

Автоморфизмы решётки всех подалгебр полукольца многочленов от одной переменной

В. В. СИДОРОВ

Вятский государственный
гуманитарный университет
e-mail: schools@chgk43.ru

УДК 512.556

Ключевые слова: полукольцо многочленов, подалгебра, решётка подалгебр.

Аннотация

В статье описаны автоморфизмы решётки $\mathbb{A}$ всех подалгебр полукольца $\mathbb{R}^+[x]$ многочленов от одной переменной над полуполем $\mathbb{R}^+$ неотрицательных действительных чисел. Доказано, что автоморфизмы решётки $\mathbb{A}$ порождаются автоморфизмами самого полукольца $\mathbb{R}^+[x]$, которые в свою очередь получаются заменами x на px , где p — положительное действительное число. Отсюда следует, что группа автоморфизмов решётки $\mathbb{A}$ изоморфна мультипликативной группе всех положительных действительных чисел. Применяется техника однопорожждённых подалгебр.

Abstract

V. V. Sidorov, Automorphisms of the lattice of all subalgebras of the semiring of polynomials in one variable, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 3, pp. 85—96.

In this paper, we describe automorphisms of the lattice $\mathbb{A}$ of all subalgebras of the semiring $\mathbb{R}^+[x]$ of polynomials in one variable over the semifield $\mathbb{R}^+$ of nonnegative real numbers. It is proved that any automorphism of the lattice $\mathbb{A}$ is generated by an automorphism of the semiring $\mathbb{R}^+[x]$ that is induced by a substitution $x \mapsto px$ for some positive real number p . It follows that the automorphism group of the lattice $\mathbb{A}$ is isomorphic to the group of all positive real numbers with multiplication. A technique of unigenerated subalgebras is applied.

Данной работой мы продолжаем исследование [3] решёточных изоморфизмов полукольца $C^+(X)$ всех непрерывных неотрицательных функций для решётки $\mathbb{A}(C^+(X))$ всех его подалгебр. Ключевая роль в этих исследованиях принадлежит однопорожждённым подалгебрам $[f]$ с единицей, $f \in C^+(X)$. В случае бесконечнозначной функции f подалгебра $[f]$ изоморфна полукольцу многочленов $\mathbb{R}^+[x]$, поэтому задача описания решёточных изоморфизмов однопорожждённых подалгебр с единицей для случая, когда порождающие их функции бесконечнозначные, сводится к описанию автоморфизмов решётки всех подалгебр полукольца многочленов $\mathbb{R}^+[x]$. Решению этой задачи и посвящена наша работа.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 3, с. 85—96.

© 2011/2012 Центр новых информационных технологий МГУ,

Издательский дом «Открытые системы»

Введём обозначения и определения, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Исходной алгебраической структурой для нас служит полукольцо. Под *полукольцом* понимается алгебраическая система $\langle S, +, \cdot, 0 \rangle$, в которой $\langle S, +, 0 \rangle$ — коммутативный моноид, $\langle S, \cdot \rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон и $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ для всех $s \in S$. Пусть $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{P}$) — множество всех неотрицательных (положительных) действительных чисел. Легко убедиться, что множество $\mathbb{R}^+[x]$ всех многочленов над полуполем $\mathbb{R}^+$ неотрицательных действительных чисел образует коммутативное полукольцо с единицей. Все рассматриваемые нами многочлены будут из этого полукольца. Для обозначения их коэффициентов используются буквы a и b (часто индексированные).

Подалгеброй в полукольце $\mathbb{R}^+[x]$ мы называем произвольное его подполукольцо, выдерживающее умножение на числа (константы) из $\mathbb{R}^+$. Простейшими примерами подалгебр служат нулевая подалгебра 0 , подалгебра констант $\mathbb{R}^+$ и само полукольцо $\mathbb{R}^+[x]$. Обозначим через $\mathbb{A}$ решётку всех подалгебр полукольца $\mathbb{R}^+[x]$ относительно включения $\subseteq$ (символ $\subset$ в дальнейшем всегда означает строгое включение). Решёточными операциями в $\mathbb{A}$ служат $A \wedge B = A \cap B$ и $A \vee B = A + B + AB$, где

$$AB = \left\{ \text{конечная сумма } \sum f_i g_i : f_i \in A, g_i \in B \right\}.$$

Решётка $\mathbb{A}$ является алгебраической, т. е. полной компактно порождённой [2, с. 111]. Множество подалгебр с единицей полукольца $\mathbb{R}^+[x]$ образует подрешётку решётки $\mathbb{A}$, которую обозначим через $\mathbb{A}_1$.

Наименьшую подалгебру $A \in \mathbb{A}$, содержащую многочлен $f \in \mathbb{R}^+[x]$, назовём *однопорождённой* и обозначим $\langle f \rangle$. Она состоит из всевозможных многочленов от f без свободных членов с коэффициентами из $\mathbb{R}^+$. Подалгебре

$$[f] = \langle f \rangle \vee \mathbb{R}^+ = \langle f \rangle + \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+[f]$$

с единицей также будем называть *однопорождённой*. Через $\mathbb{A}_f$ обозначим подрешётку решётки $\mathbb{A}_1$, образованную подалгебрами, включёнными в $[f]$. Отметим, что если многочлен f отличен от константы, то полукольца $\mathbb{R}^+[f]$ и $\mathbb{R}^+[x]$, а значит, и соответствующие им решётки $\mathbb{A}_f$ и $\mathbb{A}_1$ изоморфны.

Через $\text{Supp}(f)$ и $\text{mindeg}(f)$ обозначим множество степеней ненулевых мономов и степень младшего монома многочлена f соответственно (степень нулевого многочлена считаем равной нулю). Под *длиной многочлена* f понимаем мощность множества $\text{Supp}(f)$ и обозначаем её $\text{lp}(f)$. Например,

$$\text{Supp}(4 + 3x^5) = \{0, 5\}, \quad \text{mindeg}(4 + 3x^5) = 0, \quad \text{lp}(4 + 3x^5) = 2.$$

Изучение автоморфизмов решётки $\mathbb{A}$ естественно начать с описания автоморфизмов самого полукольца $\mathbb{R}^+[x]$. Известно, что автоморфизмы кольца многочленов $\mathbb{R}[x]$ получаются линейными заменами x на $ax + b$, $a \neq 0$ [1, с. 40]. Аналогичный результат имеет место и для полукольца $\mathbb{R}^+[x]$.

Предложение 1. Любой автоморфизм полукольца многочленов $\mathbb{R}^+[x]$ получается заменой переменной $x \mapsto px$, $p \in \mathbb{P}$. Таким образом, группа автоморфизмов полукольца $\mathbb{R}^+[x]$ изоморфна мультипликативной группе всех положительных действительных чисел.

Доказательство. Легко убедиться, что любой автоморфизм полукольца $\mathbb{R}^+[x]$ постоянен на полуполе $\mathbb{R}^+$. Поэтому автоморфизмы $\mathbb{R}^+[x]$ задаются образом многочлена x . Ввиду сюръективности автоморфизма образом x не может служить многочлен степени выше первой и линейный двухчлен $ax + b$, $b > 0$. Значит, образом x может быть лишь одночлен px , $p \in \mathbb{P}$. Наконец, заметим, что замена переменной x на px задаёт автоморфизм $\mathbb{R}^+[x]$. $\square$

Приступим к описанию автоморфизмов решёток $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}_1$. Для этого установим несколько фактов, касающихся однопорождённых подалгебр. Начнём с их решёточной характеристики.

Предложение 2. Однопорождённые подалгебры из $\mathbb{A}$ ($\mathbb{A}_1$) — это в точности $\vee$ -неразложимые компактные элементы решётки $\mathbb{A}$ ($\mathbb{A}_1$).

Доказательство. Очевидно, однопорождённые подалгебры являются компактными элементами. Докажем их $\vee$ -неразложимость. Допустим, что некоторая однопорождённая подалгебра $[f] \in \mathbb{A}_1$ $\vee$ -разложима, т. е. $[f] = A \vee B$ для некоторых подалгебр $A, B \subset [f]$ (очевидно, $[f] \neq \mathbb{R}^+$). Элементами A и B служат многочлены $g \in \mathbb{R}^+[f]$, причём $\deg(g) \geq 2$ для многочленов g без свободного члена. Поэтому многочлен f как элемент подалгебры $A \vee B$ имеет вид

$$f = a_0 + a_1 f + \dots + a_n f^n, \quad a_n > 0, \quad n \geq 1,$$

причём $n \geq 2$ в случае $a_0 = 0$. Противоречие. Значит, все однопорождённые подалгебры решётки $\mathbb{A}_1$ будут её $\vee$ -неразложимыми элементами. $\vee$ -неразложимость подалгебры $\langle f \rangle$ в $\mathbb{A}$ устанавливается аналогично.

Для завершения доказательства осталось заметить, что в решётке $\mathbb{A}$ компактность подалгебры равносильна её конечной порождённости, и если любая система образующих конечно порождённой подалгебры содержит больше одного элемента, то такая подалгебра $\vee$ -разложима. $\square$

Теперь выясним, когда равны однопорождённые подалгебры. Очевидно, что пропорциональности порождающих их многочленов достаточно. Оказывается, верно и обратное.

Лемма 3. Равносильны следующие соотношения: $\langle f \rangle = \langle g \rangle$; $[f] = [g]$; f и g пропорциональны.

Доказательство. Импликации

$$\langle f \rangle = \langle g \rangle \implies [f] = [g], \quad (f = pg, p \in \mathbb{P}) \implies \langle f \rangle = \langle g \rangle$$

очевидны. Пусть $[f] = [g]$. Тогда $f = u(g)$ и $g = v(f)$ для некоторых $u \in \mathbb{R}^+[g]$ и $v \in \mathbb{R}^+[f]$. Поэтому $f = (u \circ v)(f)$. Это возможно лишь тогда, когда u и v — мономы первой степени, т. е. многочлены f и g пропорциональны. $\square$

Простейшим примером решёточной характеристики подалгебры из $\mathbb{A}$ служит следующая очевидная и важная для дальнейшего лемма.

Лемма 4. *Подалгебра констант $\mathbb{R}^+$ — единственный атом решётки $\mathbb{A}$ и наименьший элемент решётки $\mathbb{A}_1$.*

Из леммы 4 получаем, что автоморфизмы решётки $\mathbb{A}$ оставляют подалгебру констант $\mathbb{R}^+$ на месте. Поэтому ограничение автоморфизма решётки $\mathbb{A}$ на $\mathbb{A}_1$ будет автоморфизмом решётки $\mathbb{A}_1$. Кроме того, из предложения 2 и леммы 4 следует, что при автоморфизме решётки $\mathbb{A}$ образом однопорождённой подалгебры без единицы (с единицей) будет однопорождённая подалгебра без единицы (с единицей). Эти факты в дальнейшем используются без специальных упоминаний.

Обозначим через φ_p автоморфизм полукольца $\mathbb{R}^+[x]$, получаемый заменой x на px , $p \in \mathbb{P}$. Ему соответствует автоморфизм α_p решётки $\mathbb{A}$, действующий по правилу

$$\alpha_p: A \mapsto \varphi_p(A) \text{ для любой } A \in \mathbb{A}.$$

Очевидно, что устанавливаемое при этом соответствие $\text{iso}: p \mapsto \alpha_p$ является гомоморфизмом мультипликативной группы положительных действительных чисел в группу автоморфизмов решётки $\mathbb{A}$. Покажем, что гомоморфизм iso на самом деле является изоморфизмом, и тем самым полностью опишем автоморфизмы решётки $\mathbb{A}$. Для этого установим следующую теорему.

Теорема 5. $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{A}_1)$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha_p|_{\mathbb{A}_1}$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$.

Действительно, из теоремы 5 выводится следующий результат.

Теорема 6. $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{A})$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \alpha_p$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$. Таким образом, группы автоморфизмов решёток $\mathbb{A}$ и $\mathbb{A}_1$ изоморфны мультипликативной группе $\mathbb{P}$ всех положительных действительных чисел.

Доказательство. Пусть $\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{A})$. Тогда согласно теореме 5 $\alpha|_{\mathbb{A}_1} = \alpha_p|_{\mathbb{A}_1}$ для некоторого $p \in \mathbb{P}$. В частности, $\alpha([f]) = \alpha_p([f])$ для любой алгебры $[f] \in \mathbb{A}$. Поэтому если $\alpha(\langle f \rangle) = \langle g \rangle$, то

$$\alpha([f]) = \alpha(\langle f \rangle \vee \mathbb{R}^+) = \alpha(\langle f \rangle) \vee \alpha(\mathbb{R}^+) = \langle g \rangle \vee \mathbb{R}^+ = [g].$$

Следовательно, $[g(x)] = \alpha_p([f(x)]) = [f(px)]$. Значит,

$$\alpha(\langle f(x) \rangle) = \langle g(x) \rangle = \langle f(px) \rangle$$

по лемме 3, т. е. автоморфизмы α и α_p совпадают на однопорождённых подалгебрах решётки $\mathbb{A}$. Поскольку любая подалгебра из $\mathbb{A}$ является точной верхней гранью включённых в неё однопорождённых подалгебр, то $\alpha = \alpha_p$. $\square$

Остаётся доказать теорему 5. Для этого нам понадобится ряд вспомогательных утверждений, подобных предложению 2 и лемме 4. Наша ближайшая цель — дать решёточную характеристику подалгебр $[f]$ с заданным множеством $\text{Supp}(f)$. Для этого мы докажем леммы 7–15 и предложения 10 и 11.

Условимся называть подалгебру $[g] \subset [f]$ $\vee$ -включённой в $[f]$, если $[g] \subset [u] \vee [v]$ для некоторых подалгебр $[u]$ и $[v]$ из $[f]$, отличных от $[g]$ и $[f]$, и $\vee$ -невключённой в $[f]$, если такой пары подалгебр $[u]$ и $[v]$ нет.

Лемма 7. Для подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}^+$ и подалгебры $[g] \subset [f]$, такой что

$$[g] = [a_n f^n], \quad a_n > 0, \quad n \geq 4, \quad \text{или}$$

$$[g] = [a_m f^m + \dots + a_n f^n], \quad a_m > 0, \quad a_n > 0, \quad m < n,$$

подалгебра $[g]$ является $\vee$ -включённой в $[f]$.

Доказательство. Если $[g] = [a_n f^n]$, то положим $[u] = [f^2]$ и $[v] = [f^{n-2}]$. Иначе положим

$$u = \frac{1}{2}(a_m f^m + \dots + a_{n-1} f^{n-1}) + \frac{2}{3} a_n f^n, \quad v = g - u.$$

Тогда $[g] \subset [u] \vee [v]$, и подалгебры $[u]$ и $[v]$ отличны от подалгебр $[f]$ и $[g]$ по лемме 3. $\square$

Лемма 8. Для подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}^+$ множество однопорождённых подалгебр, $\vee$ -невключённых в $[f]$, — это в точности $\{[f^2], [f^3]\}$.

Доказательство. По лемме 7 подалгебры $[f^2]$ и $[f^3]$ — единственные претенденты на однопорождённые подалгебры, $\vee$ -невключённые в $[f]$. Для завершения доказательства остаётся заметить, что любой ненулевой моном положительной степени из подалгебры $[u] \vee [v]$, где подалгебры $[u] \subset [f]$ и $[v] \subset [f]$ отличны от $[f^2]$ ($[f^3]$), имеет степень выше второй (вторую или выше третьей). $\square$

Лемма 9. Для подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}^+$ и подалгебры $[g]$, такой что

$$[g] \subset [f^n] \vee [f^{n+1}], \quad [g] \not\subset [f^n], \quad [g] \not\subset [f^{n+1}], \quad n \geq 2,$$

эквивалентны следующие условия:

- 1) $[g] = [f^{2n+1}]$;
- 2) $\{[u], [v]\} = \{[f^n], [f^{n+1}]\}$ тогда и только тогда, когда $[g] \subset [u] \vee [v]$, где $[u] \neq [v]$ — подалгебры из $[f^n] \vee [f^{n+1}]$, отличные от $[g]$.

Доказательство. Пусть $[f] \neq \mathbb{R}^+$ и $n \geq 2$. Тогда

$$[f^{2n+1}] \subset [f^n] \vee [f^{n+1}], \quad [f^{2n+1}] \not\subset [f^n], \quad [f^{2n+1}] \not\subset [f^{n+1}].$$

Поэтому для подалгебры $[g] = [f^{2n+1}]$ выполняются условия леммы 9. Далее, $[f^n] \neq [f^{n+1}]$ по лемме 3. Импликация $\implies$ в условии 2) установлена. Докажем обратную импликацию. Заметим, что многочлен f^{2n+1} представим многочленом от f^n и f^{n+1} единственным способом: $f^{2n+1} = f^n f^{n+1}$. По условию подалгебра $[f^{2n+1}]$ отлична от $[u]$ и $[v]$ и $[u] \vee [v] \subset [f^n] \vee [f^{n+1}]$. Поэтому $f^{2n+1} \notin [u] \vee [v]$, если $\{[u], [v]\} \neq \{[f^n], [f^{n+1}]\}$. Импликация 1) $\implies$ 2) установлена.

Обратно, пусть условие 2) выполнено и $[g] \subset [f^n] \vee [f^{n+1}]$. Тогда многочлен g имеет вид

$$g = a_{ij} f^{ni} f^{(n+1)j} + \dots + a_{pl} f^{np} f^{(n+1)l}, \quad i, j, \dots, p, l \in \mathbb{N}_0.$$

Допустим, что g не моном от f . Не ограничивая общности, можно считать, что

$$a_{ij} > 0, \quad a_{pl} > 0, \quad ni + (n+1)j < \dots < np + (n+1)l.$$

Положим

$$u = \frac{1}{2}(a_{ij}f^{ni}f^{(n+1)j} + \dots) + \frac{2}{3}a_{pl}f^{np}f^{(n+1)l}, \quad v = g - u.$$

Тогда $[u], [v] \subset [f^n] \vee [f^{n+1}]$ и $[g] \subset [u] \vee [v]$, так как $g = u + v$. Кроме того,

$$[g] \neq [u], \quad [g] \neq [v], \quad [u] \neq [v], \quad \{[u], [v]\} \neq \{[f^n], [f^{n+1}]\}$$

по лемме 3, т. е. условие 2) не выполняется. Противоречие. Значит, g как многочлен от f обязательно моном. Пусть $[g] = [f^{ni}f^{(n+1)j}]$. Тогда $i, j \in \mathbb{N}$, так как $[g] \not\subseteq [f^n]$ и $[g] \not\subseteq [f^{n+1}]$ по условию. Положим $[u] = [f^{ni}]$, $[v] = [f^{(n+1)j}]$. Очевидно, $[g] \subset [u] \vee [v]$ и $[u], [v] \subset [f^n] \vee [f^{n+1}]$. По лемме 3 подалгебра $[g]$ отлична от $[u]$ и $[v]$. Кроме того, $[u] \neq [v]$, так как в противном случае $[g] \subseteq [u] \subseteq [f^n]$, что противоречит условию леммы. Теперь если $i \geq 2$ или $j \geq 2$, то $\{[u], [v]\} \neq \{[f^n], [f^{n+1}]\}$ по лемме 3 и условие 2) нарушается. Значит, $i = j = 1$, т. е. $[g] = [f^{2n+1}]$. $\square$

Предложение 10. Для подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}^+$ и показателя $n \in \mathbb{N}$ подалгебра $[f^n]$ имеет решёточную характеристику в $\mathbb{A}_f$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n . Базой служат случаи $n = 2$ и $n = 3$. Разберём их. Воспользуемся леммой 8 и рассмотрим множество подалгебр $\{[f^2], [f^3]\}$. Опишем свойства решётки $\mathbb{A}_f$, позволяющие различить подалгебры $[f^2]$ и $[f^3]$. С этой целью применим лемму 8 к решёткам $\mathbb{A}_{f^2}$ и $\mathbb{A}_{f^3}$ и рассмотрим множества подалгебр $\{[f^4], [f^6]\}$ и $\{[f^6], [f^9]\}$. Их симметрическая разность есть $\{[f^4], [f^9]\}$. Применим лемму 9 для $n = 2$ и рассмотрим подалгебру $[f^5]$. Очевидно, $[f^9] \subset [f^4] \vee [f^5]$, но $[f^4] \not\subseteq [f^9] \vee [f^5]$. Таким образом, мы можем отличить подалгебру $[f^4]$ от $[f^9]$, а значит, и $[f^2]$ от $[f^3]$.

Пусть имеется характеристика подалгебр вида $[f^n]$ для всех $n < k$, $k \geq 4$. Если k нечётное, то подалгебра $[f^k]$ может быть получена применением леммы 9 для $n = (k-1)/2$. В случае чётного k рассмотрим подалгебру $[f^{k/2}]$. Её «квадрат» даёт $[f^k]$. $\square$

Предложение 11. Для подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}^+$ в $\mathbb{A}_f$ имеется решёточная характеристика подалгебр $[f + r]$, $r \in \mathbb{P}$.

Доказательство. Воспользуемся предложением 10 и рассмотрим множество подалгебр M :

$$M = \{[g] \subseteq [f] : [g] \not\subseteq [f^2] \vee [f^3], [g^2] \not\subseteq [f^2] \vee [f^3]\}.$$

Легко убедиться, что $[g] \in M$ тогда и только тогда, когда

$$g = a_0 + a_1f + \dots + a_mf^m, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0.$$

В частности, $[f + r] \in M$ для всех $r \in \mathbb{P}$. Докажем, что множество подалгебр вида $[f + r]$, $r \in \mathbb{P}$, совпадает с $M \setminus M_{\geq 2}$, где

$$M_{\geq 2} = \{[g] \in M : [g] \subset [h] \subset [f] \text{ для некоторой подалгебры } [h], [h] \subset [f^2] \vee [f^3]\}.$$

Ясно, что если $[g] \in M$ и $\deg(g) \geq 2$, то $[g] \in M_{\geq 2}$, так как в качестве $[h]$ можно взять подалгебру $[g - a_0]$, где a_0 — свободный член g . Предположим теперь, что $[f + r] \in M_{\geq 2}$ для некоторого $r \in \mathbb{P}$, т. е. нашлась подалгебра $[h] \subset [f]$, такая что $[f + r] \subset [h]$ и $[h^2] \subseteq [f^2] \vee [f^3]$. Очевидно, что h как многочлен от f имеет вид $h = b_0 + b_1 f$, $b_0 > 0$, $b_1 > 0$. Но тогда $[h^2] \not\subseteq [f^2] \vee [f^3]$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения. $\square$

Следующая лемма показывает, что если многочлен f отличен от константы, то на множестве подалгебр вида $[f + r]$, $r \in \mathbb{R}^+$, включение $\subset$ задаёт порядок, согласованный с естественным порядком на $\mathbb{R}^+$.

Лемма 12. Для подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}^+$ и чисел $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^+$ $[f + r_1] \subset [f + r_2]$ тогда и только тогда, когда $r_1 > r_2$.

Доказательство. Пусть $r_1 > r_2$. Положим $g = f + r_2$, $r = r_1 - r_2$. Тогда $[g + r] \subseteq [g]$ и $[g] \neq [g + r]$ по лемме 3, т. е. $[g + r] \subset [g]$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Следствие 13. Для подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}^+$ в $\mathbb{A}_1$ существует решётчатая характеристизация подалгебры $[f - a_0]$, где a_0 — свободный член многочлена f .

Доказательство. Легко убедиться, что следующие условия для подалгебры $[g] \subseteq [f]$ равносильны:

- 1) $[g] = [f - a_0]$;
- 2) выполняются следующие условия:
 - а) $[f] = [g + r]$ для некоторого $r \in \mathbb{R}^+$;
 - б) для любой подалгебры $[h]$, такой что $[f] = [h + r]$ для некоторого $r \in \mathbb{R}^+$, имеем $[h] \subseteq [g]$.

Условия 2) решётчатые согласно предложению 11 и лемме 12. $\square$

Лемма 14. Для подалгебры $[f]$ в $\mathbb{A}_1$ имеется решётчатая характеристизация степени многочлена f .

Доказательство. Предложение 10 покрывает случай $\text{lp}(f) = 1$. Пусть $\text{lp}(f) \geq 2$. Докажем, что равенство $\deg(f) = n$ выполняется тогда и только тогда, когда n — наибольшая степень, для которой найдётся подалгебра $[g] \in \mathbb{A}_1$, такая что

$$[f] \subseteq [g] \vee [x^n], \quad [f] \not\subseteq [g]. \quad (1)$$

Действительно, условия (1) означают, что многочлен f , будучи многочленом от g и x^n , содержит ненулевой моном вида $a_{ij}g^i x^{nj}$, $i \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}$. Поэтому $n \leq \deg(f)$. С другой стороны, $n \geq \deg(f)$, так как условия (1) выполняются для подалгебры

$$[g] = \left[f - \frac{1}{2}a_n x^n \right],$$

где $a_n x^n$ — старший моном многочлена f . Значит, $n = \deg(f)$. $\square$

Лемма 15. Для подалгебры $[f] = [x^n + g]$, $1 \leq \min \deg(g)$, $\deg(g) < n$, в $\mathbb{A}_1$ существует решётчатая характеристизация подалгебры $[g]$.

Доказательство. Воспользуемся леммами 11 и 14 и рассмотрим подалгебру $[h]$, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $\deg(h) < n$;
- 2) $[f] \subseteq [h] \vee [x^n]$;
- 3) $\deg(h) \geq \deg(u)$ для любой подалгебры $[u]$, удовлетворяющей условиям 1) и 2).

Поскольку условия 1) и 2) выполнены для подалгебры $[g]$, то такая подалгебра $[h]$ найдётся, причём $\deg(h) \geq \deg(g)$. Докажем, что условия 1)–3) определяют подалгебру $[h]$ единственным образом, т. е. $[h] = [g]$.

Из неравенств $\mindeg(g) \geq 1$ и $\deg(h^i x^{nj}) > n$ при $i + j \geq 2$, $i \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}$, получаем, что многочлен f как элемент подалгебры $[h] \vee [x^n]$ имеет вид

$$x^n + g = a_{10}x^n + a_{01}h + \dots + a_{0m}h^m, \quad a_{0m} > 0, \quad m \geq 1, \quad (2)$$

причём $\mindeg(h) \geq 1$. Если $m = 1$, то $g = a_{01}h$, а потому $[g] = [h]$. Допустим, что $m \geq 2$. Тогда в случае $\text{lp}(h) = 1$ необходимо $g = a_{01}h$, т. е. $[g] = [h]$. Если же $\text{lp}(h) \geq 2$, то

$$\deg(h)(m-1) + \mindeg(h) \in \text{Supp}(h^m), \quad \deg(g) < \deg(h)(m-1) + \mindeg(h) < n,$$

что противоречит равенству (2). $\square$

Предложение 16. Для подалгебры $[f]$ в $\mathbb{A}_1$ существует решётчатая характеристика множества $\text{Supp}(f)$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по длине многочлена f . Предложение 10 покрывает случай $\text{lp}(f) = 1$. Допустим, предложение доказано для всех многочленов f , длина которых меньше n . Разберём случай $\text{lp}(f) \geq n$. Применим следствие 13 и перейдём от подалгебры $[f]$ к подалгебре $[f - a_0]$, где a_0 — свободный член многочлена f . Если $\text{lp}(f - a_0) = n - 1$, то $\text{Supp}(f) = \{0\} \cup \text{Supp}(f - a_0)$, а элементы множества $\text{Supp}(f - a_0)$ могут быть найдены согласно индукционному предположению. Если $a_0 = 0$, то применим лемму 15 и перейдём к подалгебре $[(f - a_m x^m)]$, где $a_m x^m$ — старший моном многочлена f . Тогда $\text{Supp}(f) = \{m\} \cup \text{Supp}(f - a_m x^m)$, а элементы множества $\text{Supp}(f - a_m x^m)$ в случае $\text{lp}(f - a_m x^m) = n - 1$ могут быть найдены согласно индукционному предположению. Таким образом, имеется решётчатая характеристика подалгебр $[f]$, $\text{lp}(f) = n$, и для них могут быть найдены элементы множества $\text{Supp}(f)$. Индукционный шаг, а вместе с ним и утверждение предложения доказаны. $\square$

В дальнейшем будем использовать предложение 16 без особых упоминаний.

Лемма 17. Для подалгебры $[f]$ и числа $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq -\mindeg(f)$, в $\mathbb{A}_1$ существует решётчатая характеристика подалгебры $[fx^m]$.

Доказательство. Если $\text{lp}(f) = 1$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\text{lp}(f) \geq 2$.

1. $m \geq \deg(f) + 1$. Рассмотрим подалгебру $[g]$, такую что

$$\text{Supp}(g) = \text{Supp}(fx^m), \quad [g] \subseteq [f] \vee [x^m],$$

но

$$[g] \not\subseteq [f + r] \vee [x^m] \text{ для любого } r \in \mathbb{P}. \quad (3)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \text{lp}(f^i) &> \text{lp}(g) \text{ при } i \geq 2, \quad \deg(x^{jm}) > \deg(g) \text{ при } j \geq 2, \\ \text{mindeg}(a_{00} + a_{10}f) &< \text{mindeg}(g), \end{aligned}$$

то многочлен g как элемент подалгебры $[f] \vee [x^m]$ имеет вид

$$g = a_{01}x^m + a_{11}fx^m.$$

Предположим, $a_{01} > 0$. Тогда $[g] \subseteq [f + a_{11}/a_{01}] \vee [x^m]$, что противоречит условию (3). Значит, если подалгебра $[g]$ существует, то необходимо $[g] = [fx^m]$. Остаётся проверить, что для подалгебры $[fx^m]$ выполняется условие (3). Рассуждая от противного, получаем, что

$$fx^m = a_{01}x^m + a_{11}(f + r)x^m \text{ для некоторого } r \in \mathbb{P},$$

или

$$f = a_{01} + a_{11}(f + r),$$

что верно, только если многочлен f — константа. Противоречие.

2. $m \geq -\text{mindeg}(f)$. Воспользуемся результатами пункта 1 и рассмотрим подалгебру $[g]$, такую что

$$\text{Supp}(g) = \text{Supp}(fx^m), \quad [gx^{2\deg(f)+m+1}] = [fx^{2\deg(f)+2m+1}].$$

Очевидно, существует единственная такая подалгебра $[g] = [fx^m]$. $\square$

Следующая лемма обобщает лемму 15.

Лемма 18. Для подалгебры $[f] = [x^n + g]$, $\deg(g) < n$, в $\mathbb{A}_1$ существует решёточная характеристика подалгебры $[g]$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 17 и рассмотрим подалгебру $[fx]$. Затем, применив лемму 15, найдём подалгебру $[gx]$. Остаётся воспользоваться леммой 17 и перейти к подалгебре $[(gx)x^{-1}] = [g]$. $\square$

Лемма 19. Для подалгебр $[f] \neq \mathbb{R}^+$, $[f + r]$, $r \in \mathbb{P}$, и числа $n \in \mathbb{N}$ в $\mathbb{A}_1$ имеется решёточная характеристика подалгебры $[f + nr]$.

Доказательство. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть $n \geq 2$. Воспользуемся предложением 10 и рассмотрим подалгебру $[f_1] = [(f + r)^n]$. Далее последовательно применим следствие 13 и лемму 17 и перейдём от подалгебры $[f_1]$ к подалгебре $[f_2] = [(f_1 - r_1)x^{-1}]$, где r_1 — свободный член многочлена f_1 . Повторяя подобные рассуждения, на шаге $n - 1$ перейдём от подалгебры $[f_{n-1}]$ к подалгебре $[f_n] = [(f_{n-1} - r_{n-1})x^{-1}] = [f + nr]$. $\square$

Предложение 20. Для подалгебры $[f] \neq \mathbb{R}^+$ и подалгебр $[f + a]$ и $[f + b]$, где $a, b \in \mathbb{P}$, в $\mathbb{A}_1$ существует решёточная характеристика частного a/b .

Доказательство. Согласно леммам 12 и 19 для произвольных натуральных чисел p, q и n в $\mathbb{A}_1$ имеется решёточная характеристика двойного неравенства $pb \leq an \leq qb$. Таким образом, для любых двух рациональных чисел p/n и q/n , $p \leq q$, свойствами решётки $\mathbb{A}_1$ можно установить, принадлежит число a/b отрезку $[p/n; q/n]$ или нет. Отсюда следует доказываемое утверждение. $\square$

Лемма 21. Для подалгебры $[x + r]$, $r \in \mathbb{P}$, и числа $n \in \mathbb{N}$ в $\mathbb{A}_1$ существует решёточная характеристика подалгебры $[x^n + r^n]$.

Доказательство. Случай $n = 1$ очевиден. Пусть $n \geq 2$. Воспользуемся леммой 17 и рассмотрим подалгебру $[x^n + r']$, $r' \in \mathbb{P}$, такую что

$$[(x + r)^n x^{n+1}] \subseteq [(x^n + r')x^{n+1}] \vee [fx^{n+1}] \quad (4)$$

для некоторой подалгебры

$$[f] = [a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1}], \quad a_1 > 0, \dots, a_{n-1} > 0.$$

Если $r' = r^n$, то включение (4) выполнено для подалгебры

$$[f] = [(x + r)^n - x^n - r^n].$$

Докажем, что при $r' \neq r^n$ такой подалгебры $[f]$ нет. В самом деле, поскольку

$$\deg((x + r)^n x^{n+1}) = 2n + 1,$$

$$\deg((x^{n+1}(x^n + r'))^i (fx^{n+1})^j) > 2n + 1 \quad \text{при } i, j \in \mathbb{N}_0, \quad i + j \geq 2,$$

то многочлен $(x + r)^n x^{n+1}$ как элемент подалгебры $[x^{n+1}(x^n + r')] \vee [fx^{n+1}]$ имеет вид

$$(x + r)^n x^{n+1} = a_{10}(x^n + r')x^{n+1} + a_{01}fx^{n+1}.$$

Приравняв коэффициенты при x^{2n+1} и x^{n+1} , находим, что $a_{10} = 1$, $r^n = a_{10}r'$. Тогда $r' = r^n$. $\square$

Лемма 22. Для подалгебры

$$[f] = [x^{n+m} + a_n x^n + g], \quad a_n > 0, \quad \deg(g) \leq n - 1, \quad n, m \in \mathbb{N},$$

в $\mathbb{A}_1$ существует решёточная характеристика подалгебры $[x^{n+m} + a_n x^n]$.

Доказательство. Воспользуемся леммой 17 и рассмотрим подалгебру $[(x^{m+n} + b_n x^n)x^{m+n+1}]$, $b_n > 0$, такую что

$$[fx^{m+n+1}] \subseteq A, \quad \text{где } A = [(x^{m+n} + b_n x^n)x^{m+n+1}] \vee [hx^{m+n+1}] \quad (5)$$

для некоторой подалгебры $[h]$, $\text{Supp}(h) = \text{Supp}(g)$.

Если $b_n = a_n$, то включение 5 выполнено для подалгебры $[h] = [g]$. Покажем, что в случае $b_n \neq a_n$ такой подалгебры $[h]$ нет. Для этого заметим, что многочлен $fx^{m+n+1} \in A$, будучи многочленом степени $2m + 2n + 1$, имеет вид

$$fx^{m+n+1} = a_{10}(x^{m+n} + b_n x^n)x^{m+n+1} + a_{01}hx^{m+n+1}.$$

Приравняв коэффициенты при $x^{2m+2n+1}$ и x^{m+2n+1} , получаем, что $a_{10} = 1$ и $a_{10}b_n = a_n$. Тогда $b_n = a_n$. $\square$

Доказательство теоремы 5. Пусть α — автоморфизм решётки $\mathbb{A}_1$ и

$$\alpha: [x + 1] \mapsto [x + p], \quad p \in \mathbb{P}. \quad (6)$$

Докажем, что $\alpha = \alpha_{1/p}$.

Поскольку любая подалгебра $A \in \mathbb{A}_1$ является точной верхней гранью включённых в неё однопорождённых подалгебр, то равенство $\alpha = \alpha_{1/p}$ равносильно тому, что

$$\begin{aligned} \alpha: \left[\sum_{i=0}^n a_i x^i \right] = [f(x)] &\mapsto \left[f\left(\frac{x}{p}\right) \right] = \\ &= \left[p^n f\left(\frac{x}{p}\right) \right] = \left[\sum_{i=0}^n a_i p^{n-i} x^i \right] \quad \text{для любой } [f] \in A_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Докажем соотношение (7) индукцией по длине многочлена f . Для подалгебр $[f] = \mathbb{R}^+$ и $[f] = [x^n]$, $n \in \mathbb{N}$, оно верно в силу предложения 16. Учитывая соотношение (6) и лемму 21, имеем

$$\alpha: [x^n + 1^n] \mapsto [x^n + p^n], \quad n \in \mathbb{N},$$

откуда по предложению 20 получаем, что

$$\alpha: [x^n + a_0] \mapsto [x^n + a_0 p^n], \quad a_0 \in \mathbb{P},$$

а потому по лемме 17

$$\alpha: [x^m(x^n + a_0)] \mapsto [x^m(x^n + a_0 p^n)], \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Итак, для многочленов f длины 1 и 2 соотношение (7) доказано. Это база индукции. Докажем индукционный шаг. Пусть $\text{lp}(f) = k$, $k \geq 3$, и

$$f = x^{n+m} + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0, \quad a_n > 0, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Согласно индукционному предположению

$$\alpha: [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0] \mapsto [a_n x^n + a_{n-1} p x^{n-1} + \dots + a_0 p^n].$$

Поэтому по лемме 18

$$\alpha: [x^{n+m} + a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0] \mapsto [x^{n+m} + q(a_n x^n + a_{n-1} p x^{n-1} + \dots + a_0 p^n)]$$

для некоторого $q \in \mathbb{P}$. Кроме того, согласно индукционному предположению и лемме 22 имеем

$$\alpha: [x^{n+m} + a_n x^n] \mapsto [x^{n+m} + a_n p^m x^n], \quad [x^{n+m} + a_n p^m x^n] = [x^{n+m} + q a_n x^n].$$

Тогда $q = p^m$ по лемме 3. Соотношение (7), а значит, и теорема 5 доказаны. $\square$

Автор благодарит профессора Е. М. Вечтомова за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

- [1] Бурбаки Н. Алгебра (Многочлены и поля. Упорядоченные группы). — М.: Наука, 1965.
- [2] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.
- [3] Сидоров В. В. О строении решёточных изоморфизмов полуколец непрерывных функций // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2009. — Т. 39. — С. 339—341.