Квадратичные формы и квадрики пространств над локальными кольцами*

О. А. СТАРИКОВА
Северо-Восточный федеральный университет
e-mail: star-olga@yandex.ru

УДК 512.7

Ключевые слова: проективное пространство, проективная эквивалентность, локальное кольцо, квадрика, проективная конгруэнтность.

Аннотация

В статье отражаются относительно недавние и новые результаты по перечислению классов проективно конгруэнтных и классов проективно эквивалентных квадрик проективных пространств над локальным кольцом $R = 2R$ с нильпотентным главным максимальным идеалом. Для случая основного кольца R с неглавным максимальным идеалом приводятся перечисления квадрик проективной плоскости с точностью до проективной эквивалентности.

Abstract

O. A. Starikova, Quadratic forms and quadrics of space over local rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 3, pp. 97—110.

Relatively recent and new results on the enumeration of classes of projective congruent quadrics and classes of projective equivalent quadrics of projective spaces over a local ring $R = 2R$ with nilpotent principal maximal ideal are reflected in the paper. For the case of the basic ring R with nonprincipal maximal ideal, the enumerations of quadrics of projective plane are given up to projective equivalence.

Введение

Обобщение основной теоремы проективной геометрии [16] и развитие K-теории стимулировало с 1970-х годов переход в исследованиях квадратичных форм и квадрик проективных пространств от полей к более общим кольцам коэффициентов [1—4, 6, 7, 10]. Задача классификации квадратичных форм тесно связана с задачей классификации схем квадратичных форм (или QF-схем) основных колец коэффициентов [5, 13—15], см. раздел 1.

Согласно [4] кольцо, над которым диагонализируемы все квадратичные формы, в сущности, всегда есть локальное кольцо $R = 2R$ главных идеалов. Проблему классификации симметрических билинейных форм на свободном R-модуле

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00717).

конечного ранга удаётся свести к классификации невырожденных симметрических форм над полем вычетов кольца R [9, 11], однако в перечислениях роль вырожденных форм при переходе к кольцам коэффициентов существенно возрастает.

В [4, теорема 3.2], наряду с перечислением при $|R^* : R^{*2}| \leqslant 2$ квадрик проективного пространства RP_{n-1}, с точностью до проективной конгруэнтности найдено комбинаторное выражение числа $N(n, s)$ их классов, когда максимальный идеал J в R нильпотентен ступени s. Позднее простые формулы для числа $N(n, s)$ нашли Г. П. Егорычев и Е. В. Зима [12, теоремы 1 и 2], используя методы интегрального представления комбинаторных сумм.

В разделе 2 мы решаем проблему из [12]: наряду с интерпретацией формул (1) и (2) из [12], предложена схема их независимого алгебраического доказательства. Вместе с тем предложение 2.2 и теорема 2.3 дают перечисление квадрик с точностью до проективной эквивалентности.

Вопрос классификации квадратичных форм и квадрик над локальным кольцом с неглавным максимальным идеалом является более сложным. Развивая [5], мы рассматриваем его в разделе 3, когда $R = F[[x, y]]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$, $1 + J \subset R^{*2}$, для поля $F = 2F$ и $|F^* : F^{*2}| = 2$. При $-1 \notin R^{*2}$ классы недиагонализируемых квадрик, определяемых нетривиальными клеточно-диагональными матрицами ранга 0, выявляет теорема 3.7.

1. Предварительные замечания и вспомогательные результаты

Всюду далее основное кольцо R коэффициентов является ассоциативно-коммутативным и содержит единицу. Через R^* обозначается его мультипликативная группа обратимых элементов.

Задача классификации квадратичных форм тесно связана с классификацией определяемых ниже QF-схем, или схем квадратичных форм (см. [5, 13—15]) основных колец коэффициентов. Для любых элементов $a = rR^{*2}$ и $b = sR^{*2}$ группы $G = R^*/R^{*2}$ полагаем

$$D(a, b) = \{tR^{*2} \mid t \in (rR^2 + sR^2) \cap R^*\}.$$

Когда R — поле, известны следующие свойства:

1) $D(1, a)$ — подгруппа группы G и $a \in D(1, a)$;
2) $a \in D(1, -b)$ тогда и только тогда, когда $b \in D(1, -a)$;
3) если
$$bD(1, -a) \cap D(1, -ac) \cap dD(1, -c) \neq \varnothing,$$
то
$$aD(1, -b) \cap D(1, -bd) \cap cD(1, -d) \neq \varnothing.$$

Группа $G = R^*/R^{*2}$ с её отображением $a \to D(1,a)$ и выделенным элементом -1 называется QF-схемой поля R. QF-схема поля полностью определяет его кольцо Витта согласно [13—15].

QF-схемы определяют также как абстрактную группу $G = (G, \cdot, 1)$ экспоненты 2 с выделенным элементом $-1 \in G$, $-a := (-1)a$, и отображением $a \to D(1,a)$, удовлетворяющим условиям 1)—3). Эти понятия переносятся и на кольца R.

При $|R^* : R^{*2}| = 2$ для локальных колец R существует ровно три QF-схемы, определяемые в зависимости от соотношений $1+R^{*2} \subset R^{*2}$, $R^* \cap (1+R^2) \nsubseteq R^{*2}$. QF-схемы полей вычетов локальных колец могут быть охарактеризованы следующими условиями:

1) $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$;
2) $R^* \cap (1 + R^2) \nsubseteq R^{*2}$, $-1 \in R^* \setminus R^{*2}$;
3) $R^* \cap (1 + R^2) \nsubseteq R^{*2}$, $-1 \in R^{*2}$.

Проективным пространством, ассоциированным со свободным R-модулем M, называют (см., например, [16]) множество $P(M)$ всех R-свободных прямых слагаемых ранга 1 модуля M. Каждое такое слагаемое представляется в виде Re, где e — элемент из M, на котором подходящая R-линейная функция на M принимает значение 1 (унимодулярный элемент).

Квадрикой проективного пространства RP_{n-1}, ассоциированного со свободным R-модулем ранга n, называют проективное многообразие его точек R^*v ($v = (v_1, \ldots, v_n)$ — унимодулярные векторы), определённое уравнением $vAv^{\mathrm{T}} = 0$ с симметрической $(n \times n)$-матрицей $A \neq 0$ над R. Симметрические $(n \times n)$-матрицы A и B, а также соответствующие им квадрики называем проективно конгруэнтными, если существуют такие $k \in R^*$ и $U \in \mathrm{GL}(n, R)$, что $kA = UBU^{\mathrm{T}}$; при $k = 1$ матрицы A и B называем также конгруэнтными. Квадрики, переводимые друг в друга проективностью RP_{n-1}, называют проективно эквивалентными. Задача классификации квадрик с точностью до проективностей относится к одной из основных в теории квадрик. Следующая обобщённая основная теорема проективной геометрии доказана в [16].

Теорема 1.1. *Пусть M и N — свободные модули конечного ранга не меньше 3 над коммутативными кольцами A и B соответственно. Если $\alpha\colon P(M) \to P(N)$ — проективность, то существуют изоморфизм $\sigma\colon A \to B$ и σ-полулинейный изоморфизм $\Phi\colon M \to N$, такие что $\alpha = P(\Phi)$. Если $\sigma_i\colon A \to B$ — изоморфизм и $\Phi_i\colon M \to N$ — σ_i-полулинейный изоморфизм, $i = 1, 2$, причём $P(\Phi_1) = P(\Phi_2)$, то $\sigma_1 = \sigma_2$ и существует такой элемент $b \in B$, что $\Phi_1 = b\Phi_1$.*

Отметим, что проективности проективного пространства на себя, называемые также его проективными преобразованиями, по умножению образуют группу. Пусть V — свободный R-модуль конечного ранга. Проективные линейные (или σ-полулинейные при $\sigma = 1$) преобразования проективного пространства $P(V)$ по умножению образуют группу $R\Gamma(V)$, изоморфную группе $\mathrm{PGL}(V)$ — фактор-группе группы $\mathrm{GL}(V)$ обратимых линейных преобразований V по её центру (см. также [7]). Через $RA(V)$ обозначим группу автоморфизмов проективного пространства $P(V)$, которые индуцированы автоморфизмами основного кольца R. Ясно, что $RA(V)$ и $R\Gamma(V)$ являются подгруппами группы проективных преобразований проективного пространства $P(V)$, причём $R\Gamma(V)$ — нормальная подгруппа. Более того, из теоремы 1.1 в частном случае, когда $A = B = R$ и $M = N = V$, вытекает следующая лемма.

Лемма 1.2. *Группа проективностей проективного пространства $P(V)$ совпадает с произведением подгруппы $R\Gamma(V)$ на $RA(V)$.*

2. Квадрики проективных пространств над локальными кольцами главных идеалов

Комбинаторное выражение числа классов проективно конгруэнтных квадрик проективного пространства RP_{n-1} получено в [4] для случая кольца R с нильпотентным максимальным идеалом.

Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом, $2 \in R^*$ и $|R^* : R^{*2}| = 2$. Полагаем, что $\binom{p}{q}'$ равно $\binom{p}{q}$ для целых чисел $p \geqslant q \geqslant 0$ и равно 0 в других случаях; $\Omega_q(m)$ — совокупность упорядоченных наборов $(n_1, \ldots, n_q)$ целых чисел $n_j > 0$ с суммой m; $[\ldots]$ — целая часть числа. Тогда по [4, теорема 3.2] число $N(n, s)$ классов проективно конгруэнтных квадрик пространства RP_{n-1} $(n > 2)$ для случаев $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$ и $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ равно соответственно

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} 2^{q-1} \left\{ \binom{m/2-1}{q-1}' + \binom{m-1}{q-1} \right\},$$

$$\sum_{m=1}^{n} \sum_{q=1}^{\min\{m,s\}} \binom{s}{q} \left\{ \binom{m/2-1}{q-1}' + \sum_{(n_1,\ldots,n_q)\in\Omega_q(m)} \left[\frac{1}{2} \prod_{j=1}^{q} (n_j + 1) \right] \right\}.$$

Применяя к этим формулам методы интегрального представления комбинаторных сумм, Г. П. Егорычев и Е. В. Зима нашли простые формулы для числа $N(n, s)$ классов проективно конгруэнтных квадрик проективного пространства RP_{n-1} $(n > 2)$ над локальным кольцом R с максимальным идеалом ступени нильпотентности s. Основные теоремы 1 и 2 из [12] резюмирует следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если $1 + R^{*2} \subset R^{*2}$ или $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$, то*

$$N(n, s) = \frac{1}{2} \binom{n+2s}{2s} + \frac{1}{2} \binom{\lfloor n/2 \rfloor + s}{s} - 1, \tag{1}$$

$$N(n, s) = S(n, s) + S(\lfloor n/2 \rfloor, s) - 1 \tag{2}$$

соответственно, где

$$S(n,s)=\sum_{q=0}^{s}2^{q-1}\binom{s}{q}\binom{n}{q}.$$

В [12, с. 1435] записана следующая проблема: дать независимое алгебраическое доказательство и интерпретацию формул (1) и (2) числа классов проективно конгруэнтных квадрик проективного пространства RP_{n-1} $(n>2)$ над локальным кольцом R с максимальным идеалом ступени нильпотентности s.

Мы рассмотрим *схему доказательства теоремы* 2.1. Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом, $2\in R^*$, $|R^*:R^{*2}|=2$ и $k\in R^*\setminus R^{*2}$. Рассмотрим классы конгруэнтных симметрических $(n\times n)$-матриц над кольцом R с точностью до отношения проективной конгруэнтности. Обозначим через L_1 (L_2) число классов конгруэнтных матриц, инвариантных (соответственно неинвариантных) относительно проективной конгруэнтности. В случае когда матрицы A и kA конгруэнтны, класс конгруэнтных матриц с представителем A очевидно является также классом проективно конгруэнтных матриц. В оставшихся случаях A и kA представляют два различных класса конгруэнтных матриц. Учитывая, что квадрики определяются ненулевыми симметрическими матрицами, получаем

$$N(n,s)=L_1+\frac{1}{2}\,L_2-1=\frac{1}{2}\,(L_1+L_2)+\frac{1}{2}\,L_1-1.$$

Найденный в [4, теоремы 2.1 и 2.2] нормальный диагональный вид конгруэнтных симметрических матриц позволяет выявить как число L_1 классов конгруэнтных матриц, инвариантных относительно проективной конгруэнтности, так и число L_1+L_2 всех классов конгруэнтных матриц. В случае $1+R^{*2}\subseteq R^{*2}$

$$L_1=\binom{\lfloor n/2\rfloor+s}{s},\quad L_1+L_2=\binom{n+2s}{2s},$$

а при $R^*\cap(1+R^2)\nsubseteq R^{*2}$

$$L_1=\sum_{q=0}^{s}2^q\binom{s}{q}\binom{\lfloor n/2\rfloor}{q},\quad L_1+L_2=\sum_{q=0}^{s}2^q\binom{s}{q}\binom{n}{q}.$$

Таким образом, получаем формулы (1) и (2). Теорема доказана.

В определённых случаях (например, при $R=Z_{p^m}$) теорема 2.1 даёт и число классов проективно эквивалентных квадрик. Более точно, справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом $J=\langle\varepsilon\rangle$, $2\in R^*$ и $|R^*:R^{*2}|=2$, причём элементы ε и $k\varepsilon$ для фиксированного неквадрата k неавтоморфны в R. Тогда отношения проективной конгруэнтности и проективной эквивалентности квадрик пространства RP_{n-1} $(n>2)$ совпадают и число классов проективно эквивалентных квадрик равно $N(n,s)$.*

Для перечисления классов проективно эквивалентных квадрик проективного пространства при ограничениях $R^* \cap (1+R^2) \not\subseteq R^{*2}$ и $1+R^{*2} \subset R^{*2}$ согласно теореме 2.1 и предложению 2.2 остаётся рассмотреть случай, когда элементы ε и $k\varepsilon$ автоморфны для фиксированного неквадрата k в R.

Положим в случае $1+R^{*2} \subseteq R^{*2}$

$$U(n,m) = N(n, s-m) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{q+m-1}{q} \bigl(1 + N(n-2q, s-m)\bigr),$$

а при $R^* \cap (1+R^2) \not\subseteq R^{*2}$ —

$$U(n,m) = N(n, s-m) + \sum_{q=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} 2^q \binom{m}{q} \sum_{r=q}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{r-1}{q-1} \bigl(1 + N(n-2r, s-m)\bigr).$$

Теорема 2.3. *Пусть R — локальное кольцо с нильпотентным ступени s главным максимальным идеалом $J = \langle \varepsilon \rangle$, $2 \in R^*$, $|R^* : R^{*2}| = 2$ и элементы ε и $k\varepsilon$ в кольце R автоморфны для неквадрата k. Тогда число классов проективно эквивалентных квадрик проективного пространства RP_{n-1}, $n > 2$, равно*

$$\frac{1}{2}\left(U\left(n, s - \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor\right) + U\left(n, \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor\right) + \frac{1}{2} L_2\right).$$

Доказательство. Найдём число классов проективно эквивалентных квадрик проективного пространства RP_{n-1}, $n > 2$. Обозначим через n_1 (n_2) число классов проективно конгруэнтных квадрик, инвариантных (неинвариантных) относительно проективной эквивалентности. Пусть φ — автоморфизм проективного пространства RP_{n-1}, $n > 2$, индуцированный автоморфизмом кольца R и удовлетворяющий условию $\varphi(\varepsilon) = k\varepsilon$. В случае когда матрицы A и $\varphi(A)$ проективно конгруэнтны, класс проективно конгруэнтных квадрик с представителем A является также классом проективно эквивалентных квадрик. В оставшихся случаях A и $\varphi(A)$ представляют два различных класса проективно конгруэнтных квадрик. Таким образом, число классов проективно эквивалентных квадрик равно

$$n_1 + \frac{1}{2} n_2 = \frac{1}{2}(n_1 + n_2) + \frac{1}{2} n_1.$$

Число $n_1 + n_2$ есть число $N(n,s)$ всех классов проективно конгруэнтных квадрик, найденное в теореме 2.1. Используя найденный в [4, теоремы 2.1 и 2.2] нормальный диагональный вид конгруэнтных симметрических матриц, находим число классов проективно конгруэнтных квадрик, инвариантных относительно проективной эквивалентности:

$$n_1 = U\left(n, s - \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor\right) + U\left(n, \left\lfloor \frac{s}{2} \right\rfloor\right) - (L_1 - 1).$$

Но согласно доказательству теоремы 2.1

$$n_1 + n_2 = N(n,s) = L_1 - 1 + \frac{1}{2} L_2.$$

Поэтому искомое число классов проективно эквивалентных квадрик равно

$$\frac{1}{2}(n_1+n_2)+\frac{1}{2}n_1=\frac{1}{2}\left(U\left(n,s-\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor\right)+U\left(n,\left\lfloor\frac{s}{2}\right\rfloor\right)+\frac{1}{2}L_2\right).$$

Теорема доказана. □

При $n=3$ из теоремы 2.3 легко находим число классов проективно эквивалентных квадрик проективной плоскости RP_2, выявленное ранее в [8, теорема 5].

3. Случай локального кольца с неглавным идеалом

Пусть R — кольцо формальных степенных рядов от переменных x, y над полем F или его фактор-кольцо по степени не ниже 2 максимального идеала. Максимальный идеал $J=\langle x,y\rangle$ в R (радикал Джекобсона) единствен и поэтому является характеристическим. Кроме того, сумма $R=F+J$ прямая и $R^*=$ $=F^*+J=F^*\times(1+J)$.

Если $\varphi\in RA(V)$, то проекции $a^\sigma\in F$ и $a^\lambda\in J$ элемента a^φ $(a\in F)$ определяют автоморфизм σ поля F и гомоморфизм λ аддитивной группы F^+ в J^+, для которых отображение $a\to 1+(a^\sigma)^{-1}a^\lambda$ $(a\in F^*)$ есть гомоморфизм группы F^* в $1+J$. Обратно, всякий автоморфизм σ поля F и гомоморфизм $\lambda\colon F^+\to J^+$, выбранный как выше, определяют автоморфизм $a\to a^\sigma+a^\lambda$ $(a\in F)$ кольца R, тождественный на J. Такие автоморфизмы в группе $RA(V)$ образуют подгруппу $\mathcal{A}_F(R)$ — стабилизатор радикала. Автоморфизмы R, как F-алгебры с единицей, образуют подгруппу $\mathcal{A}(R)$ — стабилизатор F. По доказанному оба стабилизатора в произведении дают $RA(V)$.

Очевидно, что любая матрица $\alpha=\|a_{ij}\|\in\mathrm{GL}_2(F)$ индуцирует автоморфизм

$$\tilde\alpha(t)=t\ \ (t\in F),\quad \tilde\alpha(x)=a_{11}x+a_{12}y,\quad \tilde\alpha(y)=a_{21}x+a_{22}y,$$

причём $^\sim\colon \mathrm{GL}_2(F)\to\mathcal{A}(R)$ — изоморфное вложение. Отсюда вытекает следующая лемма.

Лемма 3.1. *Группа автоморфизмов кольца R допускает факторизацию*

$$RA(V)=\mathcal{A}_F(R)\mathcal{A}(R).$$

Когда идеал J нильпотентен ступени 2, подгруппа $\mathcal{A}(R)$ совпадает с $\widetilde{\mathrm{GL}}_2(F)$ и действует транзитивно на F-линейно независимых парах элементов из J.

В [5] над кольцом $R=F[[x,y]]/\langle x^2,xy,y^2\rangle$, где F — поле характеристики, отличной от 2, с индексом $|F^*:F^{*2}|=2$, с точностью до проективной эквивалентности перечислены классы диагонализируемых квадрик проективной плоскости RP_2, а также недиагонализируемых квадрик ранга выше 0. При $|F^*:F^{*2}|=2$ и $k\in R^*\setminus R^{*2}$ имеем $R^*=R^{*2}\cup kR^{*2}$. Выделим квадрики со следующими матрицами:

$$D_\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & y & \delta x \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$D_{1,1} = \mathrm{diag}(x, y, x+y), \quad D_{k,k} = k \cdot \mathrm{diag}\big(x, y, k^{-1}(x+y)\big), \tag{4}$$

$$\mathrm{diag}(1, x, y), \quad \mathrm{diag}(x, y, 0), \quad \mathrm{diag}(x, y, x), \quad \mathrm{diag}(x, y, kx), \tag{5}$$

$$\mathrm{diag}(1, 1, 0), \quad \mathrm{diag}(1, k, 0), \quad \mathrm{diag}(1, 1, x), \quad \mathrm{diag}(1, k, x), \tag{6}$$

$$\mathrm{diag}(1, 0, 0), \quad \mathrm{diag}(1, x, 0), \quad \mathrm{diag}(1, x, x), \quad \mathrm{diag}(1, x, kx), \tag{7}$$

$$\mathrm{diag}(x, 0, 0), \quad \mathrm{diag}(x, x, 0), \quad \mathrm{diag}(x, kx, 0), \quad \mathrm{diag}(x, x, x), \tag{8}$$

$$\mathrm{diag}(1, 1, k), \quad \mathrm{diag}(x, x, kx). \tag{9}$$

Теорема 3.2 [5, теорема 4.3]. *Пусть $R = F[[x,y]]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$, где F — поле характеристики, отличной от 2, с индексом $|F^* : F^{*2}| = 2$. Тогда недиагонализируемые проективно эквивалентные квадрики проективной плоскости RP_2 образуют в случае ранга выше 0 в точности два класса, представляемые матрицами D_0 и D_k из* (3), *а в случае ранга 0 число классов зависит от выбора F и не обязательно конечно. Классы проективно эквивалентных диагонализируемых квадрик при $F^* \cap (1 + F^{*2}) \nsubseteq F^{*2}$ представляются 19 матрицами E* (4)—(8), *а в случае $1 + F^{*2} \subset F^{*2}$ список дополняется двумя классами, которые представляются матрицами* (9).

Задача классификации недиагонализируемых квадрик ранга 0 оказывается более сложной. Всякая недиагонализируемая квадрика ранга 0 проективной плоскости RP_2 проективно эквивалентна квадрике с матрицей вида

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ y & \delta x & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \tag{10}$$

для некоторых $a, b \in R$ и $\delta \in \{0, 1, k\}$.

Случай $a = 0$, $b \in F^*x$ легко приводит к дополнительным ограничениям $b = x$ и $\delta = 0$; если же $a = 0$, $b \in Fx + F^*y$, то координаты $(1,2)$ и $(2,1)$ матрицы (10) преобразуются в множество Fx, и, аннулируя их, приходим к случаю $b = 0$, $\delta = 0$, $a \in \{x, kx\}$. Когда $\langle b\rangle \subseteq \langle a\rangle$, получаем, что $b = 0$ и $\delta \in \{0, k\}$, причём либо $a = \delta_1 y$, $\delta_1 \in \{0, 1, k\}$, либо $a \in \delta_2(x+Fy)$, $\delta_2 \in \{1, k\}$. С другой стороны, число классов проективно эквивалентных квадрик, содержащих квадрику с одной из матриц (10), при $b = 0$, $a \in \delta_2(x + Fy)$ (аналогично при ограничении F-линейной независимости элементов a, b) существенно зависит от F и при имеющемся произволе в выборе поля F не обязано быть даже конечным.

Везде далее $R = F[[x,y]]/\langle x^2, xy, y^2\rangle$, где F — поле характеристики, отличной от 2, $|F^* : F^{*2}| = 2$, $1 + J \subset R^{*2}$ и -1 не является квадратом. Рассмотрим симметрические матрицы вида

$$A(\alpha,\beta,\delta)=\begin{pmatrix}\alpha x+\beta y & 0 & 0\\ 0 & x & y\\ 0 & y & \delta x\end{pmatrix}, \tag{11}$$

где α и β не лежат одновременно в $J=\langle x,y\rangle$, $\delta\in\{0,-1\}$.

Свойства преобразующей матрицы $U\in \mathrm{GL}_3(R)$, описывающей проективные линейные преобразования симметрических матриц вида (11), выявляет следующая лемма.

Лемма 3.3. *Всякое линейное проективное преобразование, сохраняющее клеточно-диагональный вид матрицы $A(\alpha,\beta,\delta)$, $\alpha\in R^*$, определяется матрицей U, имеющей такое же клеточное разбиение по модулю максимального идеала $J=\langle x,y\rangle$.*

Доказательство. Пусть $U=(u_{ij})$ и $UA(\alpha,\beta,\delta)U^{\mathrm T}=B=(b_{ij})$. Требуется показать, что $u_{12},u_{13},u_{21},u_{31}\in J$. Используя линейную независимость элементов x и y из условий $b_{12}=b_{13}=0$ получаем, что

$$\begin{cases} u_{11}u_{21}\alpha+u_{12}u_{22}+u_{13}u_{23}\delta\equiv 0 \pmod J,\\ u_{11}u_{21}\beta+u_{12}u_{23}+u_{13}u_{22}\equiv 0 \pmod J,\\ u_{11}u_{31}\alpha+u_{12}u_{32}+u_{13}u_{33}\delta\equiv 0 \pmod J,\\ u_{11}u_{31}\beta+u_{12}u_{33}+u_{13}u_{32}\equiv 0 \pmod J.\end{cases} \tag{12}$$

Предполагая, что по крайней мере один из элементов u_{12}, u_{23} обратим в R, из системы (12) последовательно получаем, что $u_{22}u_{33}-u_{23}u_{32}\in J$ и $u_{11}\in J$, причём элементы u_{23}, u_{33} (аналогично u_{22}, u_{32}) не лежат одновременно в J. Но тогда

$$\begin{cases} u_{12}u_{22}+u_{13}u_{23}\delta\equiv 0 \pmod J,\\ u_{12}u_{23}+u_{13}u_{22}\equiv 0 \pmod J,\\ u_{12}u_{32}+u_{13}u_{33}\delta\equiv 0 \pmod J,\\ u_{12}u_{33}+u_{13}u_{32}\equiv 0 \pmod J,\end{cases}$$

и тем самым

$$u_{22}^2\equiv \delta u_{23}^2 \pmod J,\quad u_{32}^2\equiv \delta u_{33}^2 \pmod J,$$

что невозможно в случае $\delta=-1$, так как $-1\notin R^{*2}$ и элементы u_{23} и u_{33} не лежат одновременно в J. Если же $\delta=0$, то $u_{22},u_{32}\in J$, что, как и в случае $u_{23},u_{33}\in J$, приводит к противоречию с обратимостью матрицы U.

Окончательно получаем, что $u_{22}u_{33}-u_{23}u_{32}\in R^*$, тем самым $u_{12},u_{13}\in J$, и в силу условий $\alpha,u_{11}\in R^*$ из системы (12) получаем, что $u_{21},u_{31}\in J$, что и требовалось показать. □

Лемма 3.4. *Всякая матрица $A(\alpha,\beta,\delta)$ вида* (11) *над R проективно эквивалентна одной из матриц*

$$A(1,0,0),\quad A(1,0,-1),\quad A(-1,0,0),\quad A(0,1,0),\quad A(1,1,-\gamma^2). \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим матрицы вида (11), где $\delta\in\{0,-1\}$, α, β принадлежат R и не лежат одновременно в J. Если $\beta\in J$, то либо α, либо $-\alpha$

лежит в R^{*2}. Домножая первую строку и столбец матрицы (11) соответственно перечисленным случаям на $(\pm\alpha)^{-1/2}$, получаем матрицу вида $A(\lambda,0,\delta)$, где $\lambda \in \{1,-1\}$. Заметим, что автоморфизм $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$ и линейное преобразование, определяемое матрицей

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

устанавливает проективную эквивалентность матриц $A(-1,0,-1)$ и $A(1,0,-1)$.

В случае $\alpha \in J$ имеем, что $\beta \in R^*$, и с точностью до проективного линейного преобразования можем считать, что $\beta \in \{1,-1\}$. Заметим, что матрица $A(0,-1,\delta)$ проективно эквивалентна матрице $A(0,1,\delta)$. Проективное преобразование в случае $\delta = 0$ определяется автоморфизмом $x \mapsto x$, $y \mapsto -y$ и линейным преобразованием с матрицей $\mathrm{diag}(1,1,-1)$, а в случае $\delta = -1$ автоморфизмом $x \mapsto -x$, $y \mapsto -y$ и линейным преобразованием с матрицей M, определённой выше. Кроме того, матрица $A(0,1,-1)$ проективно эквивалентна матрице $A(1,0,-1)$: автоморфизм определён условиями $x \mapsto y$, $y \mapsto x$, а линейное преобразование для случаев $2 \in F^{*2}$ и $2 \notin F^{*2}$ определяется соответственно матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a \\ 0 & a & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 = 2^{-1}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -a \\ 0 & -a & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 = -2^{-1}.$$

Пусть $\alpha, \beta \in R^*$. Тогда матрица (11) линейным проективным преобразованием приводится к виду $A(\pm 1,\gamma,\delta)$, причём $\gamma \in R^*$. Применяя автоморфизм $x \mapsto x$, $\gamma y \mapsto y$ и линейное преобразование с матрицей $\mathrm{diag}(1,1,\gamma)$, получаем матрицу $A(\pm 1,1,\delta\gamma^2)$. Если $\delta = 0$, то автоморфизм $x \mapsto x \mp y$, $y \mapsto y$ и линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \pm 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

преобразует матрицу $A(\pm 1,1,0)$ в матрицу $A(\pm 1,0,0)$. В случае $\delta = -1$, применяя к матрице $A(-1,1,-\gamma^2)$ автоморфизм $x \mapsto -x$, $y \mapsto y$ и линейное преобразование

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^{-1} \\ 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

получаем матрицу $A(1,1,-\gamma^2)$. Лемма доказана. □

Лемма 3.5. *Пусть $k \in R^*$ и $k^2+1 \in R^{*2}$. Тогда матрицы $A(1,0,-1)$ и $A(1,1,-k^2)$ проективно эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим k^2+1 через t^2, где $t \in R^*$ и удовлетворяет условию $2(t-1) \in R^{*2}$. Такой выбор возможен ввиду условий $|F^* : F^{*2}| = 2$,

$-1 \notin R^{*2}$ и $2(t-1)\cdot 2(-t-1) = -2^2(t^2-1) = -(2k)^2 \in R^* \setminus R^{*2}$. Автоморфизм $x \mapsto t^{-2}x - kt^{-2}y$, $y \mapsto k^2t^{-2}x + kt^{-2}y$ и линейное преобразование с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k/\sqrt{2(t-1)} & \sqrt{2(t-1)}/(2k) \\ 0 & -\sqrt{2(t-1)}/2 & 1/\sqrt{2(t-1)} \end{pmatrix}$$

определяют проективность, преобразующую матрицу $A(1,1,-k^2)$ в матрицу $A(1,0,-1)$. Лемма доказана. $\square$

В случае когда кольцо коэффициентов удовлетворяет условию $R^* \cap (1+R^2) \not\subseteq R^{*2}$, свойства проективной эквивалентности матриц $A(1,1,-\gamma^2)$, $\gamma \in R^*$, выявляет следующая лемма.

Лемма 3.6. *Матрицы $A(1,1,-k^2)$ и $A(1,1,-l^2)$ проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда $(k^2+1)(l^2+1) \in R^{*2}$.*

Доказательство. Пусть $k, l \in R^*$ и $(k^2+1)(l^2+1) \in R^{*2}$. Докажем проективную эквивалентность матриц $A(1,1,-k^2)$ и $A(1,1,-l^2)$. При $l = \pm k$ утверждение очевидно. Рассмотрим случай $l \neq \pm k$. Применяя к матрице $A(1,1,-k^2)$ автоморфизм $x \mapsto \alpha x + \beta y$, $y \mapsto (1-\alpha)x + (1-\beta)y$, где $\alpha = (1 \mp kl)/(k^2+1)$, $\beta = (l \pm k)/\bigl(l(k^2+1)\bigr)$ и линейное проективное преобразование с обратимой матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & c & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$c = \pm s - \frac{1-\beta}{\beta}, \quad b = -\frac{c}{k^2}, \quad s^2 = \frac{k^2}{(l \pm k)^2}(k^2+1)(l^2+1) = k^2 + \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)^2,$$

получаем матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} x+y & 0 & 0 \\ 0 & \mp(ml)/k \cdot x & my \\ 0 & my & \pm klmx \end{pmatrix},$$

где $m = 2\beta s^2 c/k^2$. Выберем $\mu \in \{\pm 1\}$ так, чтобы $t = \mp(ml)/k \cdot \mu \in R^{*2}$. Скалярное линейное преобразование с матрицей $\mathrm{diag}(1, t^{-1/2}, t^{1/2}m^{-1})$ устанавливает проективную эквивалентность матриц A_1 и

$$A_2 = \begin{pmatrix} x+y & 0 & 0 \\ 0 & \mu x & y \\ 0 & y & -l^2\mu x \end{pmatrix}.$$

При $\mu = 1$ имеем $A_2 = A(1,1,-l^2)$. В случае $\mu = -1$ эквивалентность матриц A_2 и $A(1,1,-l^2)$ достигается линейным проективным преобразованием с матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l^{-1} \\ 0 & l & 0 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь элементы $k, l \in R^*$ удовлетворяют условию $(k^2+1)(l^2+1) \in$ $\in R^* \setminus R^{*2}$. Предположим, что матрицы $A(1,1,-k^2)$ и $A(1,1,-l^2)$ проективно эквивалентны. Согласно лемме 3.3 матрица $U = (u_{ij})$ линейного проективного преобразования удовлетворяет условиям $u_{12}, u_{13}, u_{21}, u_{31} \in J$. Полагая матрицы $UA(1,1,-k^2)U^{\mathrm{T}}$ и $A(1,1,-l^2)$ автоморфными, мы должны иметь автоморфизм φ, удовлетворяющий системе условий

$$\begin{cases} \varphi\big((u_{22}^2 - k^2u_{23}^2)x + 2u_{22}u_{23}y\big) = x, \\ \varphi\big((u_{22}u_{32} - k^2u_{23}u_{33})x + (u_{22}u_{33} + u_{23}u_{32})y\big) = y, \\ \varphi\big(u_{11}^2(x+y)\big) = x + y, \\ \varphi\big((u_{32}^2 - k^2u_{33}^2)x + 2u_{32}u_{33}y\big) = -l^2x. \end{cases} \tag{14}$$

Первые два равенства системы (14) определяют автоморфизм φ однозначно:

$$\varphi\colon \begin{cases} x \mapsto \dfrac{u_{22}u_{33} + u_{23}u_{32}}{(u_{22}^2 + k^2u_{23}^2)(u_{22}u_{33} - u_{23}u_{32})}\,x - \dfrac{2u_{22}u_{23}}{(u_{22}^2 + k^2u_{23}^2)(u_{22}u_{33} - u_{23}u_{32})}\,y, \\ y \mapsto -\dfrac{u_{22}u_{32} - k^2u_{23}u_{33}}{(u_{22}^2 + k^2u_{23}^2)(u_{22}u_{33} - u_{23}u_{32})}\,x + \dfrac{u_{22}^2 - k^2u_{23}^2}{(u_{22}^2 + k^2u_{23}^2)(u_{22}u_{33} - u_{23}u_{32})}\,y. \end{cases}$$

Подставляя полученные формулы в последние два равенства системы (14), находим, что

$$(1 + \nu lk^{-1})u_{22}^2 + 2(\nu kl - 1)u_{22}u_{23} - (k^2 + \nu kl)u_{23}^2 \in J,$$

где $\nu \in \{\pm 1\}$. Такое включение возможно лишь при условии

$$4(\nu kl - 1)^2 + 4(1 + \nu lk^{-1})(k^2 + \nu kl) = 4(k^2+1)(l^2+1) \in R^{*2},$$

что противоречит условию $(k^2+1)(l^2+1) \in R^* \setminus R^{*2}$. Лемма доказана. □

Теорема 3.7. *Квадрики проективной плоскости RP_2, определяемые матрицами вида* (11), *в случае $1 + R^{*2} \subset R^{*2}$ образуют четыре класса, представляемые матрицами*

$$A(1,0,0), \quad A(-1,0,0), \quad A(0,1,0), \quad A(1,0,-1), \tag{15}$$

а при $R^* \cap (1 + R^2) \not\subseteq R^{*2}$ список дополняется классом, представляемым матрицей

$$A(1,1,-k^2), \tag{16}$$

где обратимый элемент k удовлетворяет условию $k^2 + 1 \in R^* \setminus R^{*2}$.

Доказательство. Согласно лемме 3.4 всякая матрица вида (11) проективно эквивалентна одной из матриц вида (13). Докажем, что для произвольно выбранного фиксированного $k \in R^*$ никакие две из матриц $A(1,0,0)$, $A(-1,0,0)$, $A(0,1,0)$, $A(1,1,-k^2)$ не являются проективно эквивалентными. С учётом леммы 3.3, полагая матрицы $A(-1,0,0)$ и $A(0,1,0)$ проективно эквивалентными, приходим к противоречию с линейной независимостью элементов x и y в R. В остальных случаях получаем противоречие с невырожденностью матрицы линейного проективного преобразования.

В случае $1 + R^{*2} \subseteq R^{*2}$ согласно лемме 3.5 для любого элемента $k \in R^*$ матрица $A(1, 1, -k^2)$ проективно эквивалентна матрице $A(1, 0, -1)$. Тем самым первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь для кольца R справедливо соотношение $R^* \cap (1 + R^2) \nsubseteq R^{*2}$. Тогда квадрики, определяемые матрицами вида $A(1, 1, -k^2)$, образуют согласно лемме 3.6 в точности два класса эквивалентности. Представителями этих классов могут служить квадрики с матрицами $A(1, 0, -1)$ и $A(1, 1, -k^2)$, где $k^2 + 1 \in R^* \setminus R^{*2}$. Теорема доказана. □

Литература

[1] Артин Э. Геометрическая алгебра. — М.: Наука, 1969.

[2] Вишневский В. В., Розенфельд Б. А., Широков А. П. О развитии геометрии пространств над алгебрами // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1984. — № 7. — С. 38—44.

[3] Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В. Пространства над алгебрами. — Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1985.

[4] Левчук В. М., Старикова О. А. Квадратичные формы проективных пространств над кольцами // Мат. сб. — 2006. — № 6. — С. 97—110.

[5] Левчук В. М., Старикова О. А. Нормальный вид и схемы квадратичных форм // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 1. — С. 161—178.

[6] Милнор Дж., Хьюзмоллер Д. — Симметрические билинейные формы. — М.: Наука, 1986.

[7] О'Мира О. Лекции о линейных группах // Автоморфизмы классических групп. — М.: Мир, 1976. — С. 57—167.

[8] Старикова О. А. Перечисление квадрик проективных плоскостей и пространств над локальными кольцами главных идеалов // Алгебра и теория моделей. — 2003. — № 4. — С. 110—115.

[9] Старикова О. А. Симметрические формы над полулокальными кольцами // Журн. СФУ. Математика и физика. — 2009. — Т. 2, № 1. — С. 116—121.

[10] Benz W. Vorlesungen über Geometrie der Algebren. — Berlin: Springer, 1973.

[11] Cao Y., Szechtman F. Congruence of symmetric matrices over local rings // Linear Algebra Appl. — 2009. — Vol. 431, no. 9. — P. 1687—1690.

[12] Egorychev G. P., Zima E. V. Simple formulae for the number of quadrics and symmetric forms of modules over local rings // Commun. Algebra. — 2008. — Vol. 36. — P. 1426—1436.

[13] Kula M. Fields and quadratic form schemes // Ann. Math. Sil. — 1985. — Vol. 1 (13). — P. 7—22.

[14] Kula M. Counting Witt rings // J. Algebra. — 1998. — Vol. 206, no. 2. — P. 568—587.

[15] Marshall M. The elementary type conjecture in quadratic form theory // Algebraic and Arithmetic Theory of Quadratic Forms. Proc. of the Int. Conf., Univ. de Talca, Talca and Pucón, Chile, December 11—18, 2002 / R. Baeza, ed. — Providence: Amer. Math. Soc., 2004. — (Contemp. Math.; Vol. 344). — P. 275—293.

[16] Ojanguren M., Sridharan R. A note on the fundamental theorem of projective geometry // Comment. Math. Helv. — 1969. — Vol. 44, no. 3. — P. 310—315.