

Некоторые конгруэнции на триоидах

А. В. ЖУЧОК

Киевский национальный университет
им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: zhuchok_a@mail.ru

УДК 512.57+512.579

Ключевые слова: триоид, димоноид, полугруппа, конгруэнция.

Аннотация

Представлены наименьшая идемпотентная конгруэнция на триоиде с коммутативной операцией, наименьшая полурешётчатая конгруэнция на триоиде с идемпотентной операцией и наименьшая сепаративная конгруэнция на триоиде с коммутативной операцией. Построены различные примеры триоидов.

Abstract

A. V. Zhuchok, Some congruences on trioids, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 3, pp. 39–49.

We present the least idempotent congruence on the trioid with a commutative operation, the least semilattice congruence on the trioid with an idempotent operation, and the least separative congruence on the trioid with a commutative operation. Also we construct different examples of trioids.

1. Введение

Ж.-Л. Лоде и М. Ронко построили операды, ассоциированные с цепными модулями симплексов и политопий Стасеффа [5]. Соответствующие алгебры имеют три операции; они называются ассоциативными триалгебрами и древовидными триалгебрами. Триоид [5] — это множество с тремя бинарными ассоциативными операциями, удовлетворяющими тем же аксиомам, что и триалгебра (см. ниже). Таким образом, триалгебра является линейным аналогом триоида. Если операции триоида совпадают, то триоид превращается в полугруппу. Первым результатом о триоидах является описание свободного триоида, порождённого заданным множеством [5]. Понятие трисвязки подтриоидов было введено и применено для описания декомпозиций триоидов в [13]. Если операции $\vdash$ и $\perp$ триоида совпадают, то он превращается в димоноид [4]. Димоноиды были введены Ж.-Л. Лоде для изучения свойств алгебр Лейбница. В [4] Ж.-Л. Лоде построил свободный димоноид, порождённый заданным множеством. Свободные коммутативные димоноиды были построены в [12]. Структура коммутативных и идемпотентных димоноидов была описана в [8, 14] в терминах дисвязок

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 3, с. 39–49.

© 2011/2012 Центр новых информационных технологий МГУ,

Издательский дом «Открытые системы»

поддимонOIDов. Понятие полуретракции димонOIDа было введено и применено для описания конгруэнций в [1]. В [11] автор описал структуру произвольной дисвязки поддимонOIDов. Необходимые и достаточные условия, при которых произвольный димонOID является полурешёткой архимедовых поддимонOIDов, были найдены в [14].

В этой статье описаны некоторые наименьшие конгруэнции на триоидах и построены примеры триOIDов. В разделе 2 приведены необходимые определения и три вспомогательных результата (леммы 1–3). В разделе 3 описана наименьшая идемпотентная конгруэнция на триоиде с коммутативной операцией (теорема 4). Этот результат обобщает теорему Т. Тамуры и Н. Кимуры [7] о наименьшей идемпотентной конгруэнции на коммутативной полугруппе и описание наименьшей идемпотентной конгруэнции на димонOIDе с коммутативной операцией [8]. В разделе 4 описана наименьшая полурешёточная конгруэнция на триоиде с идемпотентной операцией (теорема 5). Этот результат обобщает описание Д. Маклина [6] наименьшей полурешёточной конгруэнции на связке и описание наименьшей полурешёточной конгруэнции на димонOIDе с идемпотентной операцией [14] (см. также [10]). В разделе 5 описана наименьшая сепаративная конгруэнция на триоиде с коммутативной операцией (теорема 6). Этот результат обобщает теорему Э. Хьюитта и Г. Цукермана [3] о наименьшей сепаративной конгруэнции на коммутативной полугруппе и описание наименьшей сепаративной конгруэнции на димонOIDе с коммутативной операцией [9]. В разделе 6 построены различные примеры триOIDов (предложения 7–12).

2. Предварительные сведения

Множество T с тремя бинарными ассоциативными операциями $\dashv$, $\vdash$ и $\perp$, удовлетворяющими аксиомам

$$(T1) \quad (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \vdash z),$$

$$(T2) \quad (x \vdash y) \dashv z = x \vdash (y \dashv z),$$

$$(T3) \quad (x \dashv y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z),$$

$$(T4) \quad (x \dashv y) \dashv z = x \dashv (y \perp z),$$

$$(T5) \quad (x \perp y) \dashv z = x \perp (y \dashv z),$$

$$(T6) \quad (x \dashv y) \perp z = x \perp (y \vdash z),$$

$$(T7) \quad (x \vdash y) \perp z = x \vdash (y \perp z),$$

$$(T8) \quad (x \perp y) \vdash z = x \vdash (y \vdash z)$$

для всех $x, y, z \in T$, называется триоидом. В разделе 6 мы построим примеры триOIDов.

Триоид $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ назовём коммутативным (идемпотентным, сепаративным), если полугруппы $(T, \dashv)$, $(T, \vdash)$ и $(T, \perp)$ являются коммутативными (соответственно идемпотентными, сепаративными).

Через $\mathbb{N}$ будем обозначать множество положительных целых чисел. Пусть $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид и $a \in T$, $n \in \mathbb{N}$. Через a^n обозначим n -ю степень элемента a

относительно операции $\dashv$. Напомним, что множество D с двумя бинарными ассоциативными операциями $\dashv$ и $\vdash$, удовлетворяющими аксиомам (Т1)–(Т3), называется димоноидом (см. [1, 4, 8–12, 14]).

Лемма 1 [8, лемма 1]. Пусть $(D, \dashv, \vdash)$ — димоноид с коммутативной операцией $\dashv$. Для всех $b, c \in D$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, имеем

$$(b \dashv c)^m = b^m \vdash c^m = (b \vdash c)^m.$$

Лемма 2 [13, лемма 3]. Пусть $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид с коммутативной операцией $\dashv$. Для всех $b, c \in T$, $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, имеем

$$(b \dashv c)^m = b^m \perp c^m = (b \perp c)^m.$$

Коммутативная полугруппа идемпотентов называется полурешёткой.

Лемма 3 [13, лемма 1]. Операции триоида $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ совпадают, если $(T, \dashv)$ — полурешётка.

3. Наименьшая идемпотентная конгруэнция на триоиде с коммутативной операцией

В этом разделе описана наименьшая идемпотентная конгруэнция на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ с коммутативной операцией $\dashv$ и показано, что соответствующий фактор-триоид является полурешёткой.

Если ρ — конгруэнция на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$, такая что $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ — идемпотентный триоид, то будем говорить, что ρ — идемпотентная конгруэнция.

Пусть $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид с коммутативной операцией $\dashv$, $a, b \in T$. Будем говорить, что $a \dashv$ -делит b , и писать $a \dashv \mid b$, если существует такой элемент x из полугруппы $(T, \dashv)$ с единицей, что $a \dashv x = b$.

Определим отношение η на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ с коммутативной операцией $\dashv$:

$a \eta b$ тогда и только тогда, когда

существуют положительные целые числа k, l , такие что $a \dashv \mid b^k$, $b \dashv \mid a^l$.

Теорема 4. Отношение η на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ с коммутативной операцией $\dashv$ является наименьшей идемпотентной конгруэнцией, и $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\eta$ — коммутативный идемпотентный триоид, являющийся полурешёткой.

Доказательство. Т. Тамурой и Н. Кимурой [7] было доказано, что отношение η является идемпотентной конгруэнцией на полугруппе $(T, \dashv)$.

Покажем, что отношение η является стабильным относительно операции $\vdash$. Пусть $a \eta b$, $a, b, c \in T$. Тогда $a \dashv c \eta b \dashv c$. Это означает, что существуют $x, y \in T$, $m, n \in \mathbb{N}$, для которых

$$(a \dashv c) \dashv x = (b \dashv c)^m, \quad (1)$$

$$(b \dashv c) \dashv y = (a \dashv c)^n. \quad (2)$$

Умножим равенство (1) на $b \dashv c$ и равенство (2) на $a \dashv c$:

$$(a \dashv c) \dashv x \dashv (b \dashv c) = (b \dashv c)^{m+1}, \quad (3)$$

$$(b \dashv c) \dashv y \dashv (a \dashv c) = (a \dashv c)^{n+1}. \quad (4)$$

Рассматривая обе части равенства (3), получаем

$$\begin{aligned} (a \dashv c) \dashv x \dashv (b \dashv c) &= (x \dashv a) \dashv (c \dashv b \dashv c) = \\ &= x \dashv (a \vdash (c \dashv b \dashv c)) = x \dashv ((a \vdash c) \dashv (b \dashv c)) = (a \vdash c) \dashv (x \dashv b \dashv c) \end{aligned}$$

согласно коммутативности и ассоциативности операции $\dashv$ и аксиомам (T1), (T2), и $(b \dashv c)^{m+1} = (b \vdash c)^{m+1}$ согласно лемме 1. Отсюда следует, что

$$(a \vdash c) \dashv (x \dashv b \dashv c) = (b \vdash c)^{m+1}.$$

Таким образом, $a \vdash c \dashv | (b \vdash c)^{m+1}$. Аналогично из равенства (4) получаем, что $b \vdash c \dashv | (a \vdash c)^{n+1}$. Это вместе с предыдущим означает, что $a \vdash c \eta b \vdash c$.

Двойственно можно показать левую стабильность отношения η относительно операции $\vdash$. Таким образом, η — конгруэнция на $(T, \dashv, \vdash)$.

Покажем, что отношение η является стабильным относительно операции $\perp$. Рассматривая обе части равенства (3), получаем

$$\begin{aligned} (a \dashv c) \dashv x \dashv (b \dashv c) &= (x \dashv a) \dashv (c \dashv b \dashv c) = \\ &= x \dashv (a \perp (c \dashv b \dashv c)) = x \dashv ((a \perp c) \dashv (b \dashv c)) = (a \perp c) \dashv (x \dashv b \dashv c) \end{aligned}$$

согласно коммутативности и ассоциативности операции $\dashv$ и аксиомам (T4), (T5), и $(b \dashv c)^{m+1} = (b \perp c)^{m+1}$ согласно лемме 2. Отсюда следует, что

$$(a \perp c) \dashv (x \dashv b \dashv c) = (b \perp c)^{m+1}.$$

Таким образом, $a \perp c \dashv | (b \perp c)^{m+1}$. Аналогично из равенства (4) получаем, что $b \perp c \dashv | (a \perp c)^{n+1}$. Это вместе с предыдущим означает, что $a \perp c \eta b \perp c$.

Двойственно можно показать левую стабильность отношения η относительно операции $\perp$. Таким образом, η — конгруэнция на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Так как $(T, \dashv)/\eta$ — полурешётка, то согласно лемме 3 операции фактор-триоида $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\eta$ совпадают, и следовательно, он является полурешёткой.

Для завершения доказательства необходимо показать, что η содержится в каждой идемпотентной конгруэнции ρ на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Пусть $a \eta b$, $a, b \in T$. Тогда $a \dashv z = b^k$, $b \dashv d = a^l$ для некоторых $z, d \in T$ и $k, l \in \mathbb{N}$. Так как $a \rho a \dashv a$, $b \rho b \dashv b$ по идемпотентности ρ , то $a \rho b \dashv d$, $b \rho a \dashv z$. Следовательно,

$$a \rho b \dashv d \rho b \dashv b \dashv d \rho b \dashv a^l \rho b \dashv a \rho b^k \dashv a \rho a \dashv z \dashv a \rho a \dashv z \rho b.$$

Таким образом, $a \rho b$ и $\eta \subseteq \rho$. □

Теорема 4 обобщает теорему Т. Тамуры и Н. Кимуры о наименьшей идемпотентной конгруэнции на коммутативной полугруппе [7] и описание наименьшей идемпотентной конгруэнции на димоноеде с коммутативной операцией [8].

4. Наименьшая полурешёточная конгруэнция на триоиде с идемпотентной операцией

В этом разделе описана наименьшая полурешёточная конгруэнция на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ с идемпотентной операцией $\dashv$.

Если ρ — конгруэнция на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$, такая что операции фактор-триоида $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ совпадают и он является полурешёткой, то будем говорить, что ρ — полурешёточная конгруэнция.

Определим отношение $\mathfrak{Z}$ на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ с идемпотентной операцией $\dashv$:

$$a \mathfrak{Z} b \text{ тогда и только тогда, когда } a = a \dashv b \dashv a, b = b \dashv a \dashv b.$$

Теорема 5. *Отношение $\mathfrak{Z}$ на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ с идемпотентной операцией $\dashv$ является наименьшей полурешёточной конгруэнцией.*

Доказательство. Д. Маклин [6] доказал, что отношение $\mathfrak{Z}$ является полурешёточной конгруэнцией на полугруппе $(T, \dashv)$. Покажем, что $\mathfrak{Z}$ является стабильным относительно операции $\vdash$.

Пусть $a \mathfrak{Z} b$, $a, b, c \in T$. Тогда $a \dashv c \mathfrak{Z} b \dashv c$. Это означает, что

$$(a \dashv c) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) = (a \dashv c), \quad (5)$$

$$(b \dashv c) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) = (b \dashv c). \quad (6)$$

Умножим обе части равенства (5) на $a \vdash c$ и равенства (6) на $b \vdash c$:

$$\begin{aligned} (a \vdash c) \dashv ((a \dashv c) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c)) &= ((a \vdash c) \dashv (a \dashv c)) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) = \\ &= ((a \vdash c) \dashv (a \vdash c)) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) = (a \vdash c) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) = \\ &= ((a \vdash c) \dashv (b \vdash c)) \dashv (a \dashv c) = (a \vdash c) \dashv (b \vdash c) \dashv (a \vdash c) = \\ &= (a \vdash c) \dashv (a \dashv c) = (a \vdash c) \dashv (a \vdash c) = (a \vdash c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b \vdash c) \dashv ((b \dashv c) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c)) &= ((b \vdash c) \dashv (b \dashv c)) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) = \\ &= ((b \vdash c) \dashv (b \vdash c)) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) = (b \vdash c) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) = \\ &= ((b \vdash c) \dashv (a \vdash c)) \dashv (b \dashv c) = (b \vdash c) \dashv (a \vdash c) \dashv (b \vdash c) = \\ &= (b \vdash c) \dashv (b \dashv c) = (b \vdash c) \dashv (b \vdash c) = (b \vdash c) \end{aligned}$$

согласно ассоциативности и идемпотентности операции $\dashv$ и аксиоме (T1). Следовательно, $a \vdash c \mathfrak{Z} b \vdash c$.

Двойственно можно показать левую стабильность отношения $\mathfrak{Z}$ относительно операции $\vdash$. Таким образом, $\mathfrak{Z}$ — конгруэнция на $(T, \dashv, \vdash)$.

Покажем, что $\mathfrak{Z}$ является стабильным относительно операции $\perp$. Умножим обе части равенства (5) на $a \perp c$ и равенства (6) на $b \perp c$:

$$\begin{aligned} (a \perp c) \dashv ((a \dashv c) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c)) &= ((a \perp c) \dashv (a \dashv c)) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) = \\ &= ((a \perp c) \dashv (a \perp c)) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) = (a \perp c) \dashv (b \dashv c) \dashv (a \dashv c) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((a \perp c) \dashv (b \perp c)) \dashv (a \dashv c) = (a \perp c) \dashv (b \perp c) \dashv (a \perp c) = \\
&= (a \perp c) \dashv (a \dashv c) = (a \perp c) \dashv (a \perp c) = (a \perp c), \\
(b \perp c) \dashv ((b \dashv c) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c)) &= ((b \perp c) \dashv (b \dashv c)) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) = \\
&= ((b \perp c) \dashv (b \perp c)) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) = (b \perp c) \dashv (a \dashv c) \dashv (b \dashv c) = \\
&= ((b \perp c) \dashv (a \perp c)) \dashv (b \dashv c) = (b \perp c) \dashv (a \perp c) \dashv (b \perp c) = \\
&= (b \perp c) \dashv (b \dashv c) = (b \perp c) \dashv (b \perp c) = (b \perp c)
\end{aligned}$$

согласно ассоциативности и идемпотентности операции $\dashv$ и аксиоме (Т4). Следовательно, $a \perp c \mathfrak{S} b \perp c$.

Двойственно можно показать левую стабильность отношения $\mathfrak{S}$ относительно операции $\perp$. Таким образом, $\mathfrak{S}$ — конгруэнция на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Так как $(T, \dashv)/\mathfrak{S}$ — полурешётка, то согласно лемме 3 операции фактор-триоида $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\mathfrak{S}$ совпадают, и следовательно, он является полурешёткой.

Для завершения доказательства необходимо показать, что $\mathfrak{S}$ содержится в каждой полурешёточной конгруэнции ρ на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Пусть $a \mathfrak{S} b$, $a, b \in T$. Тогда $a \dashv b \dashv a = a$, $b \dashv a \dashv b = b$. Так как ρ — полурешёточная конгруэнция, то $a = a \dashv b \dashv a \rho b \dashv a \dashv b = b$. Следовательно, $a \rho b$ и $\mathfrak{S} \subseteq \rho$. $\square$

Теорема 5 обобщает описание Д. Маклина наименьшей полурешёточной конгруэнции на связке [6] и описание наименьшей полурешёточной конгруэнции на димоноеде с идемпотентной операцией [14] (см. также [10]).

5. Наименьшая сепаративная конгруэнция на триоиде с коммутативной операцией

В этом разделе описана наименьшая сепаративная конгруэнция на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ с коммутативной операцией $\dashv$ и показано, что соответствующий фактор-триоид является коммутативной сепаративной полугруппой.

Если ρ — конгруэнция на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$, такая что $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\rho$ — сепаративный триоид, то будем говорить, что ρ — сепаративная конгруэнция.

Пусть $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид, $a \in T$, $n \in \mathbb{N}$. Напомним, что через a^n мы обозначаем n -ю степень элемента a относительно операции $\dashv$.

Определим отношение σ на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ с коммутативной операцией $\dashv$:

$a \sigma b$ тогда и только тогда, когда существует

положительное целое число n , такое что $a \dashv b^n = b^{n+1}$, $b \dashv a^n = a^{n+1}$.

Теорема 6. Отношение σ на триоиде $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ с коммутативной операцией $\dashv$ является наименьшей сепаративной конгруэнцией, и $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\sigma$ — коммутативный сепаративный триоид, являющийся коммутативной сепаративной полугруппой.

Доказательство. Э. Хьюитт и Г. Цукерман [3] доказали, что отношение σ является сепаративной конгруэнцией на полугруппе $(T, \dashv)$. Покажем, что отношение σ является стабильным относительно операции $\vdash$.

Пусть $a \sigma b$, $a, b, c \in T$. Тогда $a \dashv c \sigma b \dashv c$. Это означает, что существует $m \in \mathbb{N}$, для которого

$$(a \dashv c) \dashv (b \dashv c)^m = (b \dashv c)^{m+1}, \quad (7)$$

$$(b \dashv c) \dashv (a \dashv c)^m = (a \dashv c)^{m+1}. \quad (8)$$

Умножим обе части равенства (7) на $b \dashv c$ и равенства (8) на $a \dashv c$ относительно операции $\dashv$:

$$(a \dashv c) \dashv (b \dashv c)^{m+1} = (b \dashv c)^{m+2}, \quad (9)$$

$$(b \dashv c) \dashv (a \dashv c)^{m+1} = (a \dashv c)^{m+2}. \quad (10)$$

Рассматривая обе части равенства (9), получаем, что

$$\begin{aligned} (a \dashv c) \dashv (b \dashv c)^{m+1} &= (b \vdash c)^{m+1} \dashv (a \dashv c) = \\ &= ((b \vdash c)^{m+1} \dashv a) \dashv c = (b \vdash c)^{m+1} \dashv (a \vdash c) = \\ &= (a \vdash c) \dashv (b \vdash c)^{m+1} = (b \vdash c)^{m+2} \end{aligned}$$

согласно коммутативности и ассоциативности операции $\dashv$, аксиоме (T1) и лемме 1. Аналогично из равенства (10) получаем, что

$$(b \vdash c) \dashv (a \vdash c)^{m+1} = (a \vdash c)^{m+2}.$$

Это вместе с предыдущим означает, что $a \vdash c \sigma b \vdash c$.

Двойственно можно показать левую стабильность отношения σ относительно операции $\vdash$. Таким образом, σ — конгруэнция на $(T, \dashv, \vdash)$.

Покажем, что отношение σ является стабильным относительно операции $\perp$. Рассматривая обе части равенства (9), получаем

$$\begin{aligned} (a \dashv c) \dashv (b \dashv c)^{m+1} &= (b \perp c)^{m+1} \dashv (a \dashv c) = \\ &= ((b \perp c)^{m+1} \dashv a) \dashv c = (b \perp c)^{m+1} \dashv (a \perp c) = \\ &= (a \perp c) \dashv (b \perp c)^{m+1} = (b \perp c)^{m+2} \end{aligned}$$

согласно коммутативности и ассоциативности операции $\dashv$, аксиоме (T4) и лемме 2. Аналогично из равенства (10) получаем, что

$$(b \perp c) \dashv (a \perp c)^{m+1} = (a \perp c)^{m+2}.$$

Это вместе с предыдущим означает, что $a \perp c \sigma b \perp c$.

Двойственно можно показать левую стабильность отношения σ относительно операции $\perp$. Таким образом, σ — конгруэнция на $(T, \dashv, \vdash, \perp)$.

Очевидно, $(T, \dashv)/\sigma$ — коммутативная полугруппа. Из [3] (см. также [2]) следует, что $(T, \dashv)/\sigma$ является сепаративной полугруппой. Таким образом, $(T, \dashv)/\sigma$ — коммутативная сепаративная полугруппа.

Согласно лемме 1

$$(a \dashv b) \dashv (a \vdash b)^{n+1} = (a \dashv b) \dashv (a \dashv b)^{n+1} = (a \dashv b)^{n+2} = (a \vdash b)^{n+2},$$

$$(a \vdash b) \dashv (a \dashv b)^{n+1} = (a \vdash b) \dashv (a \vdash b)^{n+1} = (a \vdash b)^{n+2} = (a \dashv b)^{n+2}$$

для всех $a, b \in T$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $a \dashv b \sigma a \vdash b$. Отсюда следует, что операции $(T, \dashv, \vdash)/\sigma$ совпадают.

Согласно лемме 2

$$(a \dashv b) \dashv (a \perp b)^{n+1} = (a \dashv b) \dashv (a \dashv b)^{n+1} = (a \dashv b)^{n+2} = (a \perp b)^{n+2},$$

$$(a \perp b) \dashv (a \dashv b)^{n+1} = (a \perp b) \dashv (a \perp b)^{n+1} = (a \perp b)^{n+2} = (a \dashv b)^{n+2}$$

для всех $a, b \in T$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $a \dashv b \sigma a \perp b$. Отсюда следует, что операции $(T, \dashv, \perp)/\sigma$ совпадают. Таким образом, операции фактор-триоида $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\sigma$ совпадают. Это означает, что $(T, \dashv, \vdash, \perp)/\sigma$ — коммутативный сепаративный триоид, являющийся коммутативной сепаративной полугруппой и σ — сепаративная конгруэнция. Тот факт, что σ является наименьшей сепаративной конгруэнцией, следует из [3] (см. также [2]). $\square$

Теорема 6 обобщает теорему Э. Хьюитта и Г. Цукермана о наименьшей сепаративной конгруэнции на коммутативной полугруппе [3] и описание наименьшей сепаративной конгруэнции на димоноиде с коммутативной операцией [9].

6. Примеры триоидов

В этом разделе построены различные примеры триоидов.

1. Пусть $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид. Если операции $\vdash$ и $\perp$ триоида совпадают, то триоид превращается в димоноид [4]. Таким образом, каждый димоноид можно рассматривать как триоид. Примеры димоноидов можно найти в [1, 4, 8, 11, 12, 14].

2. Пусть $(T, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид. Если операции $\dashv$, $\vdash$ и $\perp$ триоида совпадают, то триоид превращается в полугруппу. Таким образом, каждую полугруппу можно рассматривать как триоид.

3. Пусть S — полугруппа и f — её идемпотентный эндоморфизм. Определим на S операции $\dashv$, $\vdash$ и $\perp$, полагая

$$x \dashv y = x(yf), \quad x \vdash y = (xf)y, \quad x \perp y = (xy)f$$

для всех $x, y \in S$.

Предложение 7 [13, предложение 9]. $(S, \dashv, \vdash, \perp)$ является триоидом.

4. Полугруппу S будем называть прямоугольной, если $xuz = xz$ для всех $x, y, z \in S$.

Пусть S — прямоугольная полугруппа, P — произвольная полугруппа, $\theta: P \rightarrow S$ — гомоморфизм. Определим на $S \times P$ операции $\dashv$, $\vdash$ и $\perp$, полагая

$$(s, t) \dashv (p, g) = (s, tg), \quad (s, t) \vdash (p, g) = ((t\theta)p, tg), \quad (s, t) \perp (p, g) = (sp, tg)$$

для всех $(s, t), (p, g) \in S \times P$.

Предложение 8. $(S \times P, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид.

Доказательство. Согласно [8, предложение 2] $(S \times P, \dashv, \vdash)$ — димоноид. Для завершения доказательства необходимо показать, что выполняются аксиомы (T4)—(T8) триоида и операция $\perp$ ассоциативная.

Очевидно, что операция $\perp$ ассоциативная. Для любых $(s, t), (p, g), (a, b) \in S \times P$ имеем

$$\begin{aligned} ((s, t) \dashv (p, g)) \dashv (a, b) &= (s, tg) \dashv (a, b) = (s, tgb), \\ (s, t) \dashv ((p, g) \perp (a, b)) &= (s, t) \dashv (pa, gb) = (s, tgb), \\ ((s, t) \perp (p, g)) \dashv (a, b) &= (sp, tg) \dashv (a, b) = (sp, tgb), \\ (s, t) \perp ((p, g) \dashv (a, b)) &= (s, t) \perp (p, gb) = (sp, tgb), \\ ((s, t) \dashv (p, g)) \perp (a, b) &= (s, tg) \perp (a, b) = (sa, tgb), \\ (s, t) \perp ((p, g) \vdash (a, b)) &= (s, t) \perp ((g\theta)a, gb) = (s(g\theta)a, tgb) = (sa, tgb), \\ ((s, t) \vdash (p, g)) \perp (a, b) &= ((t\theta)p, tg) \perp (a, b) = ((t\theta)pa, tgb), \\ (s, t) \vdash ((p, g) \perp (a, b)) &= (s, t) \vdash (pa, gb) = ((t\theta)pa, tgb), \\ ((s, t) \perp (p, g)) \vdash (a, b) &= (sp, tg) \vdash (a, b) = ((tg)\theta a, tgb), \\ (s, t) \vdash ((p, g) \vdash (a, b)) &= (s, t) \vdash ((g\theta)a, gb) = ((t\theta)(g\theta)a, tgb) = ((tg)\theta a, tgb). \end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения, приходим к выводу, что $(S \times P, \dashv, \vdash, \perp)$ является триоидом. $\square$

5. Пусть X^* — множество конечных непустых слов в алфавите X . Если $w \in X^*$, то через $w^{(0)}$ ($w^{(1)}$) будем обозначать первую (соответственно последнюю) букву слова w .

Определим на множестве X^* операции $\dashv, \vdash$ и $\perp$, полагая

$$w \dashv u = w^{(0)}w^{(1)}, \quad w \vdash u = u^{(0)}u^{(1)}, \quad w \perp u = w^{(0)}u^{(1)}$$

для всех $w, u \in X^*$.

Предложение 9 [13, предложение 7]. $(X^*, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид.

6. Пусть $(S, \perp)$ — произвольная полугруппа. Определим на S операции $\dashv$ и $\vdash$, полагая

$$x \dashv y = x, \quad x \vdash y = y$$

для всех $x, y \in S$.

Предложение 10. $(S, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид.

Доказательство. Очевидно, что операции $\dashv, \vdash$ и $\perp$ ассоциативные. Для любых $x, y, z \in S$ получаем

$$\begin{aligned} (x \dashv y) \dashv z &= x \dashv z = x = x \dashv (y \vdash z) = x \dashv (y \perp z), \\ (x \vdash y) \dashv z &= y \dashv z = y = x \vdash y = x \vdash (y \dashv z), \\ (x \dashv y) \vdash z &= z = x \vdash z = x \vdash (y \vdash z) = (x \perp y) \vdash z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x \perp y) \dashv z &= x \perp y = x \perp (y \dashv z), \\
(x \dashv y) \perp z &= x \perp z = x \perp (y \vdash z), \\
(x \vdash y) \perp z &= y \perp z = x \vdash (y \perp z).
\end{aligned}$$

Это означает, что $(S, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид. $\square$

Ясно, что $(S, \dashv, \vdash, \perp)$ — триоид с идемпотентными операциями $\dashv, \vdash$. Если операция $\perp$ идемпотентна, то $(S, \dashv, \vdash, \perp)$ — идемпотентный триоид. Если $(S, \dashv, \vdash, \perp)$ — идемпотентный триоид, то наименьшая полурешёточная конгруэнция $\mathfrak{Z}$ есть $S \times S$.

7. Пусть $2\mathbb{N}$ — множество чётных положительных целых чисел и $2\mathbb{N} - 1$ — множество нечётных положительных целых чисел. Зафиксируем $t, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{N}$ и определим на $\mathbb{N}$ операции $\dashv, \vdash$ и $\perp$, полагая

$$\begin{aligned}
x \dashv y &= \begin{cases} x + y + t_1, & x, y \in 2\mathbb{N}, \\ t & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\
x \vdash y &= \begin{cases} x + y + t_2, & x, y \in 2\mathbb{N}, \\ t & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\
x \perp y &= \begin{cases} x + y + t_3, & x, y \in 2\mathbb{N}, \\ t & \text{в остальных случаях} \end{cases}
\end{aligned}$$

для всех $x, y \in \mathbb{N}$.

Предложение 11 [13, предложение 4]. $(\mathbb{N}, \dashv, \vdash, \perp)$ — коммутативный триоид.

В этом случае наименьшая идемпотентная конгруэнция η есть $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и наименьшая сепаративная конгруэнция σ есть $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

8. Пусть X — такое произвольное множество, что $0, a, b, c, d, e, f \in X$ и $a \neq b, b \neq c, c \neq d, d \neq a, f \neq a, b \neq e, d \neq e, f \neq c, e \neq f$. Определим на X операции $\dashv, \vdash$ и $\perp$, полагая

$$\begin{aligned}
x \dashv y &= \begin{cases} b, & x = y = a, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\
x \vdash y &= \begin{cases} d, & x = y = c, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \\
x \perp y &= \begin{cases} f, & x = y = e, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}
\end{aligned}$$

для всех $x, y \in X$.

Предложение 12 [13, предложение 5]. $(X, \dashv, \vdash, \perp)$ — коммутативный триоид.

В этом случае наименьшая идемпотентная конгруэнция η есть $X \times X$ и наименьшая сепаративная конгруэнция σ есть $X \times X$.

Литература

- [1] Жучок А. В. Напівретракції дімоноїдів // Тр. ИПММ НАН України. — 2008. — Т. 17. — С. 42—50.
- [2] Clifford A. H., Preston G. B. Algebraic Theory of Semigroups. Vols. 1, 2. — Amer. Math. Soc., 1964; 1967.
- [3] Hewitt E., Zuckerman H. S. The l_1 -algebra of a commutative semigroup // Trans. Am. Math. Soc. — 1956. — Vol. 83. — P. 70—97.
- [4] Loday J.-L. Dialgebras // Dialgebras and Related Operads. — Berlin: Springer, 2001. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1763). — P. 7—66.
- [5] Loday J.-L., Ronco M. O. Trialgebras and families of polytopes // Homotopy Theory: Relations with Algebraic Geometry, Group Cohomology, and Algebraic K -Theory. Papers from the Int. Conf. on Algebraic Topology, Northwestern Univ., Evanston, IL, USA, March 24—28, 2002 / P. Goerss, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2004. — (Contemp. Math.; Vol. 346). — P. 369—398.
- [6] McLean D. Idempotent semigroups // Am. Math. Mon. — 1954. — Vol. 61. — P. 110—113.
- [7] Tamura T., Kimura N. On decomposition of a commutative semigroup // Kodai Math. Sem. Rep. — 1954. — Vol. 4. — P. 109—112.
- [8] Zhuchok A. V. Commutative dimonoids // Algebra Discrete Math. — 2009. — No. 2. — P. 116—127.
- [9] Zhuchok A. V. Dimonoids with a commutative operation // Int. Conf. Mal'tsev Meeting. Novosibirsk, 2009. Collection of Abstracts. — P. 185.
- [10] Zhuchok A. V. On idempotent dimonoids // Int. Conf. on Semigroups and Related Topics. Porto, Portugal, 2009. Abstracts. — P. 87.
- [11] Zhuchok A. V. Dibands of subdimonoids // Mat. Stud. — 2010. — Vol. 33. — P. 120—124.
- [12] Zhuchok A. V. Free commutative dimonoids // Algebra Discrete Math. — 2010. — No. 1. — P. 109—119.
- [13] Zhuchok A. V. Tribands of subtrioids // Proc. Inst. Appl. Math. Mech. — 2010. — Vol. 21. — P. 98—106.
- [14] Zhuchok A. V. Semilattices of subdimonoids // Asian-Eur. J. Math. — 2011. — Vol. 4, no. 2. — P. 359—371.

