Полугруппы эндоморфизмов некоторых свободных произведений

Ю. В. ЖУЧОК
Луганский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: zhuchok_y@mail.ru

УДК 512.53

Ключевые слова: полугруппа эндоморфизмов, свободное произведение, сплетение.

Аннотация

В работе определяется понятие w-класса полугрупп и доказывается, что любая полугруппа эндоморфизмов свободного произведения полугрупп максимального w-класса изоморфна сплетению полугруппы преобразований и некоторой малой категории.

Abstract

Yu. V. Zhuchok, Endomorphism semigroups of some free products, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 3, pp. 51—60.

We define the notion of a w-class of semigroups and prove that every endomorphism semigroup of a free product of semigroups from a maximal w-class is isomorphic to a wreath product of a transformation semigroup with some small category.

1. Введение

Полугруппа эндоморфизмов является одной из важнейших производных структур любой алгебраической системы. Во многих случаях полугруппа эндоморфизмов несёт существенную информацию об исходной системе и даёт новый, достаточно удобный язык, с помощью которого можно исследовать строение этой системы. Одним из основных вопросов, часто изучаемых в различных публикациях, является проблема определяемости данной алгебраической системы своей полугруппой эндоморфизмов. Существует целый ряд алгебраических систем, свойства которых определяются свойствами их полугрупп эндоморфизмов. Например, своими полугруппами эндоморфизмов в классе всех групп определяются обобщённые группы кватернионов [6] и непериодические делимые абелевы группы [16]. В [1] доказано, что рефлексивные графы с некоторым дополнительным условием определяются своими полугруппами эндоморфизмов с точностью до изоморфизма и ориентации рёбер, в то время как сами рефлексивные графы в общем случае не определяются своими полугруппами эндоморфизмов [11].

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 3, с. 51—60.

Примеры других алгебраических систем, которые не определяются своими полугруппами эндоморфизмов, можно найти, например, в [12, 20].

При изучении свойств полугрупп эндоморфизмов особое внимание уделяется таким вопросам, как структурное строение полугруппы, описание абстрактных характеристик, точных представлений, регулярности и др. Л. М. Глускиным [2—4] был найден метод получения абстрактных характеристик полугрупп преобразований, при помощи которого были охарактеризованы полугруппы эндоморфизмов линейных пространств, а также полугруппы эндоморфизмов нециклических свободных модулей. Строение полугруппы эндоморфизмов свободной группы было описано В. М. Усенко [8, 9]. Проблема описания полугрупп эндоморфизмов регулярных полугрупп Риса матричного типа была решена в [7]. На конечной полной полугруппе преобразований и конечной симметрической инверсной полугруппе эндоморфизмы изучались Б. М. Шайном, Б. Теклезги [17,18], а на полугруппах бинарных отношений эндоморфизмы были описаны В. Мазорчуком [15].

Полугруппа эндоморфизмов свободного произведения полугрупп идемпотентов была охарактеризована в [5]. После этого в [19] было анонсировано, что полугруппы эндоморфизмов ортогональной суммы полугрупп, связки некоторых полугрупп и свободного произведения π-регулярных полугрупп изоморфно вкладываются в полугруппу мономиальных по строкам матриц. Естественной в этом направлении является задача описания точных представлений полугрупп эндоморфизмов свободных произведений полугрупп какого-либо достаточно широкого класса полугрупп.

В этой работе определяется максимальный подкласс класса всех полугрупп, который, в частности, содержит в себе класс всех полугрупп с нулём и класс всех π-регулярных полугрупп, и доказывается, что любая полугруппа эндоморфизмов свободного произведения полугрупп этого класса изоморфна сплетению полугруппы преобразований и некоторой малой категории.

2. w-классы полугрупп

В этом разделе определяется понятие w-класса полугрупп, приводятся примеры таких классов.

Пусть задано дизъюнктное семейство полугрупп S_α, $\alpha \in Y$, т. е. такое семейство, что $S_i \cap S_j = \varnothing$ при любых $i, j \in Y$, $i \neq j$. Обозначим через $\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$ множество всех конечных непустых последовательностей $a_1a_2\dots a_k$, которые состоят из элементов множества $\bigcup\limits_{\alpha\in Y} S_\alpha$, при этом для любого $1 \leqslant j \leqslant k-1$ из условия $a_j \in S_\alpha$ для некоторого $\alpha \in Y$ следует, что $a_{j+1} \notin S_\alpha$. На множестве $\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$ определяется следующая операция:

$$a_1a_2\dots a_k * b_1b_2\dots b_l =$$
$$= \begin{cases} a_1a_2\dots a_kb_1b_2\dots b_l, & a_k \in S_i,\ b_1 \in S_j,\ i \neq j, \\ a_1a_2\dots a_{k-1}(a_k \cdot b_1)b_2\dots b_l, & a_k, b_1 \in S_i \text{ для некоторого } i \in Y. \end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что операция $*$ ассоциативна, и следовательно, $(\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}, *)$ — полугруппа. Полученная полугруппа называется свободным произведением полугрупп S_α, $\alpha \in Y$.

Если $w = a_1a_2\dots a_k \in \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$, то число $\mathrm{l}(w) = k$ называют длиной элемента w.

Через $\Im(X)$ будем обозначать симметрическую полугруппу на множестве X.

Если $\varphi\colon A \to B$ — произвольное отображение и $\varnothing \neq Y \subseteq A$, то отображение $\varphi|_Y\colon Y \to B$, определённое условием, что $a\varphi|_Y = a\varphi$ для всех $a \in Y$, называется ограничением φ на подмножество Y. Если g — гомоморфизм свободного произведения $\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$, то для ограничения $g|_{S_\alpha}$ будем использовать обозначение g_α.

Для произвольных полугрупп S_i, S_j через $\mathrm{H}_{S_iS_j}$ (или H_{ij}) будем обозначать множество всех гомоморфизмов из S_i в S_j.

Пусть $D = \{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ — произвольное дизъюнктное семейство полугрупп идемпотентов, $D' = \{S_\alpha \mid \alpha \in Y'\}$ — такое дизъюнктное семейство полугрупп, что $Y \subseteq Y'$. Если $\varphi\colon \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y} \to \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y'}$ — гомоморфизм свободных произведений, то понятно, что при любом $\alpha \in Y$ выполняется включение $\operatorname{Im}\varphi_\alpha \subseteq S_\beta$ для некоторого $\beta \in Y'$.

Рассмотрим теперь свободное произведение $\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$ конечных полугрупп S_α, $\alpha \in Y$, и пусть $\varphi\colon \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y} \to \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y'}$, $Y \subseteq Y'$, — гомоморфизм. Поскольку гомоморфный образ конечной полугруппы конечен, то $\mathrm{l}(w\varphi) = 1$ для любого $w \in \bigcup\limits_{\alpha\in Y} S_\alpha$. Кроме того, в этом случае разные элементы из одной полугруппы S_i под действием гомоморфизма φ будут отображаться в элементы какой-то одной полугруппы S_j. Таким образом, для каждого $\alpha \in Y$ найдётся такое $\beta \in Y'$, что $\operatorname{Im}\varphi_\alpha \subseteq S_\beta$.

Однако этим свойством не обладают свободные произведения других классов полугрупп. Известно, что для любого дизъюнктного семейства полугрупп S_α, $\alpha \in Y$, гомоморфизмы $S_i \to \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$, $i \in Y$, однозначно определяют эндоморфизм свободного произведения $\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$.

Пусть $S = \langle a\rangle$ — бесконечная циклическая полугруппа, T — такая произвольная полугруппа, что $S \cap T = \varnothing$, и $x \in S$, $y \in T$. Тогда, взяв мономорфизм

$$\varphi_1\colon S \to \mathrm{Fr}[S,T], \quad a^k \mapsto (xy)^k$$

и тождественный автоморфизм $\varphi_2\colon T \to T$, получим эндоморфизм φ свободного произведения $\mathrm{Fr}[S,T]$, который определяется гомоморфизмами φ_i, $1 \leqslant i \leqslant 2$. Но в образе гомоморфизма φ_1 любой элемент имеет длину, большую чем 1, и следовательно, $S\varphi \nsubseteq S$, $S\varphi \nsubseteq T$.

Пусть K — некоторый абстрактный класс полугрупп, $D = \{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ — произвольное дизъюнктное семейство полугрупп этого класса и $D' = \{S_\alpha \mid \alpha \in Y'\}$ — семейство попарно непересекающихся полугрупп, для которого $Y \subseteq Y'$. Назовём K сплетённым классом (или коротко w-классом), если для любого гомоморфизма $\varphi\colon \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y} \to \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y'}$ и каждого $\alpha \in Y$ существует такое $\beta \in Y'$, что $\operatorname{Im}\varphi_\alpha \subseteq S_\beta$.

Заметим, что класс всех полугрупп идемпотентов и класс всех конечных полугрупп являются w-классами, при этом максимальный w-класс является собственным подклассом в классе всех полугрупп.

Полугруппа T называется регулярной, если каждый её элемент регулярен, т. е. для любого элемента $a \in T$ найдётся такой элемент $x \in T$, что $axa = a$. Полугруппа T называется π-регулярной, если некоторая степень каждого её элемента является регулярной. Класс π-регулярных полугрупп достаточно обширный, он содержит в себе все конечные полугруппы, периодические полугруппы, полугруппы идемпотентов и регулярные полугруппы.

Пусть $F = \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$ — свободное произведение π-регулярных полугрупп S_α, $\alpha \in Y$, и $\operatorname{End} F$ — полугруппа эндоморфизмов полугруппы F.

Поскольку каждая π-регулярная полугруппа содержит по крайней мере один идемпотент, то $\mathrm{H}_{ij} \neq \varnothing$ при любых $i, j \in Y$. Для каждого $i \in Y$ положим

$$\mathrm{H}_{i*} = \bigcup_{j \in Y} \mathrm{H}_{ij}.$$

Эндоморфизмы свободного произведения π-регулярных полугрупп описывает следующая лемма.

Лемма 1. *Преобразование $\varphi \in \Im(F)$ является эндоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого $w = a_1 a_2 \ldots a_k \in F$, $a_i \in S_{j_i}$, имеет место равенство*

$$w\varphi = a_1\varphi_{j_1} a_2\varphi_{j_2} \ldots a_k\varphi_{j_k}, \quad \text{где} \quad \varphi_{j_i} \in \mathrm{H}_{j_i *}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Im(F)$ — эндоморфизм. Понятно, что гомоморфизмами являются также ограничения $\varphi_i \colon S_i \to F$, $i \in Y$. Допустим, что для некоторого $i \in Y$ существует такой $w \in S_i$, что $\mathrm{l}(w\varphi_i) \geqslant 2$. Если w^k — регулярный элемент полугруппы S_i, то $(w\varphi_i)^k$ — регулярный элемент $\operatorname{Im} \varphi_i$. Тогда существует $u \in \operatorname{Im} \varphi_i$, для которого $(w\varphi_i)^k u (w\varphi_i)^k = (w\varphi_i)^k$, что невозможно при условии $\mathrm{l}(w\varphi_i) \geqslant 2$.

Значит, для всех $i \in Y$ и любого $w \in S_i$ имеем $\mathrm{l}(w\varphi_i) = 1$. При этом понятно, что для каждого $i \in Y$ справедливо включение $S_i\varphi_i \subseteq S_j$ при некотором $j \in Y$. Таким образом, для всех $w = a_1 a_2 \ldots a_k \in F$, где $a_i \in S_{j_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, выполняется условие

$$(a_1 a_2 \ldots a_k)\varphi = a_1\varphi_{j_1} a_2\varphi_{j_2} \ldots a_k\varphi_{j_k}, \quad \varphi_{j_i} \in \mathrm{H}_{j_i *}.$$

Обратное утверждение очевидно. □

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 2. *Класс всех π-регулярных полугрупп является w-классом.*

Пусть $F = \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$ — свободное произведение полугрупп S_α с нулями 0_α, $\alpha \in Y$, и $F' = \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y'}$, где $Y \subseteq Y'$.

Возьмём $\varphi \in \mathrm{H}_{FF'}$ и $0_\alpha, x \in S_\alpha$. Поскольку $\varphi(0_\alpha)$ — идемпотент, то $\varphi(0_\alpha) \in S_i$ для некоторого $i \in Y'$. Тогда из условия

$$\varphi(0_\alpha) = \varphi(0_\alpha x) = \varphi(0_\alpha)\varphi(x)$$

получаем, что $\varphi(x) \in S_i$ для всех $x \in S_\alpha$.

Таким образом, для каждого $\alpha \in Y$ найдётся такой $i \in Y'$, что $\operatorname{Im}\varphi_\alpha \subseteq S_i$, и справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. *Класс всех полугрупп с нулём является w-классом.*

Пусть W — объединение всевозможных w-классов W_γ, $\gamma \in \Lambda$, $\Gamma \subseteq \Lambda$ — непустое подмножество и $D = \{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ — произвольное дизъюнктное семейство полугрупп класса W, в котором есть полугруппы w-классов W_γ, $\gamma \in \Gamma$, и не содержатся полугруппы других w-классов.

Для каждого $\gamma \in \Gamma$ обозначим через $D_\gamma = \{S_\alpha \mid \alpha \in Y_\gamma\}$ подсемейство из D всех полугрупп класса W_γ и положим

$$F = \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y}, \quad F' = \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y'}, \quad Y \subseteq Y', \quad F_\gamma = \mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y_\gamma}, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Возьмём произвольный гомоморфизм $\varphi\colon F \to F'$. Понятно, что $F_\gamma \subseteq F$ и $\varphi|_{F_\gamma} \in \mathrm{H}_{F_\gamma F'}$ для каждого $\gamma \in \Gamma$. Поскольку $Y_\gamma \subseteq Y'$ и W_γ — w-класс, то для любого $i \in Y_\gamma$ существует такой $j \in Y'$, что $\operatorname{Im}\varphi_i \subseteq S_j$, и следовательно, W — w-класс.

Таким образом, W — максимальный w-класс в классе всех полугрупп.

3. Полугруппа эндоморфизмов свободного произведения полугрупп максимального w-класса

В этом разделе доказывается, что любая полугруппа эндоморфизмов свободного произведения полугрупп максимального w-класса является сплетением полугруппы преобразований с некоторой малой категорией.

Конструкция сплетения моноида с малой категорией была введена В. Флейшером [10] как обобщение конструкции сплетения моноидов. В [13] эта конструкция была использована для описания точного представления моноида эндоморфизмов произвольного действия. В [14] было доказано, что моноид сильных эндоморфизмов произвольного неориентированного конечного графа без кратных рёбер является сплетением группы автоморфизмов канонического сильного фактор-графа с некоторой малой категорией.

Пусть K — малая категория, S — моноид с единицей 1, который действует слева на множестве объектов $X = \operatorname{Ob} K$ категории K. Положим

$$M = \bigcup_{a,b \in X} \mathrm{Mor}_K(a;b)$$

и обозначим через $\mathrm{Map}(X;M)$ множество всех отображений из X в M. Пусть

$$V = \{(s;f) \mid s \in S,\ f \in \mathrm{Map}(X;M),\ xf \in \mathrm{Mor}_K(x;sx) \text{ при } x \in X\}.$$

Для всех $(r;f),(p;g) \in V$ определим операцию

$$(r;f)(p;g) = (rp; f_p g),$$

где $x(f_p g) = (px)f\,xg$ для всех $x \in X$ и $(px)f\,xg$ — композиция морфизмов в категории K. Отметим, что композиция морфизмов в этой конструкции определяется справа налево.

Множество V с таким умножением является моноидом с единицей $(1; e)$, где отображение $e \in \mathrm{Map}(X; M)$ таково, что $xe \in \mathrm{Mor}(x; x)$ — тождественный морфизм id_x для каждого объекта x в K.

Моноид V называется сплетением моноида S с малой категорией K и обозначается через $S \,\mathrm{wr}\, K$.

Пусть $\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$ — свободное произведение полугрупп S_α, $\alpha \in Y$, взятых из класса W, C — такая малая категория, что $\mathrm{Ob}\, C = \{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ и для всех $S_\alpha, S_\beta \in \mathrm{Ob}\, C$ пусть

$$\mathrm{Mor}_C(S_\alpha; S_\beta) = \mathrm{H}_{\alpha\beta}.$$

Обозначим через $T(Y)$ подполугруппу симметрической полугруппы $\Im(Y)$, которая состоит из всех таких преобразований ξ, что для каждого $\alpha \in Y$ имеем $\mathrm{H}_{\alpha(\alpha\xi)} \neq \varnothing$. Тогда объекты $\mathrm{Ob}\, C$ такой категории задают левое $T(Y)$-действие, т. е. полугруппа преобразований $T(Y)$ действует слева на $\mathrm{Ob}\, C$ по правилу

$$\varphi S_\alpha = S_{\alpha\varphi}.$$

Таким образом, возникает конструкция сплетения

$$T(Y) \,\mathrm{wr}\, C = \{(\varphi; f) \mid \varphi \in T(Y),\ f \in \mathrm{Map}(\mathrm{Ob}\, C; \mathrm{Mor}\, C),\ S_\alpha f \in \mathrm{Mor}_C(S_\alpha; \varphi S_\alpha)\},$$

где

$$\mathrm{Mor}\, C = \bigcup_{S_\alpha, S_\beta \in \mathrm{Ob}\, C} \mathrm{Mor}_C(S_\alpha; S_\beta).$$

Далее будем использовать обозначение $S_\alpha f = f_\alpha$; следовательно, $tf_\alpha \in S_{\alpha\varphi}$ для всех $t \in S_\alpha$.

Если $\varphi \in \mathrm{End}\,\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$ и S_α, $\alpha \in Y$, есть полугруппы максимального w-класса, то через φ^* будем обозначать преобразование на множестве Y, которое индуцируется эндоморфизмом φ, т. е.

$$\varphi^* \colon Y \to Y, \quad \alpha \mapsto \alpha, \quad \varphi^* = \beta, \quad \text{если} \quad S_\alpha \varphi \subseteq S_\beta.$$

Описание эндоморфизмов свободного произведения полугрупп класса W даёт следующая лемма.

Лемма 4. *Преобразование φ свободного произведения F полугрупп S_α, $\alpha \in Y$, максимального w-класса является эндоморфизмом тогда и только тогда, когда для любого $w = a_1 a_2 \ldots a_k \in F$, $a_i \in S_{j_i}$,*

$$w\varphi = a_1 \varphi_{j_1} a_2 \varphi_{j_2} \ldots a_k \varphi_{j_k}, \quad \text{где} \quad \varphi_{j_i} \in \mathrm{H}_{j_i *}, \quad 1 \leqslant i \leqslant k.$$

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 5. *Полугруппа эндоморфизмов $\mathrm{End}\,\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$ свободного произведения $\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$ полугрупп S_α, $\alpha \in Y$, класса W и сплетение $T(Y) \,\mathrm{wr}\, C$ полугруппы преобразований $T(Y)$ с малой категорией C являются изоморфными.*

Доказательство. Определим отображение из полугруппы $\operatorname{End}\operatorname{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$ в сплетение $T(Y)\ \mathrm{wr}\ C$ по правилу

$$\xi\colon \varphi\mapsto(\varphi^*;f),\quad \text{где}\quad f\colon S_\alpha\mapsto\varphi|_{S_\alpha}.$$

Инъективность ξ очевидна. Возьмём $(\varphi^*;f)\in T(Y)\ \mathrm{wr}\ C$ и определим преобразование λ множества $\bigcup\limits_{\alpha\in Y}S_\alpha$ следующим образом:

$$x\lambda=xf_\alpha,\quad x\in S_\alpha,$$

для всех $x\in\bigcup\limits_{\alpha\in Y}S_\alpha$. Тогда λ единственным образом продолжается до эндоморфизма $\lambda'\in\operatorname{End}\operatorname{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$ так, что $\lambda'\xi=(\varphi^*;f)$.

Для любых элементов $\varphi,\psi\in\operatorname{End}\operatorname{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$ имеем

$$\begin{aligned}&(\varphi\psi)\xi=\big((\varphi\psi)^*;\mu\big),\quad \text{где}\quad \mu\colon S_\alpha\mapsto(\varphi\psi)|_{S_\alpha},\\&\quad\varphi\xi=(\varphi^*;f),\quad f\colon S_\alpha\mapsto\varphi|_{S_\alpha},\quad \psi\xi=(\psi^*;g),\quad g\colon S_\alpha\mapsto\psi|_{S_\alpha},\\&\quad\varphi\xi\,\psi\xi=(\varphi^*;f)(\psi^*;g)=(\varphi^*\psi^*;f_{\psi^*}g).\end{aligned}$$

Понятно, что $(\varphi\psi)^*=\varphi^*\psi^*$. Более того, для всех $S_\alpha\in\operatorname{Ob}C$

$$S_\alpha\mu=(\varphi\psi)|_{S_\alpha}=\varphi|_{S_\alpha\psi}\psi|_{S_\alpha}=\varphi|_{S_{\alpha\psi^*}}\psi|_{S_\alpha}=f_{\alpha\psi^*}g_\alpha=(f_{\psi^*}g)_\alpha=S_\alpha(f_{\psi^*}g).$$

Таким образом, $f_{\psi^*}g=\mu$, и значит, $\operatorname{End}\operatorname{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}\cong T(Y)\ \mathrm{wr}\ C$. $\square$

Пусть $\operatorname{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$ — свободное произведение конечного числа конечных полугрупп. Поскольку в любой конечной полугруппе существует по крайней мере один идемпотент, то $\mathrm{H}_{\alpha\beta}\neq\varnothing$ при любых $\alpha,\beta\in Y$, и следовательно, полугруппа $T(Y)$ совпадает с $\Im(Y)$. Тогда по теореме 5 имеет место изоморфизм

$$\operatorname{End}\operatorname{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}\cong\Im(Y)\ \mathrm{wr}\ C.$$

Возьмём $\varphi=(\varphi^*;f)\in\operatorname{End}\operatorname{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}$, где $\varphi^*\in\Im(Y)$. Так как отображение f задаётся по правилу $S_\alpha f=S_{\alpha\varphi^*}$, то его можно выбрать

$$\prod_{\alpha\in Y}|\mathrm{H}_{\alpha\,\alpha\varphi^*}|$$

способами. Таким образом, мы получаем следствие из теоремы 5.

Следствие 6. *Пусть $\{S_\alpha\mid\alpha\in Y\}$ — конечное дизъюнктное семейство конечных полугрупп. Тогда*

$$|\operatorname{End}\operatorname{Fr}[S_\alpha]_{\alpha\in Y}|=\sum_{\xi\in\Im(Y)}\prod_{\alpha\in Y}|\mathrm{H}_{\alpha\,\alpha\xi}|.$$

Рассмотрим другую конструкцию для описания точного представления полугруппы эндоморфизмов свободного произведения полугрупп максимального w-класса.

Пусть $D_S=\{S_\alpha\mid\alpha\in Y\}$ — дизъюнктное семейство полугрупп класса W, $S=\bigcup\limits_{\alpha\in Y}S_\alpha$. Положим $\operatorname{Mor}^0C=\operatorname{Mor}C\cup\{0\}$, где $0\notin\operatorname{Mor}C$, и определим на этом множестве следующую операцию:

$$\varphi\psi = \begin{cases} \varphi \circ \psi, & \varphi \neq 0 \neq \psi \text{ и композиция } \varphi,\ \psi \text{ определена},\\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $\varphi \circ \psi$ — композиция морфизмов. Понятно, что множество $\mathrm{Mor}^0 C$ есть полугруппа относительно этой операции, при этом с точностью до изоморфизма она содержится в полугруппе B_S всех бинарных отношений на S.

Пусть T — произвольная полугруппа, $G(T)$ — множество всех её подмножеств. Полагая $AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$ для всех $A, B \subseteq T$, получаем полугруппу на множестве $G(T)$, которая называется глобальной надполугруппой полугруппы T.

Множество всех элементов, которые берутся в точности по одному из каждого блока разбиения $D_X = \{X_i \mid i \in I\}$ множества X, называется трансверсалью этого разбиения.

Для разбиения $L_{\mathrm{Mor}^0 C} = \{\mathrm{H}_{i*} \mid i \in Y\} \cup \{\{0\}\}$, где $\mathrm{H}_{i*} = \bigcup\limits_{j \in Y} \mathrm{H}_{ij}$, полугруппы морфизмов $\mathrm{Mor}^0 C$ множество всех его трансверсалей обозначим через $T(L_{\mathrm{Mor}^0 C})$.

Лемма 7. *Множество $T(L_{\mathrm{Mor}^0 C})$ является подполугруппой глобальной надполугруппы $\mathrm{Gl}(\mathrm{Mor}^0 C)$ полугруппы $\mathrm{Mor}^0 C$.*

Доказательство. Пусть $A, B \in T(L_{\mathrm{Mor}^0 C})$. Поскольку

$$\{\mathrm{Dom}\,\eta \mid \eta \in B,\ \eta \neq 0\} = D_S,$$

то для любого $\varphi \in A$, $\varphi \neq 0$, найдётся единственный элемент $\psi \in B$, $\psi \neq 0$, такой что $\mathrm{Im}\,\varphi \subseteq \mathrm{Dom}\,\psi$. Отсюда следует, что $\varphi\psi \neq 0$. При этом в тех случаях, когда φ то же самое, а $f \in B$ такое, что $f \neq \psi$, будем иметь $\varphi f = 0$.

Таким образом, учитывая, что $0 \in AB$, $\{\mathrm{Dom}\,\eta \mid \eta \in A,\ \eta \neq 0\} = D_S$ и $\mathrm{Dom}\,\varphi = \mathrm{Dom}\,\varphi\psi$, когда $\varphi\psi \neq 0$, получаем, что $AB \in T(L_{\mathrm{Mor}^0 C})$. Следовательно, $T(L_{\mathrm{Mor}^0 C})$ — подполугруппа полугруппы $\mathrm{Gl}(\mathrm{Mor}^0 C)$. □

Другое точное представление полугруппы эндоморфизмов свободного произведения полугрупп максимального w-класса даёт следующая теорема.

Теорема 8. *Для любого дизъюнктного семейства полугрупп S_α, $\alpha \in Y$, класса W имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{End}\,\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y} \cong T(L_{\mathrm{Mor}^0 C}).$$

Доказательство. Изоморфное отображение ξ между полугруппами $\mathrm{End}\,\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$ и $T(L_{\mathrm{Mor}^0 C})$ задаётся по правилу

$$f\xi = \{f|_{S_\alpha} : \alpha \in Y\} \cup \{0\}$$

для всех $f \in \mathrm{End}\,\mathrm{Fr}[S_\alpha]_{\alpha \in Y}$. □

Рассмотрим вопрос определяемости свободных произведений полугрупп максимального w-класса своими полугруппами эндоморфизмов.

Предложение 9. *Свободные произведения полугрупп класса W не определяются своими полугруппами эндоморфизмов.*

Доказательство. Пусть $D_1 = \{L_\alpha \mid \alpha \in Y_1\}$ и $D_2 = \{R_\beta \mid \beta \in Y_2\}$ — два произвольных дизъюнктных семейства неодноэлементных полугрупп левых и правых нулей соответственно. При этом множества Y_1, Y_2 являются равномощными и при подходящей биекции $\xi\colon Y_1 \to Y_2$ полугруппы L_α и $R_{\alpha\xi}$, $\alpha \in Y_1$, также равномощны.

Обозначим через C_1, C_2 малые категории, объектами которых являются семейства D_1, D_2, а морфизмами — гомоморфизмы. В этом случае $\mathrm{H}_{\alpha\beta} = \mathrm{Map}(L_\alpha; L_\beta)$ и $\mathrm{H}_{ij} = \mathrm{Map}(R_i; R_j)$ при любых $\alpha, \beta \in Y_1$ и $i, j \in Y_2$. Тогда $T(Y_\gamma) = \Im(Y_\gamma)$, $\gamma \in \{1, 2\}$, и $C_1 \cong C_2$, и следовательно, по теореме 5

$$\mathrm{End}\,\mathrm{Fr}[L_\alpha]_{\alpha \in Y_1} \cong \mathrm{End}\,\mathrm{Fr}[R_\beta]_{\beta \in Y_2}.$$

Однако полугруппы $\mathrm{Fr}[L_\alpha]_{\alpha \in Y_1}$ и $\mathrm{Fr}[R_\beta]_{\beta \in Y_2}$ не являются изоморфными. □

Литература

[1] Важенин Ю. М. Об элементарной определяемости и элементарной характеризуемости классов рефлексивных графов // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1972. — Т. 7. — С. 3—11.

[2] Глускин Л. М. Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1959. — Т. 23. — С. 841—870.

[3] Глускин Л. М. Идеалы полугрупп // Мат. сб. — 1961. — Т. 55. — С. 421—448.

[4] Глускин Л. М. Об эндоморфизмах модулей // Алгебра и математическая логика. — Киев: КГУ, 1966. — С. 3—20.

[5] Жучок А. В. Полугруппы эндоморфизмов свободных произведений // Вiсник Донецького ун-ту. Сер. А. Природничi науки. — 2006. — Вип. 2. — С. 7—10.

[6] Пуусемп П. Полугруппы эндоморфизмов обобщённых групп кватернионов // Учёные записки Тартуского ун-та. — 1976. — Т. 390. — С. 84—103.

[7] Усенко В. М. Эндоморфизмы вполне 0-простых полугрупп // Вопросы алгебры. — 1998. — Т. 13. — С. 92—119.

[8] Усенко В. М. Эндоморфизмы свободных групп // Вопросы алгебры. — 1999. — Т. 14. — С. 166—172.

[9] Усенко В. М. Полугруппы эндоморфизмов свободных групп // Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. — 2000. — Т. 3 (16). — С. 182—185.

[10] Флейшер В. О сплетении моноидов с категориями // Тр. Акад. наук Эстонской ССР. — 1986. — Т. 35. — С. 237—243.

[11] Шнеперман Л. Б. Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств // Учёные записки ЛГПУ им. А. И. Герцена. — 1962. — Т. 238. — С. 21—37.

[12] Corner A. L. Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring // Proc. London Math. Soc. — 1963. — Vol. 13, no. 52. — P. 687—710.

[13] Fleischer V., Knauer U. Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories // Semigroups, Theory and Applications. Proc. Conf.

Oberwolfach/FRG 1986. — Berlin: Springer, 1988. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1320). — P. 84—96.

[14] Knauer U., Nieporte M. Endomorphisms of graphs. I. The monoid of strong endomorphisms // Arch. Math. — 1989. — Vol. 52. — P. 607—614.

[15] Mazorchuk V. Endomorphisms of $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{PB}_n$, and $\mathfrak{C}_n$ // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30. — P. 3489—3513.

[16] Puusemp P. A characterization of divisible and torsion Abelian groups by their endomorphism semigroups // Algebras Groups Geom. — 1999. — Vol. 16. — P. 183—193.

[17] Schein B. M., Teclezghi B. Endomorphisms of finite symmetric inverse semigroups // J. Algebra. — 1997. — Vol. 198. — P. 300—310.

[18] Schein B. M., Teclezghi B. Endomorphisms of finite full transformation semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126. — P. 2579—2587.

[19] Zhuchok A. V. Endomorphisms semigroups of orthogonal sum and band of semigroups // XII Int. Sci. Kravchuk Conf. Vol. I. — Kiev, 2008.

[20] Zhuchok Y. V. Endomorphism semigroups of 2-nilpotent binary relations // J. Math. Sci. — 2010. — Vol. 164, no. 1. — P. 49—55.