группа G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H, такую что фактор-группа G/H является черниковской.*

2. Предварительные результаты

Приведём некоторые элементарные факты о $\mathbb{Z}G$-модулях. Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль. Отметим, что если $K \leqslant H \leqslant G$ и коцентрализатор подгруппы H в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, то коцентрализатор подгруппы K в модуле A также является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Если $U, V \leqslant G$ такие, что их коцентрализаторы в модуле A — минимаксные $\mathbb{Z}$-модули, то фактор-модуль $A/\big(C_A(U) \cap C_A(V)\big)$ также является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Следовательно, коцентрализатор подгруппы $\langle U, V\rangle$ в модуле A — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль.

Предположим, что группа G удовлетворяет условию min-nm. Если

$$H_1 > H_2 > H_3 > \ldots -$$

бесконечный строго убывающий ряд подгрупп группы G, то существует такое натуральное число n, что коцентрализатор подгруппы H_n в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Кроме того, если N — нормальная подгруппа группы G и коцентрализатор подгруппы N в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, то фактор-группа G/N удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.

Лемма 2.1. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль. Предположим, что группа G удовлетворяет условию* min-nm, *X, H — подгруппы группы G и Λ — множество индексов, для которых выполняются следующие условия*:

1) $X = \mathrm{Dr}_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$, *где* $1 \neq X_\lambda$ — *H-инвариантная подгруппа X для каждого* $\lambda \in \Lambda$;
2) $H \cap X \leqslant \mathrm{Dr}_{\lambda\in\Gamma}X_\lambda$ *для некоторого подмножества Γ из Λ.*

Если множество $\Omega = \Lambda \setminus \Gamma$ бесконечно, то коцентрализатор подгруппы H в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем.

Доказательство. Предположим, что множество Ω бесконечно. Пусть

$$\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots \text{ —}$$

строго убывающий ряд подмножеств множества Ω. Поскольку $H\cap\mathrm{Dr}_{\lambda\in\Omega}X_\lambda = 1$, ряд подгрупп

$$\langle H, X_\lambda \mid \lambda \in \Omega_1\rangle > \langle H, X_\lambda \mid \lambda \in \Omega_2\rangle > \ldots$$

строго убывает. Отсюда следует, что для некоторого натурального числа d коцентрализатор подгруппы $\langle H, X_\lambda \mid \lambda \in \Omega_d\rangle$ в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Следовательно, коцентрализатор подгруппы H в модуле A также является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль, группа G удовлетворяет условию* min-nm, *H и K — подгруппы группы G, причём K — нормальная подгруппа H. Предположим, что существует такие множество индексов Λ и подгруппы H_λ группы G, что $K \leqslant H_\lambda$ для каждого $\lambda \in \Lambda$, $H/K = \mathrm{Dr}_{\lambda\in\Lambda}H_\lambda/K$ и множество Λ бесконечно. Тогда коцентрализатор подгруппы H в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем.*

Доказательство. Предположим, что множество Λ бесконечно. Пусть Γ и Ω — бесконечные непересекающиеся подмножества множества Λ, такие что $\Lambda = \Gamma \cup \Omega$. Пусть $U/K = \mathrm{Dr}_{\lambda\in\Gamma}H_\lambda/K$, $V/K = \mathrm{Dr}_{\lambda\in\Omega}H_\lambda/K$,

$$\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots \text{ —}$$

строго убывающий ряд подмножеств множества Γ. В результате мы построим бесконечный строго убывающий ряд подгрупп

$$\langle U, H_\lambda \mid \lambda \in \Gamma_1\rangle > \langle U, H_\lambda \mid \lambda \in \Gamma_2\rangle > \ldots .$$

Из условия min-nm вытекает, что коцентрализатор подгруппы U в модуле A — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Аналогично получаем, что коцентрализатор подгруппы V в модуле A — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Из равенства $H = UV$ вытекает, что коцентрализатор подгруппы H в модуле A также является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Лемма доказана. □

Лемма 2.3. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль и группа G удовлетворяет условию* min-nm. *Если элемент $g \in G$ имеет бесконечный порядок, то коцентрализатор подгруппы $\langle g \rangle$ в модуле A — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль.*

Доказательство. Пусть p и q — различные простые числа, большие 3, и пусть $u = g^p$, $v = g^q$. Тогда существует бесконечный строго убывающий ряд подгрупп

$$\langle u \rangle > \langle u^2 \rangle > \langle u^4 \rangle > \dots .$$

Из условия min-nm вытекает, что найдётся натуральное число k, для которого коцентрализатор подгруппы $\langle u^{2^k} \rangle$ в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Аналогично существует натуральное число l, для которого коцентрализатор подгруппы $\langle v^{3^l} \rangle$ в модуле A также минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Следовательно, коцентрализатор подгруппы $\langle g \rangle = \langle u^{2^k} \rangle \langle v^{3^l} \rangle$ в модуле A — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Лемма доказана. □

Следующий результат даёт важную информацию о строении фактор-группы по её коммутанту в случае выполнения условия min-nm.

Лемма 2.4. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль. Предположим, что коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем и группа G удовлетворяет условию* min-nm. *Тогда фактор-группа G/G' черниковская.*

Доказательство. Предположим, что фактор-группа G/G' не является черниковской группой. Обозначим через S семейство всех подгрупп $H \leqslant G$, таких что фактор-группа H/H' не является черниковской и коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Поскольку $G \in S$, то $S \neq \varnothing$. Так как множество S удовлетворяет условию минимальности, то оно содержит минимальный элемент; обозначим его через D. Если U и V — собственные подгруппы группы D, такие что $D = UV$ и $U \cap V = D'$, то по крайней мере одна из подгрупп, скажем U, такова, что её коцентрализатор в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Из выбора подгруппы D вытекает, что фактор-группа U/U' черниковская. Отсюда и из изоморфизма $U/D' \simeq (U/U')/(D'/U')$ следует, что фактор-группа U/D' также черниковская. Поскольку коцентрализатор подгруппы U в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, то абелева фактор-группа D/U также черниковская. Следовательно, фактор-группа D/D' черниковская. Противоречие с выбором подгруппы D. Отсюда вытекает, что фактор-группу D/D' нельзя представить в виде произведения двух собственных подгрупп. Следовательно, фактор-группа D/D' изоморфна подгруппе квазициклической группы C_{q^∞} для некоторого простого числа q. Противоречие. Лемма доказана. □

Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль. Через $\mathrm{MD}(G)$ обозначим множество всех таких элементов $x \in G$, что коцентрализатор группы $\langle x \rangle$ в модуле A — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Так как $C_A(x^g) = C_A(x)g$ для всех $x, g \in G$, отсюда вытекает, что $\mathrm{MD}(G)$ — нормальная подгруппа группы G.

Лемма 2.5. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль и группа G локально разрешима. Предположим, что коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем и G удовлетворяет условию* min-nm. *Тогда либо группа G периодическая, либо $G = \mathrm{MD}(G)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть группа G не является периодической и $G \neq \mathrm{MD}(G)$. Обозначим через S семейство всех таких подгрупп $H \leqslant G$, что H не является периодической и $H \neq \mathrm{MD}(H)$. S не является пустым. Если $H \neq \mathrm{MD}(H)$, то существует элемент $h \in H$, для которого фактор-модуль $A/C_A(h)$ не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Следовательно, $S \subseteq L_{\mathrm{nm}}(G)$, и поэтому S удовлетворяет условию минимальности. Пусть D — минимальный элемент множества S и $L = \mathrm{MD}(D)$. Отметим, что $L \neq 1$, так как D не является периодической подгруппой. Если $L \leqslant S \leqslant D$ и $S \neq D$, то $S = \mathrm{MD}(S)$, и поэтому $S \leqslant L$. Следовательно, D/L имеет порядок q для некоторого простого числа q. Пусть $x \in D \setminus L$. Если элемент a имеет бесконечный порядок, то из выбора D следует, что $\langle x, a\rangle = D$. Отсюда вытекает, что группа L конечно порождённая и, поскольку $L = \mathrm{MD}(L)$, фактор-модуль $A/C_A(L)$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Так как подгруппа L нормальная в группе D, то $C = C_A(L)$ — $\mathbb{Z}D$-подмодуль модуля A. Отсюда вытекает, что фактор-модуль A/C обладает конечным рядом $\mathbb{Z}D$-подмодулей

$$C/C \leqslant C_1/C \leqslant C_2/C = A/C,$$

таким что аддитивная группа фактор-модуля C_1/C является черниковской, а аддитивная группа фактор-модуля C_2/C_1 — абелева группа без кручения конечного 0-ранга. Фактор-группа $D/C_D(C_1/C)$ изоморфна подгруппе группы $\mathrm{GL}(r, M)$, где M является конечной прямой суммой колец $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ целых p-адических чисел по некоторым простым числам p. Следовательно, фактор-группа $D/C_D(C_1/C)$ финитно аппроксимируема. Фактор-группа $D/C_D(C_2/C_1)$ изоморфна некоторой конечно порождённой подгруппе группы $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Q})$, и по [7, теорема 51.2.1] фактор-группа $D/C_D(C_2/C_1)$ также финитно аппроксимируема. Положим

$$R = C_D(C_1/C) \cap C_D(C_2/C_1).$$

По теореме Ремака

$$D/R \leqslant D/C_D(C_2/C_1) \times D/C_D(C_1/C).$$

Следовательно, фактор-группа D/R финитно аппроксимируема. Подгруппа R действует тривиально в каждом факторе ряда

$$C/C \leqslant C_1/C \leqslant C_2/C = A/C,$$

и поэтому R абелева.

Пусть U — нормальная подгруппа конечного индекса группы D. Подгруппа U не является периодической, поэтому подгруппа $\langle U, x\rangle$ также непериодическая и $\langle U, x\rangle \neq \mathrm{MD}(\langle U, x\rangle)$. Из выбора D вытекает, что $D = \langle U, x\rangle$. Следовательно, фактор-группа D/U абелева. Если E — конечный резидуал группы D, то фактор-группа D/E абелева. Отсюда с учётом включения $E \leqslant R$ получаем, что фактор-группа D/R также абелева. Следовательно, фактор-группа $D/(R \cap L)$ абелева. Поскольку $R \cap L \leqslant R$, то подгруппа $R \cap L$ абелева, и D — конечно порождённая метабелева подгруппа. По теореме Ф. Холла [14, теорема 9.51] подгруппа D финитно аппроксимируема. Как и ранее, устанавливаем, что D абелева. Поскольку $D = U\langle x \rangle$ для любой подгруппы U конечного индекса, то группа D бесконечная циклическая. Согласно лемме 2.3 $D = \mathrm{MD}(D)$. Противоречие с выбором подгруппы D. Лемма доказана. □

3. Локально разрешимые группы с условием min-nm

Лемма 3.1. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль, G — периодическая локально разрешимая группа. Предположим, что коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем и группа G удовлетворяет условию* min-nm. *Тогда либо группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, либо $G = \mathrm{MD}(G)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть группа G не удовлетворяет условию минимальности и $G \neq \mathrm{MD}(G)$. Обозначим через S семейство всех таких подгрупп $H \leqslant G$, что H не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и $H \neq \mathrm{MD}(H)$. Тогда $S \neq \varnothing$. Если $H \neq \mathrm{MD}(H)$, то коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, и поэтому $S \subseteq L_{\mathrm{nm}}(G)$. Следовательно, S удовлетворяет условию минимальности. Пусть D — минимальный элемент S, и пусть $L = \mathrm{MD}(D)$. Существует бесконечный строго убывающий ряд подгрупп группы D

$$H_1 > H_2 > H_3 > \ldots .$$

Поскольку группа D удовлетворяет условию min-nm, найдётся натуральное число k, такое что коцентрализатор подгруппы H_k в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Следовательно, $H_k \leqslant L$, и поэтому L не удовлетворяет условию минимальности. Отсюда вытекает, что если $x \in D \setminus L$, то $\langle x, L \rangle = D$ согласно выбору подгруппы D. Следовательно, фактор-группа D/L имеет порядок q для некоторого простого числа q. Заменяя x, если это необходимо, подходящей степенью, можно положить, что x имеет порядок q^r для некоторого натурального числа r. Так как группа D не является черниковской, согласно теореме Д. И. Зайцева [5] D содержит $\langle x \rangle$-инвариантную абелеву подгруппу $B = \mathrm{Dr}_{n \in \mathbb{N}} \langle b_n \rangle$ и можно считать, что элементы b_n имеют простые порядки для каждого $n \in \mathbb{N}$. Пусть $1 \neq c_1 \in B$ и $C_1 = \langle c_1 \rangle^{\langle x \rangle}$. Тогда C_1 конечна и существует подгруппа E_1, такая что $B = C_1 \times E_1$. Пусть $U_1 = \mathrm{core}_{\langle x \rangle} E_1$. Тогда U_1 имеет конечный индекс в B. Если $1 \neq c_2 \in U_1$ и $C_2 = \langle c_2 \rangle^{\langle x \rangle}$, то C_2 — конечная $\langle x \rangle$-инвариантная подгруппа и $\langle C_1, C_2 \rangle = C_1 \times C_2$. Продолжая это построение, получим семейство подгрупп $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, для которого $\langle C_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle = \mathrm{Dr}_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Из леммы 2.1 следует, что $x \in L$. Противоречие. Лемма доказана. □

Из доказанных лемм 2.5 и 3.1 вытекает справедливость следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль, G — локально разрешимая группа. Предположим, что коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем и группа G удовлетворяет условию* min-nm. *Тогда либо группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, либо $G = \mathrm{MD}(G)$.*

Лемма 3.3. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль, G — локально разрешимая группа и, если коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, группа G удовлетворяет условию* min-nm. *Тогда либо группа G разрешима, либо G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп*

$$1 = W_0 \leqslant W_1 \leqslant \ldots \leqslant W_n \leqslant \ldots \leqslant W_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n \leqslant G,$$

таким что коцентрализатор каждой подгруппы W_n в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, факторы W_{n+1}/W_n абелевы для $n = 1, 2, \ldots$ и фактор-группа G/W_ω является черниковской группой.

Доказательство. Начнём с рассмотрения случая, когда фактор-модуль $A/C_A(G)$ является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Тогда фактор-группа $G/C_G\big(A/C_A(G)\big)$ — локально разрешимая группа автоморфизмов абелевой группы A_3. Отсюда с учётом [8] получаем, что фактор-группа $G/C_G\big(A/C_A(G)\big)$ разрешима. Поскольку централизатор $C_G\big(A/C_A(G)\big)$ абелев, то группа G разрешима. Поэтому при изучении локально разрешимых групп с условием min-nm необходимо сосредоточить внимание на исследовании локально разрешимых групп G, для которых фактор-модуль $A/C_A(G)$ не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем.

Перейдём теперь к рассмотрению случая, когда коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Докажем сначала, что группа G гиперабелева. Для этого покажем, что каждый нетривиальный образ группы G содержит нетривиальную нормальную абелеву подгруппу.

Пусть H — собственная нормальная подгруппа группы G. Предположим сначала, что коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Тогда фактор-группа G/H удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Следовательно, G/H является черниковской группой и содержит нетривиальную нормальную абелеву подгруппу.

Теперь предположим, что коцентрализатор подгруппы H в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Пусть $S = \{M_\sigma/H \mid \sigma \in \Sigma\}$ — семейство всех нетривиальных нормальных подгрупп фактор-группы G/H. Рассмотрим сначала случай, когда для каждого $\sigma \in \Sigma$ коцентрализатор подгруппы M_σ в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Покажем, что в этом случае фактор-группа G/H удовлетворяет условию минимальности для нормальных подгрупп. Пусть $\{M_\delta/H\}$ — непустое подмножество S. Для каждого δ коцентрализатор подгруппы M_δ в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Согласно условию min-nm множество $\{M_\delta\}$ имеет минимальный элемент M.

Следовательно, M/H — минимальный элемент подмножества $\{M_\delta/H\}$. Поэтому фактор-группа G/H удовлетворяет условию минимальности для нормальных подгрупп. Следовательно, фактор-группа G/H гиперабелева и содержит нетривиальную нормальную абелеву подгруппу. В случае когда для некоторого $\gamma \in \Sigma$ коцентрализатор подгруппы M_γ в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, подгруппа M_γ разрешима. Поэтому M_γ/H — нетривиальная нормальная разрешимая подгруппа фактор-группы G/H. Следовательно, фактор-группа G/H содержит нетривиальную нормальную абелеву подгруппу, и поэтому группа G гиперабелева.

Пусть

$$1 = H_0 \leqslant H_1 \leqslant \ldots \leqslant H_\alpha \leqslant \ldots \leqslant G\,—$$

возрастающий ряд нормальных подгрупп с абелевыми факторами, и пусть α — наименьшее порядковое число, такое что коцентрализатор подгруппы H_α в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Тогда, как и ранее, подгруппа H_β разрешима для всех $\beta < \alpha$. Кроме того, фактор-группа G/H_α удовлетворяет условию минимальности для подгрупп и поэтому является разрешимой черниковской группой.

Предположим сначала, что α не является предельным порядковым числом. Следовательно, подгруппа H_α разрешима, и поэтому группа G также разрешима. Рассмотрим теперь случай, когда α — предельное порядковое число и группа G не является разрешимой. Для каждого натурального числа k существует такое порядковое число β_k, что $\beta_k < \alpha$, H_{β_k} имеет ступень разрешимости, не превосходящую числа k. Кроме того, можно положить, что $\beta_i < \beta_{i+1}$ для каждого натурального числа i. Пусть $T_i = H_{\beta_i}$ для каждого натурального числа i. Отсюда следует, что группа G обладает возрастающим рядом нормальных разрешимых подгрупп

$$1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \ldots \leqslant \ldots .$$

Тогда подгруппа $T_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T_n$ не является разрешимой, и поэтому $T_\omega = H_\alpha$. Требуемый ряд

$$1 = W_0 \leqslant W_1 \leqslant \ldots \leqslant W_n \leqslant \ldots \leqslant W_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n \leqslant G$$

может быть получен из ряда

$$1 = T_0 \leqslant T_1 \leqslant \ldots \leqslant T_\omega \leqslant G.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.4. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль. Предположим, что коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, группа G удовлетворяет условию* min-nm *и $G = \mathrm{MD}(G)$. Тогда фактор-группа $G/G^{\mathfrak{I}}$ конечна.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть фактор-группа $G/G^{\mathfrak{I}}$ бесконечна. Тогда группа G обладает бесконечным строго убывающим рядом нормальных подгрупп

$$G > N_1 > N_2 > \ldots,$$

таким что фактор-группы G/N_i конечны для каждого i. Следовательно, существует k, для которого фактор-группа G/N_k конечна и коцентрализатор подгруппы N_k в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Поскольку $G = \mathrm{MD}(G)$, можно выбрать такую подгруппу H, что её коцентрализатор в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем и $G = HN_k$. Следовательно, коцентрализатор группы G в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Противоречие. Лемма доказана. $\square$

Лемма 3.5. *Пусть A — $\mathbb{Z}G$-модуль, G — локально разрешимая группа. Предположим, что коцентрализатор группы G в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем и группа G удовлетворяет условию* min-nm. *Если G обладает возрастающим рядом нормальных подгрупп*

$$1 = W_0 \leqslant W_1 \leqslant \ldots \leqslant W_n \leqslant \ldots \leqslant \bigcup_{n \geqslant 1} W_n = G,$$

таким что коцентрализатор каждой подгруппы W_n в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем и каждый фактор W_{n+1}/W_n абелев, то группа G разрешима.

Доказательство. Поскольку фактор-модуль $A/C_A(W_k)$ — это минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль, то существует конечный ряд $\mathbb{Z}G$-подмодулей

$$A = A_0 \geqslant A_1 \geqslant \ldots \geqslant A_{n(k)} = C_A(W_k),$$

каждый фактор которого является либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо $\mathbb{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого — абелева группа без кручения конечного 0-ранга. Поскольку коцентрализатор подгруппы W_{k+1} в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, можно продолжить построенный ряд до ряда $\mathbb{Z}G$-подмодулей

$$A = A_0 \geqslant A_1 \geqslant \ldots \geqslant A_{n(k)} \geqslant \ldots \geqslant A_{n(k+1)} = C_A(W_{k+1}),$$

каждый фактор которого является либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо $\mathbb{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого — абелева группа без кручения конечного 0-ранга. Продолжая это построение, мы получим ряд $\mathbb{Z}G$-подмодулей

$$A = A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_\omega = C_A(G),$$

каждый фактор которого является либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо $\mathbb{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого — абелева группа без кручения конечного 0-ранга.

Пусть $H = \bigcap\limits_{j \geqslant 0} C_G(A_j/A_{j+1})$. В случаях когда фактор A_j/A_{j+1} является либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, по [11, лемма 16.19] фактор-группа $G/C_G(A_j/A_{j+1})$ почти абелева. В случае когда фактор A_j/A_{j+1} является $\mathbb{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого — абелева группа без кручения конечного 0-ранга, фактор-группа $G/C_G(A_j/A_{j+1})$ изоморфна локально разрешимой подгруппе $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Q})$. Согласно [15, следствие 3.8] фактор-группа $G/C_G(A_j/A_{j+1})$ разрешима. По [15, теорема 3.6] $G/C_G(A_j/A_{j+1})$ содержит нормальную нильпотентную подгруппу, фактор-группа по которой является почти абелевой.

Поскольку G/H вкладывается в декартово произведение фактор-групп $G/C_G(A_j/A_{j+1})$, то G/H обладает таким рядом нормальных подгрупп

$$N/H \leqslant K/H \leqslant G/H,$$

что фактор-группа N/H нильпотентна, фактор-группа $(K/H)/(N/H)$ абелева, а $(G/H)/(K/H)$ финитно аппроксимируема. Кроме того, группа G — объединение подгрупп, коцентрализаторы которых в модуле A являются минимаксными $\mathbb{Z}$-модулями. Следовательно, $G = \mathrm{MD}(G)$. По лемме 3.4 фактор-группа $(G/H)/(K/H) \simeq G/B$ конечна. Так как $G = \mathrm{MD}(G)$, то коцентрализатор подгруппы K в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Поскольку фактор-группа K/H — расширение нильпотентной группы при помощи абелевой, то K/H разрешима. Если коцентрализатор подгруппы H в модуле A — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль, то, как было установлено в лемме 3.3, H разрешима, и поэтому разрешима группа G.

Рассмотрим теперь случай, когда коцентрализатор подгруппы H в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Покажем, что и в этом случае подгруппа H разрешима. Положим $L_j = C_H(A/A_j)$, $j = 1, 2, \ldots$. Пусть $H \neq L_j$ для некоторого j. Предположим сначала, что существует индекс t, для которого фактор-группа H/L_t бесконечна. Тогда найдётся индекс $k \geqslant t$, для которого среди факторов ряда

$$A/A_k = A_0/A_k \geqslant A_1/A_k \geqslant A_2/A_k \geqslant \ldots \geqslant A_j/A_k \geqslant \ldots \geqslant A_k/A_k$$

есть бесконечные. Тогда в силу результатов [9, гл. 8] H имеет нильпотентный непериодический образ. Отсюда следует, что в H можно выбрать нормальную подгруппу H_1, для которой фактор-группа H/H_1 — нильпотентная непериодическая группа, и поэтому найдётся нормальная подгруппа H_2, для которой фактор-группа H/H_2 — абелева группа без кручения. Противоречие с леммой 2.4. Пусть теперь для любого индекса j, $j = 1, 2, \ldots$, фактор-группа H/L_j конечна. Предположим, что существует такой индекс j, что коцентрализатор подгруппы L_j в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Пусть j — наименьший индекс с указанным свойством. Тогда коцентрализатор подгруппы L_{j-1} в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. С другой стороны, так как фактор-группа L_{j-1}/L_j конечна и $G = \mathrm{MD}(G)$, то коцентрализатор подгруппы L_{j-1} в модуле A — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль. Снова получаем противоречие. Следовательно, для любой подгруппы L_j в модуле A её коцентрализатор не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. Поскольку H удовлетворяет условию min-nm, существует такой индекс m, что $L_j = L_m$ для всех $j \geqslant m$. Отсюда с учётом выбора L_j получаем, что подгруппа L_m разрешима. Так как фактор-группа H/L_m конечна, то H также разрешима. Лемма доказана. □

Из полученных результатов вытекает справедливость теоремы 1.1.

Доказательство теоремы 1.2. Отметим, что по теореме 1.1 группа G разрешима. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай, когда группа G не является черниковской.

Пусть

$$G = D_0 \geqslant D_1 \geqslant D_2 \geqslant \ldots \geqslant D_n = 1 —$$

производный ряд группы G. Согласно лемме 2.4 существует индекс m, такой что коцентрализатор подгруппы D_m в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, а коцентрализатор подгруппы D_{m+1} в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. По лемме 2.4 фактор-группы D_i/D_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, m$, черниковские. Пусть $U = D_{m+1}$. Тогда фактор-группа G/U черниковская. Положим $C = C_A(U)$. C является $\mathbb{Z}G$-подмодулем модуля A. Поскольку коцентрализатор подгруппы U в модуле A является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем, то фактор-модуль A/C — минимаксный $\mathbb{Z}$-модуль, и поэтому существует ряд подмодулей

$$0 = C_0 \leqslant C = C_1 \leqslant C_2 \leqslant \ldots \leqslant C_t = A,$$

такой что каждый фактор C_j/C_{j-1}, $j = 2, \ldots, t$, является либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо $\mathbb{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого — абелева группа без кручения конечного 0-ранга. Отсюда вытекает, что можно построить ряд подмодулей

$$0 = C_0 \leqslant C = C_1 \leqslant C_2 \leqslant \ldots \leqslant C_l = A,$$

такой что $l \geqslant t$ и каждый фактор C_j/C_{j-1}, $j = 2, \ldots, l$, является либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо G-рационально неприводимым $\mathbb{Z}G$-модулем, аддитивная группа которого — абелева группа без кручения конечного 0-ранга. Как при доказательстве леммы 3.5, устанавливаем, что в случаях, когда фактор C_j/C_{j-1}, $j = 2, \ldots, l$, является либо конечным $\mathbb{Z}G$-модулем, либо квазиконечным $\mathbb{Z}G$-модулем, по [11, лемма 16.19] фактор-группа $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ почти абелева. Если фактор C_j/C_{j-1} G-рационально неприводим и его аддитивная группа является абелевой группой без кручения конечного 0-ранга, фактор-группу $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ можно рассматривать как неприводимую подгруппу $\mathrm{GL}_r(\mathbb{Q})$. По теореме А. И. Мальцева [15, лемма 3.5] $G/C_G(C_j/C_{j-1})$ почти абелева.

Положим

$$H = C_G(C_1) \cap C_G(C_2/C_1) \cap C_G(C_3/C_2) \cap \ldots \cap C_G(C_l/C_{l-1}).$$

Подгруппа H действует тривиально в каждом факторе ряда

$$0 = C_0 \leqslant C = C_1 \leqslant C_2 \leqslant \ldots \leqslant C_l = A.$$

Следовательно, H нильпотентна. Поскольку фактор-группа G/U черниковская и $U \leqslant C_G(C_1)$, то фактор-группа $G/C_G(C_1)$ также является черниковской. По теореме Ремака G/H вкладывается в прямое произведение фактор-групп $G/C_G(C_j/C_{j-1})$, $j = 1, 2, \ldots, l$, поэтому G/H содержит абелеву нормальную подгруппу B/H конечного индекса. Поскольку группа G не является черниковской, по теореме 3.2 $G = \mathrm{MD}(G)$, и поэтому коцентрализатор подгруппы B

в модуле A не является минимаксным $\mathbb{Z}$-модулем. По лемме 2.4 фактор-группа B/H черниковская. Следовательно, G/H также черниковская. Отсюда вытекает, что группа G содержит нормальную нильпотентную подгруппу H, для которой фактор-группа G/H черниковская. Теорема доказана. $\square$

Литература

[1] Дашкова О. Ю. Об одном классе модулей над групповыми кольцами разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 111—119.

[2] Дашкова О. Ю. Модули над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп с ограничениями на некоторые системы подгрупп // Доповіді Нац. акад. наук України. Мат. — 2009. — № 2. — С. 14—19.

[3] Дашкова О. Ю. Об одном классе модулей над групповыми кольцами локально разрешимых групп // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2009. — Т. 15, № 2. — С. 94—98.

[4] Дашкова О. Ю. Об одном классе модулей над целочисленными групповыми кольцами локально разрешимых групп // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 1. — С. 44—51.

[5] Зайцев Д. И. О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // ДАН СССР. — 1974. — Т. 214, № 6. — С. 1250—1253.

[6] Курдаченко Л. А. О группах с минимаксными классами сопряжённых элементов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. — Киев: Академия наук Украины, 1993. — С. 160—177.

[7] Мерзляков Ю. И. Рациональные группы. — М.: Наука, 1980.

[8] Смирнов Д. М. О группах автоморфизмов разрешимых групп // Мат. сб. — 1953. — Т. 32. — С. 365—384.

[9] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1. — М.: Мир, 1973.

[10] Dixon M. R., Evans M. J., Kurdachenko L. A. Linear groups with the minimal condition on subgroups of infinite central dimension // J. Algebra. — 2004. — Vol. 277, no. 1. — P. 172—186.

[11] Kurdachenko L. A., Otal J., Subbotin I. Ya. Artinian Modules over Group Rings. — Basel: Birkhäuser, 2007.

[12] Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya. Linear groups with the maximal condition on subgroups of infinite central dimension // Publ. Mat. — 2006. — Vol. 50. — P. 103—131.

[13] Kurdachenko L. A., Subbotin I. Ya., Semko N. N. Insight into Modules over Dedekind Domains. — Kiev: National Academy of Sciences of Ukraine, Institute of Mathematics, 2008.

[14] Robinson D. J. R. Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups. — Berlin: Springer, 1972. — (Ergebnisse Math. ihrer Grenzgebiete).

[15] Wehrfritz B. A. F. Infinite Linear Groups. — Berlin: Springer, 1973. — (Ergebnisse Math. ihrer Grenzgebiete).