

Адекватное в нуле кольцо является кольцом со свойством замены

Б. В. ЗАБАВСКИЙ

*Львовский национальный университет
им. Ивана Франко*
e-mail: b_zabava@ukr.net

С. И. БИЛЯВСКАЯ

*Львовский национальный университет
им. Ивана Франко*
e-mail: zosia_meliss@yahoo.co.uk

УДК 512.552

Ключевые слова: адекватный элемент, адекватное кольцо, кольцо со свойством замены, чистое кольцо, кольцо идемпотентного стабильного ранга 1.

Аннотация

Показано, что если R — коммутативное кольцо, в котором 0 является адекватным элементом, то R — кольцо со свойством замены, а также что адекватное в нуле кольцо является кольцом со свойством замены. Кроме того, получено новое описание адекватных колец, что является ответом на вопросы, поставленные М. Ларсеном, У. Льюисом и Т. Шоресом.

Abstract

B. V. Zabavsky, S. I. Bilavska, Every zero adequate ring is an exchange ring, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 3, pp. 61–66.

It is proved that if R is a commutative ring in which zero is an adequate element, then R is an exchange ring and that every zero adequate ring is an exchange ring. There is a new description of adequate rings; this is an answer to questions formulated by Larsen, Lewis, and Shores.

Адекватные кольца были введены О. Хелмером как класс колец, над которыми произвольная матрица диагонализуется, причём кольцо не является нётеровым [5]. Структурное строение таких колец мало изучено. В [6] поставлена задача изучения структурного строения таких колец. Данная работа устанавливает связь адекватных и везде адекватных колец с кольцами со свойством замены.

Все кольца предполагаются коммутативными с $1 \neq 0$. Кольцо R называется чистым, если каждый его элемент является суммой идемпотента и обратимого элемента [7]. Кольцо R называется кольцом со свойством замены, если для

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 3, с. 61–66.

© 2011/2012 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

любого элемента $a \in R$ существует такой идемпотент $e \in aR$, что $1 - e \in (1 - a)R$ [7]. Кольцо R является кольцом идемпотентного стабильного ранга 1, если из условия $aR + bR = R$ для произвольных элементов $a, b \in R$ следует существование такого идемпотента $e \in R$, что $a + be$ — обратимый элемент кольца R [2].

Если элемент a кольца R является делителем элемента b кольца R , обозначим это через $a \mid b$. Множество всех минимальных простых идеалов кольца R обозначим через $\min R$.

Теорема 1 [4, 7]. Пусть R — коммутативное кольцо. Тогда следующие свойства эквивалентны:

- 1) R — кольцо со свойством замены;
- 2) R — чистое кольцо;
- 3) R — кольцо идемпотентного стабильного ранга 1.

Элемент a кольца R называется адекватным, если для любого элемента b кольца R элемент a можно представить в виде произведения $a = rs$, где $rR + bR = R$ и для произвольного необратимого делителя s' элемента s имеем $s'R + bR \neq R$ [2, 3]. Кольцо Безу — это кольцо, в котором каждый конечно порождённый идеал является главным.

Коммутативное кольцо Безу, в котором произвольный ненулевой элемент является адекватным, называется адекватным кольцом [5]. Кольцо, в котором произвольный элемент (в частности, нуль) является адекватным, называется адекватным в нуле кольцом [2, 6]. Очевидными примерами адекватных в нуле колец могут служить регулярное кольцо и кольцо нормирования [2, 6]. Кольцо целых чисел является адекватным, но не является, очевидно, адекватным в нуле. Кольцо R называется РМ-кольцом, если произвольный простой идеал кольца R содержится в единственном максимальном идеале. РМ*-кольцом назовём кольцо, в котором произвольный ненулевой простой идеал содержится в единственном максимальном идеале кольца.

Поскольку мы изучаем кольца, в которых 0 является адекватным элементом, приведём конструкции, которые позволяют строить примеры таких колец.

Теорема 2. Пусть a — адекватный элемент коммутативного кольца Безу. Тогда $\bar{0}$ — адекватный элемент фактор-кольца $\bar{R} = R/aR$.

Доказательство. Пусть $\bar{b}$ — произвольный элемент фактор-кольца R/aR и b — прообраз элемента $\bar{b}$ при каноническом вложении $R \rightarrow \bar{R}$. Поскольку a — адекватный элемент кольца R , то согласно определению адекватного элемента существуют такие элементы $r, s \in R$, что $a = rs$, где $rR + bR = R$ и $s'R + bR \neq R$ для некоторого необратимого делителя s' элемента s . Тогда $\bar{r}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$ и $\bar{s}'\bar{R} + \bar{b}\bar{R} \neq \bar{R}$. Пусть $\bar{t}$ — необратимый в $\bar{R}$ делитель элемента $\bar{s}$, где $\bar{s}$ — образ элемента s при каноническом вложении $R \rightarrow \bar{R}$. Тогда существует $k \in R$, такой что $t \mid (s + ak)$.

Покажем, что $sR + tR \neq R$. Предположим, что $sR + tR = R$. Поскольку $t \mid (s + ak)$, то $s + ak = t\beta$ для некоторого элемента $\beta \in R$. Из равенств $s + rsk = t\beta$, $s(1 + rk) = t\beta$ и $sR + tR = R$, следует, что $t \mid (1 + rk)$, т. е. $tR + rR = R$. Поскольку $tR + sR = R$ и $tR + rR = R$, то $tR + rsR = R$, т. е. $tR + aR = R$. А это значит, что образ элемента t при каноническом вложении $R \rightarrow \bar{R}$ является обратимым элементом в $\bar{R}$, что противоречит выбору элемента $\bar{t}$. Таким образом, мы доказали, что $sR + tR \neq R$, $sR + tR = uR$, где u — необратимый элемент. А это значит, что $\bar{u}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} \neq \bar{R}$. Поскольку $\bar{u}$ является делителем элемента $\bar{t}$, то $\bar{t}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} \neq \bar{R}$. Таким образом, мы доказали, что $\bar{0} = \bar{r}\bar{s}$ является адекватным элементом кольца $\bar{R}$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 3. Пусть R — коммутативное кольцо Безу, в котором 0 является адекватным элементом. Тогда R — кольцо идемпотентного стабильного ранга 1.

Доказательство. Пусть $bR + cR = R$. Поскольку 0 является адекватным элементом кольца R , то $0 = rs$, где $rR + bR = R$ и $s'R + bR \neq R$ для произвольного необратимого делителя s' элемента s . Заметим, что $rR + sR = R$. Действительно, если бы $rR + sR = hR \neq R$, то согласно определению адекватности 0 мы имели бы, с одной стороны, что $hR + bR = R$ (h — делитель элемента r), а с другой стороны — что $hR + bR \neq R$ (h — необратимый делитель элемента s), что невозможно. Значит, $rR + sR = R$, поэтому существуют элементы u, v кольца R , такие что $ru + sv = 1$. Заметим, что элементы ru и sv — идемпотенты кольца R . Действительно, $(ru)^2 = ru(1 - sv) = ru - rusv = ru$. Аналогично доказывается, что $(sv)^2 = sv$.

Обозначим $ru = e$. Покажем, что $b + ce$ — обратимый элемент кольца R . Действительно, пусть $(b + ce)R = hR \neq R$. Рассмотрим $hR + rR = tR$. Если t — необратимый элемент кольца R , то, поскольку $(b + ce)R \subset hR \subset tR$, получаем, что $bR \subset tR$, что невозможно, поскольку $rR \subset tR$ и $bR \subset tR$, но $bR + rR = R$. Отсюда следует, что $hR + rR = R$.

Докажем, что $hR + sR = R$. Предположим, что $sR + hR = tR \neq R$. Поскольку t — необратимый делитель элемента s , то согласно определению элемента s имеем, что $tR + bR = kR \neq R$. С другой стороны, $(b + ce)R = hR$ и $eR + sR = R$, поэтому имеем $eR + tR = R$, отсюда следует, что $eR \subset kR$. Но это невозможно, поскольку $bR \subset kR$, но $bR + cR = R$. Значит, наше предположение неверно, поэтому $sR + hR = R$.

Поскольку $rR + hR = R$, имеем, что $(rs)R + hR = R$. Поэтому $0 = rs$, а это значит, что h — необратимый элемент кольца R . Теорема доказана. $\square$

Из теоремы 1 выводим следующий результат.

Теорема 4. Пусть R — коммутативное кольцо Безу, в котором 0 является адекватным элементом. Тогда

- 1) R является чистым кольцом;
- 2) R является кольцом со свойством замены;
- 3) R является кольцом идемпотентного стабильного ранга 1.

Поскольку везде адекватном кольце элемент 0 является адекватным элементом, то как следствие теорем 3, 4 имеем следующий результат.

Теорема 5. *Адекватное в нуле кольцо является кольцом со свойством замены.*

Поскольку кольцо со свойством замены является РМ-кольцом [4], то имеем следующий результат.

Теорема 6. *Коммутативное кольцо Безу, в котором 0 является адекватным элементом, является РМ-кольцом.*

Теорема 7. *Адекватное в нуле кольцо является РМ-кольцом.*

Из теорем 2, 4 выводим следующие результаты.

Теорема 8. *Пусть R — коммутативное кольцо Безу и a — адекватный элемент кольца R . Тогда имеют место следующие утверждения:*

- 1) R/aR — кольцо со свойством замены;
- 2) R/aR — чистое кольцо;
- 3) R/aR — кольцо идемпотентного стабильного ранга 1;
- 4) R/aR — РМ-кольцо.

Возникает вопрос: если R — коммутативное кольцо Безу, в котором 0 является адекватным элементом, будет ли R везде адекватным кольцом? В случае когда $\min R$ — конечное множество, получен положительный ответ на этот вопрос, т. е. имеет место следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть R — коммутативное кольцо Безу, в котором 0 является адекватным элементом, и $\min R$ — конечное множество. Тогда R — адекватное в нуле кольцо.*

Доказательство. Пусть $P_1, P_2, \dots, P_n$ — все минимальные простые идеалы кольца R . Обозначим $P(R) = \bigcap_{i=1}^n P_i$ пересечение всех минимальных простых идеалов. Поскольку R — арифметическое кольцо, то согласно [1] $P_i + P_j = R$ для некоторых $i, j, i \neq j$. Согласно китайской теореме об остатках имеем

$$R/P(R) = R/P_1 \oplus R/P_2 \oplus \dots \oplus R/P_n.$$

Поскольку согласно теореме 6 R является РМ-кольцом, то R/P_i — локальные области для произвольного $i = 1, 2, \dots, n$. Поскольку $R/P(R)$ — ортогонально конечное кольцо, то $\bar{1} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \dots + \bar{e}_n$, где $\bar{e}_i^2 = \bar{e}_i$, $\bar{e}_i \bar{e}_j = \bar{0}$, $i \neq j$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, n$. Поскольку $P(R)$ — ниль-радикал кольца R , то R является ортогонально конечным [6]. А это значит, что существуют такие локальные ортогональные идемпотенты $e_1, e_2, \dots, e_n \in R$, что $e_1 + e_2 + \dots + e_n = 1$. Следовательно,

$$R = e_1 R \oplus e_2 R \oplus \dots \oplus e_n R,$$

где $e_i R$ — локальные кольца Безу, т. е. кольца нормирования [6]. Согласно [2, 6] R — адекватное в нуле кольцо. Теорема доказана. $\square$

Пусть R — коммутативная область Безу и $\bar{0}$ — адекватный элемент фактор-кольца R/aR . Будет ли элемент a адекватным элементом области R ? Ответом служит следующая теорема.

Теорема 10. Пусть R — коммутативная область Безу. Если $\bar{0}$ — адекватный элемент фактор-кольца R/aR , то a — адекватный элемент области R .

Доказательство. Обозначим $\bar{R} = R/aR$. Поскольку нулевой элемент адекватный, существуют такие элементы $\bar{r}, \bar{s} \in \bar{R}$, что $\bar{0} = \bar{r}\bar{s}$, и для любого элемента $\bar{b} \in \bar{R}$ имеем $\bar{r}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$. Кроме того, для произвольного необратимого делителя $\bar{s}'$ элемента $\bar{s}$ имеем, что $\bar{s}'\bar{R} + \bar{b}\bar{R} \neq \bar{R}$. Поскольку $\bar{r}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$, то существуют элементы $t, u, v \in R$, такие что $ru + bv = 1 + at$ для произвольных прообразов r, b элементов $\bar{r}, \bar{b}$ соответственно при каноническом вложении $R \rightarrow \bar{R}$. Пусть $aR + rR = \delta R$. Тогда $a = \delta a_0$, $r = \delta r_0$ для некоторых элементов a_0, r_0 кольца R , причём $a_0R + r_0R = R$. Отсюда следует, что $\delta R + bR = R$ и $ru - at + bv = 1$. Поскольку $\bar{0} = \bar{r}\bar{s}$, то $rs = a\alpha$ для некоторого элемента α области R . Тогда $\delta r_0s = \delta a_0\alpha$. Поскольку R — область, то $r_0s = a_0\alpha$. Так как $r_0R + a_0R = R$, существуют такие элементы t, k кольца R , что $r_0t + a_0k = 1$. А это значит, что $r_0st + a_0sk = s$, т. е. $a_0\beta = s$ для некоторого элемента β области R . Значит, $a = \delta a_0$, где $\delta R + bR = R$ и $a_0 \mid s$.

Пусть j — необратимый делитель элемента a_0 , такой что $jR + bR = R$. Отсюда следует, что $\bar{j}\bar{R} + \bar{b}\bar{R} = \bar{R}$, а это противоречит условию, что $\bar{j}$ — необратимый делитель элемента $\bar{s}$. (Отметим, что в $\bar{R}$ обратимыми элементами являются элементы, прообразы которых при каноническом вложении $R \rightarrow \bar{R}$ взаимно просты с a .) Полученное противоречие с тем, что $j \mid a_0$, показывает, что $a = \delta a_0$, где $\delta R + bR = R$ и $a'_0R + bR \neq R$ для произвольного необратимого делителя a'_0 элемента a_0 . Учитывая тот факт, что b — произвольный элемент области R , получаем, что a — адекватный элемент области R . Теорема доказана. $\square$

Как очевидное следствие получаем следующий результат.

Теорема 11. Пусть R — коммутативная область Безу, в которой для произвольного необратимого и ненулевого элемента a фактор-кольцо R/aR является кольцом, в котором $\bar{0}$ — адекватный элемент. Тогда R — адекватная область.

Как очевидные следствия теорем 9 и 10 получаем следующие результаты.

Теорема 12. Пусть R — коммутативная область Безу и a — ненулевой и необратимый элемент области R , такой что R/aR — кольцо со свойством замены, причём множество $\min(R/aR)$ конечное. Тогда a — адекватный элемент области R .

Теорема 13. Пусть R — коммутативная область Безу, в которой для произвольного ненулевого и необратимого элемента a области R множество $\min(R/aR)$ конечное. Тогда R — адекватная область тогда и только тогда, когда R является PM^* -кольцом.

Литература

- [1] Бурбаки Н. Коммутативная алгебра. — М.: Мир, 1971.
- [2] Забавский Б. В. Адекватные кольца элементарных делителей с конечным числом минимальных простых идеалов // Алгебра и топология. — Львов: ЛГУ, 1996. — С. 74—78.
- [3] Забавский Б. В., Комарницкий М. Я. Об адекватных кольцах // Вестн. Львовского унив. — 1988. — С. 39—43.
- [4] Camillo V., Yu H. P. Exchange rings, units and idempotents // Commun. Algebra. — 1994. — Vol. 22, no. 12. — P. 4737—4749.
- [5] Helmer O. The elementary divisor for certain rings without chain condition // Bull. Am. Math. Soc. — 1943. — Vol. 49, no. 2. — P. 225—236.
- [6] Larsen M. D., Lewis W. J., Shores T. S. Elementary divisor rings and finitely presented modules // Trans. Amer. Math. Soc. — 1974. — Vol. 187. — P. 231—248.
- [7] Nicholson W. K. Lifting idempotents and exchange rings // Trans. Am. Math. Soc. — 1977. — Vol. 229. — P. 269—278.