Чисто проективные модули над исключительными цепными некогерентными кольцами

Г. Е. ПУНИНСКИЙ
Белорусский государственный университет, Беларусь
e-mail: punins@mail.ru

УДК 512.553.1+512.553.5

Ключевые слова: чисто проективный модуль, исключительное цепное кольцо, когерентное кольцо, спектр Циглера.

Аннотация

Мы классифицируем чисто проективные модули над произвольным исключительным цепным некогерентным кольцом R. В частности, мы показываем, что существует чисто проективный модуль над R, не разлагающийся в прямую сумму неразложимых модулей, но каждый чисто проективный модуль содержит неразложимое прямое слагаемое.

Abstract

G. E. Puninski, Pure projective modules over exceptional uniserial noncoherent rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 3, pp. 67—84.

We classify pure projective modules over an arbitrary exceptional chain noncoherent ring R. In particular, we show that there exists a pure projective R-module admitting no indecomposable decomposition, but every pure projective module contains an indecomposable direct summand.

1. Введение

Классическая теорема Дрозда—Уорфилда (см. [1,22]) утверждает, что любой конечно представимый модуль над цепным кольцом R разлагается в прямую сумму циклически представимых (следовательно, цепных) модулей R/rR, $r \in R$. Хотя в общем случае модули R/rR имеют нелокальные кольца эндоморфизмов (следовательно, теорема Крулля—Шмидта неприменима), Г. Е. Пунинский [2] доказал, что такое разложение единственно (с точностью до порядка прямых слагаемых).

По теореме Уорфилда [22] чисто проективные модули могут быть определены как прямые слагаемые прямых сумм конечно представимых модулей. Классификация таких модулей над произвольным цепным кольцом R пока представляется очень сложной задачей. Если кольца эндоморфизмов всех модулей R/rR, $r \in R$, локальны (см. [2] о характеризации таких колец), то расширенный вариант

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 3, с. 67—84.

теоремы Крулля—Шмидта (см. [10, следствие 2.5]) утверждает, что любой чисто проективный модуль разлагается в прямую сумму конечно представимых (цепных) модулей. Например, этот результат верен, если цепное кольцо коммутативно или нётерово.

Первый пример чисто проективного модуля над цепным кольцом, который не разлагается в прямую сумму конечно представимых модулей, был построен Г. Е. Пунинским в [16]. А именно, он доказал, что если R — почти простая цепная область, то существует счётно порождённый цепной чисто проективный R-модуль V. Более того, любой чисто проективный R-модуль разлагается в прямую сумму копий модулей R_R, R/rR (тип изоморфизма последнего модуля не зависит от выбора ненулевого необратимого элемента $r \in R$) и V. Как мы видим, категория чисто проективных модулей над почти простой цепной областью нетривиальна, но допускает вполне удовлетворительное описание. Например, в этом случае любой чисто проективный модуль разлагается в прямую сумму неразложимых (даже цепных) модулей.

Первый пример чисто проективного модуля W над цепным кольцом, который не разлагается в прямую сумму неразложимых модулей, был построен Г. Е. Пунинским в [17]. Существование такого модуля было доказано для любого исключительного цепного когерентного кольца R. Более того, как вытекает из результатов Г. Е. Пунинского [4] и П. Пршигоды [14], любой чисто проективный R-модуль разлагается в прямую сумму копий модулей R_R, R/rR, V и W, хотя это разложение и не единственно.

В настоящей работе мы перенесём последние результаты на исключительные цепные некогерентные кольца. Заметим, что даже существование таких колец долго оставалось открытой проблемой, (она была решена Н. И. Дубровиным [7]), и первые примеры были построены как фактор-кольца цепных областей, ассоциированных с право упорядоченными группами. В общем случае такие кольца возникают из исключительных интервалов в решётке простых идеалов цепного кольца.

Хотя полученные результаты аналогичны случаю исключительных цепных когерентных колец и доказательства во многом сходны с [4, 17], их довольно тонкая модификация требует больших усилий. В частности, по сравнению с [17], мы упрощаем многие аргументы, используя теорию размерности прямых слагаемых прямых сумм цепных модулей, недавно развитую А. Факкини и П. Пршигодой [11]. Мы рассматриваем настоящую статью как ещё один (небольшой, но важный) шаг к будущей классификации чисто проективных модулей над произвольным цепным кольцом.

2. Базисные факты

Кольцо R называется *цепным справа*, если правые идеалы R линейно упорядочены по включению. *Цепное слева* кольцо определяется аналогично. Наконец, кольцо называется *цепным*, если оно цепное слева и цепное справа. Заметим, что любое цепное кольцо локально: оно содержит наибольший идеал Jac, состоящий из необратимых элементов. Для цепного кольца R включение главных правых идеалов $aR \subseteq bR$ имеет место, если и только если $a = bc$ для некоторого $c \in R$; это включение строгое (для ненулевых a, b) только в случае $c \in \mathrm{Jac}$. Классическим примером цепного кольца является локализация $\mathbb{Z}_{(p)}$ кольца целых чисел по простому идеалу $p\mathbb{Z}$; это кольцо коммутативно и нётерово. В этой статье мы рассмотрим кольца, которые бесконечно далеки от этого классического примера.

Напомним, что кольцо R называется *первичным*, если для любых $0 \neq a, b \in R$ существует такой элемент $c \in R$, что $acb \neq 0$. Простейшим примером первичного кольца является *область*: $ab \neq 0$ для любых $0 \neq a, b \in R$. Как обычно, мы говорим, что идеал P кольца R *первичен*, если фактор-кольцо R/P первично, и *вполне первичен*, если R/P — область.

Цепное кольцо R называется *исключительным*, если оно первично, не область и Jac (радикал Джекобсона) — единственный нетривиальный (т. е. ненулевой собственный) идеал R. Из этого сразу же вытекает, что Jac идемпотентен: $\mathrm{Jac}^2 = \mathrm{Jac}$. Конечно, такое кольцо не является ни нётеровым, ни артиновым (иначе Jac был бы нильпотентным). Более того, R не имеет размерности Крулля: если $aR \subset bR$ — ненулевые главные правые идеалы, то существует такой элемент $c \in R$, что $aR \subset cR \subset bR$ (аналогичное утверждение верно и для главных левых идеалов). Действительно, иначе, записывая $a = bg$, $g \in \mathrm{Jac}$, мы видим, что $g \in \mathrm{Jac} \setminus \mathrm{Jac}^2$, противоречие.

Чтобы подчеркнуть степень некоммутативности, которой обладает любое исключительное цепное кольцо, мы приведём следующие факты.

Факт 1 (см. [15, лемма 14.16]). Пусть R — исключительно цепное кольцо.

1. $\mathrm{Jac}(R) = Ra + bR$ для любых $0 \neq a, b \in R$.
2. Если $0 \neq a, b \in \mathrm{Jac}$, то существуют обратимые элементы $u, v \in R$, такие что $uav = b$, и существуют $g, h \in \mathrm{Jac}$, такие что $gah = b$.

Заметим, что в пункте 1 утверждается, что левые и правые идеалы R находятся в «общем» положении, а в пункте 2 — что Jac является 1-*простым* радикальным кольцом. Полезным следствием второго утверждения является следующий факт.

Факт 2. Пусть R — исключительное цепное кольцо.

1. Если $0 \neq a, b \in \mathrm{Jac}$, то модули R/aR и R/bR изоморфны.
2. Любой конечно представимый R-модуль изоморфен (конечной) прямой сумме модулей R и R/aR, и это представление единственно (с точностью до перестановки слагаемых).

Доказательство. Действительно, ввиду [15, предложение 2.21] модули R/aR и R/bR изоморфны, если и только если главные двусторонние идеалы RaR и RbR совпадают. Тогда утверждение 1 вытекает из пункта 2 факта 1.

Пункт 2 (кроме единственности) следует из теоремы Дрозда—Уорфилда [1], а единственность разложения — из [15, предложение 2.20]. □

Напомним, что кольцо R называется *fp-инъективным справа*, если модуль R_R инъективен относительно конечно порождённых правых идеалов, т. е. любой морфизм $I \to R_R$, где I — конечно порождённый правый идеал, задан левым умножение на элемент кольца. Левая fp-инъективность определяется аналогично. Назовём кольцо *fp-инъективным*, если оно fp-инъективно слева и справа. *Правый сингулярный идеал* $\mathrm{Sing_r}(R)$ кольца R определяется как множество элементов $r \in R$, *правый аннулятор* $\mathrm{ann}(r)(R) = \{s \in R \mid rs = 0\}$ которых существенен (как правый идеал). Заметим, что $\mathrm{Sing_r}(R)$ — двусторонний идеал и то же верно для левого сингулярного идеала $\mathrm{Sing_l}(R)$.

Поскольку для цепного кольца любой ненулевой правый идеал существенен, его правый сингулярный идеал совпадает с множеством левых делителей нуля: $a \in \mathrm{Sing_r}(R)$, если и только если $ab = 0$ для некоторого $0 \neq b \in R$.

Факт 3. Любое исключительное цепное кольцо fp-инъективно.

Доказательство. Действительно, согласно [20] цепное кольцо fp-инъективно справа, если и только если его правый сингулярный идеал совпадает с Jac. Поскольку R не область, мы заключаем, что $\mathrm{Sing_r}(R) \neq 0$, и тогда $\mathrm{Sing_r}(R) = \mathrm{Jac}$, поскольку Jac — единственный нетривиальный идеал R.

Левая fp-инъективность доказывается аналогично. □

Из этого факта вытекает, что любое исключительно цепное кольцо удовлетворяет *второму аннуляторному условию*: если $a \in R$ и $I = \mathrm{ann}(a)(R)$, то *левый аннулятор* I, $\mathrm{ann}(R)(I) = \{s \in R \mid sI = 0\}$, совпадает с Ra (имеем симметричный вариант и для левого условия).

Введём специальное отношение, отражающее порядок на множестве правых идеалов цепного кольца R: для $a, b \in R$ положим $a \leqslant_\mathrm{r} b$, если $bR \subseteq aR$, т. е. $ac = b$ для некоторого $c \in R$. Это отношение является линейным предпорядком, причём $a \leqslant_\mathrm{r} b \leqslant_\mathrm{r} a$ выполняется только в том случае, если $aR = bR$ (т. е. для ненулевых a и b, если $au = b$ для единицы u). Линейный предпорядок $\leqslant_\mathrm{l}$, связанный с упорядочением множества главных левых идеалов R, определяется аналогично.

Лемма 4. *Пусть R — исключительное цепное кольцо. Тогда существуют последовательности $a_1 <_\mathrm{l} a_2 <_\mathrm{l} \ldots$ и $b_1 >_\mathrm{r} b_2 >_\mathrm{r} \ldots$ ненулевых необратимых элементов, таких что $a_i b_i = 0$ и $a_i b_{i+1} \neq 0$ для всех $i \geqslant 1$.*

Доказательство. Поскольку R не является артиновым слева, то существует строго возрастающая цепочка $a_1 <_\mathrm{l} a_2 < \ldots$ в левом порядке R, где каждый элемент $0 \neq a_i$ необратим. Поскольку $\mathrm{Sing_r}(R) = \mathrm{Jac}$, то существует элемент $0 \neq b_1 \in \mathrm{Jac}$, такой что $a_1 b_1 = 0$. Поскольку $a_2 R \subset a_1 R$ и второе аннуляторное условие выполнено для R, найдётся такой $b_2 \in R$, что $a_2 b_2 = 0$ и $a_1 b_2 \neq 0$. Продолжая эту конструкцию, мы находим необходимую последовательность элементов. □

Напомним, что кольцо R называется *когерентным справа*, если любой его конечно порождённый правый идеал конечно представим. Более того, R когерентно справа, если только если правый аннулятор любого элемента $r \in R$

конечно порождён и пересечение двух конечно порождённых правых идеалов является конечно порождённым. Поскольку в цепном кольце R каждый конечно порождённый идеал главный, то R когерентно справа, если и только если правый аннулятор любого элемента R является главным правым идеалом.

Когерентные слева и когерентные кольца определяются аналогично.

Факт 5 [17, лемма 2.2]. Исключительное цепное кольцо R когерентно справа тогда и только тогда, когда оно когерентно слева.

Заметим, что в когерентном случае (см. [15, лемма 15.2]) любой fp-инъективный R-модуль является плоским и любой плоский модуль является fp-инъективным. Мы покажем, что эти классы не сравнимы по включению для некогерентного R.

Выберем любой элемент $0 \neq r \in \mathrm{Jac}$ и проверим, что инъективная оболочка E модуля R/rR не является плоской. Действительно, в противном случае $\bar{1} \in Es$ для некоторого $s \in R$, такого что $sr = 0$. Так как правый аннулятор элемента r не является главным правым идеалом, $st = 0$ для некоторого $t \notin rR$. Но тогда $\bar{1} \cdot t = \bar{t} = \bar{0}$ в E, противоречие.

Заметим, что из факта 3 вытекает, что любой проективный R-модуль fp-инъективен. Проверим теперь, что Jac — плоский модуль, не являющийся fp-инъективным. Снова выберем $0 \neq r \in \mathrm{Jac}$. Поскольку r делится на себя в R_R, но не делится на r в Jac, Jac_R не является fp-инъективным. Проверим, что $\mathrm{Jac}(R)$ — плоский модуль. Действительно, пусть элемент $0 \neq s \in \mathrm{Jac}$ такой, что $sr = 0$ для некоторого ненулевого r. Поскольку левый аннулятор $\mathrm{ann}(R)(s)$ не главный левый идеал, следовательно, $tr = 0$ для некоторого $t \in R$, такого что $s = gt$, $g \in \mathrm{Jac}$. Тогда t делит s в Jac и $tr = 0$, что и требуется для проверки того, что модуль плоский.

Естественные примеры исключительных цепных колец получаются факторизацией исключительных цепных областей ранга 1 из статьи [7]. Напомним, что цепной порядок R в теле D имеет *ранг* 1, если R — максимальный цепной порядок в D (эквивалентно, Jac является единственным нетривиальным вполне простым идеалом R). Такая цепная область называется *исключительной*, если Jac содержит нетривиальный первичный не вполне первичный идеал Q. В этом случае интервал $[Q, \mathrm{Jac}]$ в решётке двусторонних идеалов R прост, поэтому $R' = R/Q$ — исключительное цепное кольцо. Более того, такие цепные области делятся на классы C_k, $k = 0, 1, \ldots$, где k — минимальная степень, такая что Q^k — главный правый (или, эквивалентно, главный левый) идеал ($k = 0$ означает, что ни одна степень Q^k не является главным правым идеалом).

Нетрудно убедиться, что исключительное цепное кольцо R' когерентно справа, если и только если Q — главный правый идеал, т. е. если $k = 1$.

Предположим, что $[Q, P]$ — исключительный сегмент в цепном кольце R, т. е. P — вполне первичный идеал R, Q — первичный не вполне первичный идеал, $Q \subset P$ и не существует идеалов R, находящихся строго между Q и P. В этом случае локализация $(R/Q)_P$ первичного цепного кольца R/Q по множеству знаменателей $R \setminus P$ является исключительным цепным кольцом.

Далее R будет обозначать исключительное цепное некогерентное кольцо, хотя мы и будем делать оговорки, касающиеся исключительных цепных когерентных (или просто цепных) колец.

3. Немного теории моделей

В этом разделе мы коротко напомним некоторые понятия теории моделей для модулей, которые будут использоваться в классификации чисто проективных модулей над исключительным цепным некогерентным кольцом R.

Напомним, что *позитивно-примитивной формулой* (от одной переменной) над R называется формула вида $\exists\,\bar{y}\ (\bar{y}A = x\bar{b}^t)$, где $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_k)$ — конечный набор связанных переменных, A — $(k \times n)$-матрица над R, x — свободная переменная и $\bar{b} = (b_1, \ldots, b_n)^t$ — столбец элементов R. Итак, позитивно-примитивная формула — это система линейных уравнений с коэффициентами из R и разделёнными переменными. Чтобы найти значение формулы на данном модуле M, мы должны решить соответствующую систему линейных уравнений и спроецировать решение на координату x. Итак, $\phi(M)$ включает элементы $m \in M$, такие что $\bar{m}A = m\bar{b}^t$ для некоторого набора $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ элементов M. Заметим, что $\phi(M)$ — эндоподмодуль M, который, вообще говоря, не является R-подмодулем.

Для формул ϕ и ψ мы говорим, что ϕ *влечёт* ψ, и пишем $\phi \to \psi$ (или $\phi \leqslant \psi$), если $\phi(M) \subseteq \psi(M)$ для любого модуля M. Ясно, что $\to$ задаёт отношение предпорядка на множестве всех позитивно-примитивных формул. Мы профакторизуем этот предпорядок по отношению эквивалентности $\sim$, полагая $\phi \sim \psi$, если $\phi \leqslant \psi \leqslant \phi$, т. е. $\phi(M) = \psi(M)$ для любого модуля M. Множество классов эквивалентности с отношением $\leqslant$ образует решётку L, называемую *решёткой всех позитивно-примитивных формул* (от одной переменной) над R. Операция пересечения в этой решётке — это операция конъюнкции позитивно-примитивных формул, а операция объединения — это сумма формул: $(\phi + \psi)(x) \doteq \exists\, y\ \big(\phi(y) \wedge \psi(x - y)\big)$.

Известно (см. [15, лемма 11.1]), что для цепного кольца решётка L порождается двумя классами простых формул: условиями делимости и аннуляторными условиями.

Для каждого $a \in R$ определим *формулу делимости* $a \mid x$ как формулу $\exists\, y\ (ya = x)$. Ясно, что $(a \mid x)(M) = Ma$ для любого модуля M. Если $a' \geqslant_{\mathrm{l}} a$ в левом порядке R, то $Ma' \subseteq Ma$ для любого модуля M, т. е. $a' \mid x$ влечёт $a \mid x$. Обратное также нетрудно проверить: из импликации $a' \mid x \to a \mid x$ следует, что $a' \geqslant_{\mathrm{l}} a$. Из этого вытекает, что все формулы делимости образуют цепь в решётке L, антиизоморфную левому упорядочению R.

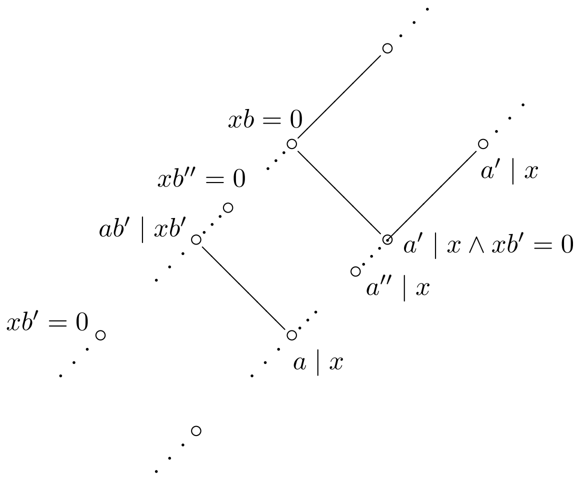
Аналогично для $b \in R$ мы рассмотрим *аннуляторную формулу* $xb = 0$, которая задаёт подгруппу $(xb = 0)(M) = \operatorname{ann}(M)(b) = \{m \in M \mid mb = 0\}$ в любом R-модуле M. Заметим, что для $b, b' \in R$ импликация $xb = 0 \to xb' = 0$

выполняется, если и только если $b \leqslant_{\mathrm{r}} b'$. Итак, аннуляторные формулы образуют в L цепь, изоморфную правому порядку на R.

Нетрудно проверить, что для необратимых $a, b \in R$ импликация $a \mid x \to xb = 0$ имеет место, если и только если $ab = 0$. Кроме того, формула $a \mid x + xb = 0$ эквивалентна формуле $ab \mid xb \doteq \exists y\ (yab = xb)$, т. е. в любом модуле M выполняется равенство $(a \mid x)(M) + (xb = 0)(M) = \{m \in M \mid mb \in Mab\}$.

Это почти всё, что нужно, чтобы описать решётку всех позитивно-примитивных формул над исключительным цепным кольцом.

Предложение 6 (см. [17, рис. 1]). *Следующий рисунок описывает решётку позитивно-примитивных формул от одной переменной над исключительным цепным некогерентным кольцом R.*



Здесь $ab'' = a''b = 0$, $b' <_{\mathrm{r}} b'' <_{\mathrm{r}} b$ и $a >_{\mathrm{l}}> a'' >_{\mathrm{l}} a$. Все импликации на рисунке направлены вверх (направо или налево). Например, $a \mid x$ влечёт $xb'' = 0$ (но не влечёт $xb' = 0$) и формула $a' \mid x \wedge ab' \mid xb'$ эквивалентна $a \mid x$. Заметим, что правый аннулятор a не имеет наименьшего элемента (точки слева от $xb'' = 0$ на рисунке). Кроме того, множество элементов $t \in R$, таких что $at \neq 0$ (точки слева от $ab' \mid xb'$), не имеет наибольшего элемента. Действительно, иначе R_R имело бы нетривиальный цоколь, что невозможно.

Основное отличие от соответствующей диаграммы для когерентного случая (см. [17, рис. 2]) состоит в том, что в нашем случае существует только одна минимальная пара $(xb = 0)/(a' \mid x \wedge xb')$, но имеется две минимальные пары позитивно-примитивных формул в когерентном случае.

Напомним, что спектр Циглера Zg_R — это топологическое пространство, точками которого являются неразложимые чисто инъективные R-модули, а базис для топологии задаётся компактными открытыми множествами $(\phi/\psi) = \{M \in \mathrm{Zg}_R \mid (\phi \wedge \psi)(M) \subset \phi(M)\}$, где ϕ и ψ — позитивно-примитивные формулы. Следующее предложение описывает спектр Циглера произвольного исключительного цепного некогерентного кольца.

Предложение 7. *Пусть R — исключительное цепное некогерентное кольцо. Тогда точки его спектра Циглера Zg_R исчерпываются следующим списком:* $F = R/\operatorname{Jac}$, $\mathrm{PE}(\mathrm{Jac})$ (*здесь* PE *означает чисто инъективную оболочку*), *инъективные оболочки циклических R-модулей. При этом R/Jac — единственная изолированная точка в Zg_R и также единственная замкнутая точка в Zg_R и производная Кантора—Бендиксона Zg'_R не имеет изолированных точек.*

Доказательство. Описание точек Zg_R содержится в [17, предложение 3.6]. Заметим, что минимальная пара $(xb = 0)/(a' \mid x \wedge xb' = 0)$ на диаграмме изолирует точку R/Jac, т. е. она открыта. Из общего результата Г. Е. Пунинского (см. [12, предложение 5.3.28]) вытекает, что любая изолированная точка в Zg_R изолируется минимальной парой, поэтому все остальные точки не являются изолированными. Аналогично рассуждаем и в случае Zg'_R.

Поскольку модуль R/Jac имеет конечную длину, то эта точка замкнута. Но по той же общей теории любая замкнутая точка в Zg_R имеет конечную эндодлину, поэтому не существует других замкнутых точек. □

Заметим, что для конкретного примера исключительного цепного не когерентного кольца, который содержится в [7], кольцо R счётно и любой правый идеал R имеет вид rR или $r\operatorname{Jac}$, $r \in R$. Из этого нетрудно вывести, что $\mathrm{PE}(R_R)$ — единственная инъективная точка в Zg_R. Значит, это пространство состоит из трёх точек. Более того, две неизолированные точки $\mathrm{PE}(R_R)$ и $\mathrm{PE}(\mathrm{Jac})$ топологически неразличимы.

4. Чисто проективные модули

Напомним, что R обозначает исключительно цепное некогерентное кольцо. Выберем $0 \neq r \in \operatorname{Jac}(R)$, и пусть $N = R/rR$ — единственный неразложимый конечно представимый несвободный R-модуль. Тогда любой конечно представимый R-модуль является прямой суммой копий модулей R_R и N.

По теореме Уорфилда [21, предложение 1] *чисто проективный модуль* над кольцом может быть определён как прямое слагаемое прямой суммы конечно представимых модулей. Для цепного исключительного кольца мы сразу же получаем компактный вариант этого определения.

Замечание 8. Модуль M над цепным исключительным кольцом R является чисто проективным, если и только если M есть прямое слагаемое прямой суммы копий R и N, т. е. если $M \in \operatorname{Add}(R \oplus N)$.

А. Факкини [9, теорема 1.2] доказал, что кольцо эндоморфизмов любого цепного модуля M имеет самое большее два максимальных идеала. Если это кольцо не является локальным, то эти два максимальных идеала следующие: I, состоящий из мономорфизмов M, не являющихся эпиморфизмами, и K, состоящий из эпиморфизмов M с ненулевым ядром.

Пусть $S = \operatorname{End}(N)$ обозначает кольцо эндоморфизмов модуля N. Используя факт 1, нетрудно показать, что существуют $f \in I \setminus K$ (т. е. мономорфизм M, образ которого — собственный подмодуль M) и $g \in K \setminus I$ (т. е. эпиморфизм M

с ненулевым ядром), в частности, кольцо S не является локальным и фактор-кольца S/I и S/K — тела. Пусть S' обозначает кольцо $\mathrm{End}(R\oplus N)$, которое естественно отождествляется с матричным кольцом

$$S' = \begin{pmatrix} R & \mathrm{Hom}(N,R) \\ \mathrm{Hom}(R,N) & S \end{pmatrix},$$

действующим на столбец

$$\begin{pmatrix} R \\ N \end{pmatrix}$$

умножением слева. Нетрудно проверить, что S' имеет ровно три максимальных идеала: L с Jac на месте 11 (и что угодно для других компонент матрицы), I' с I на позиции 22 и K' с K на месте 22, причём $S'/L \cong R/\mathrm{Jac}$, $S'/I' \cong S/I$ и $S'/K' \cong S/K$.

Существует несколько эквивалентных способов определить размерность чисто проективного модуля M. Первый способ состоит в «проективизации» категории $\mathrm{Add}(R\oplus N)$. Поскольку R_R и N — конечно порождённые модули, из [5, лемма 29.4] вытекает, что функтор $\mathrm{Hom}(R\oplus N, -)$ из категории $\mathrm{Add}(R\oplus N)$ в категорию проективных (правых) S'-модулей является эквивалентностью. Заметим, что образ чисто проективного модуля M при этой эквивалентности может быть отождествлён с определимой подгруппой $M \oplus (xr = 0)(M)$, причём структура S'-модуля на M также легко определяется.

А именно, любой элемент из $(m, 0) \in M \oplus 0$ может быть умножен на любой элемент $r \in R = e_1 S' e_1$, при этом $(m, 0)$ перейдёт в $(mr, 0)$, а также на любой элемент $s \in e_1 S' e_2 = \mathrm{Hom}(R/rR, R) = \mathrm{ann}(R)(r)$ (т. е. $sr = 0$), и $(m, 0)$ перейдёт в $(0, ms)$. Мы можем умножить элемент $(0, m)$ на любой элемент $s \in R = \mathrm{Hom}(R, R/rR) = e_2 S' e_1$, при этом $(0, m)$ перейдёт в $(m, 0)$, а также на любой элемент $s \in \mathrm{End}(N) = e_2 S' e_2$ (т. е. $sr = rt$ для некоторого $t \in R$), и $(0, m)$ перейдёт в $(0, ms)$.

Пусть чисто проективный R-модуль M переходит в проективный S'-модуль P при описанной выше эквивалентности. Определим его *размерность* $\dim(M)$ как тройку кардиналов $(\alpha, \beta_1, \beta_2)$, где α — размерность векторного пространства P/PL над телом $S/L = R/\mathrm{Jac}$, β_1 — размерность векторного пространства P/PI' над телом $S'/I' = S/I$ и β_2 — размерность P/PK' как векторного пространства над телом $S'/K' \cong S/K$. Например, как нетрудно проверить, $\dim(R_R) = (1, 0, 0)$ и $\dim(N) = (0, 1, 1)$.

Поскольку размерность M определена как размерность проективного модуля над полулокальным кольцом, то из знаменитой теоремы Пршигоды [14, теорема 2.3] выводим следующее утверждение.

Факт 9. Любой чисто проективный модуль над исключительным цепным кольцом однозначно определяется своей размерностью.

В основном мы будем применять теорию размерности к счётно порождённым чисто проективным модулям. Обоснование для этого даёт следующий результат (см. [5, теорема 26.1]).

Факт 10. Чисто проективный модуль над любым кольцом разлагается в прямую сумму счётно порождённых (чисто проективных) модулей.

Существует другой, более естественный, способ определять размерность прямых слагаемых прямой суммы цепных модулей, который мы заимствуем из [11].

Для простоты мы будем предполагать, что M — счётно порождённый чисто проективный модуль. Тогда α равно супремуму чисел $n \in \mathbb{N}$, таких что R^n — прямое слагаемое M. Далее, β_1 равно супремуму $n \in \mathbb{N}$, таких что существуют морфизмы $f\colon N^n \to M$ и $g\colon M \to N^n$, для которых $gf \notin I$ (т. е. композиция имеет нулевое ядро). Аналогично β_2 равно супремуму чисел n, таких что существуют морфизмы f и g как выше, но $gf \notin K$ (т. е. композиция является эпиморфизмом).

Если m — элемент модуля M, то его *позитивно-примитивным типом* $p = \mathrm{pp}_M(m)$ называется множество всех формул, которые выполняются на m в M. Мы скажем, что элемент p *конечно порождён*, если найдётся позитивно-примитивная формула $\phi \in p$, которая *порождает* p импликациями, т. е. $\phi \to \psi$ для любой формулы $\psi \in p$. Хорошо известно, что позитивно-примитивный тип любого элемента (и любого конечного набора элементов) в конечно представимом модуле конечно порождён. Например, как нетрудно проверить, позитивно-примитивный тип элемента $a \in R$ порождён формулой делимости $a \mid x$, а если $ab = r$, то тип элемента $\bar{a} \in N = R/rR$ порождён формулой $a \mid x \wedge xb = 0$.

Это утверждение переносится на чисто проективные модули.

Факт 11 (см. [19, факт 3.4]).

1. Если M — чисто проективный модуль над произвольным кольцом, то позитивно-примитивный тип любого конечного набора элементов M конечно порождён.
2. Если M счётно порождён и позитивно-примитивный тип любого конечного набора элементов M конечно порождён, то M чисто проективен.

Теперь мы готовы построить первый нетривиальный чисто проективный модуль над исключительным цепным кольцом R.

Лемма 12. *Существует (единственный) чисто проективный R-модуль V размерности $(0, 1, 0)$. В частности, V — цепной счётно порождённый модуль из* $\mathrm{Add}(N)$ *и* $V \oplus N^{(\omega)} \cong N^{(\omega)}$.

Доказательство. Выберем (любой) элемент $s \in R$, такой что $s^n \neq 0$ для всех n (его существование легко вытекает из исключительности R). Пусть V — (относительно) свободный модуль с порождающими $m_1, m_2, \ldots$ и соотношениями $m_1 s = 0,\ m_2 s = m_1,\ m_3 s = m_2, \ldots$. Нетрудно проверить, что из условия $s^n \neq 0$ следует, что V ненулевой. Кроме того, аннулятор m_i в V порождён элементом s^i, следовательно, $M_i = m_i R \cong R/s^i R$ — подмодуль V, изоморфный N. В частности, позитивно-примитивный тип m_i в модуле M_j, $j > i$, порождён формулой $\phi_{j,i} \doteq s^{j-i} \mid x \wedge x s^i = 0$.

Будучи объединением цепных модулей, V сам является цепным. Проверим, что V чисто проективен. Поскольку V счётно порождён, по факту 11 достаточно доказать, что позитивно-примитивный тип любого конечного набора элементов V конечно порождён. Из того что V цепной, вытекает, что необходимо проверить это условие только для элементов V.

Поскольку элементы m_i порождают V, достаточно установить, что позитивно-примитивный тип p_i любого m_i в M конечно порождён. Так как V — объединение модулей M_j, этот тип порождается формулами $\phi_{j,i}$, $j > i$. Принимая во внимание решётку позитивно-примитивных формул над R, мы заключаем, что $\phi_{i+1,i} \doteq s \mid x \wedge xs^i = 0$ влечёт любую формулу $\phi_{j,i}$, $j > i$, и, следовательно, порождает p_i.

Теперь найдём размерность M. Поскольку V счётно порождён и неразложим, мы заключаем, что $\alpha(V) = 0$. Предположим, что $\alpha_2(V) > 0$. Тогда найдутся морфизмы $f\colon N \to V$ и $g\colon V \to N$, такие что gf — эпиморфизм. Поскольку V цепной, мы заключаем, что f — эпиморфизм. Но тогда, будучи гомоморфным образом циклического модуля, V сам цикличен, противоречие.

Итак, $\alpha_2(V) = 0$, и тогда $\alpha_1(V) > 0$, поскольку V ненулевой. Если $\alpha_1(V) > 1$, то существуют морфизмы $f\colon N^2 \to V$ и $g\colon V \to N^2$, такие что gf — мономорфизм. Но тогда f — мономорфизм, что противоречит тому, что V цепной.

Итак, $\dim(V) = (0, 1, 0)$, и тогда изоморфизм $V \oplus N^{(\omega)} \cong N^{(\omega)}$ вытекает из равенства размерностей (обе равны $(0, \omega, \omega)$). □

Заметим, что позитивно-примитивный тип p любого ненулевого элемента $m \in V$ порождается формулой вида $c \mid x \wedge xd = 0$, где $c, d \in \mathrm{Jac}$, $cd \neq 0$. Действительно, по построению V тип p всегда содержит нетривиальную формулу делимости $c \mid x$, $0 \neq c \in \mathrm{Jac}$, т. е. $V = V\,\mathrm{Jac}$. Тогда позитивно-примитивная формула ϕ, порождающая p, находится на нижней прямой диаграммы решётки позитивно-примитивных формул.

Если наше утверждение не выполняется, то ϕ эквивалентна формуле делимости $a \mid x$ для ненулевого $a \in R$. Пусть $n \in V$ таков, что $na = m$. Нетрудно проверить, что $\mathrm{ann}(n)(R) = 0$, и тогда $nR \cong R_R$. Из fp-инъективности R вытекает, что nR — чистый подмодуль в M. Но любой конечно порождённый чистый подмодуль чисто проективного модуля выделяется прямым слагаемым, явное противоречие.

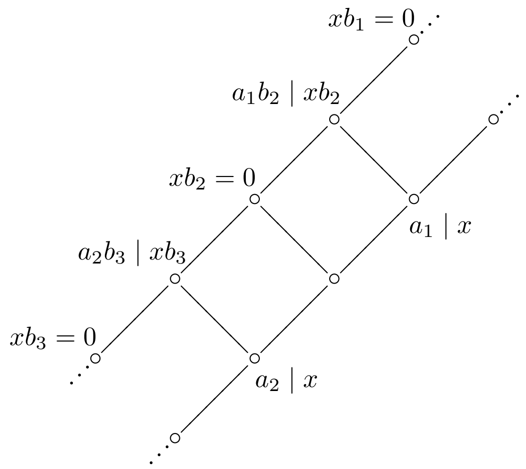
Заметим, что если Jac — счётно порождённый правый идеал (и это так во всех примерах исключительных цепных колец, известных нам), то $V \cong \mathrm{Jac}_R$.

5. Модуль W

В этом разделе мы построим чисто проективный модуль W размерности $(\omega, 0, 1)$ над (любым) исключительным цепным некогерентным кольцом R и завершим классификацию чисто проективных R-модулей. В частности, мы покажем, что W не разлагается в прямую сумму неразложимых модулей (хотя и содержит неразложимые прямые слагаемые).

Первый пример такого чисто проективного модуля был построен в [17] при изучении разложения $m = n + k$ для элемента m чисто проективного модуля M, позитивно-примитивный тип которого порождён формулой $ab' \mid xb' \doteq a \mid x + xb' = 0$. В этом разложении $n \in Ma$ и $kb = 0$. Анализируя диаграмму, мы видим, что позитивно-примитивный тип m порождён формулой $a \mid x$, и тогда (см. рассуждения выше) он включается в прямое слагаемое M, изоморфное R_R. Вообще говоря, это не верно для k: его позитивно-примитивный тип в M может порождаться более сильной (чем $xb = 0$) формулой $cd \mid xd$, $cd \neq 0$. Применяя аналогичное разложение для k и продолжая этот процесс, мы получаем W. Рассмотрим эту конструкцию в деталях.

По лемме 4 найдутся такие ненулевые необратимые элементы $a_1 <_{\mathrm{l}} a_2 <_{\mathrm{l}} \ldots$ и $b_1 >_{\mathrm{r}} b_2 >_{\mathrm{r}} \ldots$, что $a_i b_i = 0$ и $a_i b_{i+1} \neq 0$ для $i = 1, 2, \ldots$.



Определим последовательность M_i, $i = 1, 2, \ldots$, конечно представимых R-модулей и морфизмов $f_i \colon M_i \to M_{i+1}$ по приведённому выше рисунку. Пусть $M_1 = R/b_1R$. Следовательно, $m_1 = \bar{1} \in R/b_1R$ *свободно реализует* формулу $xb_1 = 0$ (т. е. позитивно-примитивный тип $\bar{1} \in R/b_1R$ порождается этой формулой). Пусть $M_2 = R \oplus R/b_2R$, $m_2 = (0, \bar{1})$. Определим $f_1 \colon M_1 \to M_2$, отправив $\bar{1}$ в $(a_1, \bar{1}) \in M_2$. Заметим, что $f(m_1)b_1 = (a_1b_1, \bar{b}_1) = 0$, следовательно, это отображение определено корректно. Кроме того, позитивно-примитивный тип элемента $f_1(m_1)$ в M_2 порождён формулой $a_1 \mid x + xb_2 = 0 \doteq a_1b_2 \mid xb_2$ и f_1 имеет ненулевое ядро. Действительно, поскольку $\mathrm{ann}(a_1)(R)$ не является конечно порождённым, существует такой $b' <_{\mathrm{r}} b$, что $ab' = 0$. Тогда $\bar{b}' \neq 0$ в M_1, но $f_1(\bar{b}') = f_1(\bar{1})b' = (a_1b', b') = 0$ в M_2.

Положим $M_3 = R \oplus R \oplus R/b_3R$, $m_3 = (0, 0, \bar{1})$ и определим $f_2 \colon M_2 \to M_3$, посылая $(1, 0)$ в $(1, 0, 0)$ (т. е. отождествляя крайние левые копии R в M_2 и M_3) и $m_2 = \bar{1} \in R/b_2R$ в $(0, a_2, 1)$. Как выше, нетрудно проверить, что f_2 определено корректно и имеет ненулевое ядро. Рассмотрим элемент

$f_2f_1(m_1) = (a_1, a_2, \bar{1})$. Его позитивно-примитивный тип в M_3 порождён формулой $a_1 \mid x + a_2 \mid x + xb_3 = 0$, которая (см. рисунок) эквивалентна формуле $a_1b_2 \mid xb_2$. Итак, мы не увеличили позитивно-примитивный тип элемента m_1 при переходе от M_2 к M_3; и это основная идея всей конструкции.

Теперь положим $M_i = R^{i-1} \oplus R/b_iR$, $m_i = (\bar{0}, 1)$. Пусть $f_i \colon M_i \to M_{i+1}$ отождествляет $i-1$ крайних левых копий кольца, $f_i(\bar{r}, 0) = (\bar{r}, 0, 0)$, и посылает $m_i = \bar{1} \in R/b_iR$ в $(\bar{0}, a_{i+1}, \bar{1}) \in M_{i+1}$. Пусть W обозначает прямой предел этой прямой системы.

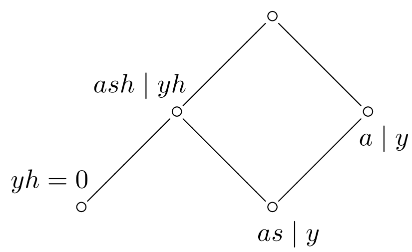
Мы утверждаем, что позитивно-примитивный тип m_i в W порождён формулой $a_ib_{i+1} \mid xb_i$, поэтому $\mathrm{pp}_W(m_i) = \mathrm{pp}_{M_{i+1}}(m_i)$. Действительно, позитивно-примитивный тип $m_i = (\bar{0}, 1)$ в $M_i = R^{i-1} \oplus R/b_iR$ порождён формулой $xb_i = 0$. Образом m_i в M_{i+1} является элемент $(\bar{0}, a_{i+1}, 1)$, позитивно-примитивный тип которого порождён формулой $a_{i+1}b_i \mid xb_i$. Следующий образ $f_{i+1}f_i(m_i) = (\bar{0}, a_{i+1}, a_{i+2})$ имеет позитивно-примитивный тип, порождённый формулой $a_{i+1} \mid x + a_{i+2} \mid x + xb_{i+2} = 0$, и эта формула (см. рисунок) эквивалентна формуле $a_{i+1}b_i \mid xb_i$, и т. д.

Мы хотели бы описать позитивно-примитивные типы произвольных элементов W. Для этого нам понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 13. *Пусть M — модуль над исключительным цепным кольцом. Предположим, что позитивно-примитивный тип p элемента $m \in M$ порождается формулой $ab' \mid xb'$, где $a, b' \in \mathrm{Jac}$, $ab' \neq 0$. Если $s \in \mathrm{Jac}$, то позитивно-примитивный тип элемента $n = ms$ в M порождается формулой $as \mid x$.*

Доказательство. Пусть $q(y) = \mathrm{pp}_M(n)$. Поскольку $ab' \mid xb' \in p$, то существует такой элемент $m' \in M$, что $m'ab' = mb'$.

Предположим сначала, что $s \notin b'R$. Тогда $b' = sh$ для некоторого $h \in \mathrm{Jac}$. Из равенств $nh = msh = mb' = m'ab' = m'ash$ вытекает, что $ash \mid yh \in q$, и, кроме того, ясно, что $s \mid y \in q$. Поскольку $ash = ab' \neq 0$, следующий фрагмент решётки позитивно-примитивных формул показывает, что конъюнкция $ash \mid yh \wedge a \mid y$ эквивалентна формуле $as \mid y$.



В частности, существует такой элемент $k \in M$, что $kas = m$. Из этого вытекает, что $\mathrm{ann}(as)(R) \subseteq \mathrm{ann}(n)(R)$, и мы докажем, что это включение является равенством. Действительно, предположим, что $nh = 0$ для некоторого $h \in R$. Тогда $msh = 0$. Следовательно, $ab' \mid xb'$ влечёт $xsh = 0$, из чего, анализируя решётку позитивно-примитивных формул, заключаем, что $ash = 0$.

Тогда $\mathrm{ann}(k)(R) = 0$, следовательно, по fp-инъективности $kR \cong R_R$ — чистый подмодуль в M. Поэтому позитивно-примитивный тип k в M порождается тривиальной формулой $x = x$. Ясно, что тогда позитивно-примитивный тип $n = kas$ в M порождается формулой $as \mid x$.

Рассмотрим теперь случай, когда $s \in b'R$, т. е. $s = b'g$ для некоторого $g \in R$. Из равенства $m'ab' = mb$ мы получаем, что $n = ms = mb'g = m'ab' = m'as$, т. е. $as \mid y \in q$. Как и выше, проверяем, что $\mathrm{ann}(as)(R) = \mathrm{ann}(n)(R)$, следовательно, позитивно-примитивный тип n в M снова порождён формулой $as \mid x$. □

Теперь мы докажем, что позитивно-примитивный тип любого ненулевого элемента $m \in W$ порождён или формулой делимости $c \mid x$, $0 \neq c \in R$, или формулой $ab' \mid xb'$, $ab' \neq 0$ (следовательно, не существует элементов, позитивно-примитивный тип которых порождён формулами $xb = 0$ или $c \mid x \wedge xd = 0$, $cd \neq 0$). Действительно, m может быть записан в виде $m = (\bar{r}, s) \in R^{i-1} \oplus R/b_iR$. Разложим m как $m = n + k$, где $n = (\bar{r}, 0)$ и $k = (\bar{0}, s) = m_i s$. Ясно, что позитивно-примитивный тип элемента n в W порождается формулой делимости $c \mid x$, $c \in R$. Более того, если формула ϕ порождает позитивно-примитивный тип k в W, то $c \mid x + \phi$ порождает позитивно-примитивный тип элемента m. Анализируя решётку позитивно-примитивных формул, мы заключаем, что достаточно доказать утверждение для k.

Если $s = u$ обратим, то, так как m_i свободно реализует в W формулу $a_{i+1}b_i \mid xb_i$, позитивно-примитивный тип $m_i u$ порождён формулой $a_{i+1}uu^{-1}b_i \mid xu^{-1}$. Если $s \in \mathrm{Jac}$, то применяем лемму 13.

Лемма 14. *W — чисто проективный модуль.*

Доказательство. Поскольку W счётно порождён, то достаточно проверить, что позитивно-примитивный тип любого конечного набора $\bar{m} = (m_1, \ldots, m_k)$ элементов M конечно порождён. Предположим, что $\bar{m} \subseteq M_i$. Достаточно доказать, что $\mathrm{pp}_W(\bar{m}) = \mathrm{pp}_{M_{i+1}}(\bar{m})$. Иначе по стандартной процедуре элиминации для цепных колец (см. [15, предложение 10.23]) найдутся элементы $g \in \mathrm{Jac}$ и $a_1, \ldots, a_n \in R$, такие что $m = m_1a_1 + \ldots + m_ka_k \in Wg \setminus M_{i+1}g$, в частности $0 \neq g \in \mathrm{Jac}$. Запишем $m = (\bar{r}, s)$, где $s \in R/b_iR$. Из $m \in Wg$ вытекает, что $\bar{r} \in R^{i-1}g$, следовательно, мы можем удалить эту компоненту, т. е. предположить, что $m = m_i s$. Но тогда нужное заключение вытекает из уже доказанного равенства $\mathrm{pp}_W(m_i) = \mathrm{pp}_{M_{i+1}}(m_i)$. □

Итак, мы проверили, что W чисто проективен. Сейчас мы должны провести самую сложную часть доказательства — вычислить размерность модуля W. Но уже на этой стадии мы можем доказать, что W не разлагается в прямую сумму неразложимых модулей. Предположим, что M — прямое слагаемое модуля W, и выберем $0 \neq m \in M$. Тогда его позитивно-примитивный тип порождается или формулой делимости, или формулой вида $ab' \mid xb'$, $ab' \neq 0$. В первом случае по приведённым выше аргументам m содержится в прямом слагаемом W (и, следовательно, M), изоморфном R_R. Во втором случае разложим $m = n + k$ в M, где $m \in Ma$ и $kb' = 0$. Как мы заметили выше, позитивно-примитивный тип k в W порождается формулой делимости, и тогда мы действуем как в первом случае.

Итак, любое прямое слагаемое W изоморфно R_R. Если W является прямой суммой неразложимых модулей, то $M \cong R^{(I)}$ для некоторого множества индексов I. Но позитивно-примитивный тип любого элемента в последнем модуле порождается чистой формулой делимости, следовательно, то же должно выполняться для W, противоречие.

Предложение 15. $\dim(W) = (\omega, 1, 0)$.

Доказательство. На самом деле из приведённых рассуждений вытекает, что для любого n модуль W содержит R^n как прямое слагаемое, поэтому $\alpha(W) = \omega$. Отсюда, в частности (если найти размерности), следует, что $R^{(\gamma)} \oplus W \cong W$ для любого $\gamma \leqslant \omega$.

Если $\alpha_1(W) > 0$, то существуют морфизмы $f\colon N \to W$ и $g\colon W \to N$, такие что композиция gf имеет нулевое ядро. Следовательно, то же верно для f. Пусть $m = f(1) \in W$, причём $mr = 0$. По доказанному выше позитивно-примитивный тип $p = \mathrm{pp}_W(m)$ порождён либо формулой делимости $a \mid x$, причём $ar = 0$, либо формулой $ab \mid xb$, где $ar = 0$, $ab \neq 0$. В обоих случаях, поскольку R некогерентно, существует такой элемент $b' <_{\mathrm{r}} b$, что $ab' = 0$, поэтому обе формулы влекут $xb' = 0$, и тогда $mb' = 0$.

Поскольку $b' \notin rR$, мы получаем, что $\bar{b}' \neq 0$ в N, но $f(\bar{b}') = f(1)b' = mb' = 0$, противоречие.

Итак, $\alpha_1(W) = 0$, и тогда $\alpha_2(W) > 0$. Действительно, в противном случае $W \cong R^{(\omega)}$, что невозможно.

Чтобы вычислить точное значение $\alpha_2(W)$, напомним, что образ P модуля W в категории проективных $S' = \mathrm{End}(R \oplus N)$-модулей может быть отождествлён с $W \oplus (xr = 0)(W)$ и $\alpha_2(W)$ — размерность этого модуля над телом S'/K'. Действие S' было объяснено выше. Заметим, что $1_R \in K'$, поэтому $w = w \cdot 1 \in PK'$ для любого $w \in W \oplus 0$, следовательно, эта часть P уничтожается при факторизации. Рассмотрим элемент $m \in (xr = 0)(W)$, тип которого порождается формулой $a \mid x$, $0 \neq a \in R$. Тогда $a \mid x$ влечёт $xr = 0$, следовательно, $ar = 0$, в частности, $a \in \mathrm{Jac}$. Кроме того, $na = m$ для некоторого $n \in W$. Тогда левое умножение на a задаёт морфизм $N = R/rR \to R$ и соответствующее действие на P посылает $(n, 0) \in W \oplus 0$ в m. Поскольку первый элемент обращается в ноль после факторизации, m также равен нулю в P/PK'.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $m = (\bar{r}, s)$ из $(xr = 0)(W)$. Нетрудно убедиться, что все координаты $\bar{r}$ принадлежат Jac, поэтому $\bar{r} \in PK'$ по уже доказанному. То же верно, если s необратим. Итак, ненулевыми в P/PK' могут быть только элементы $m_i u$ для обратимых u. Чтобы проверить равенство $\dim(P/PK') = 1$, достаточно показать, что P/PK' — цепной S'-модуль. Более того, из сказанного выше следует, что можно рассмотреть только элементы $m_i u$ и $m_i v$ для единиц u и v. Положим $w = u^{-1}v$. Нетрудно убедиться, что выполняется или $wr \in rR$, или $w^{-1}r \in rR$. По симметрии можно считать, что выполняется первое. Тогда левое умножение на w задаёт эндоморфизм N, следовательно, правое умножение на s задаёт S'-действие на $(xr=0)(W)$, которое посылает $m_i u$ в $m_i uw = m_i v$. □

В частности, поскольку чисто проективный модуль однозначно определяется своей размерностью, тип изоморфизма W не зависит от выбора последовательности $a_i, b_j \in R$. Более того, сравнивая размерности (обе равны $(\omega,1,1)$), мы получаем следующий изоморфизм.

Следствие 16. $V \oplus W \cong R^{(\omega)} \oplus N$.

6. Классификация чисто проективных модулей

Выше мы создали некоторый запас чисто проективных модулей над цепным исключительным некогерентным кольцом R. Сейчас мы покажем, что этих модулей достаточно, чтобы завершить классификацию всех чисто проективных модулей над R, используя теорию размерности.

Теорема 17. *Пусть R — исключительное цепное некогерентное кольцо. Тогда любой чисто проективный R-модуль M разлагается в прямую сумму копий модулей R_R, $N = R/rR$, V и W и имеют место соотношения $V \oplus N^{(\omega)} \cong N^{(\omega)}$ и $V \oplus W \cong R^{(\omega)} \oplus N$.*

Доказательство. По факту 10 мы можем предполагать, что M счётно порождён. Если $\dim(M) = (\omega,\omega,\omega)$, то изоморфизм $M \cong R^{(\omega)} \oplus N^{(\omega)}$ вытекает из теоремы Басса [6] о больших проективных модулях, применённой к соответствующему проективному S'-модулю P. Итак, мы можем предполагать, что один из трёх инвариантов M конечен.

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha = n$ конечно. Используя проективные оболочки для конечно порождённых S'-модулей, мы заключаем, что $M \cong R^n \oplus M'$, причём $\alpha(M') = 0$. Если $\beta_1(M') = \beta_2(M') = \omega$, то, сравнивая размерности, мы получаем $M' \cong N^{(\omega)}$. Иначе одно из чисел β_i конечно. Вычитая из M' прямую сумму конечного числа копий N, мы можем предполагать, что $\beta_1 = 0$ или $\beta_2 = 0$. Если $\beta_2 = 0$, то $M' \cong V^{(\beta_1)}$. В противном случае $\dim(M') = (0,0,\beta_2)$ и $\beta_2 > 0$ (если M' ненулевой). Из этого вытекает, что $V^{(\beta_2)} \oplus M' \cong N^{(\beta_2)}$. Но хорошо известно (см. [13,18]), что в этом случае $\beta_2(M') = 0$, противоречие.

Итак, мы можем считать, что $\alpha(M) = \omega$, следовательно, $\beta_1(M)$ или $\beta_2(M)$ конечен. Рассуждая как выше, можно предположить, что $\beta_1 = 0$ или $\beta_2 = 0$. Если $\beta_2 \neq 0$, то $M \cong W^{(\beta_2)}$, а если $\beta_1 > 0$, то $M \cong R^{(\omega)} \oplus V^{(\beta_1)}$. □

Напомним, что *проективным спектром* полулокального кольца S' называется класс всех векторов размерности его проективных модулей. Вычисление проективного спектра данного полулокального кольца может быть очень сложной задачей (см., например, [8]).

Следствие 18. *Проективный спектр полулокального кольца S' задаётся следующими тройками*: $(\alpha, \beta, \gamma + \delta)$, *где* α, β, γ, δ — *кардиналы и* $\alpha \geqslant \omega \cdot \gamma$, $\beta \geqslant \delta$.

Доказательство. Действительно, по теореме 17 размерность любого проективного S'-модуля P является следующей суммой кардиналов:

$$\alpha' \cdot (1, 0, 0) + \beta' \cdot (0, 1, 1) + \gamma' \cdot (0, 1, 0) + \delta' \cdot (\omega, 0, 1) = (\alpha' + \omega\delta', \beta' + \delta', \beta' + \delta'). \quad \square$$

Литература

[1] Дрозд Ю. Об обобщённо однорядных кольцах // Мат. заметки. — 1975. — Т. 18. — С. 707—710.

[2] Пунинский Г. Е. Полуцепные кольца Крулля—Шмидта и чисто инъективные модули // Фундамент. прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 2. — С. 471—489.

[3] Пунинский Г. Е. Конечно представимые модули над цепными кольцами // Фундамент. прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 2. — С. 631—633.

[4] Пунинский Г. Е. Чисто проективные модули над исключительным цепным когерентным кольцом // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 6. — С. 175—192.

[5] Anderson F. W., Fuller K. R. Rings and Categories of Modules. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.

[6] Bass H. Big projective modules are free // Illinois J. Math. — 1963. — Vol. 7. — P. 24—31.

[7] Brungs H. H., Dubrovin N. I. A classification and examples of rank one chain domains // Trans. Am. Math. Soc. — 2003. — Vol. 355. — P. 2733—2753.

[8] Dubrovin N., Puninski G. Classifying projective modules over some semilocal rings // Algebra Appl. — 2007. — Vol. 6. — P. 1—27.

[9] Facchini A. Krull—Schmidt fails for serial modules // Trans. Am. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348. — P. 4561—4576.

[10] Facchini A. Module Theory: Endomorphism Rings and Direct Sum Decompositions in Some Classes of Modules. — Birkhäuser, 1998. — (Progress Math.; Vol. 167).

[11] Facchini A., Příhoda P. Factor categories and infinite direct sums // Int. Electon. J. Algebra. — 2009. — Vol. 5. — P. 135—168.

[12] Prest M. Purity, Spectra and Localization, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. — (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications; Vol. 121).

[13] Příhoda P. Add(U) of a uniserial module // Comment. Math. Univ. Carolin. — 2006. — Vol. 47. — P. 391—398.

[14] Příhoda P. Projective modules are determined by their radical factors // J. Pure Appl. Algebra. — 2007. — Vol. 210. — P. 827—835.

[15] Puninski G. Serial Rings. — Dordrecht: Kluwer Academic, 2001.

[16] Puninski G. Some model theory over a nearly simple uniserial domain and decomposition of serial modules // J. Pure Appl. Algebra. — 2001. — Vol. 163. — P. 319—337.

[17] Puninski G. Some model theory over an exceptional uniserial ring and decompositions of serial modules // J. London Math. Soc. — 2001. — Vol. 64. — P. 311—326.

[18] Puninski G. Projective modules over the endomorphism ring of a biuniform module // J. Pure Appl. Algebra. — 2004. — Vol. 188. — P. 227—246.

[19] Puninski G., Rothmaler Ph. Pure-projective modules // J. London Math. Soc. — 2005. — Vol. 71. — P. 304—320.

[20] Puninski G., Wisbauer R., Yousif M. On p-injective rings // Glasgow Math. J. — 1995. — Vol. 37. — P. 373—378.

[21] Warfield R. B. Purity and algebraic compactness for modules // Pacific J. Math. — 1969. — Vol. 28. — P. 699—719.

[22] Warfield R. B. Serial rings and finitely presented modules // J. Algebra. — 1975. — Vol. 37. — P. 187—222.