

Функциональные представления полуколец

В. В. ЧЕРМНЫХ

Вятский государственный
гуманитарный университет
e-mail: vv146@mail.ru

УДК 512.55

Ключевые слова: полукольцо, полумодуль, пучок, пучковые представления.

Аннотация

В работе развивается теория пучковых представлений полуколец.

Abstract

V. V. Chermnykh, Functional representations of semirings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 3, pp. 111–227.

The theory of sheaf representations of semirings is developed in this paper.

Содержание

Введение	112
1. Полукольца и пучки. Предварительные результаты	116
1.1. Основные понятия теории полуколец	116
1.2. Определение пучка	122
2. Спектры полуколец и пучковые конструкции	128
2.1. Первичный спектр и его подпространства	128
2.2. Точечные пространства полуколец	132
2.3. Предпучки Симмонса и Гротендика	136
2.4. Представления Ламбека	142
3. Классы полуколец	147
3.1. Симметрические и редуцированные полукольца	147
3.2. Строго гармонические полукольца	151
3.3. Гельфандовы полукольца	157
3.4. Редуцированные риккартовы полукольца	161
3.5. Регулярные полукольца	166
4. Общая теория функциональных представлений полуколец	170
4.1. Компактные пучки	170
4.2. Полнота пучковых представлений	177
4.3. Теорема Стоуна—Вейерштрасса для пучков	186
4.4. Сопряжения, фреймы идеалов и представления	189

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 3, с. 111–227.

© 2011/2012 Центр новых информационных технологий МГУ,

Издательский дом «Открытые системы»

5. Структурные представления полуколец	192
5.1. Представления полумодулей сечениями пучков	192
5.2. Представления риккартовых полуколец	199
5.3. Абелево-регулярные положительные полукольца	204
5.4. Применение пучков к гельфандовым полукольцам	213
5.5. Двойственность Малви	219
Литература	222

Введение

Работа посвящена представлениям полуколец сечениями пучков, поэтому коснёмся двух составляющих: теории пучков (более точно, пучковых представлений) и полуколец.

История первой теории начинается с 1945 года, когда Ж. Лере открыл понятие пучка, а работы А. Картана, А. Вейля и Ж.-П. Серра привели к оформлению основ теории. Работы А. Гротендика [80] и Р. Годемана [20] завершили первый этап истории пучков. К этому периоду (конец 50-х годов XX века) пучки стали инструментом алгебраической топологии, применимым прежде всего в теории когомологий неодносвязных пространств.

Следующие шаги предприняты в первую очередь А. Гротендиком и участниками его семинара в 1960-х годах, когда для определения хороших когомологий схем с постоянными коэффициентами понятие топологического пространства было заменено понятиями ситуса и топоса. В монографии М. Касивары и П. Шапиро [24] отражено дальнейшее развитие теории; исторический очерк о теории пучков, написанный К. Узелем, прекрасно дополняет эту книгу. Кроме этого, исторические сведения о пучках и близких вопросах можно найти во введении «Теории топосов» П. Джонстона [23].

В этой же монографии П. Джонстон, ссылаясь на С. Маклейна [93], рассуждает о пути развития топосов. Видимо, работы последнего времени и ссылки П. Джонстона на [84, 94, 95] позволяют переформулировать эти высказывания применительно к пучкам: почти все современные значительные работы по теории пучков занимают пучками не как абстрактной и изолированной областью математики, а как вспомогательным средством для понимания и прояснения понятий в других областях. Скажем об активном использовании пучков в теории категорий [21, 23], отметим результаты А. В. Михалёва и К. И. Бейдара, находящиеся на стыке логики и алгебры [2, 3], работы В. А. Любецкого (например, [28]), в которых пучки являются одним из основных инструментов при исследовании вопросов логики, нестандартного анализа, алгебраических систем.

Одним из крайних [23] и важных [24] применений пучков является теория представлений алгебр сечениями пучков.

Пусть

$$P = \bigcup_{x \in X} P_x -$$

пучок алгебр некоторой фиксированной сигнатуры Ω над топологическим пространством X . Множество Γ всех непрерывных функций из X в P (x обязательно отображается в слой P_x) с поточечно определёнными операциями является алгеброй сигнатуры Ω . Гомоморфизм алгебры (A, Ω) в Γ называется представлением A сечениями данного пучка (P, X) .

Выделим основные задачи теории пучковых представлений.

1. Построение пучков (предпучков), связанных с представляемой алгеброй, с хорошим базисным пространством и слоями, устроенными проще, чем исходный объект.
2. Нахождение представлений алгебр конкретных классов (отметим, что наибольшее значение имеют изоморфные пучковые представления).
3. Установление связей между свойствами представляемой алгебры и свойствами слоёв пучка и его базисного пространства; доказательство свойств алгебр с помощью пучковых конструкций.
4. Характеризация алгебр в пучковых терминах; сюда же примыкает задача о функториальных свойствах алгебр: установление двойственностей между категориями алгебр и категориями пучков.
5. Нахождение достаточных условий полноты (эпиморфности) представлений; нахождение условий, при которых подалгебра алгебры Γ совпадает с Γ .
6. Изучение алгебр сечений «хороших» пучков.

Родоначальником теории пучковых представлений считается А. Гротендик [81], доказавший изоморфизм между произвольным коммутативным кольцом R с единицей и кольцом сечений пучка $(\mathbf{G}, \text{Spec } R)$ локализаций кольца R по всем его простым идеалам. И. Ламбек [91] (издание на английском языке вышло в 1965 году) ограничивает представление Гротендика до факторного и получает принципиально новое представление, основанное на открытом семействе идеалов (0_P) , $P \in \text{Spec } R$. Этот подход оказался очень плодотворным: адаптация идей И. Ламбека для некоммутативных колец привела к целой серии работ по пучковым представлениям. Прежде всего отметим работу Д. Даунса и К. Гофмана [66] о представлении бирегулярного кольца и применении полученной конструкции для описания группы автоморфизмов бирегулярного кольца. Характеризационная теорема Даунса—Гофмана обобщает результаты Р. Аренса и И. Капланского [53] о представлении произвольного бирегулярного кольца кольцом функций, которые в свою очередь обобщают классическую теорему М. Стоуна [105] о представлении булевых колец. Эти результаты вместе с преобразованием И. М. Гельфанда [19] банаховых алгебр можно считать непосредственными источниками, приведшими к возникновению теории пучковых представлений.

В дальнейшем К. Кохом [89] доказана изоморфность ламбековского представления для колец без нильпотентов. Он же предложил представление строго гармонических колец [90]. В статье Г. Симмонса [103] изучаются свойства строго гармонических колец прежде всего в терминах пучков, в частности, получена

их пучковая характеристика. И. Ламбек [91] построил пучок колец, основанный на первичном спектре так называемой симметрической части кольца. В случае симметрического кольца и симметрического модуля И. Ламбеком получены изоморфные представления. Представления rp -колец и коммутативных гармонических колец рассматривали Р. Бкуш [54] и С. Телеман [106]. Гельфандовы кольца, их свойства и представления изучались К. Дж. Малви [96, 97] и Г. Симмонсом с соавторами [55].

В фундаментальной работе [98] Р. С. Пирсом построены пучки колец и модулей на стоуновском пространстве кольца (как на базисном пространстве). Любое кольцо изоморфно кольцу сечений своего пирсовского пучка, но нетривиальные представления получаются только для колец с достаточно богатой булевой алгеброй центральных идемпотентов. Для изучения таких колец широко используется техника с применением конструкции пирсовского пучка. Отметим работу Д. В. Тюкавкина [32] о регулярных кольцах с инволюцией, статью А. Б. Карсона [61] о пирсовском пучке регулярного кольца конечного индекса нильпотентности. Пирсовский пучок и его применение изучались В. Д. Бёрджессом и В. Стефенсоном [58, 59], они ввели полезное понятие пирсовской цепи, строя пучки для слоёв пучка Пирса и продолжая этот процесс для построенных пучков (см. также [60]).

В 1971 году К. Кеймель [87] развил теорию представлений для решёточно упорядоченных колец, которая применима также для решёточно упорядоченных абелевых групп. Близкие вопросы рассматривались в [88].

К середине 1970-х годов был накоплен достаточный материал по различным типам конкретных пучковых представлений, что неизбежно поставило вопрос о создании общей теории представлений. Вышли обзоры К. Гофмана [84] и К. Дж. Малви [97], сборники [52, 99]. Отталкиваясь от произвольного семейства идеалов, К. Гофман осуществил переход к открытому семейству идеалов, индексированных точками топологического пространства X , и показал, что таким образом может быть получено любое факторное представление кольца. Равносильный гофмановскому подход через открытые семейства идеалов и идеальные пространства предложен К. Дж. Малви. Позже, в 1989 году, Г. Симмонс [104] дал описание функционального представления кольца как соответствия Галуа между решёткой $\text{Id } R$ идеалов кольца R и решёткой τX открытых множеств базисного топологического пространства X .

Г. Симмонсу [103] принадлежит разработка ещё одного важного фрагмента общей теории. Как было замечено, факторное представление кольца R сечениями пучка над X задаёт соответствие между решётками $\text{Id } R$ и τX (типа соответствия Галуа или соответствия, близкого к сопряжению). Г. Симмонсом найдены достаточные условия, при которых такое соответствие задаёт полное факторное представление. Применение найденных конструкций даёт два вида пучковых представлений, основанных на фреймах идеалов и их точечных пространствах (более интересные представления получаются с помощью чистых идеалов).

Также Г. Симмонсом изучался структурный предпучок над чистым спектром кольца R . В этом случае каждому открытому множеству точечного спектра ста-

вится в соответствие кольцо эндоморфизмов соответствующего чистого идеала, рассматриваемого как правый модуль над R . В [55] показано, что каноническое представление кольца R сечениями предпучка является изоморфным, а сам предпучок — пучком для произвольного кольца. В случае гельфандова кольца его пучок Симмонса совпадает с ламбековским пучком, а для коммутативного кольца — с ограничением пучка Гротендика.

Наконец, скажем о вкладе Дж. Голана в теорию представлений колец [75—77]. Для каждой точки пространства простых кручений кольца R строится кольцо частных кольца R относительно соответствующего кручения. Получаем пучок и изоморфное представление для произвольного кольца. Изложение конструкции Дж. Голана и некоторое её обобщение можно найти в [100].

На русском языке теория пучковых представлений колец в достаточно полном объёме изложена в монографии Е. М. Вечтомова [13].

Без всякого сомнения, кольцо является наиболее важным и удобным алгебраическим объектом с точки зрения пучковых представлений. Однако пучки широко применяются и для изучения других алгебраических систем, прежде всего ограниченных дистрибутивных решёток и почти-колец.

Отметим, что первые работы по представлению дистрибутивных решёток и почти-колец появились уже в конце 1960-х годов. Различным типам пучковых представлений посвящены работы [56, 62, 64, 65, 70—72].

Укажем также некоторые результаты, связанные с универсальными алгебрами. С. Д. Комер [63] получил представление в пучке на стоуновском пространстве булевой подрешётки решётки всех конгруэнций универсальной алгебры; показано применение для бирегулярных колец и для цилиндрических алгебр. В [86] К. Кеймелем предложено представление, пригодное для изучения бирегулярных полугрупп. Вопросам общей теории представлений универсальных алгебр посвящены статьи Б. А. Дейви [68] и Г. Вернера [109].

Одним из главных объектов предлагаемой работы является полукольцо. Полукольцо понимается нами как алгебраическая система, отличающаяся от ассоциативного кольца с 1, возможно, необратимостью аддитивной операции. Первые термин «полукольцо» появился в 1934 году в статье Г. С. Вандивера [107], однако фактически полукольца изучались с конца XIX века в работах, связанных с идеалами колец [69, 92] и с вопросами аксиоматики натуральных и неотрицательных рациональных чисел [83, 85].

Планомерное изучение полуколец началось в 1950-х годах в работах А. А. Косты, С. Бёрна, М. Хенриксена, К. Исеки, В. Словиковского, В. Завадовского и др. Повышенное внимание к полукольцам с конца 1980-х годов обуславливается не только внутренними потребностями теории, но и её многочисленными приложениями (теории автоматов, оптимального управления, формальных языков, графов и др.). Опубликованы монографии Дж. Голана [78, 79], У. Хебиша и Г. Вайнерта [82], обзоры литературы по теории полуколец К. Глазека [73, 74].

Насколько известно автору, вопрос о возможности применения пучковых методов для изучения полуколец впервые поставил К. И. Бейдар в 1990 году на научно-исследовательском семинаре «Кольца и модули» в МГУ.

В предлагаемой работе решаются следующие общие задачи:

- 1) построение пучков полуколец Ламбека, Корниша, Пирса, Гротендика и Симмонса, аналогов кольцевых и/или решёточных конструкций; в работе даны соответствующие представления полуколец и полумодулей;
- 2) развитие общей теории представлений полуколец и полумодулей;
- 3) выделение классов полуколец, «удобных» для функциональных представлений.

Теория функциональных представлений, безусловно, не заканчивается на результатах представленной статьи. Перспективными выглядят исследования представлений упорядоченных полуколец, полуколец с инволюцией, полумодулей. В последнее время в рамках изучения полутел Е. М. Вечтомовым и А. В. Чераневой получены первые пучковые представления полутел [17].

В заключение автор выражает искреннюю благодарность профессорам А. В. Михалёву и Е. М. Вечтому за многолетнюю поддержку и помощь в работе.

1. Полукольца и пучки.

Предварительные результаты

1.1. Основные понятия теории полуколец

Определение. Непустое множество S с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$ называется *полукольцом*, если выполняются следующие условия:

- 1) $(S, +)$ — коммутативная полугруппа с нейтральным элементом 0;
- 2) $(S, \cdot)$ — полугруппа с нейтральным элементом 1;
- 3) умножение дистрибутивно относительно сложения:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad (a + b)c = ac + bc$$

для любых $a, b, c \in S$;

- 4) $0a = 0 = a0$ для любого $a \in S$.

Полукольцо S с коммутативным умножением называется *коммутативным*. Если множество всех обратимых элементов из S (*мультипликативная группа полукольца* S) совпадает с $S \setminus \{0\}$, то S называется *полукольцом с делением*. Полукольцо с делением, не являющееся кольцом, называется *полутелом*. Коммутативное полутело называется *полуполем*. Полукольцо с квазитождеством

$$x + y = 0 \implies x = 0$$

назовём *антикольцом*. Полукольцо называется *аддитивно идемпотентным* (*мультипликативно идемпотентным*) при выполнении тождества $x + x = x$ (соответственно $x^2 = x$). Полукольцо S называется *аддитивно сократимым* (*мультипликативно сократимым*), если $x + z = y + z \implies x = y$ для любых

$x, y, z \in S$ ($xz = yz \implies x = y$ и $zx = zy \implies x = y$ для любых $x, y \in S$ и $z \in S \setminus \{0\}$).

Предложение 1.1.1. Аддитивно сократимое полукольцо, и только такое полукольцо, вкладывается в кольцо, а именно в своё кольцо разностей.

Примеры полуколец.

1. Ассоциативные кольца с единицей.
2. Ограниченные дистрибутивные решётки.
3. *Числовые полукольца.* С обычными операциями сложения и умножения чисел множество $\mathbb{N}$ неотрицательных целых чисел — коммутативное аддитивно и мультипликативно сократимое полукольцо. Полукольцо $(\mathbb{N}, \max, \cdot)$ аддитивно идемпотентно. Полуполя $\mathbb{Q}^+$ и $\mathbb{R}^+$ неотрицательных рациональных и неотрицательных действительных чисел с обычными операциями аддитивно сократимы, а если их рассматривать с операцией $\max$ в качестве сложения, то получим аддитивно идемпотентные полуполя.
4. *Минимаксное* полуполе $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ — объект изучения идемпотентного анализа [29].
5. Полукольцо $\text{Mat}_n(S)$ всех квадратных матриц n -го порядка над произвольным полукольцом S с обычными для матриц операциями сложения и умножения.
6. Полукольца $S[x]$ и $S[[x]]$ многочленов и формальных степенных рядов над полукольцом S . Естественным образом эти полукольца обобщаются на случай произвольного непустого множества неизвестных.
7. *Полукольца функций.* Полукольцом является множество S^X всех отображений непустого множества X в полукольцо S ; операции определяются поточечно. Полукольцом будет также множество $C^+(X)$ всех непрерывных $\mathbb{R}^+$ -значных функций на топологическом пространстве X . Подполуполем этого полукольца является множество всех положительнозначных функций вместе с нулевой функцией.

Определение. Непустое подмножество I полукольца S называется *левым идеалом* полукольца S , если для любых элементов $a, b \in I$, $s \in S$ элементы $a + b$ и sa принадлежат I . Симметричным образом определяется правый идеал. Непустое подмножество, являющееся одновременно левым и правым идеалом, называется *двусторонним идеалом* или просто *идеалом* полукольца S .

Сумма и произведение идеалов определяются так же, как для колец. Обозначим через $\text{Id } S$ множество всех идеалов произвольного полукольца S .

Предложение 1.1.2. Для любого полукольца S справедливы следующие утверждения:

- 1) произведение нескольких идеалов, сумма и пересечение произвольного множества идеалов из S являются идеалами;
- 2) относительно операций сложения и пересечения идеалов (или, что равносильно, относительно отношения включения идеалов) $\text{Id } S$ является полной решёткой;

- 3) $\text{Id } S$ с операциями сложения и умножения идеалов является полукольцом.

Заметим, что решётка идеалов $\text{Id } S$ в общем случае не модулярна [8], а полукольцо идеалов — пример, предложенный ещё Р. Дедекиндом [69].

Идеалами являются $\{0\}$ — нулевой идеал и S — идеал, совпадающий со всем полукольцом. Это тривиальные идеалы, присутствующие в любом полукольце. Заметим, что 0 содержится в любом идеале по аксиоме 4) из определения полукольца.

Идеал, отличный от полукольца S , называется *собственным*. Очевидно, любой идеал (левый идеал) I является собственным тогда и только тогда, когда I не содержит обратимых (обратимых слева) элементов (или, что равносильно, не содержит единицы).

Наименьший из всех идеалов, содержащих элемент $a \in S$, называется *главным идеалом*, порождённым элементом a . Будем обозначать его (a) или SaS . Аналогично вводятся главные односторонние идеалы Sa и aS — левый и правый соответственно. Главный идеал (a) будет в точности совпадать с множеством всевозможных конечных сумм элементов вида sat , $s, t \in S$.

Хорошо известно, что любой идеал кольца $\mathbb{Z}$ целых чисел является главным. Идеалы полукольца натуральных чисел являются конечно порождёнными, и для любого $k \in \mathbb{N}$ существует идеал в $\mathbb{N}$ в точности с k образующими элементами. Кроме того, пусть J — ненулевой идеал из $\mathbb{N}$ и d — наибольший общий делитель образующих идеала J . Тогда найдётся такое $k \in \mathbb{N}$, что $J \cap \{k, k+1, k+2, \dots\} = \{k, k+d, k+2d, \dots\}$.

В полных, в частности конечных дистрибутивных, решётках каждый идеал является главным.

Идеалы полуколец, в отличие от колец, не обязательно являются ядрами гомоморфизмов.

Предложение 1.1.3. Идеал J полукольца S является ядром некоторого полукольцевого гомоморфизма (или, что равносильно, ядром, или классом нуля, некоторой конгруэнции) тогда и только тогда, когда $a + b, a \in J$ влечёт $b \in J$ для любых $a, b \in S$.

Идеал с указанным в предложении условием называется *полустрогим*. Идеал J называется *строгим*, если из $a + b \in J$ следует, что $a, b \in J$ для любых $a, b \in S$. Очевидно, что полустрогие идеалы являются строгими, а в дистрибутивных ограниченных решётках все идеалы строгие. Строгость нулевого идеала полукольца S равносильна тому, что S — антикольцо.

Определение. Собственный двусторонний идеал P полукольца S называется *первичным*, если для любых идеалов A и B из $AB \subseteq P$ следует, что $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$; P называется *вполне первичным*, если из $ab \in P$ следует, что $a \in P$ или $b \in P$; первичный идеал коммутативного полукольца называется *простым*.

Первичные идеалы можно описать в терминах элементов полукольца.

Предложение 1.1.4. Идеал P полукольца S первичен тогда и только тогда, когда для любых элементов $a, b \notin P$ найдётся элемент $s \in S$, такой что $asb \notin P$. Если S — коммутативное полукольцо, то идеал P прост тогда и только тогда, когда из $a, b \notin P$ следует, что $ab \notin P$.

Доказательство. Пусть идеал P первичен и $a, b \notin P$. Тогда главные идеалы (a) и (b) не лежат в P , как и их произведение. Значит, некоторый элемент $t \in aSb$ не принадлежит P . Поскольку $t = \sum_{i=1}^k u_i a v_i b w_i$ для некоторых $u_i, v_i, w_i \in S$, то хотя бы для одного $i \in \{1, \dots, k\}$ справедливо, что $av_i b \notin P$; в противном случае каждое слагаемое $u_i a v_i b w_i$ лежит в P , и следовательно, $t \in P$.

Обратно. Пусть произведение идеалов A и B лежит в P , но $A \not\subseteq P$. Тогда найдётся $a \in A \setminus P$. Предположим, что $B \not\subseteq P$. Получим, что некоторый элемент b принадлежит $B \setminus P$ и по условию $asb \notin P$ для подходящего $s \in S$. Но тогда $AB \not\subseteq P$, и следовательно, P — первичный идеал.

Утверждение для коммутативного случая очевидно. $\square$

Определение. Подмножество T полукольца S называется m -системой (или мультипликативно замкнутой системой), если $0 \notin T$, $1 \in T$ и для любых $a, b \in T$ найдётся такой $s \in S$, что $asb \in T$.

Легко убедиться, что если P — первичный идеал, то $S \setminus P$ — m -система. И хотя дополнение до m -системы не обязано быть первичным идеалом, следующее утверждение показывает, что между ними существует тесная связь.

Предложение 1.1.5. Пусть T — m -система, J — произвольный идеал полукольца S , не пересекающийся с T . Тогда любой максимальный идеал среди содержащих J и не пересекающихся с T первичен.

Доказательство. Пусть P — идеал, содержащий J и не пересекающийся с T , являющийся максимальным в семействе идеалов, удовлетворяющих этим условиям. Допустим, что $aSb \subseteq P$ для некоторых $a, b \notin P$. Идеалы $P + SaS$ и $P + SbS$ строго содержат идеал P и, значит, пересекаются с T . Пусть $m \in (P + SaS) \cap T$, $r \in (P + SbS) \cap T$ и $msr \in T$ для некоторого $s \in S$. С другой стороны,

$$msr \in (P + SaS)(P + SbS) \subseteq P + SaSbS \subseteq P.$$

Получили противоречие, что P пересекается с T . Значит, наше предположение, что $aSb \in P$, неверно, и P — первичный идеал. Предложение доказано. $\square$

Рассмотрим частично упорядоченное множество M всех идеалов полукольца S , содержащих идеал J и не пересекающихся с m -системой T . Пусть $\{A_i\}$ — произвольное множество идеалов из M , образующих цепь. Сумма $\sum_i A_i$ будет идеалом, не пересекающимся с T . Действительно, если элемент t из T лежит в $\sum_i A_i$, то t является суммой конечного числа элементов из $\{A_i\}$ и все слагаемые принадлежат некоторому A_j из этой цепи. Значит, t принадлежит A_j ; противоречие, показывающее, что любая цепь из множества M имеет

в M точную верхнюю грань. По лемме Цорна каждый идеал, содержащий J и не пересекающийся с T , будет лежать в некотором максимальном элементе P множества M . Таким образом, лемма Цорна и предложение 1.1.5 обеспечивают «достаточное» количество первичных идеалов в полукольце.

Определение. Собственный идеал (правый идеал) M полукольца S называется *максимальным (максимальным правым) идеалом*, если для каждого идеала (правого идеала) A из $M \subseteq A$ следует, что $M = A$ или $A = S$.

Как и для первичных идеалов, существование в полукольце максимальных идеалов следует из леммы Цорна.

Предложение 1.1.6. Максимальный идеал полукольца является первичным.

Доказательство. Рассмотрим нулевой идеал и не пересекающуюся с ним m -систему $T = \{1\}$. Любой максимальный идеал M полукольца содержит $\{0\}$ и не пересекается с T , значит, по предложению 1.1.5 будет первичным. $\square$

Предложение 1.1.7. Каждый первичный идеал I полукольца S содержит минимальный первичный идеал.

Доказательство. Рассмотрим цепь $\{P_i : i \in \Delta\}$ первичных идеалов, лежащих в I . Уточним, что условие $i \leq j$ равносильно включению $P_i \supseteq P_j$ для любых $i, j \in \Delta$. Пусть

$$P = \bigcap_{i \in \Delta} P_i$$

идеал, лежащий в I , и $asb \in I$ для любого $s \in S$. Предположим, что $a \notin P$. Тогда найдётся некоторый индекс $k \in \Delta$, для которого $a \notin P_k$. Отсюда следует, что $a \notin P_i$ для любого $i \geq k$, поэтому $b \in P_i$ для всех $i \geq k$. С другой стороны, $b \in P_k \subseteq P_i$ для всех $i \leq k$. Получаем, что $b \in P_i$ для всех $i \in \Delta$, следовательно, идеал P по предложению 1.1.4 первичен. Осталось применить лемму Цорна для упорядоченного множества всех первичных идеалов, лежащих в I . $\square$

Для любого $a \in S$ множество

$$\text{Ann } aS = \{t \in S : ast = 0 \text{ для каждого } s \in S\}$$

называется *аннулятором правого идеала aS* . Легко проверяется, что аннулятор является двусторонним идеалом. Для любого первичного идеала P полукольца S множество

$$0_P = \{s \in S : sSt = 0 \text{ для некоторого } t \in P\} = \{s \in S : \text{Ann } sS \not\subseteq P\}$$

называется *0-компонентой идеала P* .

Обозначим через $\text{Spec } S$, $\text{Min } S$ и $\text{Max } S$ соответственно множества всех первичных, минимальных первичных и максимальных идеалов полукольца S .

Лемма 1.1.8. Для любого полукольца S справедливы следующие утверждения:

- 1) 0_P — идеал для любого первичного идеала P ;

- 2) если $P \subseteq M$ — первичные идеалы полукольца, то $0_M \subseteq 0_P \subseteq P$;
 3) $\bigcap \{0_P : P \in \text{Spec } S\} = \bigcap \{0_M : M \in \text{Max } S\} = 0$.

Доказательство. 1. Пусть $a, b \in 0_P$. Тогда $aSt = 0$ и $bSu = 0$ для некоторых $t, u \notin P$. Ввиду первичности P $tsu \notin P$ для подходящего $s \in S$. Для любого $v \in S$

$$(a + b)vt su = (avt)su + b(vts)u = 0.$$

Далее, $(as)vt = a(sv)t = 0$, $(sa)vt = s(avt) = s0 = 0$, поэтому $a + b, sa, as \in 0_P$, и 0_P — идеал.

2. Пусть $a \in 0_M$. Тогда $aSt = 0$ для некоторого $t \notin M$. Поскольку $t \notin P$, то $a \in 0_P$, и значит, $0_M \subseteq 0_P$. Для любого $s \in S$ имеем $0 = ast \in P$. Поскольку P первичен, то $a \in P$, и следовательно, $0_P \subseteq P$.

3. Согласно пункту 2 достаточно доказать утверждение для 0-компонент максимальных идеалов. Если $a \in \bigcap \{0_M : M \in \text{Max } S\}$, то $\text{Ann } aS$ не лежит ни в одном максимальном идеале полукольца S . Значит, $\text{Ann } aS = S$ и $aS \cdot 1 = 0$, откуда следует, что $a = 0$. $\square$

Обозначим через $\sqrt{A}$ пересечение всех первичных идеалов полукольца S , содержащих идеал A . Идеал $\text{rad } S = \sqrt{0}$ называется *первичным радикалом* полукольца S .

Предложение 1.1.9. Для любых идеалов A и B верны следующие утверждения:

- 1) из $A \subseteq B$ следует, что $\sqrt{A} \subseteq \sqrt{B}$;
- 2) $A \subseteq \sqrt{A} = \sqrt{\sqrt{A}}$;
- 3) $\sqrt{A} \subseteq \sqrt{B}$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq \sqrt{B}$.

Доказательство. 1. Первое утверждение очевидно.

2. Включение $A \subseteq \sqrt{A} \subseteq \sqrt{\sqrt{A}}$ очевидно. Пусть $a \notin \sqrt{A}$. Тогда найдётся первичный идеал P , содержащий идеал A , но не содержащий a . Поскольку P содержит $\sqrt{A}$, то $a \notin \sqrt{\sqrt{A}}$. По правилу контрапозиции $\sqrt{\sqrt{A}} \subseteq \sqrt{A}$.

3. Так как $A \subseteq \sqrt{A}$, то выполняется импликация $\implies$. Пусть $A \subseteq \sqrt{B}$. Тогда $\sqrt{A} \subseteq \sqrt{\sqrt{B}} = \sqrt{B}$. $\square$

Элемент $a \in S$ называется *строго нильпотентным*, если в любой последовательности вида

$$a_1 = a, a_2 \in a_1 S a_1, a_3 \in a_2 S a_2, \dots, a_{n+1} \in a_n S a_n, \dots \quad (1)$$

все элементы начиная с некоторого равны нулю.

Понятно, что для строгой нильпотентности элемента $a \in S$ достаточно, чтобы в последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots$ встретился хотя бы один нулевой элемент. Если $a \in S$ строго нильпотентен, то в последовательности $a, a^3, a^7, \dots, a^{2^k-1}, \dots$ обязан быть 0, поэтому a — нильпотент.

Предложение 1.1.10. Первичный радикал $\text{rad } S$ полукольца S совпадает с множеством всех строго нильпотентных элементов.

Доказательство. Пусть $a \in S$ не является строго нильпотентным элементом, т. е. найдётся цепочка T вида (1), все элементы которой отличны от 0. Заметим, что если a_k и a_n , $k < n$, — члены этой последовательности, то a_n имеет вид $a_k t a_k$ для некоторого $t \in S$. Тогда

$$a_{n+1} = a_n s a_n = a_k t a_k s a_k t a_k = a_k (t a_k s) a_k t a_k = a_k r a_n.$$

Это означает, что множество T всех элементов цепочки вместе с 1 образует m -систему. По предложению 1.1.5 найдётся первичный идеал P , не пересекающийся с T . В частности, P не содержит a , и следовательно, $a \notin \text{rad } S$. Это показывает, что каждый элемент из первичного радикала строго нильпотентен.

Если $a \notin \text{rad } S$, то найдутся такой первичный идеал P и такие элементы $s_1, s_2, s_3, \dots$, что $a_1 = a s_1 a$, $a_2 = a_1 s_2 a_1$, $a_3 = a_2 s_3 a_2, \dots$ не лежат в P . Тогда полученная последовательность не содержит нуля, и значит, a не является строго нильпотентным элементом. Предложение доказано. $\square$

Заметим, что доказательство последнего утверждения является дословным переносом из теории колец и приведено для полноты и связности текста.

1.2. Определение пучка

В этом разделе определяются пучок и предпучок, указываются их свойства; рассматривается конструкция построения факторного пучка посредством открытого семейства конгруэнций.

Определение. Тройка (P, π, X) называется *пучком полуколец*, если выполняются следующие условия:

- 1) X и P — топологические пространства;
- 2) $\pi: P \rightarrow X$ — локальный гомеоморфизм;
- 3) для каждой точки $x \in X$ множество $P_x = \pi^{-1}(x)$ является полукольцом;
- 4) полукольцевые операции непрерывны;
- 5) отображения $\hat{0}$ и $\hat{1}$, ставящие каждой точке $x \in X$ в соответствие ноль 0_x и единицу 1_x полукольца P_x соответственно, непрерывны.

Напомним, что *локальным гомеоморфизмом* называется отображение пространства X в Y , при котором каждая точка $x \in X$ обладает окрестностью, гомеоморфно отображающейся на некоторое открытое подмножество пространства Y . Через $\pi^{-1}(x) = \{u \in P: \pi(u) = x\}$ обозначен полный прообраз точки x при отображении π , которое называется *проекцией*. Полукольцо P_x называется *слоем* пучка в точке x .

Понятно, что пространство $P = \bigcup P_x$ является дизъюнктым объединением своих слоёв, причём для различных $x, y \in X$ слои P_x и P_y могут быть изоморфными.

Смысл условия 4) состоит в следующем. Декартов квадрат $P \times P$ превращается в топологическое пространство с базисными открытыми множествами вида $U \times V$ для всевозможных открытых множеств U и V из P . Пусть W —

его подпространство, состоящее из всех тех пар (a, b) , для которых $\pi(a) = \pi(b)$. Тогда отображения из W в P , переводящие (a, b) в $a + b$ и (a, b) в ab , непрерывны.

Обычно говорят просто о пучке P над X , всегда подразумевая наличие проекции π . Пространства X и P называются *базисным* и *накрывающим* соответственно.

Пусть P — пучок полуколец над X и Y — подпространство в X . *Сечением* пучка P над Y называется такое непрерывное отображение $\sigma: Y \rightarrow P$, что $\pi \circ \sigma$ — тождественное отображение множества Y . Сечение над открытым подмножеством Y называется *локальным*. Под сечением пучка мы будем понимать также множество всех значений этого сечения, являющееся подмножеством накрывающего пространства. Из текста бывает понятно, в каком смысле мы употребляем термин «сечение», поэтому дополнительных пояснений не появится.

Поточечная сумма и произведение двух сечений над Y снова являются сечениями над Y , т. е. для любого множества $Y \subseteq X$ множество $\Gamma(Y, P)$ всех сечений над Y будет полукольцом. В случае когда мы рассматриваем сечение над всем базисным пространством X , говорим о *глобальных сечениях*; в совокупности они дают *полукольцо глобальных сечений* $\Gamma = \Gamma(P, X)$ пучка P над X .

Пример. Тривиальным примером пучка полуколец является *простой пучок* со слоем S над пространством X , а именно: пусть X — произвольное топологическое пространство и S — полукольцо с дискретной топологией. Положим $X \times S = P = \bigcup S_x$, $x \in X$, где $S_x \equiv S$ для любого $x \in X$, а проекцию зададим как отображение $S_x \rightarrow x$.

Заметим, что хотя здесь и дальше речь идёт о пучках полуколец, это понятие легко переносится на случай пучка универсальных алгебр. Так, если в определении мы потребуем, чтобы слои были абелевыми группами, кольцами или модулями над фиксированным кольцом, то получим определения соответственно пучка абелевых групп, пучка колец или пучка модулей. Слои пучка могут и не иметь никакой алгебраической структуры, в этом случае говорят о пучке множеств.

Предложение 1.2.1. Для произвольного пучка P над X справедливы следующие утверждения:

- 1) π — непрерывное и открытое отображение;
- 2) всякое локальное сечение пучка является открытым отображением;
- 3) любая точка накрывающего пространства P является значением некоторого локального сечения пучка P ;
- 4) множество всех образов сечений пучка над открытыми множествами образует базу топологии пространства P ;
- 5) для любых двух сечений пучка P множество тех точек из X , в которых эти сечения определены и совпадают, открыто в X ; в частности, множество

всех нулей какого-либо (глобального или локального) сечения пучка P является открытым.

Доказательство. 1. Пусть $\pi^{-1}(U)$ — полный прообраз открытого подмножества U и $x \in \pi^{-1}(U)$. По определению π существует гомеоморфизм между некоторой окрестностью точки x и открытым подмножеством $V \subseteq X$. Подмножество, соответствующее подмножеству $V \cap U$ при этом гомеоморфизме, является открытой окрестностью точки x , лежащей в $\pi^{-1}(U)$. Тогда $\pi^{-1}(U)$ открыто, поскольку вместе со своей произвольной точкой содержит некоторую её открытую окрестность, что означает непрерывность проекции π . Очевидно, что π является и открытым отображением, т. е. $\pi(V)$ — открытое подмножество в X для всякого открытого $V \subseteq P$.

2. Пусть σ — локальное сечение, U — открытое в X подмножество. Тогда $\sigma(U)$ открыто как прообраз множества U при непрерывном отображении $\pi: \sigma(U) \rightarrow U$.

3. Для произвольной точки $s \in P$ проекция π гомеоморфно отображает открытую окрестность точки s на некоторое открытое подмножество в X . Обратное отображение будет необходимым сечением, имеющим s своим образом.

4. Пусть U открыто в P и $x \in U$. По свойству 3 существует локальное сечение σ_x , определённое на открытом подмноестве пространства X и содержащее точку x . Множество σ_x открыто в P , значит, открытым будет и $U_x = \sigma_x \cap U$. Кроме того, U_x является сечением пучка — ограничением σ_x на $\pi(U)$. Таким образом, произвольное открытое подмножество U мы представили в виде объединения локальных сечений U_x над открытыми множествами, что и доказывает свойство.

5. Если σ_1 и σ_2 — сечения, определённые над открытыми множествами U_1 и U_2 , то открытым будет $V = \sigma_1 \cap \sigma_2$. Поскольку π — открытое отображение, то $\pi(V)$ открыто, а это множество всех точек в X , в которых совпадают σ_1 и σ_2 . $\square$

Определение. Функциональным или пучковым представлением полукольца S называется полукольцевой гомоморфизм $\alpha: S \rightarrow \Gamma(P, X)$ полукольца S в полукольцо $\Gamma(P, X)$ глобальных сечений некоторого пучка P полуколец над топологическим пространством X . Представление α называется *точным*, *полным* или *изоморфным*, если α — мономорфизм, эпиморфизм или изоморфизм соответственно.

Образ $\alpha(s)$ элемента $s \in S$ будем часто обозначать $\hat{s}$. Пусть $\alpha: S \rightarrow \Gamma(P, X)$ — произвольное пучковое представление полукольца S и x — точка базисного пространства. Каждому элементу $s \in S$ соответствует глобальное сечение $\hat{s} \in \Gamma$, которое принимает значение $\hat{s}(x)$ в точке $x \in X$. Отображение $\beta_x: S \rightarrow P_x$, ставящее в соответствие элементу $s \in S$ элемент $\hat{s}(x)$, является гомоморфизмом. Если все β_x являются эпиморфизмами, то каждый слой P_x пучка P будет гомоморфным образом полукольца S , а поэтому фактор-полукольцом полукольца S . В этом случае представление α полукольца S называется *факторным*. Ниже будут построены пучки и представления, не являющиеся факторными (к примеру,

представления Гротендика и Симмонса). Однако следующее простое рассуждение показывает важность именно факторных представлений.

Чтобы представление α было факторным, необходимо и достаточно, чтобы через каждую точку накрывающего пространства P проходило некоторое глобальное сечение вида $\hat{s}$. Выбросив из каждого слоя P_x те точки, которые не являются значениями $\hat{s}$ ни при каком $s \in S$, получим новый пучок над тем же пространством X со слоями P'_x — подполукольцами слоёв P_x исходного пучка. Представление α полукольца S в полученном пучке будет факторным.

Пусть α — факторное представление полукольца S в пучке (P, X) . Для любого $x \in X$ слой P_x изоморфен $S/\sim_x$, где $\sim_x$ — конгруэнция на S , «склеивающая» элементы, имеющие одинаковые образы при эпиморфизме $\alpha: S \rightarrow P_x$, $\alpha(s) = \hat{s}(x)$ для любого $s \in S$. Зафиксируем произвольную пару (a, b) элементов из S . Сравнимость $a \sim_x b$ равносильна тому, что глобальные сечения $\hat{a}$ и $\hat{b}$ совпадают в точке x . Предложение 1.2.1 обеспечивает совпадение $\hat{a}$ и $\hat{b}$ на некоторой открытой окрестности точки x , т. е. множество $\{x \in X: a \sim_x b\}$ открыто в X . Конгруэнции $\sim_x$, $x \in X$, обладающие последним свойством, заслуживают более подробного рассмотрения.

Определение. Семейство конгруэнций $(\sim_x)$ на полукольце S , индексированное точками x топологического пространства X , называется *открытым семейством*, если для любых $a, b \in S$ множество

$$V(a, b) = \{x \in X: a \sim_x b\}$$

открыто в X .

Теорема 1.2.2. Пусть S — полукольцо, X — топологическое пространство. Тогда следующие условия эквивалентны:

- 1) $(\sim_x)$, $x \in X$, — открытое семейство конгруэнций на полукольце S ;
- 2) (P, X) , где $P = \bigcup \{S/\sim_x: x \in X\}$, — пучок полуколец.

Доказательство. Импликация 2) $\implies$ 1) доказана выше.

Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Пусть $(\sim_x)$ — произвольное открытое семейство конгруэнций полукольца S . Произвольный элемент $s \in S$ определяет отображение

$$\hat{s}: X \rightarrow P, \quad \hat{s}(x) = [s_x] \in P_x,$$

где $[s_x]$ — класс эквивалентности элемента s по конгруэнции $\sim_x$. Будем считать, что множества $\hat{s}|_A$, где A открыто в X , образуют предбазу топологии в P . Определим отображение $\pi: P \rightarrow X$, полагая $\pi(P_x) = x$ для всех $x \in X$. Проверим для тройки (P, π, X) условия 1)–5) определения пучка.

Условия 1) и 3) выполнены. Пусть $a, b \in S$ и A, B — открытые подмножества в X . Поскольку $\hat{a}|_A \cap \hat{b}|_B = \hat{a}|_{A \cap B \cap V(a, b)}$, $\hat{a}^{-1}(\hat{b}|_B) = B \cap V(a, b)$ открыто в X , $\pi^{-1}(A) = \bigcup \{\hat{s}|_A: s \in S\}$ открыто в P , то предбаза $\{\hat{a}|_A\}$ является открытой базой пространства P , и отображения $\hat{s}$ и π непрерывны. Ясно, что

$$\widehat{a + b} = \hat{a} + \hat{b}, \quad \widehat{ab} = \hat{a} \cdot \hat{b}$$

и π — гомеоморфизм открытого множества $\hat{a}|_X$ на X . Следовательно, выполнено условие 2).

Отображения $\hat{0}$ и $\hat{1}$ являются глобальными сечениями, а $\hat{0}(x)$ и $\hat{1}(x)$ — ноль и единица полукольца P_x для любого $x \in X$. Осталось проверить условие 4).

Пусть a и b принадлежат одному слою P_x . Тогда $a = \hat{s}(x)$ и $b = \hat{t}(x)$ для некоторых $s, t \in S$. Пусть $ab \in C$ и $a+b \in T$, где C, T — открытые подмножества в P . Тогда $ab \in \hat{st}|_A \subseteq C$ и $a+b \in \widehat{s+t}|_A \subseteq T$ для некоторого открытого $A \subseteq X$, содержащего x , и $a \in \hat{s}|_A$, $b \in \hat{t}|_A$. Наконец, для каждого $y \in A$ выполняются соотношения $\hat{s}(y)\hat{t}(y) = \widehat{st}(y) \in C$ и $\hat{s}(y) + \hat{t}(y) = \widehat{s+t}(y) \in T$, что завершает доказательство. $\square$

Положив $\alpha(s) = \hat{s} \in \Gamma(P, X)$ для любого $s \in S$, получим факторное представление α полукольца S в построенном пучке. В этом случае будем говорить, что *представление α индуцировано открытым семейством конгруэнций $(\sim_x)$, $x \in X$* .

Сейчас мы рассмотрим другой подход к пучкам — через предпучки — и установим связи между предпучками и пучками. Исторически именно этот путь привёл к возникновению уже данного нами определения пучка.

Определение. Пусть X — топологическое пространство. *Предпучком $\mathbf{P}$* (полукольцом) на X называется функция, ставящая в соответствие каждому открытому множеству $U \subseteq X$ полукольцо $\mathbf{P}(U)$ и каждой паре открытых множеств $U \subseteq V$ гомоморфизм $r_U^V: \mathbf{P}(V) \rightarrow \mathbf{P}(U)$ таким образом, что r_U^U тождественный и $r_U^V \circ r_V^W = r_U^W$, если $U \subseteq V \subseteq W$.

Гомоморфизмы r_U^V называются *ограничениями*, а элементы из $\mathbf{P}(U)$ — *сечениями* предпучка $\mathbf{P}$ над U .

С категорной точки зрения предпучок — это контравариантный функтор из категории открытых множеств пространства X и их включений в категорию полуколец и их гомоморфизмов. Более широко можно определить предпучок со значениями в произвольной категории. К примеру, нас будет интересовать случай, когда все $\mathbf{P}(U)$ являются S -полумодулями. Пока мы поведём рассуждения просто о предпучке, и они, конечно, останутся справедливыми и для предпучков полуколец, и для предпучков полумодулей.

Приведём несколько примеров предпучков. Подобно постоянному пучку, для каждого полукольца S имеется *постоянный предпучок $\mathbf{P}$* с $\mathbf{P}(U) = S$ для каждого открытого $U \subseteq X$ и с тождественным отображением r_U^V для всех включений $U \subseteq V$.

Предпучок также получится при постановке в соответствие каждому множеству U полукольца $F(U, S)$ всех функций из U в S с поточечными операциями сложения и умножения функций; r_U^V в этом случае — естественное ограничение функций. Далее, если $S = \mathbb{R}^+$, а $C(U)$ — множество всех непрерывных функций из U в $\mathbb{R}^+$, то возникает *предпучок непрерывных неотрицательных действительнозначных функций* на топологическом пространстве X .

Пусть (P, X) — произвольный пучок. Рассмотрим множество $\Gamma(U)$ всех локальных сечений пучка P над $U \subseteq X$. В силу свойств пучка $\Gamma(U)$ будет наследовать структуру своих слоёв, а отображение $r_U^V: \Gamma(V) \rightarrow \Gamma(U)$, $r_U^V(s) = s|_U$ для любого $s \in \Gamma(V)$, — гомоморфизм, являющийся ограничением. Мы получили предпучок над X , называемый *каноническим предпучком пучка P* .

Более интересен и важен обратный переход. Сейчас мы рассмотрим конструкцию, с помощью которой для каждого предпучка естественным образом определяется некоторый пучок.

Пусть $\mathbf{P}$ — предпучок над X и $x \in X$. Введём отношение $\sim_x$ на множестве сечений над открытыми окрестностями точки x . Если $s \in \mathbf{P}(U)$, $t \in \mathbf{P}(V)$ и $x \in U \cap V$, то

$$s \sim_x t \iff r_W^U(s) = r_W^V(t) \iff s|_W = t|_W$$

для некоторой открытой окрестности W точки x . Очевидно, что $\sim_x$ — отношение эквивалентности.

Положим

$$P = \bigcup_x P_x, \quad x \in X,$$

где P_x — множество всех классов эквивалентности по отношению $\sim_x$, и определим отображение $\pi: P \rightarrow X$ формулой $\pi(s) = x$, если $s \in P_x$. Для любого $s \in \mathbf{P}(U)$ обозначим через s_x элемент из $\mathbf{P}$, в который сечение s переводит точку x . Положим

$$s_U = \{s_x: x \in U\} \subseteq P.$$

Система подмножеств $\{s_U\}$, где U открыто в X , образует базис некоторой топологии на P . Введём эту топологию и получим, что (P, π, X) — пучок, называемый *пучком ростков предпучка $\mathbf{P}$ над X* .

Пусть $\mathbf{P}$ — предпучок над X , P — соответствующий пучок ростков. Для любого $s \in \mathbf{P}(U)$ отображение $x \rightarrow s_x$, $x \in U$, является локальным сечением пучка P над U . Мы имеем, следовательно, естественное отображение $\Phi_U: \mathbf{P}(U) \rightarrow P(U)$. Легко убедиться, что оно инъективно тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие.

P1. Пусть $s, t \in \mathbf{P}(U)$, и пусть существует такое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ множества U , что $r_{U_\alpha}^U(s) = r_{U_\alpha}^U(t)$ для всех α . Тогда $s = t$.

Для того чтобы отображение Φ_U было биективным, необходимо наложить ещё одно требование.

Пусть $\Phi_V: \mathbf{P}(V) \rightarrow P(V)$ инъективно для любого открытого подмножества $V \subseteq U$. Тогда Φ_U сюръективно и, значит, биективно в том и только в том случае, когда выполняется следующее условие.

P2. Пусть $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in I$, — открытое покрытие множества U , и пусть элементы $s_\alpha \in \mathbf{P}(U_\alpha)$ удовлетворяют условию

$$r_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\alpha}(s_\alpha) = r_{U_\alpha \cap U_\beta}^{U_\beta}(s_\beta)$$

для всех $\alpha, \beta \in I$. Тогда существует такой элемент $s \in S(U)$, что $r_{U_\alpha}^U(s) = s_\alpha$ для всех α .

Таким образом, предпучок совпадает с предпучком своего пучка ростков тогда и только тогда, когда для каждого открытого множества в X выполняются условия $P1$ и $P2$. По этой причине мы можем дать второе определение пучка, равносильное определению пучка как расслоённого пространства.

Определение. Предпучок (P, X) , удовлетворяющий условиям $P1$ и $P2$, называется *пучком* над X .

Пример. Для открытого множества $U \subseteq X = [0, 1]$ обозначим через $S(U)$ множество всех непрерывных $\mathbb{R}^+$ -значных функций на $U \times U$. Определив отображение ограничения естественным образом, получим предпучок S на X , не удовлетворяющий ни одному из условий $P1$, $P2$.

2. Спектры полуколец и пучковые конструкции

2.1. Первичный спектр и его подпространства

Пусть $\text{Spec } S$ — множество всех первичных идеалов произвольного полукольца S . Для любого идеала A полукольца S положим

$$D(A) = \{P \in \text{Spec } S : P \not\supseteq A\}$$

и покажем, что $\text{Spec } S$ является топологическим пространством с семейством открытых множеств вида $D(A)$.

Множество $D(\{0\}) = \{P \in \text{Spec } S : P \not\supseteq \{0\}\}$ пусто, $\text{Spec } S = D(S)$. Пусть A, B, A_i — идеалы полукольца S . Тогда

$$\begin{aligned} D(A) \cap D(B) &= \{P \in \text{Spec } S : P \not\supseteq A \text{ и } P \not\supseteq B\} = \\ &= \{P \in \text{Spec } S : P \not\supseteq AB\} = D(AB), \\ \bigcup D(A_i) &= \{P \in \text{Spec } S : P \not\supseteq A_i \text{ для некоторого } A_i\} = \\ &= \left\{P \in \text{Spec } S : \sum A_i \not\subseteq P\right\} = D\left(\sum A_i\right). \end{aligned}$$

Таким образом, на $\text{Spec } S$ введена топология, которую связывают с именами М. Стоуна и О. Зариского. Топологическое пространство $\text{Spec } S$ с топологией Стоуна—Зариского называется *первичным спектром полукольца S* . Для коммутативного полукольца пространство $\text{Spec } S$ называется *простым спектром*. Эта топология индуцирует топологию на подмножестве $\text{Max } S$ первичного спектра — множестве всех максимальных идеалов из S . Открытыми в $\text{Max } S$ подмножествами будут множества вида

$$D_1(A) = D(A) \cap \text{Max } S = \{M \in \text{Max } S : M \not\supseteq A\},$$

где A — идеал полукольца S , $D(A)$ — открытое подмножество в $\text{Spec } S$. Пространство $\text{Max } S$ называется *максимальным спектром полукольца S* .

Замкнутыми множествами в $\text{Spec } S$ будут в точности множества вида

$$Z(A) = \text{Spec } S \setminus D(A) = \{P \in \text{Spec } S : P \supseteq A\}$$

для произвольного идеала A .

Напомним, что компактное хаусдорфово пространство называется *компактом*. Пространство называется *нульмерным*, если оно обладает базой из открыто-замкнутых множеств. Подмножество U пространства X называется *коплотным*, если $X - U$ — единственное открытое множество в X , содержащее U .

Через $D(a)$, где $a \in S$, договоримся обозначать $D(SaS)$.

Предложение 2.1.1. Для произвольного полукольца S выполняются следующие утверждения:

- 1) $\text{Spec } S$ — компактное T_0 -пространство с базисом открытых множеств $D(a)$, $a \in S$;
- 2) $\text{Max } S$ — компактное T_1 -пространство, являющееся подпространством всех замкнутых точек в $\text{Spec } S$;
- 3) любое подпространство $\text{Spec } S$, содержащее $\text{Max } S$, компактно и коплотно;
- 4) для любых идеалов I, J полукольца S справедливы соотношения

$$D(I) = D(\sqrt{I}), \quad D(I) \subseteq D(J) \iff \sqrt{I} \subseteq \sqrt{J} \iff I \subseteq \sqrt{J}.$$

Доказательство. 1. Пусть $\bigcup D(A_i) = \text{Spec } S$ для произвольного семейства идеалов $\{A_i\}$. Тогда $\bigcup D(A_i) = D(\sum A_i)$, и идеал $\sum A_i$ не лежит ни в одном идеале полукольца S . Это возможно лишь в случае, когда $\sum A_i = S$. Получим, что $1 \in \sum A_i$, значит, $1 = a_1 + a_2 + \dots + a_k$ для некоторых $a_j \in A_j$, $j = 1, \dots, k$, из семейства $\{A_i\}$. Поскольку идеал $\sum_{j=1}^k A_j$ содержит 1, то

$$D(A_1) \cup \dots \cup D(A_k) = D\left(\sum_{j=1}^k A_j\right) = D(S) = \text{Spec } S,$$

что означает компактность первичного спектра. Если P_1 и P_2 — два произвольных различных первичных идеала, то понятно, что хотя бы один из них не содержится в другом. Допустим для определённости, что $P_1 \not\subseteq P_2$. Тогда $D(P_1)$ содержит P_2 , но не содержит P_1 , т. е. $\text{Spec } S$ является T_0 -пространством.

2. Компактность $\text{Max } S$ и то, что множества $D_1(a)$, $a \in S$, образуют базис открытых множеств $\text{Max } S$, доказывается так же, как и в случае первичного спектра. Пусть M_1 и M_2 — произвольные различные максимальные идеалы из S . Тогда $D_1(M_1)$ содержит M_2 и не содержит M_1 , и наоборот, в $D_1(M_1)$ содержится M_2 , но не M_1 , поэтому $\text{Max } S$ является T_1 -пространством. Если $M \in \text{Max } S$, то $Z(M) = \{M\}$, что означает замкнутость точки M . Понятно, что если P — первичный идеал, строго лежащий в максимальном идеале M , то замыкание точки P будет содержать M .

3. Пусть $\text{Max } S \subseteq X \subseteq \text{Spec } S$ для некоторого подпространства X . Очевидна его компактность. Пусть $X \subseteq D(J)$ для некоторого идеала J . Тогда никакой максимальный идеал из S не содержится в идеале J , поэтому $J = S$, и следовательно, $D(J) = \text{Spec } S$.

4. Последнее утверждение очевидно. □

Для определения ещё одного топологического пространства, пирсовского спектра полукольца, введём необходимое понятие дополняемого идемпотента.

Определение. Элемент $s \in S$ называется *центральный*, если s коммутирует с произвольным элементом полукольца S , т. е. $sa = as$ для любого $a \in S$; центральный идемпотент $e \in S$ называется *дополняемым*, если существует такой элемент $f \in S$, что $ef = 0$ и $e + f = 1$; элемент f называется *дополнением* e .

Лемма 2.1.2. Дополнение центрального идемпотента является дополняемым идемпотентом и определяется однозначно.

Доказательство. Пусть e — центральный идемпотент из S и $e + f = 1$, $ef = 0$. Тогда

$$f = f(e + f) = fe + f^2 = f^2.$$

Поскольку e центральный, то $fse = 0 = esf$, поэтому

$$fs = fs(e + f) = fse + fsf = fsf = esf + fsf = (e + f)sf = sf$$

для любого $s \in S$.

Если мы предположим, что $e + f' = 1$, $ef' = 0$ для некоторого $f' \in S$, то получим, что

$$f = f(e + f') = ff' = (f + e)f' = f'.$$

Таким образом, f является центральным идемпотентом и однозначно определён. $\square$

Дополнение идемпотента e будем обозначать $e^\perp$, а множество всех дополняемых элементов полукольца S через BS .

В любом полукольце 0 и 1 являются дополняемыми идемпотентами. Если S — прямая сумма своих идеалов $A_1, \dots, A_k$, то проекции единицы $e_1, \dots, e_k$ (т. е. такие элементы, что $e_1 + \dots + e_k = 1$ и $e_1 \in A_1, \dots, e_k \in A_k$) будут дополняемыми идемпотентами, при этом $e_i^\perp$ совпадает с суммой остальных проекций единицы.

Любой центральный идемпотент e кольца с 1 обладает дополнением $1 - e$. В ограниченной дистрибутивной решётке каждый элемент является центральным идемпотентом, но не обязательно дополняемым; например, в цепи дополняемыми являются лишь 0 и 1. Дистрибутивная решётка, каждый элемент в которой дополняем, называется *булевой решёткой*. Булевой решёткой будет решётка всех подмножеств произвольного множества с операциями объединения и пересечения. Кольцо, каждый элемент которого является идемпотентом, называется *булевым кольцом*.

Для произвольных идемпотентов $e, f \in BS$ положим

$$e \oplus f = ef^\perp + e^\perp f.$$

Предложение 2.1.3. Множество BS всех дополняемых идемпотентов полукольца S с операциями $\oplus$ и обычным умножением является булевым кольцом.

Доказательство. Элемент $ef + e^\perp f^\perp$ будет дополнением к элементу $e \oplus f$, поскольку

$$\begin{aligned}(e \oplus f) + ef + e^\perp f^\perp &= ef^\perp + e^\perp f + ef + e^\perp f^\perp = \\ &= e(f^\perp + f) + e^\perp(f + f^\perp) = e + e^\perp = 1, \\ (e \oplus f)(ef + e^\perp f^\perp) &= (ef^\perp + e^\perp f)(ef + e^\perp f^\perp) = 0.\end{aligned}$$

Поэтому по лемме 2.1.2 $ef + e^\perp f^\perp \in BS$. Дополнением к ef для произвольных $e, f \in BS$ служит элемент $ef^\perp + e^\perp$, таким образом, операция $\oplus$ и умножение замкнуты на множестве BS . Далее,

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (ab^\perp + a^\perp b)c^\perp + (a \oplus b)^\perp c = \\ &= ab^\perp c^\perp + a^\perp bc^\perp + abc + a^\perp b^\perp c, \\ a \oplus (b \oplus c) &= a(b \oplus c)^\perp + a^\perp(bc^\perp + b^\perp c) = \\ &= abc + ab^\perp c^\perp + a^\perp bc^\perp + a^\perp b^\perp c,\end{aligned}$$

значит, операция $\oplus$ ассоциативна. Так же непосредственно проверяется дистрибутивность умножения относительно $\oplus$. Для любого $e \in BS$ справедливо

$$0 \oplus e = 0e + 0^\perp e = 0 + 1e = e, \quad e \oplus e = ee^\perp + e^\perp e = 0 + 0 = 0,$$

т. е. BS является кольцом, состоящим из дополняемых идемпотентов. $\square$

Пространство $\text{Max } BS$ всех максимальных идеалов кольца BS назовём *пирсовским спектром* полукольца S .

Предложение 2.1.4. Для произвольного полукольца S пространство $\text{Max } BS$ — нульмерный компакт.

Доказательство. Во-первых, заметим, что для любых $M \in \text{Max } BS$ и $e \in BS$ только один из элементов e и $e^\perp$ лежит в M . Действительно, это вытекает из простоты M и того, что $ee^\perp \in M$; оба элемента в M лежать не могут, так как в противном случае $1 = e \oplus e^\perp \in M$. Пусть M и N — различные максимальные идеалы полукольца BS . Тогда найдётся элемент $e \in M \setminus N$. Его дополнение $e^\perp$ будет лежать в N , но не в M . Множества $D_1(e)$ и $D_1(e^\perp)$ содержат M и N соответственно и не пересекаются:

$$D_1(e) \cap D_1(e^\perp) = D_1(ee^\perp) = D_1(0) = \emptyset.$$

Таким образом, пространство $\text{Max } BS$ хаусдорфово и с учётом предыдущих рассуждений является компактом. Семейство подмножеств вида $D_1(e)$ образует базис пространства $\text{Max } BS$; кроме того, $D_1(e)$ замкнуто:

$$D_1(e) \cup D_1(e^\perp) = D_1((e) + (e^\perp)) = D_1(BS) = \text{Max } BS.$$

Выше было показано, что $D_1(e) \cap D_1(e^\perp) = \emptyset$. Значит, пирсовский спектр полукольца S нульмерен. $\square$

2.2. Точечные пространства полуколец

Пусть $(L, \vee, \wedge)$ — полная решётка, 0 и 1 — её наименьший и наибольший элементы. Элемент $p \in L$, отличный от 1, называется $\wedge$ -неприводимым, если для любых $a, b \in L$ из $a \wedge b \leq p$ следует, что $a \leq p$ или $b \leq p$. На множестве $\text{Pt } L$ всех $\wedge$ -неприводимых элементов вводится стоуновская топология; для каждого $a \in L$ множества

$$p^*(a) = \{p \in \text{Pt } L : a \not\leq p\}$$

объявляются открытыми. Стандартно проверяются соотношения для любых $a, b, a_i \in L$:

$$p^*(0) = \emptyset, \quad p^*(1) = \text{Pt } L, \quad p^*(a \wedge b) = p^*(a) \cap p^*(b), \quad p^*\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right) = \bigcup_{i \in I} p^*(a_i).$$

Топологическое пространство $\text{Pt } L$ с введённой топологией называется *точечным пространством решётки L* .

Пусть $\tau \text{Pt } L$ — решётка всех открытых подмножеств из $\text{Pt } L$. Скажем, что решётка L имеет достаточно много $\wedge$ -неприводимых элементов, если для любых $a \not\leq b$ из L найдётся $p \in \text{Pt } L$, такой что $a \not\leq p$ и $b \leq p$.

Предложение 2.2.1. *Отображение*

$$p^* : L \rightarrow \tau \text{Pt } L, \quad a \rightarrow p^*(a), \quad (2)$$

является решёточным изоморфизмом тогда и только тогда, когда решётка L дистрибутивна и имеет достаточно много $\wedge$ -неприводимых элементов.

Доказательство. Ясно, что p^* — эпиморфизм. Пусть $a \neq b$ и для определённости $a \not\leq b$. Тогда по условию найдётся $p \in \text{Pt } L$, для которого $a \not\leq p$ и $b \leq p$. Получаем, что $p \in p^*(a) \setminus p^*(b)$, и p^* — инъективное отображение.

Обратно, пусть p^* — изоморфизм, из чего вытекает дистрибутивность решётки L . Рассмотрим $a, b \in L$, такие что $a \not\leq b$. По лемме Цорна найдётся максимальный элемент $p \neq 1$, такой что $b \leq p$ и $a \not\leq p$. Покажем, что он $\wedge$ -неприводим. Пусть $x, y \not\leq p$. Элементы $x \vee p$ и $y \vee p$ строго больше p , поэтому $a \leq x \vee p$ и $a \leq y \vee p$. Получаем, что $a \leq (x \vee p) \wedge (y \vee p) = (x \wedge y) \vee p$ и $x \wedge y \not\leq p$ (иначе $a \leq p$, противоречие с выбором p). Таким образом, p является $\wedge$ -неприводимым, а L имеет достаточно много $\wedge$ -неприводимых элементов. $\square$

Если $\text{Id } S$ — решётка идеалов полукольца S , то её точечным пространством будет множество всех $\cap$ -неприводимых идеалов. Ясно, что первичный спектр является подпространством $\text{Pt Id } S$, в общем случае собственным. К примеру, идеалы $p^2\mathbb{Z}$, где p — простое число, кольца целых чисел $\cap$ -неприводимые, но не простые.

Элементами точечного пространства $\text{Pt } \tau X$, где X — топологическое пространство, являются в точности дополнения до неприводимых замкнутых множеств в X ; в частности, $X \setminus \overline{\{x\}} \in \text{Pt } \tau X$. Через $\bar{A}$ договоримся обозначать замыкание подмножества A топологического пространства.

Напомним известное определение сопряжения между полными решётками.

Определение. Пусть L и K — полные решётки и отображения $f: L \rightarrow K$ и $g: K \rightarrow L$ сохраняют единицу и конечные точные нижние грани. Пара (f, g) называется *сопряжением* между решётками L и K , если при всех $a \in L$ и $b \in K$ $f(a) \leq b$ тогда и только тогда, когда $a \leq g(b)$. Отображения f и g называются *левым сопряжённым* и *правым сопряжённым* соответственно.

Примеры сопряжений.

1. Пусть L — произвольная полная решётка. Тогда пара (p^*, p_*) является сопряжением между полными решётками L и $\tau \text{Pt } L$, где левый сопряжённый — отображение (2), а правый задаётся формулой $p_*(U) = \bigwedge (\text{Pt } L \setminus U)$ для любого $U \in \tau \text{Pt } L$.
2. Частным случаем предыдущего примера является сопряжение (d, h) между решётками $\text{Id } S$ и $\tau \text{Spec } S$, задаваемое отображениями $d(J) = D(J)$ и $h(U) = \bigcap (\text{Spec } S \setminus U)$ для произвольных идеала J и открытого в $\text{Spec } S$ множества U .
3. Пусть $\varphi: X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Для $U \in \tau X$ и $V \in \tau Y$ полагаем $f(V) = \varphi^{-1}(V)$ и $g(U) = Y \setminus \varphi(X \setminus U)$. Получаем сопряжение (f, g) между решётками τX и τY .
4. Наиболее важным для нас примером является сопряжение, основанное на так называемом фрейме идеалов полукольца. В дальнейшем с помощью фреймов идеалов и сопряжений будут построены несколько типов пучковых представлений.

Определение. Ограниченная дистрибутивная решётка F называется *фреймом*, если точная верхняя грань существует для любого подмножества из F . Произвольная дистрибутивная решётка идеалов полукольца S , содержащая 0 и S и замкнутая относительно произвольных сумм, называется *фреймом идеалов полукольца S* .

Разумеется, каждый фрейм является полной решёткой. Первый пример фрейма — решётка всех открытых множеств произвольного топологического пространства. В общем случае точная нижняя грань произвольного семейства открытых множеств не совпадает с их пересечением; такая же ситуация будет наблюдаться и для фрейма идеалов полукольца: точная нижняя грань произвольного семейства идеалов фрейма не обязана совпадать с их пересечением.

Пусть F — произвольный фрейм идеалов полукольца S . Во-первых, мы имеем отображение

$$i: F \hookrightarrow \text{Id } S,$$

являющееся включением. Во-вторых, рассмотрим отображение

$$w: \text{Id } S \rightarrow F, \quad w(J) = \sum \{A \in F: A \subseteq J\} \text{ для любого идеала } J \text{ из } S.$$

Другими словами, $w(J)$ — наибольший идеал из фрейма F , лежащий в J .

Отображение i сохраняет 0 , S (как наибольший элемент решёток F и $\text{Id } S$), конечные точные нижние грани и произвольные суммы. Отображение w сохра-

няет 0 , S , конечные $\wedge$. Наконец, i и w связаны соотношением

$$i(A) \subseteq B \iff A \subseteq w(B)$$

для любых $A \in F$ и $B \in \text{Id } S$. Таким образом, мы получили ещё один пример сопряжения — пару (i, w) .

Приведём примеры фреймов идеалов.

Определение. Идеал A полукольца S назовём *чистым* (равномерно чистым), если для любого элемента $a \in A$ выполняется соотношение $A + \text{Ann } a = S$ ($A + \text{Ann } aS = S$). Идеал A назовём *почти чистым*, если для любого $a \in A$ найдётся элемент $e \in A$, для которого $ae = a$. Идеал называется *регулярным*, если он порождается некоторым множеством дополняемых идемпотентов.

Очевидно, что каждый равномерно чистый идеал полукольца чист. Для колец понятия чистого и почти чистого идеала совпадают [55].

Предложение 2.2.2. Для чистых идеалов A, B, C полукольца S справедливы следующие утверждения:

- 1) если $a \in A$, то $ae = a$ для некоторого $e \in A$;
- 2) $(A + B) \cap C = (A \cap C) + (B \cap C)$;
- 3) пересечение двух чистых идеалов является чистым идеалом;
- 4) сумма произвольного числа чистых идеалов есть чистый идеал.

Доказательство. 1. Поскольку $A + \text{Ann } a = S$, то для подходящих $e \in A$ и $r \in \text{Ann } a$ имеем $e + r = 1$. Тогда $ae = ae + ar = a(e + r) = a$.

2. Включение $A \cap C + B \cap C \subseteq (A + B) \cap C$ справедливо для любых идеалов полукольца. Пусть $c \in (A + B) \cap C$ и для некоторых $a \in A$, $b \in B$ выполняется $c = a + b$. По доказанному выше существует такой элемент $e \in C$, что $c = ce$. Тогда $c = ce = ae + be \in A \cap C + B \cap C$, что доказывает обратное включение.

3. Пусть $a \in A \cap B$. Так как идеалы A и B чистые, $e + r = 1$ и $f + s = 1$ для некоторых $e \in A$, $f \in B$, $r, s \in \text{Ann } a$. Перемножив почленно равенства, получим

$$1 = (e + r)(f + s) = (e + r)f + (e + r)s = ef + (rf + s) \in A \cap B + \text{Ann } a,$$

т. е. идеал $A \cap B$ чистый.

4. Начнём доказательство для суммы двух идеалов. Пусть A, B — чистые идеалы. Если $c \in A + B$, то $c = a + b$ для некоторых $a \in A$, $b \in B$. Поскольку A чистый, найдутся такие $e \in A$, $r \in \text{Ann } a$, что $e + r = 1$. Элемент br лежит в чистом идеале B , значит, $f + s = 1$ для некоторых $f \in B$, $s \in \text{Ann } br$. Получаем, что $e + rf \in A + B$ и $rs \in \text{Ann } c$, так как

$$crs = (a + b)rs = ars + brs = 0s + 0 = 0.$$

Далее,

$$e + rf + rs = e + r(f + s) = e + r = 1,$$

что доказывает чистоту суммы двух чистых идеалов. Индукцией получаем, что произвольная конечная сумма чистых идеалов является чистым идеалом.

Пусть сейчас (I_i) — семейство чистых идеалов, I — их сумма. Элемент $a \in I$ имеет вид $a = a_1 + \dots + a_m$ для некоторых $a_j \in I_j \in (I_i)$, $j = 1, \dots, m$. Так как идеалы I_j чистые, чистым будет идеал $I_1 + \dots + I_m$. Тогда

$$I + \text{Ann } a \supseteq I_1 + \dots + I_m + \text{Ann } a = S,$$

откуда и следует чистота идеала I . $\square$

Аналогичное предложение справедливо и для равномерно чистых идеалов. Уточним, что тогда первое утверждение звучит так: если a — элемент равномерно чистого идеала A , r — произвольный элемент из S , то $are = ar$ для некоторого $e \in A$.

Обозначим через $F_{\text{reg}}(S)$ множество всех регулярных идеалов полукольца S . Очевидно, что произвольные суммы регулярных идеалов являются регулярными идеалами. Пусть A — регулярный идеал и $a \in A$. Тогда $a = e_1 s_1 + \dots + e_n s_n$ для некоторых $e_1, \dots, e_n \in A \cap BS$ и $s_1, \dots, s_n \in S$. Положим

$$e = e_1 e_2^\perp \cdots e_n^\perp + e_2 e_3^\perp \cdots e_n^\perp + \dots + e_{n-1} e_n^\perp + e_n. \quad (3)$$

Заметим, что $ee_1^\perp \cdots e_n^\perp = 0$ и $e + e_1^\perp \cdots e_n^\perp = 1$, следовательно, e — дополняемый идемпотент, очевидно лежащий в A . Поскольку $e_1^\perp \cdots e_n^\perp \in \text{Ann } aS$, то $A + \text{Ann } aS = S$ и A — равномерно чистый идеал.

Пусть A, B — регулярные идеалы и $c \in A \cap B$. Для подходящих $e_i \in A \cap BS$, $f_j \in B \cap BS$ получаем

$$c = e_1 s_1 + \dots + e_k s_k = f_1 t_1 + \dots + f_r t_r.$$

Аналогично (3) построим для наборов $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$ дополняемые идемпотенты e и f . Имеем $c = ce = cf = cef$ и $ef \in A \cap B \cap BS$, что означает регулярность идеала $A \cap B$. Таким образом, $F_{\text{reg}}(S)$ образует подрешётку решётки равномерно чистых идеалов, причём полную.

Эти рассуждения, а также предложение 2.2.2 и его аналог для равномерно чистых идеалов позволяют сформулировать следующее утверждение.

Предложение 2.2.3. *Множества всех чистых, равномерно чистых и регулярных идеалов произвольного полукольца S образуют три фрейма идеалов полукольца S .*

Отметим, что решётка идеалов полукольца в общем случае не является дистрибутивной, а по этой причине не всегда является фреймом.

Предложение 2.2.4. *Решётка идеалов полукольца, каждый идеал которого почти чист, дистрибутивна.*

Доказательство. Пусть $a \in A \cap (B + C)$ для $A, B, C \in \text{Id } S$ и $a = b + c$ для некоторых $b \in B$, $c \in C$. Для подходящего $e \in A$ имеем $ae = a$. Тогда $a = ae = be + ce \in (A \cap B) + (A \cap C)$, т. е. $A \cap (B + C) \subseteq (A \cap B) + (A \cap C)$. Обратное включение справедливо всегда. $\square$

В [57] Б. Брауном и Н. Маккоем определено (*правое*) *слабо регулярное кольцо* как кольцо R , в котором для любого $a \in R$ разрешимо уравнение $a = axa$. Дословное перенесение этого понятия на полукольца осуществлено в [51].

Следствие 2.2.5. Множество $\text{Id } S$ слабо регулярного полукольца S является фреймом идеалов.

Доказательство. Ввиду предложения 2.2.4 достаточно показать, что каждый идеал в S почти чист. Пусть J — идеал слабо регулярного полукольца S и $a \in J$. Но тогда $a = aea f$ для некоторых $e, f \in S$ и $ea f \in J$. $\square$

Назовём наибольший чистый идеал, лежащий в идеале J , *чистой частью идеала* J .

Лемма 2.2.6. Если P — первичный идеал, а F — произвольный фрейм идеалов полукольца S , то наибольший идеал M фрейма F , лежащий в P , $\cap$ -неприводим; в частности, $\cap$ -неприводимым идеалом является чистая часть идеала P .

Доказательство. Пусть $A \cap B \subseteq M$ для $A, B \in F$. Тогда $AB \subseteq A \cap B \subseteq P$, откуда следует, что $A \subseteq P$ или $B \subseteq P$, и значит, $A \subseteq M$ или $B \subseteq M$. $\square$

Пусть F — произвольный фрейм идеалов полукольца S . Как и для произвольной полной решётки, рассмотрим точечное пространство $\text{Pt } F$ со стоуновской топологией на множестве $\cap$ -неприводимых идеалов из F .

Теорема 2.2.7. Всякий фрейм идеалов F полукольца S изоморфен решётке $\tau \text{Pt } F$ всех открытых множеств точечного пространства $\text{Pt } F$, являющегося компактным T_0 -пространством.

Доказательство. Рассмотрим канонический эпиморфизм $p^*: F \rightarrow \tau \text{Pt } F$. Чтобы доказать, что p^* является изоморфизмом, требуется показать, что в F достаточно много $\cap$ -неприводимых элементов. Рассуждения аналогичны рассуждениям в доказательстве предложения 2.2.1. Покажем компактность $\text{Pt } F$. Пусть $\text{Pt } F = \bigcup p^*(A_i)$ для семейства идеалов (A_i) из F . Тогда $p^*(\sum A_i) = \text{Pt } F$, и значит, $\sum A_i = S$. Поэтому $A_1 + \dots + A_n = S$ для некоторых A_i из семейства (A_i) , откуда следует, что $\text{Pt } F = p^*(A_1) \cup \dots \cup p^*(A_n)$. Стандартно проверяется T_0 -отделимость точек пространства $\text{Pt } F$. $\square$

Предложение 2.2.8. Точечное пространство $\text{Pt } F$ фрейма всех регулярных идеалов полукольца S гомеоморфно пирсовскому спектру $\text{Max } SB$ полукольца S .

Доказательство. Несложно заметить, что фрейм F изоморфен решётке $\text{Id } BS$ всех идеалов булева полукольца BS при соответствии

$$F \ni A \rightarrow A \cap BS \rightarrow (A \cap BS)S = A.$$

Поэтому $\text{Pt } F$ гомеоморфен $\text{Pt Id } BS$. Поскольку $\cap$ -неприводимость идеала булева кольца равносильна простоте, а каждый простой идеал булева кольца максимален, то $\text{Pt Id } BS = \text{Spec } BS = \text{Max } BS$. Следовательно, $\text{Pt } F \approx \text{Max } S$. $\square$

2.3. Предпучки Симмонса и Гротендика

В этом разделе определяются структурные предпучки Симмонса и Гротендика и выясняется, выполнены ли для них условия P1, P2 из определения пучка.

Доказывается изоморфность представления Симмонса (сечениями предпучка) и изоморфность пучкового представления Гротендика.

Определение. Коммутативный моноид $(A, +)$ называется *правым полумодулем над полукольцом* S , если задано внешнее умножение справа элементов $a \in A$ на элементы $s \in S$, обозначаемое $as \in S$, и при этом для любых $a, b \in A$, $s, t \in S$ выполняются условия

$$\begin{aligned} a(st) &= (as)t, \\ (a + b)s &= as + bs, \\ a(s + t) &= as + at, \\ a \cdot 1 &= a, \quad 0 \cdot a = 0 = 0 \cdot a. \end{aligned}$$

Отображение $\varphi: A \rightarrow B$ правых S -полумодулей называется *гомоморфизмом полумодулей*, если φ — полугрупповой гомоморфизм и $\varphi(as) = \varphi(a)s$ для любых $a \in A$, $s \in S$. Множество всех эндоморфизмов $\text{End } A$ правого S -полумодуля A является полукольцом, в котором операции сложения и умножения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(a) &= \varphi(a) + \psi(a), \\ (\varphi \cdot \psi)(a) &= \varphi(\psi(a)). \end{aligned}$$

Это полукольцо, называемое *полукольцом эндоморфизмов полумодуля* A , является также и полумодулем над S .

Для построения предпучка, удовлетворяющего только условию P1, рассмотрим полукольцо $\text{End } A$ эндоморфизмов полумодуля A_S .

Выясним строение полукольца $\text{End } S$ всех эндоморфизмов полукольца S , рассматриваемого как правый полумодуль над S .

Для произвольного $r \in S$ отображение $\varphi_r: S \rightarrow S$, задаваемое соотношением $\varphi_r(a) = ra$, является эндоморфизмом, поскольку

$$\varphi_r(as + bt) = r(as + bt) = (ra)s + (rb)t = \varphi_r(a)s + \varphi_r(b)t.$$

Пусть φ — произвольный эндоморфизм правого полумодуля S_S . Тогда для любого $a \in S$

$$\varphi(a) = \varphi(1 \cdot a) = \varphi(1)a = \varphi_r(a),$$

где $r = \varphi(1)$. Это означает, что $\text{End } S$ состоит из эндоморфизмов вида φ_r .

Теорема 2.3.1. Пусть S — произвольное полукольцо, F — фрейм всех его чистых идеалов. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Соответствие $p^*(A) \rightarrow \text{End } A$ для каждого идеала A определяет предпучок $\mathbf{F}$ полуколец над точечным пространством $\text{Pt } F$ фрейма всех чистых идеалов полукольца S .
2. Предпучок $(\mathbf{F}, \text{Pt } F)$ удовлетворяет условию P1.
3. Полукольцо S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений этого предпучка.

Доказательство. 1. Открытые подмножества пространства $\text{Pt } F$ имеют вид $p^*(A)$, где $A \in F$, а $\text{End } A$ является полукольцом. Для доказательства первого утверждения достаточно показать существование ограничения $\text{End } B \rightarrow \text{End } A$ в том случае, когда $p^*(A) \subseteq p^*(B)$. Последнее означает, что $A \subseteq B$. Убедимся, что обычное ограничение эндоморфизма $\varphi: B \rightarrow B$ на A является эндоморфизмом $\tilde{\varphi}: A \rightarrow A$. Действительно, пусть $a \in A$. Так как A чист, имеем $a = ae$ для некоторого $e \in A$. Тогда

$$\tilde{\varphi}(a) = \varphi(a) = \varphi(ae) = \varphi(a)e \in A.$$

Покажем, что это ограничение

$$r: \text{End } B \rightarrow \text{End } A, \quad r(\varphi) = \tilde{\varphi},$$

есть полукольцевой гомоморфизм. Пусть $a \in A$ и $\varphi, \gamma \in \text{End } B$. Тогда

$$\begin{aligned} r(\varphi + \gamma)(a) &= \widetilde{\varphi + \gamma}(a) = (\varphi + \gamma)(a) = \\ &= \varphi(a) + \gamma(a) = \tilde{\varphi}(a) + \tilde{\gamma}(a) = r(\varphi)(a) + r(\gamma)(a), \\ r(\varphi\gamma)(a) &= \widetilde{\varphi\gamma}(a) = \varphi\gamma(a) = \\ &= \varphi(\tilde{\gamma}(a)) = \tilde{\varphi}(\tilde{\gamma}(a)) = \tilde{\varphi}\tilde{\gamma}(a) = r(\varphi)r(\gamma)(a). \end{aligned}$$

Таким образом, $(\mathbf{F}, \text{Pt } F)$ — предпучок полуколец.

2. Покажем, что $(\mathbf{F}, \text{Pt } F)$ удовлетворяет условию P1. Пусть открытое множество $p^*(A)$ чистого спектра полукольца S покрыто открытыми подмножествами $p^*(A_i)$, $i \in I$, и сечения предпучка $\varphi, \gamma \in \text{End } A$ совпадают на каждом $p^*(A_i)$, т. е. $\varphi|_{A_i} = \gamma|_{A_i}$ для любого $i \in I$. Поскольку $A = \sum A_i$, то для любого $a \in A$ имеем $a = a_1 + \dots + a_k$ для подходящих $a_i \in A_i$, $i \in I$. Тогда

$$\varphi(a) = \varphi(a_1) + \dots + \varphi(a_k) = \gamma(a_1) + \dots + \gamma(a_k) = \gamma(a_1 + \dots + a_k) = \gamma(a).$$

Следовательно, $\varphi = \gamma$ на $p^*(A)$, и предпучок $\mathbf{F}$ удовлетворяет условию P1.

3. Рассмотрим отображение $\rho: S \rightarrow \text{End } S$, при котором $\rho(s) = \varphi_s$. Оно является гомоморфизмом, поскольку для любого $s \in S$

$$\begin{aligned} \rho(a + b)(s) &= \varphi_{a+b}(s) = (a + b)s = as + bs = \varphi_a(s) + \varphi_b(s) = \\ &= (\varphi_a + \varphi_b)(s) = (\rho(a) + \rho(b))(s), \\ \rho(ab)(s) &= \varphi_{ab}(s) = (ab)s = a(bs) = a(\rho(b)(s)) = \\ &= \rho(a)(\rho(b)(s)) = (\rho(a) \cdot \rho(b))(s), \end{aligned}$$

т. е. $\rho(a + b) = \rho(a) + \rho(b)$ и $\rho(ab) = \rho(a) \cdot \rho(b)$.

Пусть $\varphi_a = \varphi_b$, что означает, что $\varphi_a(s) = \varphi_b(s)$ для любого $s \in S$. Тогда $\varphi_a(1) = \varphi_b(1)$, откуда следует, что $a \cdot 1 = b \cdot 1$ и $a = b$. Сюръективность ρ показана перед теоремой. $\square$

Построенный выше предпучок $(\mathbf{P}, \text{Pt } F)$ назовём *предпучком Симмонса*. Для колец такой предпучок был рассмотрен в [103]; там же было установлено, что предпучок Симмонса колец удовлетворяет условию P2 и, следовательно, является пучком. В разделе 5.4 мы вернёмся к предпучку Симмонса и

докажем, что он является пучком для коммутативных в нуле полуколец и для гельфандовых полуколец.

Как уже отмечалось в введении, исторически первым пучковым представлением было представление коммутативного полукольца сечениями пучка локальных колец — пучка Гротендика. Для полукольцевого аналога нам потребуется конструкция локализации полукольца.

Пусть S — коммутативное полукольцо, P — его простой идеал. Введём на множестве $S \times (S \setminus P)$ отношение $\sim$:

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ads = cbs \text{ для некоторого } s \in S \setminus P.$$

Лемма 2.3.2. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Очевидны рефлексивность и симметричность отношения. Пусть $(a, b) \sim (c, d)$ и $(c, d) \sim (e, f)$, что означает $ads = cbs$ и $cft = edt$ для некоторых $s, t \notin P$. Умножим первое равенство на ft , а второе на bs . Тогда $afdst = cfbst$ и $cfbst = ebdst$, откуда получаем $afdst = ebdst$. Так как идеал P простой, элемент dst не лежит в P , и по определению $(a, b) \sim (e, f)$. $\square$

Обозначим через $\frac{a}{b}$ класс эквивалентности пары (a, b) и введём на множестве S_P всех классов обычные для дробей операции сложения и умножения:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Лемма 2.3.3. *Система $(S_P, +, \cdot)$ является коммутативным полукольцом.*

Доказательство. Убедимся в корректности введённых операций. Пусть

$$(a', b') \in \frac{a}{b}, \quad (c', d') \in \frac{c}{d},$$

т. е. $ab's = a'bs$ и $cd't = c'dt$ для некоторых $s, t \in S \setminus P$. Тогда

$$\begin{aligned} st(ad + bc)b'd' &= (ab's)dd't + (cd't)bb's = a'bsdd't + c'dtbb's = st(a'd' + c'b')bd, \\ ac \cdot b'd' \cdot st &= ab's \cdot cd't = a'bs \cdot c'dt = a'c' \cdot bd \cdot st. \end{aligned}$$

Так как $st \notin P$, то $(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$ и $(ac, bd) \sim (a'c', b'd')$, следовательно, операции определены правильно. Очевидно, что операции ассоциативны, коммутативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения, поскольку операции определены так же, как сложение и умножение рациональных чисел. Классы $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{1}$ являются нейтральными по сложению и умножению соответственно. Наконец, $\frac{a}{b} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{b} = \frac{0}{1}$. $\square$

Очевидно, что коммутативное полукольцо имеет единственный максимальный идеал тогда и только тогда, когда множество всех его необратимых элементов является идеалом.

Предложение 2.3.4. *Полукольцо S_P имеет единственный максимальный идеал.*

Доказательство. Заметим, что пара (a, b) , где $a \in P$, несравнима с парой (c, d) , в которой $c \notin P$. Действительно, если $(a, b) \sim (c, d)$, то $ads = bcs$ и в левой части находится элемент из P , а в правой не из P . Таким образом, имеет смысл рассмотреть идеал $M = \{\frac{a}{b} \in S_P : a \in P\}$. Пусть $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in M$, $\frac{e}{f} \in S_P$. Если $\frac{e}{f} \notin M$, то $e \notin P$ и $\frac{f}{e} \in S_P$. Кроме того, $\frac{e}{f} \cdot \frac{f}{e} = \frac{1}{1}$, поэтому произвольный элемент из $S_P \setminus M$ обратим. Следовательно, M будет максимальным идеалом, а S_P — полукольцом с единственным максимальным идеалом. $\square$

Построенное полукольцо S_P назовём *локализацией коммутативного полукольца* S . Отметим, что мы не будем говорить о локализации полукольца как о локальном полукольце, оставив понятие локальности для более узкого класса r -полуколец (см. раздел 3.3).

Построим с помощью предпучка пучок полуколец, базисным пространством которого является простой спектр полукольца S , а слоями локализации S_P . Пусть V — открытое подмножество пространства $\text{Spec } S$. Обозначим через S_V множество всех функций

$$\sigma: V \rightarrow \dot{\bigcup} S_P, \quad P \in V,$$

таких что $\sigma(P) \in S_P$, локально реализующихся отношениями элементов из S . Последнее означает, что для каждой точки $P \in V$ существует такое открытое множество $U \subseteq V$, что $\sigma = \frac{s}{a}$ на $U \subseteq D(a)$ для подходящих $s, a \in S$. Относительно поточечно определяемых операций сложения и умножения множество S_V становится коммутативным полукольцом.

При $U \subseteq V$ имеется гомоморфизм ограничения $r_U^V: S_V \rightarrow S_U$. В результате получается предпучок полуколец, очевидно удовлетворяющий свойствам P1 и P2. При этом слой в точке P является локализацией полукольца S по идеалу P . Действительно, по определению S_V каждая функция $\sigma \in S_V$ будет находиться в отношении $\sim_P$ с некоторым элементом $\frac{s}{a}$ из S_P . Кроме того, очевидно, что различные элементы локализации S_P несравнимы по отношению $\sim_P$.

Обозначим через

$$\mathbf{G}(S) = \dot{\bigcup} \{S_P : P \in \text{Spec } S\}$$

пучок локализаций над простым спектром полукольца S .

Определение. Пучок полуколец $(\mathbf{G}(S), \text{Spec } S)$ называется *пучком Гротендика*; *представлением Гротендика* коммутативного полукольца S называется представление α полукольца S в пучке Гротендика, такое что образ $\alpha_P(s)$ элемента $s \in S$ в произвольной точке $P \in \text{Spec } S$ равен $\frac{s}{1} \in S_P$.

Теорема 2.3.5. Представление Гротендика всякого коммутативного полукольца является изоморфным.

Предварительно докажем одну лемму.

Лемма 2.3.6. Для произвольных элемента a и идеала A коммутативного полукольца S из того, что $D(a) \subseteq D(A)$, следует, что $a^n \in A$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого элемента $a \in S$ m -система $T = \{1, a, a^2, \dots\}$ не пересекается с идеалом A . Тогда найдётся простой идеал P , содержащий A и не пересекающийся с T . Но тогда $P \in D(a)$ и $P \notin D(A)$, что противоречит условию. Значит, $A \cap T \neq \emptyset$, и лемма доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2.3.5. Покажем, что представление α точно. Предположим, что $\alpha(s) = \alpha(t)$ для некоторых элементов $s, t \in S$. Это означает, что для любого $P \in \text{Спец } S$ выполняется $\alpha_P(s) = \alpha_P(t)$, т. е. $\frac{s}{1} = \frac{t}{1}$, откуда следует, что $sc_P = tc_P$ для некоторого $c_P \in S \setminus P$. Семейство $D(c_P)$, $P \in \text{Спец } S$, является покрытием компактного пространства $\text{Спец } S$, поэтому из него можно выбрать конечное подпокрытие. Имеем

$$D(s_1) \cup \dots \cup D(c_k) = \text{Спец } S,$$

откуда следует, что

$$c_1 d_1 + \dots + c_k d_k = 1$$

для некоторых $c_i, d_i \in S$. Поскольку $sc_i d_i = tc_i d_i$ для всех $i = 1, \dots, k$, то, просуммировав обе части равенства по i , получаем

$$s = s(c_1 d_1 + \dots + c_k d_k) = t(c_1 d_1 + \dots + c_k d_k) = t.$$

Следовательно, α — точное представление.

Пусть σ — произвольное глобальное сечение пучка $\mathbf{G}(S)$. Требуется найти такой элемент $s \in S$, что $\alpha(s) = \sigma$. Сечение σ совпадает в произвольной точке P с некоторым локальным сечением $\frac{k}{b}$, а значит, σ и $\frac{k}{b}$ совпадают на некоторой окрестности $V \subseteq D(b)$. Выберем элемент $a \in S$ так, чтобы $P \in D(a) \subseteq V$. Поскольку $D(a) \subseteq D(b)$, то $a \in \sqrt{aS} \subseteq \sqrt{bS}$, т. е. $a^n = bc$ для некоторых $n \in \mathbb{N}$, $c \in S$. Тогда

$$\sigma = \frac{k}{b} = \frac{kc}{bc} = \frac{kc}{a^n}$$

на $D(a) = D(a^n)$. Таким образом, переобозначив элементы, можно считать, что для каждой точки $P \in \text{Спец } S$ существуют такие $a_1, \dots, a_m, k_1, \dots, k_m \in S$, что $D(a_1) \cup \dots \cup D(a_m) = \text{Спец } S$ и $\sigma = \frac{k_i}{a_i}$ на $D(a_i)$ при любом $i = 1, \dots, m$. Получаем, что $\frac{k_i}{a_i} = \frac{k_j}{a_j}$ на $D(a_i a_j) = D(a_i) \cap D(a_j)$.

Покажем, что тогда найдётся такое $n_{ij} \in \mathbb{N}$, что

$$k_i a_j (a_i a_j)^{n_{ij}} = k_j a_i (a_i a_j)^{n_{ij}}.$$

В самом деле, при любом $P \in \text{Спец } S$ из $P \in D(a_i a_j)$ следует, что $\frac{k_i}{a_i} \in S_P$, т. е. $k_i a_j c = k_j a_i c$ для некоторого $c \in S \setminus P$, откуда получаем, что $(k_i a_j, k_j a_i)^* \subseteq P$, т. е. $D(a_i a_j) \subseteq D(k_i a_j, k_j a_i)^*$. Следовательно, $(a_i a_j)^{n_{ij}} \in (k_i a_j, k_j a_i)^*$ для некоторого натурального числа n_{ij} по лемме 2.3.6. Положим $n = \max\{n_{ij}\}$. Тогда $(k_i a_i^n) a_j^{n+1} = (k_j a_j^n) a_i^{n+1}$ для всех $i, j = 1, \dots, m$. Переобозначив $a_i := a_i^{n+1}$ и $k_i := k_i a_i^n$, получаем, что $k_i a_j = k_j a_i$ и $\sigma = \frac{k_i}{a_i}$ на $D(a_i)$ при всех $i, j = 1, \dots, m$. Далее, поскольку $D(a_1 S + \dots + a_m S) = \text{Спец } S$, то $\sum_{i=1}^m a_i S = S$, т. е.

$a_1b_1 + \dots + a_mb_m = 1$ для подходящих $b_1, \dots, b_m \in S$. Положим

$$s = b_1k_1 + \dots + b_mk_m, \quad k_j = \sum_{i=1}^m k_j a_i b_i = \sum_{i=1}^m a_j k_i b_i = a_j s.$$

Тогда

$$\sigma = \frac{k_j}{a_j} = \frac{sa_j}{a_j} = \frac{s}{1}$$

на каждом $D(a_j)$, и значит, $\sigma = \alpha(s)$. Тем самым доказана полнота представления Гротендика, следовательно, оно изоморфно. Теорема доказана. $\square$

2.4. Представления Ламбека

И. Ламбек в приложении 1 своей известной монографии [27] доказал изоморфность пучкового представления коммутативного кольца с 1 на простом спектре представляемого кольца. Хотя доказанный там результат обозначается как теорема Гротендика, рассмотренная конструкция принципиально другая, а именно строится факторный пучок, индуцированный открытым семейством идеалов (0_P) — 0-компонентами по всем простым идеалам кольца.

В этом разделе мы дадим полукольцевой вариант ламбековского представления и докажем изоморфность представлений для симметрических и строго полупервичных полуколец.

Определение. Пусть S — произвольное полукольцо, T — такое его наибольшее подполукольцо, что для любых $a, b, c \in S$ и для любого $t \in T$ выполняется эквивалентность

$$abt = act \iff atb = atc.$$

Подполукольцо T назовём *симметрической частью полукольца* S . Если $S = T$, полукольцо S называется *симметрическим*.

Пространство $\text{Спец } T$ со стоуновской топологией будет базисным пространством пучка, к построению которого мы приступаем.

Для каждого $P \in \text{Спец } T$ определим отношение Θ_P , положив для любых элементов $a, b \in S$

$$a \Theta_P b \iff ac = bc \text{ для некоторого } c \in T \setminus P.$$

Лемма 2.4.1. *Отношение Θ_P является конгруэнцией на полукольце S .*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность отношения очевидны.

Пусть $a \Theta_P b$ и $b \Theta_P c$, т. е. $au = bu$ и $bv = cv$ для некоторых $u, v \in T \setminus P$. Так как идеал P первичный, найдётся такой элемент $s \in T$, что $w = usv$ не лежит в P . Из равенства $bv \cdot us = cv \cdot us$ по определению подполукольца T следует, что $buv = cuv$. Учитывая, что $au \cdot sv = bu \cdot sv$, получаем, что $aw = cw$, что доказывает транзитивность отношения Θ_P .

Докажем сохранение операций. Пусть $a \Theta_P b$, $a' \Theta_P b'$, что означает, что $au = bu$, $a'v = b'v$ для подходящих $u, v \in T \setminus P$, а для некоторого $s \in T$ $usv \notin P$.

Из первого равенства получаем, что

$$ausv = busv, \quad (4)$$

а из второго — что $a'vsu = b'vsu$, что равносильно тому, что

$$a'usv = b'usv. \quad (5)$$

Почленно сложив равенства (4) и (5), получим, что

$$(a + a')usv = (b + b')usv,$$

т. е. $(a + a') \Theta_P (b + b')$. Умножим (4) на b' справа, а (5) на a слева и получим, что $ab'usv = bb'usv$, $aa'usv = ab'usv$, откуда следует, что $aa'usv = bb'usv$, или $(aa') \Theta_P (bb')$. $\square$

Лемма 2.4.2. Конгруэнции Θ_P , $P \in \text{Спес } T$, образуют открытое семейство.

Доказательство. Необходимо показать, что для любых элементов $a, b \in S$ множество $V = \{P \in \text{Спес } T: a \Theta_P b\}$ открыто в $\text{Спес } T$. Пусть $P \in V$. Тогда $a \Theta_P b$ и $ac = bc$ для некоторого $c \in T \setminus P$. Если Q — произвольный первичный идеал из $D(c)$, то $a \Theta_Q b$, и поэтому $D(c) \subseteq V$. Поскольку V вместе со своей произвольной точкой P содержит некоторую её окрестность, то V открыто. $\square$

Теорема 2.4.3. Произвольное полукольцо S изоморфно полукольцу глобальных сечений пучка $\bigcup S/\Theta_P$ над $\text{Спес } T$.

Доказательство. Рассмотрим отображение f , ставящее в соответствие каждому элементу $s \in S$ глобальное сечение $\hat{s}$, такое что $\hat{s}(P) = [s]_P$, где $[s]_P$ — класс элемента s в фактор-полукольце S/Θ_P .

Пусть $\hat{a} = \hat{b}$ для произвольных $a, b \in S$. Это означает, что для каждого $P \in \text{Спес } T$ выполняется $ac_P = bc_P$ для подходящего $c_P \in T \setminus P$. Так как спектр компактен, из покрытия $D(c_P)$ можем выбрать конечное подпокрытие. Тогда

$$D(c_1) \cup \dots \cup D(c_m) = D\left(\sum_{i=1}^m Tc_iT\right) = \text{Спес } T,$$

откуда получаем, что сумма идеалов Tc_iT совпадает с T . Для некоторых $s_i, t_i \in T$ получаем $s_1c_1t_1 + \dots + s_m c_m t_m = 1$, а из $ac_i = bc_i$ следует, что $as_i c_i t_i = bs_i c_i t_i$ для каждого $i = 1, \dots, m$. Просуммировав эти равенства, получим, что

$$a(s_1c_1t_1 + \dots + s_m c_m t_m) = b(s_1c_1t_1 + \dots + s_m c_m t_m),$$

или $a = b$, что доказывает точность представления f .

Покажем полноту f . Пусть σ — произвольное глобальное сечение пучка $\bigcup S/\Theta_P$. Ввиду факторности пучка сечение σ в каждой точке $P \in \text{Спес } T$ совпадает с некоторым сечением вида $\hat{a}_P$. По свойствам пучка эти сечения совпадают на некоторой базисной окрестности точки P , а компактность первичного спектра позволяет выбрать элементы $a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_m \in S$ так, что $\sigma = \hat{a}_i$ на $D(b_i)$ и $\bigcup D(b_i) = \text{Спес } T$. Для любых $i, j = 1, \dots, m$ $\hat{a}_i = \hat{a}_j$ на

множестве $D(b_i) \cap D(b_j)$, а значит, и на его подмножестве $D(b_i b_j)$. Покажем, что для некоторого $n \in \mathbb{N}$, зависящего от i, j , справедливо равенство

$$a_i(b_i b_j)^n = a_j(b_i b_j)^n. \quad (6)$$

Рассмотрим m -систему $F = \{1, b_i b_j, (b_i b_j)^2, \dots\}$ и двусторонний идеал $(a_i a_j)^* = \{s \in S : a_i s = a_j s\}$ — уравнитель элементов a_i, a_j . Если $(a_i, a_j)^*$ пересекается с F , то верно равенство (6). Предположим, что $(a_i, a_j)^* \cap F = \emptyset$. Наибольший идеал P , содержащий $(a_i, a_j)^*$ и не пересекающийся с F , первичен. Таким образом, $(a_i, a_j)^*$ содержится в P , что означает несравнимость a_i и a_j по конгруэнции Θ_P , и поэтому $P \notin D(b_i b_j)$. Но тогда $b_i b_j \in P$, и получено противоречие после предположения, что $(a_i, a_j)^* \cap F = \emptyset$. Значит, справедливо (6). Пусть n — показатель, удовлетворяющий (6) для всех пар (i, j) . Заметим, что для некоторого набора $u_i \in S$ справедливо равенство

$$D(b_j) = D(b_j u_1 b_j u_2 \cdots u_{n-1} b_j).$$

Для каждого $j = 1, \dots, m$ положим $c_j = b_j u_1 \cdots u_{n-1} b_j$. По (6) получаем

$$a_i c_i c_j = a_j c_i c_j. \quad (7)$$

Поскольку $\bigcup D(c_i) = \text{Spec } T$, имеем $s_1 c_1 t_1 + \dots + s_m c_m t_m = 1$ для некоторых $s_i, t_i \in S$. Пусть $a = a_1 s_1 c_1 t_1 + \dots + a_m s_m c_m t_m$. Покажем, что $\sigma = \hat{a}$. Из равенства (7) следует, что

$$a_i s_i c_i t_i c_j = a_j s_i c_i t_i c_j.$$

Просуммировав обе части по i , получим, что

$$a c_j = \sum_{i=1}^m a_i s_i c_i t_i c_j = \sum_{i=1}^m a_j s_i c_i t_i c_j = a_j \left(\sum_{i=1}^m s_i c_i t_i \right) c_j = a_j c_j.$$

Таким образом, $\hat{a} = \hat{a}_j = \sigma$ на $D(b_j)$ для любого $j = 1, \dots, m$, и следовательно, $\sigma = \hat{a}$ во всех точках $\text{Spec } T$. Теорема доказана. $\square$

Определение. Представление полукольца S , индуцированное открытым семейством конгруэнций Θ_P , $P \in T$, назовём *обобщённым представлением Ламбека*; представление полукольца S , индуцированное открытым семейством конгруэнций (θ_P) , $P \in X \subseteq \text{Spec } S$, где

$$a \theta_P b \iff \text{найдётся } c \in S \setminus P,$$

такой что для каждого $x \in S$ справедливо $axc = bxc$,

назовём *ламбековским представлением*, а соответствующий пучок $(\mathbf{L}(S), X)$ — *пучком Ламбека полукольца*.

В случае когда $S = T$, полукольцо S будет симметрическим, а конгруэнции Θ_P и θ_P совпадут для произвольного $P \in \text{Spec } S$. Действительно, отношение $\Theta_P \leq \theta_P$ очевидно, а для произвольных $a, b, x \in S$, $c \in S \setminus P$ из $ac = bc$ следует, что $axc = bxc$, и $axc = bxc$ ввиду симметричности полукольца S . Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4.4. Ламбековское представление произвольного симметрического полукольца над его первичным спектром является изоморфным.

Укажем ещё одно следствие, справедливость которого вытекает из коммутативности решёток.

Следствие 2.4.5 [56]. Любая ограниченная дистрибутивная решётка L изоморфна решётке всех глобальных сечений пучка $(\mathbf{L}(L), \text{Спец } L)$.

Предложение 2.4.6. Представление Ламбека произвольного полукольца S точно, если базисное пространство соответствующего пучка содержит все максимальные идеалы полукольца S .

Доказательство. Пусть $\hat{a} = \hat{b}$ в пучке $(\mathbf{L}(S), X)$, где X содержит $\text{Max } S$ и $a, b \in S$. Это означает, что для каждого первичного идеала P из X выполняется $ax_{c_P} = bx_{c_P}$ для некоторого $c_P \in S \setminus P$. Из покрытия $(D(c_P))$, $P \in X$, ввиду компактности X можно выбрать конечное подпокрытие. Имеем

$$D(c_1) \cup \dots \cup D(c_m) = D\left(\sum_{i=1}^m S c_i S\right) \supseteq X.$$

Идеал $\sum S c_i S$ не содержится ни в одном максимальном идеале, и поэтому $s_1 c_1 t_1 + \dots + s_m c_m t_m = 1$ для подходящих $s_i, t_i \in S$. Поскольку $a s_i c_i t_i = b s_i c_i t_i$ для каждого $i = 1, \dots, m$, то, просуммировав обе части по i , получим $a = b$, и точность представления доказана. $\square$

Замечание. Указанное в предложении достаточное условие точности не является необходимым. К примеру, в разделе 5.2 будут рассмотрены изоморфные представления Ламбека над минимальным спектром полукольца.

Пусть U — открытое подмножество первичного спектра полукольца S . Рассмотрим идеал полукольца S

$$H(U) = \bigcap \{P \in \text{Спец } S : P \notin U\}.$$

Очевидно, что $H(D(I)) = \sqrt{I}$.

Лемма 2.4.7. Для открытых подмножеств U, V, U_i первичного спектра $\text{Спец } S$ справедливы следующие утверждения:

- 1) $H(U \cap V) = H(U) \cap H(V)$;
- 2) если (U_i) — открытое покрытие $\text{Спец } S$, то $\sum H(U_i) = S$.

Доказательство. 1. Докажем первое утверждение.

$$\begin{aligned} H(U \cap V) &= \bigcap \{P : P \in \text{Спец } S \setminus (U \cap V)\} = \\ &= \left(\bigcap \{P : P \in \text{Спец } S \setminus U\} \right) \cap \left(\bigcap \{P : P \in \text{Спец } S \setminus V\} \right) = H(U) \cap H(V). \end{aligned}$$

2. Поскольку каждое U_i имеет вид $D(I_i)$ для подходящего идеала I_i , то

$$\text{Спец } S = \bigcup_i U_i = D\left(\sum_i I_i\right).$$

Ни один максимальный идеал не содержит идеал $\sum_i I_i$, поэтому последний совпадает со всем полукольцом S . Таким образом,

$$S = \sum_i I_i \subseteq \sum_i \sqrt{I_i} = \sum_i H(U_i). \quad \square$$

Предложение 2.4.8. Полукольцо S полупервично тогда и только тогда, когда $\sqrt{\text{Ann } aS} = \text{Ann } aS$ для всех $a \in S$.

Доказательство. При $a = 1$ $\text{rad } S = \sqrt{\text{Ann } S} = \text{Ann } S = 0$, т. е. S полупервично.

Пусть S — полупервичное полукольцо и $b \in \sqrt{\text{Ann } aS}$. Для каждого $P \in \text{Spec } S$ либо P содержит $\text{Ann } aS$, либо $\text{Ann } aS$ не содержится в P . В первом случае $b \in P$, во втором случае $a \in 0_P \subseteq P$. Тогда $aSb \subseteq \text{rad } S = 0$, откуда следует, что $b \in \text{Ann } aS$. Следовательно, $\sqrt{\text{Ann } aS} \subseteq \text{Ann } aS$. Обратное включение справедливо всегда. $\square$

Для элементов $a, b \in S$ рассмотрим множество

$$(a, b)^* = \{s \in S : axs = bxs \text{ для каждого } x \in S\} —$$

идеал полукольца S , называемый *уравнителем элементов a, b* . Очевидно, что $(a, 0)^* = \text{Ann } aS$ и в классе полуколец уравнители играют роль, аналогичную роли аннуляторов в кольцах. По этой причине есть смысл дать следующее определение.

Определение. Полукольцо S называется *строго полупервичным*, если для любых элементов $a, b \in S$ выполняется равенство $\sqrt{(a, b)^*} = (a, b)^*$.

Понятно, что для колец с единицей понятия полупервичности и строгой полупервичности совпадают. По предложению 2.4.8 строго полупервичное полукольцо является полупервичным. Обратное неверно, что показывает следующий пример.

Пример 2.4.9. На множестве $S = \{0 = a_0, a_1, \dots, a_n = 1\}$ при $n \geq 3$ введём операции следующим образом:

$$a_i + a_j = a_{\max(i, j)}, \quad a_i a_j = \begin{cases} a_{\min(i, j)}, & \text{если } i \neq j, \\ a_{i-1}, & \text{если } i = j = 2, \\ a_i, & \text{если } i = j \neq 2. \end{cases}$$

Таким образом мы получим коммутативное полукольцо без делителей нуля. Это полукольцо полупервично, но не строго полупервично, поскольку уравнитель $(a_1, 1)^* = \{0, a_1\}$ не является пересечением простых идеалов, его содержащих.

Теорема 2.4.10. Ламбековское представление строго полупервичного полукольца над первичным спектром является изоморфным.

Доказательство. В предложении 2.4.6 доказана точность представления.

Пусть $(\mathbf{L}, \text{Spec } S)$ — ламбековский пучок строго полупервичного полукольца S . Для произвольного сечения $\sigma \in \Gamma(L)$ найдутся $a_i \in S$ и открытые

множества $V_i \subseteq \text{Спес } S$, $i = 1, \dots, m$, такие что $\sigma = \hat{a}_i$ на V_i и семейство (V_i) покрывает $\text{Спес } S$ ввиду свойств пучка и компактности спектра. Последнее влечёт существование элементов $e_i = H(V_i)$, для которых $e_1 + \dots + e_m = 1$. Покажем, что $\sigma = \hat{a}$, где $a = a_1 e_1 + \dots + a_m e_m$. Зафиксируем $P \in \text{Спес } S$. Найдутся такие $b \in S$ и открытое множество V , содержащее P , что $\sigma = \hat{b}$ на V . Для произвольного $i = 1, \dots, m$ справедливо, что $\hat{a}_i = \hat{b}_i$ на $V_i \cap V$, откуда следует, что $V_i \cap V \subseteq D((a_i, b)^*)$. Так как для любого $Q \in \text{Спес } S$ из $Q \supseteq (a, b)^*$ следует, что $Q \not\subseteq V_i \cap V$, то $H(V_i \cap V)$ и ввиду леммы 2.4.7 и строгой полупервичности $H(V_i) \cap H(V) \subseteq (a, b)^*$. Пусть $c \in H(V)$. Тогда для любого элемента $x \in S$ справедливо $e_i x c \in H(V_i) \cap H(V)$, откуда следует, что $a_i e_i x c = b e_i x c$. Суммируя по i , получаем, что $a x c = b x c$ для всех $x \in S$. Следовательно, $c \in (a, b)^*$, и значит, $H(V) \subseteq (a, b)^*$. Заметив, что $D(H(V)) \subseteq D((a, b)^*)$, получим, что $V \subseteq D((a, b)^*)$. Поскольку $P \in V$, то $(a, b)^* \not\subseteq P$, что означает, что $a \theta_P b$. Значит, $\sigma(P) = \hat{b}(P) = \hat{a}(P)$, что завершает доказательство теоремы. $\square$

Следствие 2.4.11. Для произвольного полупервичного кольца R его ламбевское представление над $\text{Спес } R$ изоморфно.

3. Классы полуколец

3.1. Симметрические и редуцированные полукольца

Основным объектом данного раздела является симметрическое полукольцо — обобщение симметрического кольца и одно из естественных обобщений коммутативного полукольца.

Определение. Полукольцо S называется *симметрическим*, если для любых элементов $a, b, b', c \in S$ справедливо соотношение

$$abc = ab'c \iff acb = acb'. \quad (8)$$

При $a = 1$ получаем условие *слабой симметричности*:

$$bc = bc' \iff cb = cb'.$$

Равносильность (8) является одним из естественных обобщений коммутативности. В частности, симметрическими полукольцами будут ограниченные дистрибутивные решётки. Понятие симметрического полукольца возникло как обобщение симметрического кольца. Кольцо R называется *симметрическим (коммутативным в нуле)*, если для любых $a, b, c \in R$ из $abc = 0$ следует, что $acb = 0$ (из $ab = 0$ следует, что $ba = 0$).

Лемма 3.1.1. В симметрическом полукольце справедливы следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned} abc = ab'c &\iff bac = b'ac, \\ acb = acb' &\iff cab = cab'. \end{aligned}$$

Доказательство. Благодаря симметричности и слабой симметричности получаем

$$\begin{aligned} abc = ab'c &\iff acb = acb' \iff bac = b'ac, \\ acb = acb' &\iff cba = cb'a \iff cab = cab'. \end{aligned} \quad \square$$

Предложение 3.1.2. Симметрическое полукольцо S характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_i b a_{i+1} \cdots a_k &= a_1 \cdots a_i c a_{i+1} \cdots a_k \iff \\ &\iff a_{\tau(1)} \cdots a_{\tau(j)} b a_{\tau(j+1)} \cdots a_{\tau(k)} = a_{\tau(1)} \cdots a_{\tau(j)} c a_{\tau(j+1)} \cdots a_{\tau(k)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где τ — произвольная перестановка k -элементного множества.

Доказательство. Для доказательства достаточно показать сохранение равенства при перестановке двух произвольных элементов в левой части и соответствующих элементов в правой части первого равенства. Продемонстрируем это с помощью симметричности, слабой симметричности и соотношений леммы 3.1.1. Чтобы не загромождать текст, писать будем лишь левые части; понятно, что преобразования над правой частью будут аналогичными.

Пусть

$$s_1 \cdots s_i \cdots s_j \cdots s_{k+1} = t_1 \cdots t_i \cdots t_j \cdots t_{k+1},$$

где для некоторого индекса r имеем $s_r = b$, $t_r = c$, а для остальных индексов $s_n = t_n = a_n$. Переставим s_i и s_j :

$$\begin{aligned} (s_1 \cdots s_i)(s_{i+1} \cdots s_j)(s_{j+1} \cdots s_{k+1}) &\implies \\ \implies (s_{i+1} \cdots s_i)(s_1 \cdots s_i)(s_{j+1} \cdots s_{k+1}) &\implies \\ \implies (s_{i+1} \cdots s_{j-1})s_j(s_1 \cdots s_i s_{j+1} \cdots s_{k+1}) &\implies \\ \implies (s_j s_{i+1} \cdots s_{j-1})(s_1 \cdots s_{i-1})(s_i s_{j+1} \cdots s_{k+1}) &\implies \\ \implies (s_1 \cdots s_{i-1})(s_j s_{i+1} \cdots s_{j-1})(s_i s_{j+1} \cdots s_{k+1}). \end{aligned}$$

В проведённых преобразованиях использовалась ассоциативность; на каждом шаге произведения разбивались на три множителя, два из которых равны соответствующим множителям в правой части равенства. $\square$

Определение. Полукольцо S назовём *редуцированным*, если для любых $a, b \in S$ выполняется $a = b$, как только $a^2 + b^2 = ab + ba$.

Предложение 3.1.3. Редуцированное полукольцо S является симметрическим полукольцом без нильпотентов.

Доказательство. Пусть $ab = ab'$. Тогда $baba = bab'a$ и $b'aba = b'ab'a$, откуда следует, что $baba + b'ab'a = bab'a + b'aba$, или $(ba)^2 + (b'a)^2 = bab'a + b'aba$. Так как полукольцо S редуцированное, $ba = b'a$, т. е.

$$ab = ab' \implies ba = b'a. \quad (10)$$

Аналогично доказывается импликация

$$ba = b'a \implies ab = ab'.$$

Пусть $ab = ab'$. Тогда с помощью (10) получаем, что $ba = b'a$, откуда следует, что $bac = b'ac$ и $acb = acb'$. Значит, имеем импликации

$$ab = ab' \implies acb = acb', \quad ba = b'a \implies bca = b'ca.$$

Пусть $abc = abc'$. Тогда

$$\begin{aligned} abc = ab'c &\implies acbc = acb'c \implies acbac = acb'ac \implies \\ &\implies acbacb = acb'acb \text{ и } acbacb' = acb'acb' \implies \\ &\implies (acb)^2 + (acb')^2 = acb'acb + acbacb' \implies acb = acb'. \end{aligned}$$

Таким же образом доказывается другая импликация.

Пусть из $a^2 + b^2 = ab + ba$ следует, что $a = b$. При $b = 0$ получаем, что из $a^2 = 0$ следует, что $a = 0$. Если $c^n = 0$ для некоторого натурального $n > 2$, то $c^{2^k} = 0$ для $k \in \mathbb{N}$ при $n \leq 2^k$. Получаем, что $c^{2^{(k-1)}} = 0$, и так далее. На некотором шаге получим $c^2 = 0$, откуда следует, что $c = 0$. Предложение доказано. $\square$

В следующем предложении укажем некоторые свойства симметрических полуколец.

Назовём полукольцо S *симметрическим в нуле* (коммутативным в нуле), если из $abc = 0$ следует, что $acb = 0$ (из $ab = 0$ следует, что $ba = 0$).

Предложение 3.1.4. В произвольном полукольце S справедливы следующие утверждения:

- 1) симметрическое полукольцо является симметрическим в нуле и, следовательно, коммутативным в нуле; если произведение элементов $a_1, \dots, a_k$ симметрического в нуле полукольца равно нулю в некотором порядке, то произведение этих же элементов равно нулю и в любом другом порядке;
- 2) любой первичный правый идеал симметрического полукольца псевдопрост;
- 3) первичный радикал симметрического в нуле полукольца совпадает с множеством всех его нильпотентных элементов;
- 4) полукольцо без ненулевых нильпотентов симметрично в нуле;
- 5) произвольный идемпотент симметрического полукольца централен, т. е. перестановочен с элементами полукольца.

Доказательство. 1. Первое утверждение следует из характеристического свойства (9).

2. Напомним, что правый идеал P полукольца S называется *псевдопростым*, если для любых a, b из S из $ab = 0$ следует, что $a \in P$ или $b \in P$. Если $a, b \in S \setminus P$, то $asb \notin P$ для подходящего $s \in S$, откуда получаем, что $asb \neq 0$ и $ab \neq 0$.

3. Третье утверждение вытекает из того, что каждый строго нильпотентный элемент симметрического в нуле полукольца нильпотентен.

4. Пусть S — полукольцо без нильпотентов и $ab = 0$. Тогда $(ba)^2 = 0$, откуда следует, что $ba = 0$. Пусть $abc = 0$. Получаем, что

$$abc = 0 \implies bca = 0 \implies bcac = 0 \implies acbc = 0 \implies cacb = 0 \implies \\ \implies cacba = 0 \implies acbac = 0 \implies (acb)^2 = 0 \implies acb = 0.$$

5. Докажем последнее утверждение. Пусть $e^2 = e$ и $a \in S$. Тогда

$$eae = eae \implies eea = eae \implies ea = eae.$$

Так же доказывается, что $ae = eae$, т. е. $ae = ea$. $\square$

Заметим, что не каждый идемпотент симметрического полукольца будет обладать дополнением. Примеры легко можно найти среди дистрибутивных решёток.

Пример 3.1.5. Рассмотрим полукольцо $S = \{0, a, b, 1\}$, операции в котором заданы следующим образом:

$$\begin{array}{c|ccc} + & a & b & 1 \\ \hline a & a & b & 1 \\ b & b & b & b \\ 1 & 1 & b & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|ccc} \cdot & a & b & 1 \\ \hline a & a & a & a \\ b & b & b & b \\ 1 & a & b & 1 \end{array}.$$

Пример этого полукольца показывает, что, во-первых, в определении симметричности полукольца импликации нужны в обе стороны, поскольку $aa = ab$, но $aa \neq ba$. Во-вторых, S — полукольцо без нильпотентов, более того, без делителей нуля, однако симметрическим, в частности редуцированным, оно не является. В этом проявляется отличие от колец, поскольку известно, что отсутствие нильпотентов в кольце влечёт кольцевую симметричность.

Предложение 3.1.6. Существует коммутативное в нуле кольцо с единицей, не являющееся симметрическим.

Доказательство. Рассмотрим 14-элементную полугруппу

$$S = \{0, 1, a, b, c, ab, ba, ac, ca, bc, cb, abc, cab, bca\},$$

в которой $a^2 = b^2 = c^2 = acb = bac = cba = 0$ и все «четверные» произведения равны нулю. Пусть T — произвольное коммутативное кольцо с $1 \neq 0$. Рассмотрим полугрупповое кольцо TS и его фактор-кольцо R по идеалу $\{t0 : t \in T\}$. Кольцо R имеет единицу и представляет собой свободный T -модуль с естественным 13-элементным базисом. Легко проверяется, что R коммутативно в нуле. Однако $acb = 0$ при $abc \neq 0$. $\square$

Лемма 3.1.7. Для произвольных первичных идеалов P и P' симметрического полукольца S равносильны следующие свойства:

- 1) P и P' отделимы в $\text{Spec } S$;
- 2) $P \cap P'$ не содержит первичных идеалов;
- 3) $0_P \not\subseteq P'$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Если первичный идеал Q содержится в $P \cap P'$, то любые открытые окрестности точек P и P' в $\text{Spec } S$ содержат Q , поэтому P и P' неотделимы.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 3). Предположим, что $0_P \subseteq P'$. Полагая $A = S \setminus P$ и $B = S \setminus P'$, рассмотрим множество AB всевозможных конечных произведений элементов из $A \cup B$. Покажем, что $AB \cap 0_P = \emptyset$. В самом деле, если $s \in AB \cap 0_P$, то $sb = 0$ для некоторого $b \in A$, т. е. $0 \in AB$. Поскольку s является произведением элементов из $A \cup B$, то ввиду первичности идеалов P и P' и свойства симметрических полуколец $uv = 0$ для подходящих $u \in B, v \in A$. Тогда $u \in 0_P \subseteq P'$, противоречие. Таким образом, AB является m -системой, и значит, существует первичный идеал Q , не пересекающийся с AB и содержащий 0_P . Так как $A \cup B \subseteq AB$, то $P \cap P' \supseteq Q$.

Докажем импликацию 3) $\implies$ 1). Пусть $a \in 0_P \setminus P'$. Тогда $aSb = 0$ для некоторого $b \notin P$ и $P' \in D(a)$. Значит, $P \in D(b)$ и $D(a) \cap D(b) = D(aSb) = D(0) = \emptyset$. $\square$

Предложение 3.1.8.

1. Всякое редуцированное полукольцо S строго полупервично.
2. Всякое симметрическое в нуле полукольцо без ненулевых нильпотентов полупервично.

Доказательство. 1. Пусть $c \notin (a, b)^*$ для $a, b \in S$. Тогда $ac \neq bc$, и из редуцированности S вытекает, что $acac + bc bc \neq acbc + bcac$. Элементы sac и sbc отличны друг от друга, и значит, $ac^2 \neq bc^2$ в силу симметричности редуцированного полукольца. Аналогично $ac^4 \neq bc^4$, и следовательно, $ac^3 \neq bc^3$. По индукции $ac^n \neq bc^n$. Значит, $T = \{1, c, c^2, \dots\}$ — m -система, не пересекающаяся с $(a, b)^*$. Поэтому найдётся первичный идеал P , содержащий $(a, b)^*$, при этом $c \in S \setminus P$. Значит, $c \notin \sqrt{(a, b)^*}$, откуда следует, что $\sqrt{(a, b)^*} \subseteq (a, b)^*$.

2. Если $c \notin \text{Ann } a = \text{Ann } aS$, то $ac \neq 0$ (иначе $(ac)^n = 0$ и $ac = 0$). Поскольку m -система $\{1, c, c^2, \dots\}$ не пересекается с $\text{Ann } a$, то найдётся такой $P \in \text{Spec } S$, что $P \supseteq \text{Ann } a$ и $c \notin P$. Поэтому $c \notin \sqrt{\text{Ann } a}$, откуда следует, что $\sqrt{\text{Ann } a} \subseteq \text{Ann } a$. $\square$

3.2. Строго гармонические полукольца

Один из основных классов в теории пучковых представлений полуколец — класс строго гармонических полуколец, изучению которых посвящён этот раздел.

Определение. Полукольцо S называется *строго гармоническим*, если для любых его различных максимальных идеалов M и N найдутся такие элементы $a \in S \setminus M$ и $b \in S \setminus N$, что $aSb = 0$.

Очевидно, что максимальный спектр строго гармонического полукольца является хаусдорфовым; полукольцо с хаусдорфовым максимальным спектром назовём *гармоническим*.

Предложение 3.2.1. Для произвольного полукольца S равносильны следующие свойства:

- 1) S строго гармоническое;

- 2) для каждого максимального идеала M идеал 0_M содержится в однозначно определённом максимальном идеале полукольца S , а именно в M ;
- 3) для каждого первичного идеала P идеал 0_P содержится в однозначно определённом максимальном идеале полукольца S ;
- 4) если первичные идеалы P и P' не лежат в одном максимальном идеале, то $0_P + 0_{P'} = S$;
- 5) $0_M + 0_{M'} = S$ для любых различных максимальных идеалов полукольца S .

Доказательство. Поскольку для первичных идеалов P и M из включения $P \subseteq M$ следуют включения $0_M \subseteq 0_P \subseteq P$, то очевидны импликации

$$2) \implies 3) \implies 4) \implies 5).$$

Докажем импликацию $1) \implies 2)$. Пусть M и M' — различные максимальные идеалы строго гармонического полукольца S . Тогда $aSb = 0$ для некоторых $a \notin M$ и $b \notin M'$, откуда получаем, что $a \in 0_M \setminus M'$. Значит, M — единственный максимальный идеал в S , содержащий 0_M .

Докажем импликацию $5) \implies 1)$. Если для различных M и M' из $\text{Max } S$ $0_M + 0_{M'} = S$, то $s + a = 1$ для подходящих $s \in 0_M$ и $a \in 0_{M'}$, следовательно, существует $b \notin M'$, для которого $aSb = 0$. Остаётся заметить, что $a \notin M$, поскольку в противном случае $s + a = 1 \in M$. $\square$

Определение. Полукольцо S называется *рт-полукольцом*, если каждый первичный идеал из S содержится в однозначно определённом максимальном идеале полукольца S .

Подпространство Y пространства X называется *относительно хаусдорфовым* в X , если любые две различные точки из Y содержатся в непересекающихся окрестностях пространства X .

Лемма 3.2.2. Для любого полукольца S справедливы следующие утверждения:

- 1) если S — строго гармоническое полукольцо, то $\text{Max } S$ относительно хаусдорфово в $\text{Spec } S$;
- 2) если $\text{Max } S$ относительно хаусдорфово в $\text{Spec } S$, то S — гармоническое рт-полукольцо;
- 3) если S — гармоническое полукольцо и выполняется условие $\bigcap \text{Max } S = \text{rad } S$, то $\text{Max } S$ относительно хаусдорфово в $\text{Spec } S$;
- 4) если $\text{rad } S = 0$ и $\text{Max } S$ относительно хаусдорфово в $\text{Spec } S$, то S строго гармонично.

Доказательство. 1. Пусть M и N — максимальные идеалы строго гармонического полукольца S . По определению в S найдутся элементы $a \notin M$ и $b \notin N$, для которых $aSb = 0$. Тогда

$$D(a) \cap D(b) = D(aSb) = D(0) = \emptyset$$

и $M \in D(a)$, $N \in D(b)$, т. е. M и N отделяются окрестностями в $\text{Spec } S$.

2. Очевидно, S — гармоническое полукольцо. Предположим, что $P \subseteq M \cap N$ для некоторых $P \in \text{Спец } S$, $M \neq N \in \text{Max } S$. Заметим, что любые окрестности точек M и N содержат P , что противоречит отделимости M и N в $\text{Спец } S$. Значит, S — рт-полукольцо.

3. Достаточно показать, что из соотношения $D(a) \cap D(b) \cap \text{Max } S = \emptyset$ следует, что $D(a) \cap D(b) = \emptyset$. Это действительно так:

$$\begin{aligned} D(a) \cap D(b) \cap \text{Max } S = \emptyset &\implies D(aSb) \cap \text{Max } S = \emptyset \implies \\ &\implies aSb \subseteq \cap \text{Max } S = \text{rad } S \implies D(aSb) = \emptyset \implies D(a) \cap D(b) = \emptyset. \end{aligned}$$

4. Для различных $M, N \in \text{Max } S$ выберем $a, b \in S$ таким образом, чтобы $M \in D(a)$, $N \in D(b)$ и $D(a) \cap D(b) = \emptyset$. Тогда $D(aSb) = \emptyset$, откуда следует, что $aSb \subseteq \text{rad } S = 0$. $\square$

Лемма 3.2.3. Для любого идеала I строго гармонического полукольца S выполнено следующее:

- 1) $\{M \in \text{Max } S : I \subseteq M\} = \left\{M \in \text{Max } S : \bigcap_{I \subseteq N} 0_N \subseteq M\right\};$
- 2) $\left\{P \in \text{Спец } S : \text{ найдётся } M \in \text{Max } S, \text{ такой что } P \subseteq M \text{ и } \bigcap_{I \subseteq N} 0_N \subseteq M\right\} =$
 $= \left\{P \in \text{Спец } S : P \supseteq \bigcap_{I \subseteq M} 0_M\right\}$

(здесь $M, N \in \text{Max } S$).

Доказательство. Включение $\subseteq$ очевидно ввиду $0_M \subseteq M$. Пусть $M_0 \in \text{Max } S$ и $I \not\subseteq M_0$. Множество $B = \{M \in \text{Max } S : I \subseteq M\}$ замкнуто в $\text{Max } S$ и компактно. Для любого $M \in B$ существуют такие $a_M \notin M_0$ и $b_M \notin M$, что $a_M S b_M = 0$. Элемент a_M принадлежит $0_M \setminus M_0$, причём $a_M \in 0_{M'}$ для каждого $M' \in \text{Max } S$, не содержащего b_M . Так как B компактно, найдётся конечное число элементов $a_1, \dots, a_n \notin M_0$ и $b_1, \dots, b_n$, для которых $a_1 S b_1 = \dots = a_n S b_n = 0$, и для всякого $M \in B$ некоторое b_i не принадлежит M . Идеал M_0 первичен, значит, $a = a_1 c_1 a_2 \dots c_{n-1} a_n \notin M_0$ для подходящих $c_i \in S$. Тогда $a \in 0_M$ для всех $M \in B$, и следовательно, $M_0 \not\supseteq \bigcap_{I \subseteq M} 0_M$.

2. Включение $\supseteq$ очевидно.

Пусть P принадлежит левой части равенства второго утверждения. Тогда $P \subseteq M$ для некоторого $M \in \text{Max } S$, содержащего I . Наличие такого M гарантируется первым утверждением доказываемой леммы. Тогда $P \supseteq 0_M \supseteq \bigcap_{I \subseteq N} 0_N$, что доказывает включение $\subseteq$. $\square$

Для элемента $a \in S$, идеала I полукольца S и множества $A \subseteq \text{Max } S$ положим

$$\begin{aligned} \text{Ann } aS &= \{b \in S : aSb = 0\}, \\ 0_A &= \bigcap_{M \in A} 0_M = \{a \in S : \text{Ann } aS \not\subseteq M \text{ для каждого } M \in A\}, \\ Z(I) &= \text{Max } S \setminus D(I) = \{M \in \text{Max } S : M \supseteq I\}. \end{aligned}$$

Лемма 3.2.4. Полукольцо S строго гармонично в том и только в том случае, когда $Z(0_A) = A$ для любого замкнутого множества $A \subseteq \text{Max } S$.

Доказательство. Пусть A — замкнутое в $\text{Max } S$ подмножество строго гармонического полукольца S . Тогда $A = Z(I)$ для подходящего идеала I . Применив предыдущую лемму, получим

$$A = Z(I) = Z\left(\bigcap_{I \subseteq M} 0_M\right) = Z(0_A).$$

Обратно, если $Z(0_A) = A$ верно для любого замкнутого подмножества $A \subseteq \text{Max } S$, то при $A = \{M\}$ получаем $Z(0_M) = M$, т. е. идеал 0_M содержится в единственном максимальном идеале M , что по предложению 3.2.1 означает строгую гармоничность полукольца S . $\square$

Лемма 3.2.5. Для семейства идеалов I_α строго гармонического полукольца верно равенство

$$0_{Z(\sum_\alpha I_\alpha)} = \sum_\alpha 0_{Z(I_\alpha)}.$$

Доказательство. По предыдущей лемме имеем

$$Z\left(0_{Z(\sum_\alpha I_\alpha)}\right) = Z\left(\sum_\alpha I_\alpha\right) = \bigcap Z(I_\alpha) = \bigcap Z(0_{Z(I_\alpha)}) = Z\left(\sum_\alpha 0_{Z(I_\alpha)}\right),$$

откуда следует доказываемое утверждение. $\square$

Предложение 3.2.6. Для произвольного полукольца S эквивалентны следующие свойства:

- 1) S строго гармоническое;
- 2) $0_A + 0_B = S$ для любых замкнутых непересекающихся множеств A и B в $\text{Max } S$;
- 3) $0_A + 0_M = S$ для любого замкнутого множества A и любой точки $M \notin A$ пространства $\text{Max } S$;
- 4) $0_M + 0_N = S$ для любых $M \neq N$ из $\text{Max } S$;
- 5) $Z(0_{Z(I)}) = Z(I)$ для любого идеала I в S ;
- 6) $\sum_\alpha 0_{Z(I_\alpha)} = 0_{Z(\sum_\alpha I_\alpha)}$ для любого семейства (I_α) идеалов полукольца S ;
- 7) из включения $0_{Z(I)} \subseteq M$ следует, что $I \subseteq M$ для любых идеалов I полукольца S и $M \in \text{Max } S$.

Доказательство. Импликация 1) $\implies$ 6) — это лемма 3.2.5.

Импликация 6) $\implies$ 2) верна, поскольку $I_1 + I_2 = S$, где $Z(I_1) = A$, $Z(I_2) = B$ и $Z(I_1) \cap Z(I_2) = \emptyset$.

Импликации 2) $\implies$ 3) $\implies$ 4) очевидны.

По предложению 3.2.1 справедлива импликация 4) $\implies$ 1).

Эквивалентность 1) $\iff$ 5) верна по лемме 3.2.4.

Ясно, что справедлива импликация 5) $\implies$ 7).

Пусть, наконец, выполнено свойство 7) и $I = N \in \text{Max } S$. Тогда из включения $0_N \subseteq M$ следует, что $N = M$. Значит, N — единственный максимальный идеал полукольца S , содержащий 0_N , и S строго гармонично по предложению 3.2.1. $\square$

Наибольший чистый идеал, лежащий в идеале I (т. е. чистую часть идеала I), обозначим через $\text{Vir } I$.

Для идеала I и множества $U \subseteq \text{Max } S$ положим

$$\begin{aligned}\tilde{0}_M &= \{a \in S: cSa = 0 \text{ для некоторого } c \notin M\}, \\ \widetilde{\text{Ann}} Sa &= \{c \in S: cSa = 0\}, \\ 0_U &= \bigcap_{M \in U} 0_M = \{a \in S: \text{Ann } aS \not\subseteq M \text{ для каждого } M \in U\}, \\ \tilde{0}_U &= \bigcap_{M \in U} \tilde{0}_M = \{a \in S: \widetilde{\text{Ann}} Sa \not\subseteq M \text{ для каждого } M \in U\}.\end{aligned}$$

Лемма 3.2.7. Для любого идеала I произвольного полукольца S справедливы следующие утверждения:

- 1) $0_{z(I)} = \{a \in S: I + \text{Ann } aS = S\}$;
- 1') $\tilde{0}_{z(I)} = \{a \in S: I + \widetilde{\text{Ann}} Sa = S\}$;
- 2) $0_{z(I)}$ содержит равномерно чистую часть идеала I ;
- 3) $I = 0_{z(I)} = \tilde{0}_{z(I)}$ для любого равномерно чистого идеала I .

Доказательство. 1. $a \in 0_{z(I)}$ тогда и только тогда, когда для любого $M \in \text{Max } S$ справедливо $I \not\subseteq M$ или $\text{Ann } aS \not\subseteq M$, что эквивалентно тому, что $I + \text{Ann } aS = S$. Если $I + \text{Ann } aS = S$, то $e + b = 1$ для некоторых $e \in I$, $b \in \text{Ann } aS = S$, откуда следует, что $a = a(e + b) = ae + ab = ae \in I$.

«Левый» случай доказывается аналогично.

2. Если J — равномерно чистая часть идеала I и $a \in J$, то $J + \text{Ann } aS = S$, откуда следует, что $I + \text{Ann } aS = S$, и в силу первого утверждения $a \in 0_{z(I)}$.

3. Последнее утверждение следует из утверждений 1), 1') и 2). $\square$

Лемма 3.2.8. Равномерно чистые идеалы строго гармонического полукольца S — это в точности идеалы 0_A для замкнутых подмножеств $A \subseteq \text{Max } S$, причём $0_A \neq 0_B$ при $A \neq B$.

Доказательство. По лемме 3.2.7 равномерно чистые идеалы любого полукольца имеют такой вид. Пусть S строго гармонично. По лемме 3.2.4 $A = z(0_A)$ и $0_A = 0_{z(I)}$, откуда следует, что идеал 0_A равномерно чист. Если $0_A = 0_B$, то по лемме 3.2.4 $A = z(0_A) = z(0_B) = B$. $\square$

Следствие 3.2.9. Для любого идеала I строго гармонического полукольца идеал $0_{z(I)}$ является равномерно чистой частью идеала I .

Определение. Полукольцо называется *бирегулярным*, если каждый его главный идеал порождён дополняемым идемпотентом.

Напомним, что идеал полукольца называется *регулярным*, если он порождается некоторым множеством дополняемых идемпотентов.

Предложение 3.2.10. Для полукольца S эквивалентны следующие утверждения:

- 1) S — бирегулярное полукольцо;
- 2) любой идеал полукольца S регулярен;
- 3) для любого $M \in \text{Max } S$ $0_M = M$;
- 4) $0_P = P$ для любого $P \in \text{Spec } S$;
- 5) $\text{rad } S = 0$ и $D(a)$ — открыто-замкнутое множество в $\text{Spec } S$ для любого $a \in S$.

Доказательство. Импликация 1) $\implies$ 2) вытекает из определений.

Импликация 2) $\implies$ 3) следует из того, что все дополняемые идемпотенты идеала $M \in \text{Max } S$ лежат в 0_M .

Импликация 3) $\implies$ 4) очевидна.

Докажем импликацию 4) $\implies$ 5). По лемме 1.1.8

$$\bigcap \{0_P : P \in \text{Spec } S\} = 0,$$

откуда следует, что $\text{rad } S = 0$. Если $a \in S$, то

$$\begin{aligned} D(a) &= \{P \in \text{Spec } S : a \notin P\} = \\ &= \{P \in \text{Spec } S : a \notin 0_P\} = \{P \in \text{Spec } S : \text{Ann } aS \supseteq P\} = \end{aligned}$$

замкнутое множество в $\text{Spec } S$.

Докажем импликацию 5) $\implies$ 1). Пусть выполнено утверждение 5) и $a \in S$. Обозначим через $D(I)$, где I — некоторый идеал в S , дополнение до $D(a)$ в $\text{Spec } S$. По свойствам первичного спектра $(a) + I = S$ и $(a) \cap I \subseteq \text{rad } S = 0$, и значит, $(a) \oplus I = S$. Идеал (a) выделяется прямым слагаемым и, следовательно, порождается дополняемым идемпотентом. $\square$

Предложение 3.2.11. Для любого бирегулярного полукольца S справедливы следующие утверждения:

- 1) для $P \not\supseteq P'$ из $\text{Spec } S$ найдётся дополняемый идемпотент $e \in P \setminus P'$;
- 2) $\text{Max } S$ — нульмерное пространство;
- 3) $\text{Spec } S$ — хаусдорфово пространство;
- 4) $\text{Spec } S = \text{Max } S$.

Доказательство. Утверждение 1) немедленно вытекает из утверждения 2) предыдущего предложения. Очевидна импликация 3) $\implies$ 4), и поэтому достаточно показать импликации 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3).

Пусть имеет место утверждение 1) и $e \in BS \cap (P \setminus P')$. Множество $D(e)$ открыто-замкнуто, оно и отделяет точки P и P' в $\text{Spec } S$. Тогда $\text{Spec } S - T_1$ -пространство с открыто-замкнутой базой и $\text{Spec } S$ нульмерно. Точно так же для

$a \in P \setminus P'$ открытое множество $D(a)$ содержит P' и не содержит P . В нульмерном пространстве $\text{Spec } S$ найдётся открыто-замкнутое множество, отделяющее P и P' . $\square$

Следствие 3.2.12. *Бирегулярное полукольцо S строго гармонично, и $\text{Max } S$ — нульмерный компакт.*

3.3. Гельфандовы полукольца

Кольцо R (ассоциативное с 1) называется *гельфандовым* [55, 96], если для любых его различных максимальных правых идеалов M и N найдутся элементы $a \in R \setminus M$ и $b \in R \setminus N$, для которых выполняется $aRb = 0$. Гельфандовы кольца близки к кольцам непрерывных функций и допускают изоморфные представления сечениями пучков. Важной является связь гельфандовых колец с локальными кольцами: фактор-кольца гельфандова кольца R по идеалам 0_M , $M \in \text{Max } R$ (или, что то же самое, слои ламбековского пучка кольца R), — локальные кольца. Хорошо известны различные характеристики локальных колец. В частности, локальность кольца равносильна всем условиям, указанным в предложении 3.3.2. Кроме того, локальное кольцо характеризуется как кольцо R , для которого $R/\text{Rad } R$ — тело, где $\text{Rad } R$ — радикал Джекобсона.

Возникает вопрос о естественных определениях гельфандовости и локальности полукольца. Сразу заметим, что дословное перенесение кольцевых определений, видимо, непродуктивно. Действительно, рассмотрим полукольцо $\mathbb{N}$ всех целых неотрицательных чисел. Его единственный максимальный идеал будет образовывать множество $M = \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Для $\mathbb{N}$ будут равносильны утверждения предложения 3.3.2, однако несложно показать, что не существует конгруэнции ρ на $\mathbb{N}$ со свойствами

- 1) $\mathbb{N}/\rho$ — полутело;
- 2) ядро конгруэнции $\text{Ker } \rho$ (класс нуля) совпадает с M .

Поэтому логичным выглядит рассмотрение класса полуколец, в которых максимальные односторонние идеалы являются полустрогими. Напомним, что именно полустрогие идеалы, и только они, являются ядрами полукольцевых конгруэнций.

Определение. Полукольцо S назовём *r-полукольцом*, если для любого максимального одностороннего идеала M и любого $a \in S$ либо $a \notin M$, либо $a + 1 \notin M$.

Легко проверить, что полукольцо S является *г-полукольцом* тогда и только тогда, когда каждый максимальный односторонний идеал является полустрогим.

Договоримся в этом разделе под полукольцом понимать *г-полукольцо*, если не оговорено противное.

Лемма 3.3.1. *Пусть S — полукольцо, обладающее единственным максимальным правым идеалом M . Тогда справедливы следующие утверждения:*

- 1) M вполне первичен;
- 2) любой элемент из S , не лежащий в M , обратим.

Доказательство. 1. Пусть $ab \in M$ и $b \notin M$. Ясно, что b обратим справа, $bu = 1$ для некоторого $u \in S$, и тогда $a = abu \in M$.

2. Предположим, что $ab = 1$ и $b \in M$. Для любого $s \in S$ выполняется соотношение $bs + 1 \notin M$, и следовательно, ввиду вполне первичности M $s + a \notin M$. Поэтому $s + 1 \notin M$, так как в противном случае $sa + a \in M$. Получили, что для любого $s \in S$ элемент $s + 1$ обратим справа. Покажем, что M — строгий правый идеал. Действительно, пусть $x + y \in M$ и $x \notin M$. Тогда $m + xr = 1$ для некоторых $m \in M$ и $r \in S$. Далее, $M \ni m + (x + y)r = (m + xr) + yr = 1 + yr$ — обратимый справа элемент, противоречие. Предположим, что элементы a и $a + 1$ не являются обратимыми слева. Поскольку они не могут лежать в одном максимальном левом идеале, то

$$xa + y(a + 1) = 1 \quad (11)$$

для подходящих $x, y \in S$. Тогда $x + y + yb = b \in M$, и ввиду строгости M получаем, что $x, y \in M$. Из (11) следует, что $1 \in M$, противоречие. Тогда либо a обратим слева, и всё доказано, либо $a + 1$ обратим слева. Пусть $v(a + 1) = 1$ для некоторого $v \in S$. Кроме того, $(b + 1)u = 1$ для подходящего $u \in S$. Тогда $1 = (b + 1)u = (a + 1)bu$. Умножив слева на v , а справа на $a + 1$, получаем, что $1 = bu(a + 1)$ и b , как и a , — обратимый элемент. $\square$

Предложение 3.3.2. Для полукольца S равносильны следующие условия:

- 1) в S существует наибольший собственный правый идеал;
- 1') в S существует наибольший собственный левый идеал;
- 2) в S существует наибольший собственный идеал и он является наибольшим правым или наибольшим левым идеалом;
- 3) в S существует наибольший собственный идеал и он является наибольшим правым и наибольшим левым идеалом;
- 4) множество всех необратимых элементов из S образуют идеал;
- 5) если $a + b = 1$, то либо a , либо b обратим;
- 6) если $a + b = 1$, то либо a , либо b обратим справа;
- 6') если $a + b = 1$, то либо a , либо b обратим слева.

Доказательство. Докажем импликацию $1) \implies 2)$. Пусть M — единственный максимальный правый идеал в S . Очевидно, любой идеал лежит в M . Предположим, что $sa \notin M$ для некоторых $s \in S$ и $a \in M$. Тогда sa обратим и $tsa = 1$. Поскольку $ts \notin M$, то он обратим, откуда вытекает обратимость a , противоречие. Получили, что M — наибольший собственный идеал, являющийся наибольшим правым идеалом.

Докажем импликацию $2) \implies 3)$. Пусть M — наибольший идеал, являющийся для определённости наибольшим правым идеалом полукольца S . Если $a \notin M$, то a обратим, следовательно, обратим слева, поэтому M — наибольший левый идеал.

Импликации $3) \implies 4) \implies 5) \implies 6)$ очевидны.

Докажем импликацию $6) \implies 1)$. Пусть M, N — различные максимальные правые идеалы полукольца S . Тогда $m + n = 1$ для подходящих $m \in M, n \in N$. Хотя бы один из элементов обратим справа, что противоречит тому, что рассматриваемые идеалы собственные.

«Левый» случай аналогичен «правому», и условия $(1')$, $(6')$ равносильны остальным. $\square$

Определение. Назовём $\mathfrak{g}$ -полукольцо S , удовлетворяющее эквивалентным условиям предыдущего предложения, *локальным*; произвольное $\mathfrak{g}$ -полукольцо S назовём *гельфандовым*, если для любых различных максимальных правых идеалов M и N найдутся такие элементы $a \in S \setminus M$ и $b \in S \setminus N$, что $aSb = 0$.

Примеры.

1. Очевидно, гельфандово полукольцо является строго гармоническим $\mathfrak{g}$ -полукольцом.
2. Простое полукольцо (полукольцо, в котором в точности два идеала), не являющееся полутелом, строго гармонично, но не гельфандово.
3. Произвольное локальное полукольцо, в частности полутело, гельфандово.
4. $C(X, \mathbb{R}^+)$ — полукольцо всех непрерывных неотрицательных действительных функций на топологическом пространстве X — гельфандово.
5. Полукольцо всех глобальных сечений компактного пучка локальных $\mathfrak{g}$ -полуколец гельфандово.

Строго говоря, гельфандово полукольцо было определено как гельфандово справа полукольцо. Следующим шагом будет устранение этой асимметрии.

Определение. Полукольцо S назовём *рт-полукольцом* (*ртг-полукольцом*, *рмл-полукольцом*), если каждый первичный идеал из S содержится в однозначно определённом максимальном (соответственно максимальном правом, максимальном левом) идеале.

Отметим, что непосредственно из определений вытекает, что гельфандово полукольцо является ртг-полукольцом.

Теорема 3.3.3. Для гельфандова полукольца S справедливы следующие свойства:

- 1) S — ртг-полукольцо;
- 2) S — рмл-полукольцо;
- 3) S — рт-полукольцо, каждый максимальный односторонний идеал которого является максимальным.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) очевидным образом вытекают из 3).

Докажем свойство 3). Ясно, что каждое ртг-полукольцо является рт-полукольцом. Пусть M — произвольный максимальный правый идеал в S . Рассмотрим конгруэнцию θ_M на полукольце S :

$$a \theta_M b \iff \text{найдётся элемент } c \notin M,$$

такой что для всех $s \in S$ справедливо $asc = bsc$.

Как и для строго гармонического полукольца, идеал 0_M лежит в единственном максимальном идеале. Легко проверяется, что $\text{Ker } \theta_M$ совпадает с 0_M , а единица 1 несравнима с элементами из M . Поэтому S/θ_M — локальное полукольцо, откуда вытекает, что M — двусторонний идеал.

Воспользуемся тем, что определение строго гармонического полукольца, в отличие от определения гильфандовости, симметрично. Для максимального идеала M рассмотрим идеалы

$$\tilde{0}_M = \{a \in S: cSa = 0 \text{ для некоторого } c \notin M\}, \quad \widetilde{\text{Ann}} Sa = \{c \in S: cSa = 0\}.$$

Для них все двойственные результаты, справедливые для идеалов вида 0_M и $\text{Ann } aS$, будут также верны. В частности, верен аналог предложения 3.2.1.

Рассмотрим максимальный левый идеал L . Пусть M — примитивный идеал, лежащий в L , очевидно являющийся максимальным идеалом. Предположим, что существует элемент $l \in L \setminus M$. Идеал $\tilde{0}_M + lS$ совпадает со всем полукольцом. Действительно, $lS \not\subseteq M$, а $\tilde{0}_M$ не лежит ни в каком другом максимальном идеале, и множество максимальных и максимальных правых идеалов совпадают. Получаем, что

$$m_1 + ls_1 = 1 \tag{12}$$

для некоторых $m_1 \in \tilde{0}_M$, $s_1 \in S$. Заметим, что $s_1 \notin M$, поэтому

$$m_2 + s_1s_2 = 1 \tag{13}$$

для некоторых $m_2 \in \tilde{0}_M$, $s_2 \in S$. Из (13) с помощью (12) получаем, что

$$lm_2 + ls_1s_2 = l, \quad lm_2 + m_1s_2 + ls_1s_2 = l + m_1s_2, \quad lm_2 + s_2 = l + m_1s_2.$$

Тогда $lm_2 + s_2 \in L$, откуда следует, что

$$s_1lm_2 + s_1s_2 \in L, \quad m_2 + s_1lm_2 + s_1s_2 \in L, \quad 1 + s_1lm_2 \in L.$$

Элемент $m = s_1lm_2$ лежит в $\tilde{0}_M$, следовательно, $\widetilde{\text{Ann}} Sm \not\subseteq M$. Так как $\tilde{0}_M + \widetilde{\text{Ann}} Sm = S$, то $\widetilde{\text{Ann}} Sm \not\subseteq L$. Таким образом, нашёлся элемент $t \notin L$, такой что $tSm = 0$. В частности, $tm = 0$. Получаем, что

$$t = t + tm = t(1 + m) = t(1 + s_1lm_2) \in L,$$

противоречие, показывающее, что $L = M$. $\square$

Замечание. Все три условия предыдущего утверждения эквивалентны для произвольного кольца с 1.

Таким образом, из теоремы 3.3.3 вытекает, что множества максимальных, максимальных правых и максимальных левых идеалов гильфандова полукольца совпадают.

Для любого полукольца S его максимальный спектр является компактным T_1 -пространством, а если S строго гармонично, то $\text{Max } S$ хаусдорфово.

Рассуждая так, как при доказательстве предложения 3.2.1, легко показать, что для любого максимального правого идеала M гильфандова полукольца S идеал 0_M содержится в единственном максимальном идеале полукольца S , а

именно в M , и только в нём. Канонический образ идеала M в фактор-полукольце S/θ_M будет собственным правым идеалом и, следовательно, наибольшим собственным правым идеалом в S/θ_M . Суммируя сказанное, получаем следующее утверждение.

Предложение 3.3.4. Для любого гельфандова полукольца S справедливы следующие свойства:

- 1) для любого максимального правого идеала M полукольца S фактор-полукольцо S/θ_M локально;
- 2) для любых различных максимальных правых идеалов M и N полукольца S справедливо равенство $\text{Ker } \theta_M + \text{Ker } \theta_N = S$;
- 3) $\text{Max } S$ — компакт.

Для любого максимального идеала M полукольца S рассмотрим отношение Бёрна $\theta(M)$ по идеалу 0_M — конгруэнцию

$$a \theta(M) b \iff a + u = b + v \text{ для некоторых } u, v \in 0_M.$$

Предложение 3.3.5. Для максимального идеала M гельфандова полукольца S справедливы следующие утверждения:

- 1) $0_M = \tilde{0}_M$;
- 2) конгруэнции θ_M и $\theta(M)$ совпадают.

Доказательство этого утверждения можно провести непосредственно, но мы сделаем это с помощью пучковой техники в разделе 5.4.

Напомним, что идеал A полукольца S называется *чистым* (равномерно чистым), если для любого элемента $a \in A$ выполняется $A + \text{Ann } a = S$ ($A + \text{Ann } aS = S$).

Предложение 3.3.6. В гельфандовом полукольце каждый чистый идеал равномерно чист.

Доказательство. Допустим, что чистый идеал A гельфандова полукольца S не является равномерно чистым. Тогда найдётся такой элемент $a \in A$, что $A + \text{Ann } aS$ — собственный идеал, лежащий в некотором максимальном идеале M . Так как идеал A чист, $e + b = 1$ и $ab = 0$ для некоторых $e \in A$, $b \in \text{Ann } a$. Правый идеал $bS + 0_M$ не лежит ни в M , ни в каком другом максимальном идеале N , поскольку $0_M \not\subseteq N$ по предложению 3.2.1. По предложению 3.2.6 $bS + 0_M = S$, откуда следует, что $bc + m = 1$ для некоторых $c \in S$, $m \in 0_M$. Получаем, что $a = a(bc + m) = abc + am = am \in 0_M$. Значит, $\text{Ann } aS \not\subseteq M$, и полученное противоречие показывает, что $A + \text{Ann } aS = S$ для любого $a \in A$. $\square$

3.4. Редуцированные риккартовы полукольца

В этом разделе рассматриваются симметрические полукольца без ненулевых нильпотентов с дополнительными условиями на аннуляторы — слабо риккартовы и риккартовы полукольца. Риккартовы кольца имеют тесную связь с кольцами

непрерывных функций [10, с. 56]. Важным подклассом редуцированных риккартовых полуколец являются стоуновы решётки (см., например, [22, с. 152]); стоуновой является, в частности, каждая булева решётка.

Заметим, что примеры 2.4.9, 3.1.5 и предложение 3.1.8 показывают, что полукольцо без ненулевых нильпотентов не обязано быть редуцированным даже в коммутативном случае и класс редуцированных полуколец строго содержится в классе симметрических без ненулевых нильпотентов полуколец.

Назовём для краткости симметрическое полукольцо без ненулевых нильпотентов *слабо редуцированным*.

Лемма 3.4.1. *Для первичного идеала P слабо редуцированного полукольца S $0_P = P$ тогда и только тогда, когда P — минимальный первичный идеал.*

Доказательство. Пусть $P = 0_P$ и $Q \subseteq P$ для некоторого первичного идеала Q . Тогда $0_P \subseteq Q \subseteq P$, откуда следует, что $Q = P$.

Обратно, пусть P — минимальный первичный идеал. Допустим, что существует элемент $a \in P \setminus 0_P$. Рассмотрим m -систему $T = \{1, a, a^2, \dots\}$. Если a^k для некоторого k лежит в 0_P , то $a^k s = 0$ для подходящего $s \notin P$, откуда следует, что $(as)^k = 0$ и $as = 0$ в силу симметричности и отсутствия нильпотентов. Значит, $T \cap 0_P = \emptyset$. Тогда найдётся первичный идеал Q , содержащий 0_P и отличный от P . Тогда по лемме 3.1.7 в $P \cap Q$ содержится некоторый первичный идеал, что противоречит минимальности P . Следовательно, $P = 0_P$. $\square$

Через $\bar{L}$ обозначается замыкание подмножества L топологического пространства. Аннулятор $\text{Ann } A = \{s \in S : as = 0 \text{ для каждого } a \in A\}$ правого идеала A , очевидно, является идеалом полукольца S .

Лемма 3.4.2. *Для всякого идеала A полупервичного полукольца S*

$$\overline{D(A)} = \{P \in \text{Spec } S : \text{Ann } A \subseteq P\}.$$

Доказательство. Пусть $P \in D(A)$, т. е. $A \not\subseteq P$. Поскольку идеал P первичен, $\text{Ann } A \subseteq P$. Отсюда следует, что $D(A)$ является подмножеством множества $X = \{P \in \text{Spec } S : \text{Ann } A \subseteq P\}$, и следовательно, $\overline{D(A)} \subseteq X$ ввиду замкнутости X .

Обратно, пусть $P \notin \overline{D(A)}$. Рассмотрим некоторое множество $D(B)$, содержащее P и не пересекающееся с $\overline{D(A)}$. Но тогда $AB \subseteq \text{rad } S = 0$, и значит, $B \subseteq \text{Ann } A$. Получаем, что P не содержит $\text{Ann } A$, иначе $P \notin D(B)$, следовательно, $P \notin X$. $\square$

Определение. Полукольцо S назовём *слабо риккартовым*, если для любого $a \in S$ и любого элемента $b \in \text{Ann } a$ выполняется $\text{Ann } aS + \text{Ann } b = S$.

Идеал P называется *вполне первичным (псевдопростым)*, если из того, что $ab \in P$ и $ab = 0$, следует, что $a \in P$ или $b \in P$. Заметим, что в симметрическом полукольце для идеала 0_P , $P \in \text{Spec } S$, совпадают понятия первичности, вполне первичности, псевдопростоты.

Предложение 3.4.3. *Для произвольного слабо редуцированного полукольца S равносильны следующие свойства:*

- 1) S слабо риккартово;
- 2) все идеалы 0_P , $P \in \text{Спец } S$, первичны (или, что эквивалентно, вполне первичны, псевдопросты);
- 3) все идеалы 0_M , $M \in \text{Макс } S$, первичны (или, что эквивалентно, вполне первичны, псевдопросты) и из того, что $P \subseteq M$, следует, что $0_P = 0_M$ для любых $P \in \text{Спец } S$, $M \in \text{Макс } S$;
- 4) каждый первичный идеал из S содержит единственный минимальный первичный идеал;
- 5) для любых $a, b \in S$ из того, что $ab = 0$, следует, что $\text{Ann } a + \text{Ann } b = S$;
- 6) для любых $a, b \in S$ справедливо равенство $\text{Ann } a + \text{Ann } b = \text{Ann } ab$;
- 7) для любых $a, b \in S$ из $D(a) \cap D(b) = \emptyset$ следует, что $\overline{D(a)} \cap \overline{D(b)} = \emptyset$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Покажем, что в слабо риккартовом полукольце S идеал 0_P , $P \in \text{Спец } S$, вполне первичен. Пусть $ab \in 0_P$. Тогда $abc = 0$ для некоторого $c \in S \setminus P$. Элемент bc лежит в идеале $\text{Ann } a$, следовательно, $e + f = 1$ для подходящих $e \in \text{Ann } a$ и $f \in \text{Ann } bc$. Предположим, что $a \notin 0_P$, т. е. $\text{Ann } aS \subseteq P$. Тогда $e \in P$, $f \notin P$ и $bcf = 0$. Ввиду первичности P найдётся такой элемент $s \in S$, что $csf \notin P$, откуда следует, что $bcf = 0$ и $b \in 0_P$.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 3). Очевидно, что идеал 0_M , $M \in \text{Макс } S$, первичен. Пусть $P \subseteq M$. Тогда $0_M \subseteq 0_P$. Если $a \in 0_P$, то $ab = 0$ для некоторого $b \notin P$. Кроме того, $b \notin 0_M$, и ввиду первичности 0_M получаем, что $a \in 0_M$ и $0_P \subseteq 0_M$.

Докажем импликацию 3) $\implies$ 4). Пусть $P \in \text{Спец } S$ и M — некоторый максимальный идеал, его содержащий. Тогда $0_M \subseteq P$ и 0_M первичен. Если первичный идеал Q лежит в 0_M , то $Q \subseteq M$ и $0_M \subseteq 0_Q \subseteq Q$. Следовательно, 0_M — минимальный первичный идеал. Пусть A и B — минимальные первичные идеалы, лежащие в P . Тогда по лемме 3.4.1 $A = 0_A = 0_M = 0_B = B$.

Докажем импликацию 4) $\implies$ 5). Предположим, что $ab = 0$, но $\text{Ann } a + \text{Ann } b \neq S$ для некоторых $a, b \in S$. Тогда $\text{Ann } a + \text{Ann } b \subseteq M$ для подходящего $M \in \text{Макс } S$. Рассмотрим единственный минимальный первичный идеал P , лежащий в M . Как и в лемме 3.4.1, предположим, что 0_M строго содержится в $0_P = P$. Найдётся первичный идеал Q , содержащий 0_M и не содержащий P . Заметим, что минимальный первичный идеал, лежащий по условию в Q , отличен от P , поэтому $Q \not\subseteq M$. С другой стороны, $0_M \subseteq Q$, и по лемме 3.4.1 $M \cap Q$ содержит минимальный первичный идеал, отличный от P . Мы получили, что в M лежат два минимальных первичных идеала, противоречие.

Импликация 5) $\implies$ 1) очевидна.

Докажем импликацию 1) $\implies$ 6). Пусть S — слабо риккартово полукольцо и $s \in \text{Ann } ab$. Тогда $bs \in \text{Ann } a$, $sa \in \text{Ann } b$, откуда следует, что $\text{Ann } a + \text{Ann } bs = S$. Для подходящих $x \in \text{Ann } a$, $y \in \text{Ann } bs$ имеем $x + y = 1$, а также $xs + ys = s$. Первое слагаемое лежит в $\text{Ann } a$, второе в $\text{Ann } b$, так как $bys = 0$ ввиду симметричности S . Мы показали, что $\text{Ann } ab \subseteq \text{Ann } a + \text{Ann } b$. Обратное включение справедливо всегда.

Докажем импликацию 6) $\implies$ 5). Пусть выполнено свойство 6) и $ab = 0$. Тогда $S = \text{Ann } 0 = \text{Ann } ab = \text{Ann } a + \text{Ann } b$.

Докажем эквивалентность 5) $\iff$ 7). Пусть $a, b \in S$. В слабо редуцированном полукольце условие $ab = 0$ равносильно тому, что $D(a) \cap D(b) = \emptyset$. С другой стороны, условие $\overline{D(a)} \cap \overline{D(b)} = \emptyset$ равносильно тому, что $\text{Ann } a + \text{Ann } b = S$. Действительно, по лемме 3.4.2 $\overline{D(a)} \cap \overline{D(b)} = \{P \in \text{Spec } S : \text{Ann } a + \text{Ann } b \subseteq P\}$. Тогда из $\overline{D(a)} \cap \overline{D(b)} = \emptyset$ следует, что $\text{Ann } a + \text{Ann } b = S$. Если же $P \in \overline{D(a)} \cap \overline{D(b)}$, то $P \supseteq \text{Ann } a + \text{Ann } b$. Тогда из $\text{Ann } a + \text{Ann } b = S$ следует, что $D(a) \cap D(b) = \emptyset$. $\square$

Через $\text{Min } S$ обозначим *минимальный спектр* полукольца S — пространство всех его минимальных первичных идеалов, рассматриваемое как подпространство $\text{Spec } S$.

Лемма 3.4.4. *Если S — симметрическое полукольцо, то пространство $\text{Min } S$ хаусдорфово. Если S слабо редуцированное, то $\text{Min } S$ — нульмерное хаусдорфово пространство.*

Доказательство. По лемме 3.1.7 минимальные первичные идеалы симметрического полукольца S отделимы в $\text{Spec } S$, а значит, и в $\text{Min } S$. Пусть S — слабо редуцированное полукольцо. Для любого $a \in S$

$$D_1(a) = \{P \in \text{Min } S : P \not\ni a\} = \{P \in \text{Min } S : \text{Ann } a \subseteq P\}$$

является по лемме 3.4.2 открыто-замкнутым множеством в $\text{Min } S$. Множества $D_1(a)$, $a \in S$, образуют открыто-замкнутую базу минимального спектра, следовательно, $\text{Min } S$ нульмерно. $\text{Min } S$ хаусдорфово, поскольку слабо редуцированное полукольцо симметрично. $\square$

Определение. Полукольцо S назовём *риккартовым*, если для любого $a \in S$ $\text{Ann } aS$ порождается дополняемым идемпотентом.

Любое риккартово полукольцо является слабо риккартовым. Действительно, рассмотрим идеал $\text{Ann } aS$ риккартова полукольца S . Произвольный элемент $b \in \text{Ann } aS$ имеет вид $b = be$, где e — дополняемый идемпотент, порождающий $\text{Ann } aS$. Тогда $\text{Ann } aS + \text{Ann } b \ni e + e^\perp = 1$, поскольку $e = e^2 \in \text{Ann } aS$ и $be^\perp = bee^\perp = 0$, откуда следует, что $e^\perp \in \text{Ann } b$.

Лемма 3.4.5. *Если e — дополняемый идемпотент полукольца S , то $D(e)$ открыто-замкнуто в $\text{Spec } S$. Если S полупервично, то для открыто-замкнутого множества A в $\text{Spec } S$ существует такой дополняемый идемпотент $e \in S$, что $A = D(e)$.*

Доказательство. Если e — дополняемый идемпотент, $e^\perp$ — его дополнение, то

$$D(e) \cup D(e^\perp) = D(eS + e^\perp S) = D(S) = \text{Spec } S,$$

$$D(e) \cap D(e^\perp) = D(eSe^\perp) = D(0) = \emptyset.$$

Мы показали, что $D(e)$ открыто-замкнуто в $\text{Spec } S$.

Пусть A открыто-замкнуто в $\text{Spec } S$ и S полупервично. Тогда $A = D(I)$ и $\text{Spec } S \setminus A = D(J)$ для некоторых идеалов I и J . Получаем, что $I + J = S$ и $IJ = JI = 0$ ввиду полупервичности. Для подходящих $e \in I$ и $f \in J$ имеем $e + f = 1$ и $ef = fe = 0$. Ясно, что e и f — идемпотенты. Для произвольного $s \in S$ справедливо $s = es + fs$, откуда следует, что $se = ese$, так как $fse \in JI = 0$. Аналогично $es = ese$, и следовательно, e — дополняемый идемпотент. $\square$

Предложение 3.4.6. Для произвольного слабо редуцированного полукольца S равносильны следующие свойства:

- 1) S — риккартово полукольцо;
- 2) для любого $a \in S$ выполняется $\text{Ann } a + \text{Ann Ann } a = S$;
- 3) для любого $a \in S \setminus \overline{D(a)}$ открыто-замкнуто в $\text{Spec } S$;
- 4) S слабо риккартово и $\text{Min } S$ компактно;
- 5) $\text{Min } S$ — ретракт $\text{Spec } S$.

Доказательство. Заметим, что идеал A выделяется прямым слагаемым тогда и только тогда, когда он порождён дополняемым идемпотентом. В полупервичном полукольце это равносильно по лемме 3.4.5 открыто-замкнутости множества $D(A)$ в $\text{Spec } S$. Поэтому риккартовость полукольца S равносильна открыто-замкнутости множества $D(\text{Ann } aS)$, и следовательно, его дополнения в $\text{Spec } S$ — множества $\overline{D(a)}$. Таким образом, доказана эквивалентность 1) $\iff$ 3).

Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Пусть $\text{Ann } a = eS$ для некоторого $e \in BS$. Поскольку $e^\perp \in \text{Ann Ann } a$, то $1 = e + e^\perp \in \text{Ann } a + \text{Ann Ann } a$.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 1). Пусть $e + f = 1$ для некоторых $e \in \text{Ann } a$ и $f \in \text{Ann Ann } a$. Тогда $e = e^2 + ef = e^2$, так как $ef = 0$. Для любого $s \in S$ выполняется $es = se$, поскольку любой идемпотент слабо симметрического полукольца централен. Поэтому $f = e^\perp$. Наконец, если $b \in \text{Ann } a$, то $b = eb + e^\perp b = eb$, откуда получаем, что $\text{Ann } a = eS$.

Докажем импликацию 1) $\implies$ 5). Пусть S — риккартово полукольцо. Рассмотрим отображение $\varphi: \text{Spec } S \rightarrow \text{Min } S$, при котором $\varphi(P) = 0_P$. Пусть $U = D_1(J)$ — произвольное открытое подмножество в $\text{Min } S$, и пусть $P \in \varphi^{-1}(U)$. Рассмотрим случай, когда $D(J)$ — открытая окрестность точки P . Если $Q \in D(J)$, то $Q \not\supseteq J$, и следовательно, $0_Q \not\supseteq J$. Это означает, что $\varphi(Q) \in D_1(J)$ и $\varphi^{-1}(U)$ открыто. Пусть $J \subseteq P$. Ясно, что в этом случае J содержит не более одного минимального первичного идеала. Вариант, когда $D_1(J) = \text{Min } S$, тривиален. Пусть $D_1(J) = \text{Min } S \setminus 0_M$ для некоторого $M \in \text{Max } S$. Если Q лежит в окрестности $D(0_M)$ точки P , то $Q \not\supseteq 0_M$ и $\varphi(Q) \neq 0_M$, поэтому $D(0_M) \subseteq \varphi^{-1}(U)$ и φ — непрерывное отображение.

Докажем импликацию 5) $\implies$ 4). Пусть $\varphi: \text{Spec } S \rightarrow \text{Min } S$ — ретракция. Покажем, что если минимальный первичный идеал P лежит в первичном идеале Q , то $\varphi(Q) = P$. Предположим, что это не так. По лемме 3.4.4 найдётся открытая окрестность U точки $\varphi(Q)$, не содержащая P . Тогда открытое множество $\varphi^{-1}(U)$ содержит Q , но не P . Но в $\text{Spec } S$ Q не отделяется от P , так как $P \subseteq Q$. Кроме

того, получаем, что P — единственный минимальный первичный идеал, лежащий в Q , т. е. S — слабо риккартово полукольцо. Компактность $\text{Min } S$ следует из компактности $\text{Spec } S$ и непрерывности φ .

Докажем импликацию 4) $\implies$ 3). Пусть S слабо риккартово и $\text{Min } S$ компактно. Тогда по лемме 3.4.4 $\text{Min } S$ — нульмерный компакт. Поскольку S — слабо риккартово полукольцо, рассмотрим отображение $\varphi: \text{Spec } S \rightarrow \text{Min } S$, $\varphi(P) = 0_P$. Имеем

$$\begin{aligned} P \in \overline{D(a)} &\iff P \supseteq \text{Ann } a \iff a \notin 0_P \iff \\ &\iff \varphi(P) = 0_P \in D_1(a) \iff P \in \varphi^{-1}(D_1(a)). \end{aligned}$$

Тогда

$$\varphi^{-1}(D_1(a)) = \overline{D(a)}.$$

Любое открыто-замкнутое подмножество $U \subseteq \text{Min } S$ компактно и является объединением конечного числа открыто-замкнутых множеств $D_1(a)$. Следовательно, множества $D_1(a)$ образуют предбазу открыто-замкнутых множеств пространства $\text{Min } S$, и отображение φ непрерывно. Это в свою очередь означает, что $D(a)$ открыто-замкнуто в $\text{Spec } S$. $\square$

Заметим, что из условия 2) предложения 3.4.6 вытекает стоуновость [22] слабо редуцированного риккартова полукольца в классе дистрибутивных решёток.

3.5. Регулярные полукольца

Известно, что регулярное кольцо является очень удобным объектом, к которому применимы пучковые представления. Несложно понять, что основная причина этого — большое количество дополняемых идемпотентов и, как следствие, аннуляторных идеалов. Это в свою очередь позволяет рассматривать для регулярных колец содержательные пучковые представления Пирса и Ламбека. В случае регулярных полуколец (при дословном переносе кольцевого определения) ситуация сильно меняется: нетривиальных дополняемых идемпотентов в общем случае регулярное полукольцо может не содержать.

Привлекательной поэтому выглядит идея наложения дополнительных условий на регулярное полукольцо, что, к примеру, было продемонстрировано при рассмотрении агр-полуколец [16]. Подклассом агр-полуколец являются, в частности, булевы полукольца — полукольца глобальных сечений пучков полутел (не являющихся телами) над нульмерными компактными с точки зрения пучковых представлений. Мы рассмотрим более широкий класс, отказавшись от условия положительности полукольца.

Основным объектом в данном разделе является слабо симметрическое строго регулярное полукольцо.

Полукольцо с разрешимым уравнением $a^2x = a$ ($axa = a$) называется *строго регулярным (регулярным)*. Примерами таких полуколец являются ограниченные дистрибутивные решётки, полукольца с делением (каждый ненулевой

элемент обратим). Напомним, что под *полутелом* мы понимаем полукольцо с делением, не являющееся телом; таким образом, класс полуколец с делением исчерпывается всеми телами и полутелами.

Легко показать, что строго регулярное полукольцо не содержит ненулевых нильпотентов, а каждый его односторонне обратимый элемент обратим. Очевидно также, что в классе слабо симметрических полуколец регулярность и строгая регулярность совпадают.

Заметим, что в слабо симметрическом полукольце произвольный идемпотент e централен. Действительно, $es = e^2s$, что влечёт $se = ese$. Аналогично $es = ese$.

Лемма 3.5.1. *В регулярном полукольце каждый главный односторонний идеал порождается идемпотентом.*

Доказательство. Пусть aS — произвольный главный правый идеал и $asa = a$ для некоторого $s \in S$. Элемент $e = as$ является идемпотентом, и $eS \subseteq aS$. Для любого $r \in S$ выполняется $ar = asar = ear \in eS$, т. е. $aS \subseteq eS$. $\square$

Определение. Полукольцо S назовём *инверсным*, если для любого элемента a этого полукольца существует единственный к нему *инверсный* элемент b из S , такой что $aba = a$ и $bab = b$.

Другими словами, полукольцо инверсно, если инверсной является мультипликативная полугруппа полукольца [30, т. 2, с. 34].

Предложение 3.5.2. *В слабо симметрическом регулярном полукольце S справедливы следующие утверждения:*

- 1) *каждый главный односторонний идеал порождается однозначно определённым идемпотентом;*
- 2) *каждый односторонний идеал является двусторонним;*
- 3) *если каждый идемпотент полукольца S дополняем, то S полупервично;*
- 4) *S является инверсным полукольцом.*

Доказательство. 1. Рассмотрим произвольный главный правый идеал aS , порождаемый по лемме 3.5.1 некоторым идемпотентом e из S . Поскольку в слабо симметрическом полукольце все идемпотенты центральны, то $aS = eS = Se = (e) = (a)$. Предположим, что идеал (a) порождается также идемпотентом f . Имеем $(f) = (a) = (e)$, значит, $e = fs$ и $f = et$ для некоторых элементов s, t из S . Тогда $ef = eet = et = f$ и $fe = ffs = fs = e$. Но в силу центральности идемпотентов имеем $f = ef = fe = e$.

2. Произвольный правый идеал J является суммой главных правых идеалов aS , $a \in J$, каждый из которых по доказанному в пункте 1 двусторонний. Следовательно, идеалом будет и J .

3. Покажем, что для произвольного ненулевого элемента a существует первичный идеал, не содержащий его. Рассмотрим правый идеал aS , порождаемый некоторым идемпотентом e . Предположим, что для его дополнения выполняется

$(e^\perp) = S$. В этом случае $e^\perp$ обратим. Так как a имеет вид es для некоторого s из полукольца S , то $a = es = ee^\perp(e^\perp)^{-1}s = 0$, противоречие. Значит, $(e^\perp)$ содержится в некотором максимальном идеале M . Поскольку $1 = e^\perp + e \notin M$, то $e \notin M$, а максимальный идеал первичен.

4. Возьмём произвольный элемент a из S , и пусть $asa = a$ для некоторого $s \in S$. Рассмотрим элемент $b = sas$ и покажем, что он является инверсным к элементу a . Действительно, $aba = asasa = asa = a$ и $bab = sasasa = sasasa = sas = b$. Покажем единственность инверсного элемента к элементу a . Элементы $e = ab$ и $f = ba$ являются центральными идемпотентами, поэтому $eS = (a) = fS$. По свойству 1) $f = e$, т. е. $ab = ba = e$. Но eS можно рассматривать как подполукольцо с единицей e . Поскольку каждый инверсный к элементу a элемент обязан лежать в eS , то он будет определяться однозначно как обратный к a в полукольце eS . $\square$

Лемма 3.5.3. В регулярном полукольце, каждый идемпотент которого дополняем, произвольный первичный идеал является максимальным.

Доказательство. Пусть P — первичный идеал и $a \notin P$. Для подходящего $s \in S$ выполняется $asa = a$, и $e = as$ — идемпотент, не лежащий в P . Для произвольного $r \in S$ выполняется $ere^\perp = 0$ ввиду центральности идемпотентов, поэтому $e^\perp \in P$. Получаем, что $1 = e + e^\perp \in P + (a)$, следовательно, P — максимальный идеал. $\square$

Напомним, что полукольцо S называется *прямой суммой* своих идеалов $J_1, \dots, J_k$, если $S = J_1 + \dots + J_k$ и каждый элемент из S однозначно выражается в виде суммы представителей из идеалов J_i . Обозначим прямую сумму через $J_1 \oplus \dots \oplus J_k$. Известно, что если $S = J_1 \oplus \dots \oplus J_k$, то J_i является главным идеалом, порождённым дополняемым идемпотентом e_i , и $e_i e_j = 0$ для различных i, j . При этом J_i является полукольцом с единицей e_i . Существует естественная связь между прямыми суммами и (внешними) прямыми произведениями полуколец. Так, если S изоморфно прямому произведению полуколец $A_1 \times \dots \times A_k$ (обозначим изоморфизм через φ), то $S = \varphi(A_1) \oplus \dots \oplus \varphi(A_k)$. Обратно, из того, что $S = J_1 \oplus \dots \oplus J_k$, следует, что $S \cong J_1 \times \dots \times J_k$.

Пусть $S \cong J_1 \times \dots \times J_k$, где J_i — полукольца с делением. Полукольцо S строго регулярно, так как уравнение

$$(a_1, \dots, a_k)^2(x_1, \dots, x_k) = (a_1, \dots, a_k)$$

разрешимо. Действительно, если $a_i \neq 0$, то возьмём $x_i = a_i^{-1}$. В противном случае положим $x_i = 0$. Если $(e_1, \dots, e_k)$ — идемпотент, то, очевидно, каждая компонента равна либо нулю, либо единице, т. е. идемпотент дополняем. Наконец, S слабо симметрическое, поскольку таковым является любое полукольцо с делением. Получили, что прямое произведение полуколец с делением является слабо симметрическим регулярным полукольцом, каждый идемпотент которого дополняем. В случае конечного полукольца верно также и обратное.

Теорема 3.5.4. Конечное ненулевое слабо симметрическое полукольцо S , в котором каждый идемпотент дополняем, регулярно тогда и только тогда, когда оно изоморфно прямому произведению нескольких конечных полуколец с делением.

Доказательство. Начнём со вспомогательного утверждения.

Лемма 3.5.5. Всякий конечно-порождённый идеал слабо симметрического регулярного полукольца S , каждый идемпотент которого имеет дополнение, является главным идеалом.

Доказательство. Достаточно показать, что сумма двух главных идеалов полукольца S есть главный идеал. Рассмотрим главные идеалы eS и gS полукольца S . По предложению 3.5.2 e и g можно считать дополняемыми идемпотентами. Рассмотрим элемент $ge^\perp$ полукольца S . Так как S регулярно, то $(ge^\perp)s(ge^\perp) = ge^\perp$. Пусть $c = ge^\perp s$. Элемент c является идемпотентом, поскольку

$$c^2 = (ge^\perp s)(ge^\perp s) = (ge^\perp)s(ge^\perp)s = ge^\perp s = c.$$

Стандартно проверяется, что $cS = ge^\perp S$. Теперь покажем, что $eS + gS = (e + c)S$. Имеем $(e + c)e = e$, так как $ce = ge^\perp se = 0$ ввиду центральности идемпотентов слабо симметрического полукольца. Значит, $e \in (e + c)S$. В то же время

$$\begin{aligned} g &= g(e + e^\perp) = ge + ge^\perp = ge + (ge^\perp)s(ge^\perp) = \\ &= ge + ge^\perp c = g(e + e^\perp c) = g(e + c), \end{aligned}$$

что и означает, что $g \in (e + c)S$. Таким образом, мы получили, что $eS + gS \subseteq (e + c)S$. Обратно, $e + c = e + ge^\perp s$, т. е. $e + c \in eS + gS$ и $(e + c)S \subseteq eS + gS$. Доказательство леммы завершено. $\square$

Пусть S — ненулевое слабо симметрическое строго регулярное полукольцо, каждый идемпотент которого дополняем. Рассмотрим множество BS всех идемпотентов полукольца S , на котором введём отношение $\leq$, положив

$$e \leq f \iff ef = e.$$

Это отношение является отношением порядка, т. е. оно рефлексивно, антисимметрично и транзитивно. Так как множество A конечно, в нём есть атомы — ненулевые минимальные элементы; обозначим множество всех атомов через $M = \{e_1, \dots, e_n\}$. Множество M непусто, поскольку $1 \in BS \setminus \{0\}$ и под каждым элементом конечного упорядоченного множества $BS \setminus \{0\}$ содержится хотя бы один атом.

Покажем, что $S = e_1S \oplus \dots \oplus e_nS$ и e_iS — полукольца с делением. По лемме 3.5.5 сумма $e_1S + \dots + e_nS$ даёт идеал J , который порождается некоторым идемпотентом e . Рассмотрим случай, когда $e \neq 1$. Идемпотент e имеет дополнение $e^\perp$, причём $e^\perp \neq 0$; значит, существует атом e_i , такой что $e_i \leq e^\perp$. Так как $e_i \in (e)$, то e_i имеет вид se для некоторого s из S . Тогда $e_i = e_i e^\perp = see^\perp = 0$, противоречие, следовательно, $e = 1$. Таким образом, $S = J = e_1S + \dots + e_nS$. Заметим, что произведение различных атомов равно нулю,

и допустим, что $s = e_1 s_1 + \dots + e_n s_n = e_1 t_1 + \dots + e_n t_n$. Умножив это равенство на e_i , получим, что $e_i s_i = e_i t_i$, что означает однозначность разложения произвольного элемента полукольца.

Осталось показать, что $e_i S$ — полукольца с делением. На $e_i S$ можно смотреть как на полукольцо, единицей которого является e_i . Возьмём ненулевой элемент a из $e_i S$. По предложению 3.5.2 $aS = gS$ для некоторого идемпотента g из множества BS . Поскольку $g = e_i s$ для некоторого $s \in S$, то $ge_i = e_i^2 s = e_i s = g$ и $g \leq e_i$. Идемпотент g отличен от нуля, поэтому совпадает с атомом e_i . Тогда $at = e_i$ для некоторого $t \in S$. Наконец, $ae_i t = e_i^2 = e_i$, и элемент a обратим в полукольце $e_i S$. Теорема доказана. $\square$

Следствие 3.5.6. Конечное регулярное слабо симметрическое полукольцо, каждый идемпотент которого дополняем, коммутативно.

Доказательство. Достаточно показать, что любое конечное полукольцо с делением коммутативно. Это так, если кольцо с делением является телом (теорема Веддербёрна). Пусть T — конечное полукольцо с делением, не являющееся телом, и $a_1, \dots, a_k$ — все его ненулевые элементы. Элемент $a = a_1 + \dots + a_k$ отличен от нуля, иначе T — тело. Тогда $aa_i = a$ для любого i , откуда следует, что $a_i = 1$. Таким образом, T — двухэлементная цепь, очевидно коммутативная. $\square$

Следствие 3.5.7. Конечная булева решётка изоморфна прямому произведению двухэлементных цепей.

4. Общая теория функциональных представлений полуколец

4.1. Компактные пучки

Пучки Ламбека и Корниша строго гармонических и гильфандовых полуколец, пирсовский пучок произвольного полукольца имеют хаусдорфовы компактные базисные пространства и накрывающие пространства с хорошими свойствами отделимости сечениями. Такие пучки названы компактными и изучаются в этом разделе.

Пусть X — топологическое пространство, Π — пучок полуколец над X , $\Gamma = \Gamma(\Pi, X)$ — полукольцо всех его глобальных сечений. Через J_x , $x \in X$, обозначим множество всех глобальных сечений, равных нулю в точке x . Очевидно, J_x является двусторонним идеалом в Γ .

Определение. Пучок (Π, X) назовём Γ -регулярным (Γ_0 -регулярным), если для любого замкнутого множества $N \subseteq X$ и любой точки $x \in X \setminus N$ найдётся сечение $\sigma \in \Gamma(\Pi, X)$, такое что $\sigma(x) = 1$, $\sigma|_N = 0$ ($\sigma(x) = 0$, $\sigma|_N = 1$); Назовём пучок (Π, X) Γ -нормальным (Γ -отделимым), если для любых непересекающихся замкнутых множеств N и L (любых различных точек x и y) найдётся сечение

$\sigma \in \Gamma(\Pi, X)$, такое что $\sigma|_N = 0$, $\sigma|_L = 1$ ($\sigma(x) = 0$, $\sigma(y) = 1$). Пучок (Π, X) называется *мягким*, если для любого замкнутого множества $N \subseteq X$ гомоморфизм ограничения $\Gamma(\Pi) \rightarrow \Gamma(N)$ сюръективен, или, другими словами, любое сечение над N продолжается до глобального сечения.

Носителем сечения $\sigma \in \Gamma$ называется множество

$$\text{supp } \sigma = X \setminus z(\sigma) = \{x \in X : \sigma(x) \neq 0\}.$$

Пучок называется Γ -*паракомпактным*, если для каждого открытого покрытия (U_i) , $i \in I$, пространства X существует подчинённое ему *разбиение единицы* — семейство сечений (φ_i) , $i \in J$, из Γ , таких что носитель каждого сечения φ_i лежит в некотором своём множестве U_j , каждая точка из X обладает окрестностью, пересекающейся только с конечным числом носителей $\text{supp } \varphi_i$, и $\sum_{i \in J} \varphi_i = 1$ — единичное сечение в Γ .

Второе из трёх условий, накладываемых на семейство (φ_i) , обеспечивает суммируемость любого его подсемейства, т. е. сумма сечений подсемейства определена и снова является сечением пучка Π . Для компактных пространств X в определении Γ -паракомпактности пучка Π индексные множества I и J можно считать конечными и равными.

Теорема 4.1.1. Пусть (Π, X) — пучок полуколец над компактом X . Рассмотрим следующие свойства:

- 1) пучок Π Γ -отделимый;
- 2) пучок Π Γ -регулярный;
- 3) пучок Π Γ_0 -регулярный;
- 4) пучок Π мягкий;
- 5) пучок Π Γ -нормальный;
- 6) пучок Π Γ -паракомпактный;
- 7) $J_x + J_y = \Gamma$.

Тогда утверждения 1)–5) равносильны, утверждения 6) и 7) равносильны, из 7) следует каждое из указанных условий; если (Π, X) — пучок колец, то условия 1)–7) эквивалентны.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Пусть N — замкнутое множество в X и $x \in X \setminus N$. Для каждой точки $y \in N$ найдётся сечение $\varphi_y \in \Gamma$, равное нулю в точке y и единице в точке x . Нуль-множества $z(\varphi_y)$, $y \in N$, покрывают N , поэтому ввиду компактности X существует конечное подпокрытие $z(\varphi_1), \dots, z(\varphi_k)$ множества N . Сечение $\varphi = \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_k$ равно нулю на N и единице в точке x .

Докажем импликацию 2) $\implies$ 3). Поскольку одноточечные множества в X замкнуты, то для каждой точки $y \in N$ найдётся глобальное сечение φ_y , равное нулю в точке $x \in X \setminus N$ и совпадающее с единичным сечением на некоторой окрестности U_y точки y . Компактность X и замкнутость N позволяют выбрать

конечное множество сечений $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, таких что

$$\varphi_i(x) = 0, \quad \varphi_i|_{U_i} = 1, \quad \bigcup_{i=1}^k e(\varphi_i) \supseteq N,$$

где

$$e(\varphi) = \{y \in X : \varphi(y) = 1(y)\}.$$

Ограничим сечение φ_1 до локального сечения над множеством $U_1 \cup X \setminus N$ и каждое φ_i , $i = 2, \dots, k$, до локального над соответствующим U_i . Получившиеся локальные сечения имеют области определения, покрывающие X , и любая пара локальных сечений совпадает на пересечении своих областей определения. «Склеивая» по свойству P2 локальные сечения, получаем глобальное сечение, равное единице на N и нулю в точке x . Следовательно, пучок Γ_0 -регулярен.

Докажем импликацию 3) $\implies$ 4). Пусть σ — сечение над замкнутым подмножеством $N \subseteq X$. Подпространство N компактно и относительно хаусдорфово, поэтому локально Γ -расширяемо. Значит, найдётся открытая окрестность U множества N , на которую σ продолжается до локального сечения ψ . Для каждой точки $x \in X \setminus U$ найдётся глобальное сечение φ_x , равное нулю в точке x и совпадающее с единичным на N . Нуль-множества $z(\varphi_x)$, $x \in X \setminus U$, покрывают замкнутое множество $X \setminus U$, поэтому выберем конечное подпокрытие $(z(\varphi_i))$ для подходящих сечений $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Положим $\varphi = \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_k$ и получим

$$\phi = \begin{cases} \varphi\psi & \text{на } U, \\ 0 & \text{на } X \setminus U \end{cases}$$

глобальное сечение, продолжающее σ .

Докажем импликацию 4) $\implies$ 5). Пусть N и L — непересекающиеся замкнутые подмножества в X . Сечение над $N \cup L$, равное нулю на N и единице на L , ввиду мягкости пучка продолжается до требуемого глобального сечения.

Импликация 5) $\implies$ 1) справедлива ввиду замкнутости одноточечных подмножеств.

Докажем импликацию 6) $\implies$ 7). Пусть $x \neq y \in X$. Рассмотрим открытое покрытие пространства X множествами $X \setminus \{x\}$ и $X \setminus \{y\}$ и подчинённое ему разбиение единицы $\varphi + \psi = 1$. Поскольку $\text{supp } \varphi \subseteq X \setminus \{x\}$, то $\varphi(x) = 0$. Аналогично $\psi(y) = 0$. Поэтому $1 = \varphi + \psi \in J_x + J_y = \Gamma$.

Докажем импликацию 7) $\implies$ 6). Пусть (U_i) , $i \in I$, — открытое покрытие компакта X . Для произвольной точки $x \in X$ выберем произвольное множество U_j , содержащее x . Для каждой точки $y \in X \setminus U_j$ выполняется $J_x + J_y = \Gamma$, и следовательно, $\varphi_y + \psi_y = 1$ для подходящих $\varphi_y \in J_x$, $\psi_y \in J_y$. Ввиду компактности можно выбрать из семейства (ψ_y) , $y \in X \setminus U_j$, конечное множество сечений $\psi_1, \dots, \psi_k$, нуль-множества $z(\psi_i)$ которых покрывают $X \setminus U_j$. Соответствующие сечения $\varphi_i \in J_x$, $i = 1, \dots, k$, обладают свойством $\varphi_i + \psi_i = 1$, поэтому

$$1 = (\varphi_1 + \psi_1) \cdot \dots \cdot (\varphi_k + \psi_k) = \varphi_x + \psi_x,$$

где $\psi_x = \psi_1 \cdot \dots \cdot \psi_k$, а φ_x — сумма остальных элементов после раскрытия скобок. Отметим, что $\psi_x = 0$ на $X \setminus U_j$ и $\varphi_x(x) = 0$. Введём обозначение

$$B_x = \{t \in X : \varphi_x(t) = 0\} \subseteq \text{supp } \psi_x \subseteq U_j.$$

Семейство (B_x) , $x \in X$, покрывает X . Выберем из него конечное подпокрытие $\{B_1, \dots, B_n\}$, в котором каждое B_i лежит в подходящем U_m . Пусть $(\varphi_1, \psi_1), \dots, (\varphi_n, \psi_n)$ — соответствующие этому подпокрытию пары глобальных сечений. Ясно, что $\varphi_i + \psi_i = 1$, $\varphi_i|_{B_i} = 0$.

Положим $\sigma_1 = \psi_1$ и для каждого $i = 2, \dots, n$

$$\sigma_i = \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_{i-1} \psi_i \in \Gamma.$$

Имеем $\sigma_1 + \varphi_1 = \psi_1 + \varphi_1 = 1$. Если $\sigma_1 + \dots + \sigma_{i-1} + \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_{i-1} = 1$, то

$$\begin{aligned} \sigma_1 + \dots + \sigma_i + \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_i &= \\ &= \sigma_1 + \dots + \sigma_{i-1} + \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_{i-1} \psi_i + \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_i = \\ &= \sigma_1 + \dots + \sigma_{i-1} + \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_{i-1} (\psi_i + \varphi_i) = 1. \end{aligned}$$

По индукции заключаем, что

$$\sigma_1 + \dots + \sigma_n + \varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_n = 1.$$

Поскольку $z(\varphi_1) \cup \dots \cup z(\varphi_n) \supseteq B_1 \cup \dots \cup B_n = X$, то $\varphi_1 \cdot \dots \cdot \varphi_n = 0$, поэтому $\sigma_1 + \dots + \sigma_n = 1$. Осталось заметить, что для любого i $\text{supp } \sigma_i \subseteq \text{supp } \psi_i \subseteq U_m$ для некоторого $m \in I$ и $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ — конечное разбиение единицы, подчинённое покрытию (U_i) , $i \in I$.

Импликация 7) $\implies$ 1) очевидна.

Наконец, покажем, что если (Π, X) — пучок колец с единицей, то из 1) следует 7). Действительно, пусть φ — сечение, отделяющие точки x, y . Более точно, $\varphi(x) = 0$, $\varphi(y) = 1$. Тогда $\varphi \in J_x$, $1 - \varphi \in J_y$ и $J_x + J_y = \Gamma$. $\square$

Пример. Рассмотрим пучок ростков (Π, X) предпучка всех $\mathbb{N}$ -значных функций на единичном отрезке X . Ввиду хаусдорфовости X он, очевидно, является Γ -отделимым. Однако для (Π, X) не выполняется условие 7). Действительно, если $\varphi + \psi = 1$ для некоторых глобальных сечений пучка, то $\varphi|_{z(\psi)} = 1$. Тогда X является дизъюнктивным объединением открытых множеств $z(\varphi)$ и $e(\varphi)$, что возможно лишь в тривиальных случаях $z(\varphi) = X$ или $z(\varphi) = \emptyset$.

Определение. Пучок Π полуколец над компактом X назовём *компактным*, если для любых различных точек $x, y \in X$ выполнено $J_x + J_y = \Gamma$.

В дальнейшем при построении конкретных пучковых конструкций будет показано, что компактным является пучок Пирса для произвольного полукольца, а также ламбековский пучок строго гармонического полукольца.

Пример. Любой пучок полуколец над нульмерным компактом является компактным.

Действительно, пусть x, y — различные точки нульмерного компакта X . Возьмём открыто-замкнутое множество B , содержащее x и не содержащее y .

Положив $\varphi = 0$ на B , $\psi = 0$ на $X \setminus B$ и $\psi = 1$ на B , $\psi = 0$ на $X \setminus B$, получим глобальные сечения, такие что $\varphi + \psi = 1$ и $\varphi \in J_x$, $\psi \in J_y$.

Следствие 4.1.2. *Г-регулярный пучок над компактом является факторным.*

Доказательство. Одноточечные множества в X замкнуты и, поскольку Г-регулярный пучок над компактом является мягким, Г-расширяемы. Следовательно, пучок является факторным. $\square$

В следующих результатах выясняется строение слоёв компактного пучка и максимальных идеалов его полукольца глобальных сечений.

Договоримся через $f_x: \Gamma \rightarrow \Pi_x$ обозначать естественный эпиморфизм полукольца всех глобальных сечений на слой в точке x .

Лемма 4.1.3. *В Г-регулярном пучке Π для любого $x \in X$ слой Π_x изоморфен $\Gamma/\theta(J_x)$, где $\theta(J_x)$ — отношение Бёрна по идеалу J_x .*

Доказательство. Пусть $f: \Gamma/\theta(J_x) \rightarrow \Pi_x$ — отображение, заданное следующим образом: $f([\varphi]) = \varphi(x)$, где $[\varphi]$ — класс эквивалентности элемента $\varphi \in \Gamma$. Такое определение не зависит от выбора представителя класса. Действительно, если $[\varphi] = [\psi]$, то $\varphi + \mu = \psi + \nu$ для некоторых $\mu, \nu \in J_x$. Тогда

$$\varphi(x) = \varphi(x) + \mu(x) = (\varphi + \mu)(x) = (\psi + \nu)(x) = \psi(x) + \nu(x) = \psi(x).$$

Ввиду факторности Г-регулярного пучка отображение f является эпиморфизмом.

Пусть $f([\varphi]) = f([\psi])$. Тогда $\varphi(x) = \psi(x)$, и значит, $\varphi = \psi$ на некоторой открытой окрестности U точки x . Ввиду Γ_0 -регулярности Π существует глобальное сечение ξ , для которого $\xi(x) = 0$ и $\xi|_{X \setminus U} = 1$. Тогда $\varphi\xi, \psi\xi \in J_x$ и $\varphi + \psi\xi = \psi + \varphi\xi$. Таким образом, $\varphi \theta(J_x) \psi$ и $[\varphi] = [\psi]$, значит, f — мономорфизм. $\square$

Лемма 4.1.4. *Для любого первичного идеала P полукольца Γ глобальных сечений компактного пучка (Π, X) существует единственная точка $x \in X$, для которой $J_x \subseteq P$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого идеала $P \in \text{Спес } \Gamma$ и для каждой точки $x \in X$ выполнено $J_x \not\subseteq P$. Тогда найдутся сечения $\sigma^x \in J_x \setminus P$ для любого x . Ввиду компактности X среди σ^x можно выбрать конечное множество сечений $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, нуль-множества $z(\sigma_i)$ которых покрывают всё пространство X . Тогда $\sigma_1 \Gamma \dots \Gamma \sigma_k = 0 \in P$, что противоречит первичности идеала P . Единственность точки x следует из определения компактности пучка. $\square$

Лемма 4.1.5. *Пусть (Π, X) — компактный пучок полуколец, $P \in \text{Спес } \Gamma$ и $J_x \subseteq P$. Тогда $f_x(P) \neq \Pi_x$.*

Доказательство. Предположим, что $f_x(P) = \Pi_x$ для некоторого первичного идеала P . Тогда существует сечение $\rho \in P$, такое что $\rho(x) = 1_x$. Сечение ρ совпадает с единичным сечением на некотором открытом множестве U , и ввиду Γ_0 -регулярности найдётся сечение γ , равное 0 в точке x и 1 на $X \setminus U$. Стандартно

проверяется, что $\rho + \gamma = 1 + \rho\gamma$ в любой точке пространства X . Поскольку $J_x \subseteq 0_P$, то $\gamma \in 0_P$ и $\gamma\varphi = 0$ для некоторого $\varphi \notin P$. Тогда $\rho\varphi = \varphi$, но в левой части сечение из P , в отличие от сечения справа. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Пусть M — максимальный идеал слоя Π_x компактного пучка (Π, X) . Определим идеал M_x полукольца Γ как

$$M_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma(x) \in M\} = f_x^{-1}(M).$$

Предложение 4.1.6. *Максимальными идеалами полукольца Γ компактного пучка (Π, X) являются в точности идеалы M_x , различные для различных пар (x, M) .*

Доказательство. Пусть M_x лежит в некотором максимальном идеале N полукольца Γ . Тогда $J_x \subseteq N$. По предыдущей лемме $f_x(N) \neq \Pi_x$. Поскольку $M \subseteq f_x(N)$, то $M = f_x(N)$, и M_x — максимальный идеал в Γ .

Пусть теперь N — максимальный идеал полукольца Γ и x — однозначно определённая точка, для которой $J_x \subseteq N$. Идеал $f_x(N)$ полукольца Π_x является собственным, поэтому лежит в некотором максимальном идеале M слоя Π_x . Тогда $N \subseteq M_x$ и $N = M_x$ по определению максимального идеала. $\square$

Предложение 4.1.7. *Полукольцо Γ всех глобальных сечений компактного пучка (Π, X) , каждый слой которого обладает единственным максимальным идеалом, строго гармоническое.*

Доказательство. Произвольные различные максимальные идеалы из Γ имеют вид M_x и M_y , причём точки x и y пространства X различны в силу единственности максимальных идеалов в каждом слое. Тогда $\sigma + \gamma = 1$ для некоторых $\sigma \in J_x$ и $\gamma \in J_y$. Множество $\text{supp } \sigma$ точек из X , в которых сечение σ отлично от нуля, замкнуто и не содержит x , поэтому найдётся глобальное сечение φ , равное нулю на $\text{supp } \sigma$ и единице в точке x . Получили, что $\sigma \notin M_y$, $\varphi \notin M_x$ и $z(\sigma) \cup z(\varphi) = X$. Следовательно, $\sigma\gamma\varphi = 0$. $\square$

Пусть P — первичный идеал полукольца Γ компактного пучка (Π, X) полуколец. По лемме 4.1.4 $P \supseteq J_x$ для однозначно определённой точки x . Полагая $f(P) = x$, получаем отображение $f: \text{Spec } \Gamma \rightarrow X$. Таким образом, $f(P) = x$ тогда и только тогда, когда $J_x \subseteq P$. Поскольку $J_x \subseteq M_x$, f сюръективно.

Лемма 4.1.8. *Отображение f непрерывно и замкнуто.*

Доказательство. Положим $J_B = \{\varphi \in \Gamma : \varphi|_B = 0\}$. Ясно, что $J_B = \bigcap \{J_x : x \in B\}$. Пусть U — открытое подмножество в X и $P \in f^{-1}(U)$. Если $x = f(P)$, то $x \in U$. Ввиду Γ -регулярности пучка Π найдётся сечение $\varphi \in \Gamma$, такое что $\varphi(x) = 1$ и $\varphi|_{X \setminus U} = 0$. Получаем, что $\varphi \in J_{X \setminus U}$, следовательно, $\varphi \notin P$. Поэтому $P \in D(J_{X \setminus U})$. Мы доказали, что $f^{-1}(U) \subseteq D(J_{X \setminus U})$.

Обратно, пусть $P \in D(J_{X \setminus U})$. Тогда существует сечение $\varphi \in J_{X \setminus U} \setminus P$. Поскольку $J_x \subseteq P$, то $\varphi \notin J_{f(P)} = J_x$, и значит, $x = f(P) \notin X \setminus U$, т. е.

$P \in f^{-1}(U)$. Мы доказали, что

$$f^{-1}(U) = D(J_{X \setminus U}) \quad (14)$$

и отображение f непрерывно. Пусть N — замкнутое подмножество пространства $\text{Spec } \Gamma$. Следовательно, N компактно. Образ компактного множества при непрерывном отображении компактен, а компактное множество хаусдорфова пространства замкнуто. Поэтому $f(N)$ замкнуто и f — замкнутое отображение. $\square$

Следствие 4.1.9. Подмножество U пространства X открыто тогда и только тогда, когда выполняется равенство (14).

Лемма 4.1.10. Для любого первичного идеала P полукольца сечений компактного пучка выполняется $J_{f(P)} \subseteq 0_P$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in J_{f(P)} = J_x$. Тогда $\varphi(x) = 0$. Ввиду Γ -регулярности найдётся сечение $\psi \in \Gamma$, такое что $\psi(x) = 1$ и $\psi|_{\text{supp } \varphi} = 0$. Поскольку $z(\varphi) \cup z(\psi) = X$, то $\varphi\Gamma\psi = 0$. По лемме 4.1.5 $\psi \notin P$, и поэтому $\varphi \in 0_P$. $\square$

Полное описание строения идеалов J_x компактного пучка даёт следующая лемма.

Лемма 4.1.11. Для компактного пучка (Π, X) выполняется

$$J_x = \bigcap \{0_P : f(P) = x\} = \bigcap \{0_{M_x} : M \in \text{Max } \Pi_x\}$$

для любой точки $x \in X$.

Доказательство. Включения

$$J_x \subseteq \bigcap \{0_P : f(P) = x\} \subseteq \bigcap \{0_{M_x} : M \in \text{Max } \Pi_x\}$$

справедливы на основании леммы 4.1.11 и импликации $P \subseteq M \implies 0_M \subseteq 0_P$ для первичных идеалов P, M .

Пусть $\alpha \in \bigcap \{0_{M_x} : M \in \text{Max } \Pi_x\}$. Тогда для любого M_x найдётся сечение $\beta \notin M_x$, такое что $\alpha\Gamma\beta = 0$. Получаем, что $\alpha(x)\Pi_x\beta(x) = 0$ и $\beta(x) \notin M$, следовательно, $\alpha(x) \in 0_M$ для любого $M \in \text{Max } \Pi_x$. Последнее означает, что аннулятор $\text{Ann } \alpha(x)\Pi_x$ не лежит ни в одном максимальном идеале слоя Π_x и поэтому совпадает с Π_x . Но тогда $\alpha(x) = 0$. $\square$

Ограничив f на $\text{Max } \Gamma$, получим замкнутое непрерывное отображение

$$g : \text{Max } \Gamma \rightarrow X, \quad g(M_x) = x.$$

В терминах отображений f и g дадим следующую характеристику компактности пучка.

Теорема 4.1.12. Для пучка (Π, X) полуколец равносильны следующие свойства:

- 1) (Π, X) — компактный пучок;

- 2) отображение $f: \text{Спец } \Gamma \rightarrow X$, при котором $f(P) = x$ как только $J_x \subseteq P$, непрерывно и сюръективно;
 3) отображение $g: \text{Мак } \Gamma \rightarrow X$, $g(M_x) = x$, непрерывно и сюръективно.

Доказательство. Импликация 1) $\implies$ 2) справедлива по лемме 4.1.8.

Докажем импликацию 2) $\implies$ 1). Пусть f — непрерывное отображение $\text{Спец } \Gamma$ на X . Тогда для любых $x \neq y$ из X выполняется $J_x + J_y = \Gamma$, поскольку $J_x + J_y$ не лежит ни в одном максимальном идеале полукольца Γ по предложению 4.1.6. Отсюда вытекает Γ -отделимость пучка и, следовательно, хаусдорфовость X . Непрерывность f влечёт компактность $X = f(\text{Спец } \Gamma)$.

Аналогично доказывается эквивалентность свойств 1) и 3). $\square$

4.2. Полнота пучковых представлений

Вопрос о точности какого-либо пучкового представления, как правило, не вызывает затруднений, чего нельзя сказать о вопросе о полноте. Задача этого раздела — исследование условий полноты представлений полуколец. Дадим краткое изложение этих идей.

Известно, что любое пучковое представление можно ограничить до *факторного*, т. е. представления в пучке фактор-алгебр. Пусть имеется произвольное факторное представление α кольца R сечениями некоторого пучка на пространстве X . Тогда каждому открытому подмножеству из X соответствует некоторое фактор-кольцо R/J , а значит, и некоторый идеал J кольца R . В случае когда α — полное представление, такое соответствие между открытыми подмножествами и идеалами обладает определёнными свойствами.

Если же заданы произвольные кольцо R и пространство X , то любое отображение f решётки τX открытых подмножеств пространства X в решётку $\text{Id } R$ идеалов кольца R индуцирует некоторое соответствие между τX и множеством фактор-колец кольца R . Возникает вопрос: когда это соответствие задаёт пучок и какими свойствами должно обладать f , чтобы представление кольца R сечениями пучка было полным? Г. Симмонс предлагает два подхода к решению этого вопроса. Первый осуществляется с помощью построения семейства открытых идеалов, а второй — заданием сопряжения между решётками $\text{Id } R$ и τX [103, теоремы 3.1 и 3.3].

В случае представления полуколец мы делаем следующее. Во-первых, исходя из отображения $g: \text{Id } S \rightarrow \tau X$, задаём открытое семейство конгруэнций на полукольце S , которое позволяет построить требуемый пучок. В теореме 4.2.4 выясняются условия на g , необходимые для полноты полученного представления полукольца S . Во втором подходе за исходное берётся соответствие между решёткой всех открытых множеств топологического пространства и решёткой всех конгруэнций полукольца S (теорема 4.2.5).

Рассмотрим конструкцию, позволяющую от произвольного семейства конгруэнций $(\bar{\rho}_x)$ перейти к открытому семейству, индексированному точками того

же топологического пространства X . Для этого положим для любого открытого $U \subseteq X$

$$\rho_U = \bigcap \{\bar{\rho}_x : x \in U\}, \quad (15)$$

$$\rho_x = \bigcup \{\rho_U : U \ni x\}, \quad (16)$$

где $\bigcap$ и $\bigcup$ — теоретико-множественные пересечение и объединение конгруэнций. Очевидно, что $\rho_U \subseteq \rho_x \subseteq \bar{\rho}_x$ для любых $x \in U$ и пересечение всех ρ_x совпадает с пересечением всех $\bar{\rho}_x$.

Лемма 4.2.1. Для произвольного семейства конгруэнций $(\bar{\rho}_x)$, $x \in X$, формулы (15), (16) определяют открытое семейство конгруэнций (ρ_x) , $x \in X$.

Доказательство. Пусть $a \rho_x b$, $b \rho_x c$ для произвольных $a, b, c \in S$ и $x \in X$, что означает, что $a \rho_U b$ и $b \rho_V c$ для некоторых открытых $U, V \subseteq X$, содержащих x . Тогда для любого $y \in U \cap V$ $a \bar{\rho}_y b$ и $b \bar{\rho}_y c$, а значит, $a \bar{\rho}_y c$. Получаем, что $a \rho_{U \cap V} c$ и, поскольку $x \in U \cap V$, $a \rho_x c$. Рефлексивность и симметричность ρ_x очевидны, значит, ρ_x — отношение эквивалентности. Если к тому же $a' \rho_x b'$, то $a' \rho_W b'$ для некоторого открытого $W \ni x$ и $a \bar{\rho}_y b$, $a' \bar{\rho}_y b'$ для каждого $y \in U \cap W$. Тогда получаем, повторив рассуждения доказательства транзитивности, что $(a + a') \rho_x (b + b')$ и $(aa') \rho_x (bb')$. Осталось показать, что (ρ_x) , $x \in X$, открыто. Если $x \in V(a, b) = \{y \in X : a \rho_y b\}$, то $a \rho_x b$, и следовательно, $a \rho_U b$ для некоторого открытого $U \subseteq X$. Из этого вытекает, что $a \rho_y b$ для всех $y \in U$, значит, $U \subseteq V(a, b)$. Получили, что $V(a, b)$ вместе с любой своей точкой содержит и некоторую её открытую окрестность, поэтому $V(a, b)$ открыто. $\square$

Лемма 4.2.2. Если $(\bar{\rho}_x)$, $x \in X$, — открытое семейство конгруэнций и (ρ_x) , $x \in X$, — семейство, определённое формулами (15), (16), то $\bar{\rho}_x = \rho_x$ для любого $x \in X$.

Доказательство. Достаточно показать, что $\bar{\rho}_x \subseteq \rho_x$ для каждого $x \in X$. Пусть $a \bar{\rho}_x b$. Тогда ввиду открытости семейства $(\bar{\rho}_x)$ получаем, что $a \rho_U b$ для некоторого открытого множества $U \ni x$ и, следовательно, $a \rho_x b$. $\square$

Пусть S — произвольное полукольцо и $\text{Id } S$ — решётка всех его (двусторонних) идеалов относительно включения. Обозначим через τX решётку всех открытых подмножеств топологического пространства X и рассмотрим произвольное отображение

$$g: \text{Id } S \rightarrow \tau X,$$

сохраняющее конечные пересечения: $g(A \cap B) = g(A) \cap g(B)$.

Определим на S следующее отношение:

$$a \gamma_x b \iff x \in g((a, b)^*), \quad (17)$$

где $(a, b)^*$ — уравниватель элементов a и b .

Лемма 4.2.3. Отношение γ_x является конгруэнцией на S для любого $x \in X$, а семейство (γ_x) , $x \in X$, открыто.

Доказательство. Покажем транзитивность отношения γ_x . Пусть $a \gamma_x b$ и $b \gamma_x c$. Тогда

$$x \in g((a, b)^*) \cap g((b, c)^*) = g((a, b)^* \cap (b, c)^*) \subseteq g((a, c)^*).$$

Последнее включение справедливо благодаря изотонности g и тому, что $(a, b)^* \cap (b, c)^* \subseteq (a, c)^*$ для любых $a, b, c \in S$. Рефлексивность и симметричность γ_x очевидны. Несложно убедиться в справедливости соотношения

$$(a, b)^* \cap (a', b')^* \subseteq (a + a', b + b')^* \cap (aa', bb')^*.$$

С помощью (17) из $a \gamma_x b$ и $a' \gamma_x b'$ выводим, что $(a + a') \gamma_x (b + b')$ и $(aa') \gamma_x (bb')$. Открытость семейства (γ_x) следует из открытости множества $g((a, b)^*)$ для любых $a, b \in S$. $\square$

Последняя лемма показывает, что произвольно взятое отображение

$$g: \text{Id } S \rightarrow \tau X,$$

сохраняющее конечные пересечения, и введённые конгруэнции γ_x определяют пучок фактор-полуколец $P_g = \bigcup S/\gamma_x$ на X . Обозначим через $\Gamma(P_g)$ полукольцо всех глобальных сечений пучка P_g с поточечно определёнными операциями. Представление $\alpha_g: S \rightarrow \Gamma(P_g)$ полукольца S сечениями пучка P_g — это гомоморфизм, при котором $\alpha_g(s) = \hat{s} \in \Gamma(P_g)$, где $\hat{s}(x)$ — класс элемента $s \in S$ в полукольце S/γ_x .

Предположим, что задано отображение

$$f: \tau X \rightarrow \text{Id } S.$$

Определение. Скажем, что отображение f сохраняет покрытия, если $\sum_i f(U_i) = S$ для каждого открытого покрытия (U_i) пространства X .

Теорема 4.2.4. Пусть для произвольных полукольца S и топологического пространства X заданы отображения $g: \text{Id } S \rightarrow \tau X$ и $f: \tau X \rightarrow \text{Id } S$, причём f и g сохраняют конечные пересечения, f сохраняет покрытия и для любых $a, b \in S$ и $U \in \tau X$ справедлива эквивалентность

$$f(U) \subseteq (a, b)^* \iff U \subseteq g((a, b)^*). \quad (18)$$

Тогда функциональное представление α_g полукольца S полно.

Доказательство. Пусть $\sigma \in \Gamma(P_g)$ — произвольное глобальное сечение пучка P_g . Ввиду факторности представления α_g для каждой точки $x \in X$ найдётся такой элемент $a_x \in S$, что $\sigma(x) = \hat{a}_x(x) \in S/\gamma_x$. Но тогда сечения σ и $\hat{a}_x$ совпадают и на некоторой открытой окрестности U_x точки x . Открытые окрестности U_x покрывают всё пространство X , значит, идеалы $f(U_x)$ дают в сумме всё полукольцо S . Следовательно, найдутся такие открытые в X подмножества $U_1, \dots, U_n \in (U_x)$ и элементы $e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_n \in S$, что $e_1 + \dots + e_n = 1$, $e_i \in f(U_i)$ и $\sigma = \hat{a}_i$ на U_i для любого $i = 1, \dots, n$. Положим $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$ и покажем, что $\sigma = \hat{a}$.

Зафиксируем $x \in X$ и возьмём произвольно $k \in \{1, \dots, n\}$. Найдутся такие $b \in S$ и открытое в X множество $U \ni x$, что $\sigma = \hat{b}$ на U . Тогда $\hat{a}_k = \hat{b}$ на $U \cap U_k$, т. е. по (17) $U \cap U_k \subseteq g((a_k, b)^*)$. Тогда согласно (18) $f(U \cap U_k) \subseteq (a_k, b)^*$, откуда следует, что $f(U) \cap f(U_k) \subseteq (a_k, b)^*$. Если $c \in f(U)$, то для любого $s \in S$ имеем $e_k s c \in f(U) \cap f(U_k)$, и значит, $a_k e_k s c = b e_k s c$. Суммируя по k , получаем, что $a s c = b s c$ для каждого $s \in S$. Следовательно, $c \in (a, b)^*$, и тогда $f(U) \subseteq (a, b)^*$. Снова применив (18), получаем, что $U \subseteq g((a, b)^*)$, и с учётом (17) заключаем, что $\sigma(x) = \hat{b}(x) = \hat{a}(x)$, что завершает доказательство. $\square$

Обозначим через $\text{Con } S$ решётку всех конгруэнций полукольца S . Пусть $f: \tau X \rightarrow \text{Con } S$ — произвольное изотонное отображение. Для каждой точки $x \in X$ положим

$$\bar{\rho}_x = f(X \setminus \bar{x}). \quad (19)$$

Открытое семейство конгруэнций (ρ_x) , $x \in X$, соответствующее семейству $(\bar{\rho}_x)$, $x \in X$, определяет пучок фактор-полуколец $P_f = \bigcup S/\rho_x$ на пространстве X . Пусть β_f — соответствующее представление полукольца S глобальными сечениями этого пучка.

Обозначим через $\text{Ker } \rho$ класс нуля конгруэнции ρ .

Определение. Скажем, что отображение $f: \tau X \rightarrow \text{Con } S$ *сильно сохраняет покрытия*, если для любого открытого покрытия (U_i) пространства X выполняется $\sum_i \text{Ker } f(U_i) = S$.

Если $f: \tau X \rightarrow \text{Con } S$ сильно сохраняет покрытия, то $z \circ f: \tau X \rightarrow \text{Id } S$ сохраняет покрытия. Напомним, что для любых конгруэнций $\rho \subseteq \delta$ полукольца S (в общем случае — универсальной алгебры) конгруэнция ρ/δ на полукольце S/δ определяется следующим образом:

$$\bar{a} \delta / \rho \bar{b} \iff a \delta b.$$

Теорема 4.2.5. Если изотонное отображение $f: \tau X \rightarrow \text{Con } S$ сильно сохраняет покрытия, то пучковое представление β_f полукольца S полно.

Доказательство. Пусть σ — произвольное глобальное сечение пучка P_f . В каждой точке $x \in X$ сечение σ совпадает с некоторым сечением $\hat{a}_x$, где $a_x \in S$, и следовательно, σ совпадает с $\hat{a}_x$ на некоторой открытой окрестности U_x точки x . Множества U_x покрывают X , поэтому по условию теоремы $\sum_{x \in X} \text{Ker } f(U_x) = S$. Следовательно, найдутся такие открытые окрестности $U_1, \dots, U_n \in (U_x)$ и элементы $a_1, \dots, a_n, e_1, \dots, e_n \in S$, что $e_i \in \text{Ker } f(U_i)$, $e_1 + \dots + e_n = 1$ и $\sigma = \hat{a}_i$ на U_i для любого $i = 1, \dots, n$. Зафиксируем произвольную точку $x \in X$. Если x не принадлежит U_i , то $f(U_i) \subseteq f(X \setminus \bar{x}) = \bar{\rho}_x$, так как $U_i \subseteq X \setminus \bar{x}$. Тогда $e_i \in \text{Ker } \bar{\rho}_x$, откуда получаем, что

$$\sigma(x) \hat{e}_i(x) (\bar{\rho}_x / \rho_x) \hat{a}_i(x) \hat{e}_i(x). \quad (20)$$

Последнее соотношение верно и в случае, если $x \in U_i$, поскольку тогда $\sigma(x) = \hat{a}_i(x)$. Положим $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$. Просуммировав (20) по $i = 1, \dots, n$,

получим, что $\sigma(x) (\bar{\rho}_x/\rho_x) \hat{a}(x)$. Сечение σ совпадает с некоторым сечением $\hat{b}$, $b \in S$, на подходящем открытом множестве $U \ni x$. Поскольку отношение $\hat{b}(y) (\bar{\rho}_y/\rho_y) \hat{a}(y)$ выполняется для всех $y \in U$, то $b \bar{\rho}_y a$ при $y \in U$. Тогда $b \rho_U a$ и $b \rho_x a$. Значит, $\hat{a}(x) = \hat{b}(x) = \sigma(x)$ для произвольно выбранной точки x , что доказывает полноту β_f . $\square$

Теорема 4.2.6. Пусть f — представление полукольца S сечениями пучка (P, X) , индуцированное открытым семейством конгруэнций (α_x) , $x \in X$. Если X компактно и отображение $\varphi: \tau X \rightarrow \text{Id } S$, заданное правилом

$$\varphi(U) = \bigcap \{\text{Ker } \alpha_x: x \in X \setminus U\}$$

для всякого $U \in \tau X$, сохраняет покрытия, то представление f полно.

Доказательство. Пусть σ — произвольное глобальное сечение пучка (P, X) . Ввиду факторности представления для каждой точки $x \in X$ найдётся элемент $a_x \in S$, такой что $\sigma(x) = \hat{a}_x(x)$ и сечения σ и $\hat{a}_x$ совпадают на некотором открытом множестве U_x . Из открытого покрытия (U_x) , $x \in X$, компактного пространства X выберем конечное подпокрытие $\{U_1, \dots, U_k\}$ и соответствующие элементы $a_1, \dots, a_k \in S$. Тогда $\sigma = \hat{a}_i$ на U_i для каждого $i = 1, \dots, k$. Кроме того, $\sum_{i=1}^k \varphi(U_i) = S$, поэтому $s_1 + \dots + s_k = 1$ для подходящих элементов $s_i \in \bigcap \{\text{Ker } \alpha_x: x \notin U_i\}$. Положим

$$a = a_1 s_1 + \dots + a_k s_k \in S.$$

Для произвольных точки $x \in X$ и индекса $i = 1, \dots, k$ возможны два варианта: $x \in U_i$ или $x \notin U_i$. В первом случае из-за совпадения σ и $\hat{a}_i$ на U_i получаем

$$\sigma(x) \hat{s}_i(x) = \hat{a}_i(x) \hat{s}_i(x). \quad (21)$$

Во втором случае $\varphi(U_i) \subseteq \text{Ker } \alpha_x$, поэтому $\hat{s}_i(x) = \hat{0}(x)$ и снова выполняется равенство (21). Получили, что (21) верно для любого $x \in X$ и любого индекса i . Просуммируем равенства по i и получим

$$\sigma(\hat{s}_1 + \dots + \hat{s}_k)(x) = (\hat{a}_1 \hat{s}_1 + \dots + \hat{a}_k \hat{s}_k)(x).$$

Тогда $\sigma(x) = \hat{a}(x)$ для произвольной точки $x \in X$. Таким образом, любое глобальное сечение пучка является образом некоторого элемента полукольца S при представлении f , что означает полноту f . Теорема доказана. $\square$

Рассмотрим применение трёх доказанных теорем для полуколец некоторых конкретных классов.

Пусть X — подпространство $\text{Spec } S$, содержащее подпространство $\text{Max } S$ всех максимальных идеалов. Рассмотрим отображение $d: \text{Id } S \rightarrow \tau X$, при котором каждому идеалу I полукольца S ставится в соответствие множество $D(I)$.

Лемма 4.2.7. Отображение d сохраняет конечные пересечения.

Доказательство. Поскольку $AB \subseteq A \cap B$ для любых $A, B \in \text{Id } S$, то $D(A) \cap D(B) = D(AB) \subseteq D(A \cap B)$. Если $P \in D(A \cap B)$, то найдётся элемент $a \in (A \cap B) \setminus P$. Ввиду первичности P для некоторого $s \in S$ получим $asa \in AB \setminus P$, что означает, что $P \in D(AB) = D(A) \cap D(B)$. Замена d на D даёт требуемый результат. $\square$

Как и прежде, через $\sqrt{I}$ обозначается пересечение всех первичных идеалов из X , содержащих идеал I .

Пусть $f: \tau X \rightarrow \text{Id } S$ — отображение, при котором $f(U) = \bigcap \{P \in X: P \not\subseteq U\}$ для произвольного $U \in \tau X$. Поскольку открытое множество U имеет вид $D(I)$ для некоторого идеала I , то $f(U) = \sqrt{I}$.

Лемма 4.2.8. *Отображение f сохраняет покрытия и конечные пересечения.*

Доказательство. Пусть $U, V \in \tau(X)$. Тогда

$$\begin{aligned} f(U \cap V) &= \bigcap \{P: P \in X \setminus (U \cap V)\} = \\ &= \left(\bigcap \{P: P \in X \setminus U\} \right) \cap \left(\bigcap \{P: P \in X \setminus V\} \right) = f(U) \cap f(V), \end{aligned}$$

т. е. f сохраняет конечные пересечения.

Пусть (U_i) — открытое покрытие пространства X . Каждое U_i имеет вид $D(I_i)$ для подходящего $I_i \in \text{Id } S$, поэтому

$$X = \bigcup_i U_i = D\left(\sum_i I_i\right).$$

По условию $\text{Max } S \subseteq X$, поэтому ни один максимальный идеал не содержит идеал $\sum_i I_i$, следовательно, последний совпадает со всем полукольцом S . Таким образом,

$$S = \sum_i I_i \subseteq \sum_i \sqrt{I_i} = \sum_i f(U_i),$$

и f сохраняет покрытия. $\square$

Пусть S — строго полупервичное полукольцо и $X = \text{Spec } S$. Если для произвольных $a, b \in S$, $U \in \tau X$ выполнено $U \subseteq d((a, b)^*)$, то ввиду изотонности f и определения строгой полупервичности

$$f(U) \subseteq f\left(d((a, b)^*)\right) = \sqrt{(a, b)^*} = (a, b)^*.$$

Таким образом, справедлива импликация

$$U \subseteq d((a, b)^*) \implies f(U) \subseteq (a, b)^*.$$

Поскольку отображение d изотонно и $d(f(U)) = U$, то верна и обратная импликация.

Получили, что в случае строгой полупервичности полукольца S все условия теоремы 4.2.4 выполнены и мы имеем полное представление α_d полукольца S .

Соответствующий пучок $L(\alpha_d)$ на $\text{Spec } S$ будет иметь слоями фактор-полукольца S/γ_P , где для любого $P \in \text{Spec } S$ конгруэнция γ_P задаётся следующим образом:

$$a \gamma_P b \iff (a, b)^* \not\subseteq P. \quad (22)$$

Если $a \gamma_P b$ для каждого $P \in \text{Spec } S$, то $(a, b)^*$ не лежит ни в одном первичном идеале и, следовательно, совпадает с полукольцом S . Но тогда $a = b$, и представление α_d точное. Конгруэнции γ_P очевидным образом совпадают с конгруэнциями θ_P , индуцирующими представление Ламбека. Таким образом, нами получено ещё одно доказательство изоморфности ламбековского представления для строго полупервичного полукольца.

Рассмотрим ситуацию, когда S — строго гармоническое полукольцо.

Положим $X = \text{Max } S$ и для каждого $M \in \text{Max } S$ рассмотрим конгруэнцию (22). Пусть отображение $h: \tau X \rightarrow \text{Con } S$ задано следующим образом:

$$h(U) = \bigcap \{\gamma_M: M \in \text{Max } S \setminus U\}.$$

Лемма 4.2.9. Для произвольного строго гармонического полукольца S отображение h изотонно и сильно сохраняет покрытия.

Доказательство. Пусть $D(A) \subseteq D(B)$ для идеалов A и B полукольца S . Тогда для любого $M \in \text{Max } S$ из того, что $B \subseteq M$, следует, что $A \subseteq M$, откуда вытекает изотонность h .

Пусть $D(I_i)$ покрывают $\text{Max } S$, причём ввиду компактности $\text{Max } S$ будем считать множество идеалов I_i конечным. Предположим, что идеал $\sum_{i=1}^k \text{Ker } H(D(I_i))$ содержится в некотором максимальном идеале M . Среди идеалов I_i , $i = 1, \dots, k$, найдётся некоторый I_j , не лежащий в M . Множество T всех максимальных идеалов, содержащих I_j , замкнуто в $\text{Max } S$. Для каждого $N \in T$ существуют такие элементы $a_N \notin N$ и $b_N \notin M$, что $a_N S b_N = 0$. Из открытого покрытия $D(S a_N S)$, $N \in T$, множества T можно выбрать конечное подпокрытие, значит, найдутся элементы $a_1, \dots, a_n \in \{a_N\}$ и $b_1, \dots, b_n \notin M$, для которых $a_i S b_i = 0$. Поскольку M первичен, то найдётся элемент $b \in (S b_1 S) \dots (S b_n S) \setminus M$, причём $a_i S b = 0$ для всех $i = 1, \dots, n$. Тогда для любого $N \in T$ выполняется $(0, b)^* \not\subseteq N$, откуда следует, что $b \in \text{Ker } \gamma_N$. Следовательно, $b \in \text{Ker } h(D(I_j))$. Значит, предположение, что $\sum_{i=1}^k \text{Ker } h(D(I_i)) \subseteq M$, было неверным и h сильно сохраняет покрытия. $\square$

Доказанная лемма и теорема 4.2.5 позволяют сделать вывод о полноте представления β_h строго гармонического полукольца сечениями пучка $L(\beta_h)$ на $\text{Max } S$. Рассуждения, подобные приведённым после леммы 4.2.8, годятся для доказательства точности этого представления. Каждая точка из $\text{Max } S$ замкнута, а семейство конгруэнций (γ_M) открыто, поэтому слоями пучка $L(\beta_h)$ служат фактор-полукольца S/γ_M (лемма 4.2.2).

Пучки $L(\alpha_d)$ и $L(\beta_h)$ являются аналогами ламбековских пучков колец. Таким образом, из теорем 4.2.4 и 4.2.5 вытекает следующая теорема.

Теорема 4.2.10. Полукольцо S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений пучка Ламбека $(\mathbf{L}(S), X)$ в каждом из следующих случаев:

- 1) S строго полупервичное и $X = \text{Spec } S$;
- 2) S строго гармоническое и $X = \text{Max } S$.

Пусть S — произвольное полукольцо и X — максимальный спектр $\text{Max } BS$ булева кольца BS дополняемых идемпотентов полукольца S . По предложению 2.1.4 $\text{Max } BS$ — нульмерный компакт с открытыми подмножествами $D(I) = \{M \in \text{Max } BS : I \not\subseteq M\}$, где I — идеал кольца BS . Зададим отображение $g: \text{Id } S \rightarrow \tau X$, при котором $g(A) = D(A \cap BS)$. Поскольку для идеалов A, B полукольца S из того, что $A \subseteq B$, следует $A \cap BS \subseteq B \cap BS$, то по лемме 4.2.7 G сохраняет конечные пересечения.

Отображение $e: \tau X \rightarrow \text{Id } S$, такое что $e(D(I)) = IS$ для любого идеала I из BS , также сохраняет конечные пересечения. Действительно, для произвольных $I, J \in \text{Id } BS$ справедливы равенства

$$e(D(I) \cap D(J)) = e(D(I \cap J)) = (I \cap J)S = IS \cap JS = e(D(I)) \cap e(D(J)).$$

Наконец, если множества $D(J_i)$ покрывают $\text{Max } BS$, то сумма идеалов J_i из BS содержит 1, а значит, и сумма идеалов $J_i S$ полукольца S содержит 1. Это доказывает, что e сохраняет покрытия. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 4.2.11. Отображение g сохраняет конечные пересечения; отображение e сохраняет конечные пересечения и покрытия.

Осталось показать справедливость свойства (18) теоремы 4.2.4 для отображений g и e .

Лемма 4.2.12. Для любых $a, b \in S$ включение $e(D(J)) \subseteq (a, b)^*$ равносильно включению $D(J) \subseteq g((a, b)^*)$.

Доказательство. Если $e(D(J)) \subseteq (a, b)^*$, то $JS \subseteq (a, b)^*$, и ввиду изотонности g получаем, что $D(J) = g(JS) \subseteq g((a, b)^*)$. Обратно, пусть $D(J) \subseteq g((a, b)^*) = D((a, b)^* \cap BS)$. Поскольку e изотонно, получаем, что

$$e(D(J)) \subseteq e(D((a, b)^* \cap BS)) \subseteq ((a, b)^* \cap BS)S \subseteq (a, b)^*. \quad \square$$

Итак, установлено, что все условия теоремы 4.2.4 выполнены, и мы имеем полное представление α_g произвольного полукольца. Слоями полученного при этом пучка являются фактор-полукольца S/θ_M для каждого $M \in \text{Max } BS$. Легко убедиться, что конгруэнция θ_M задаётся следующим образом:

$$a \theta_M b \iff ae^\perp = be^\perp \quad (23)$$

для некоторого $e \in M$. Полученный пучок представляет пирсовский пучок полуколец — аналог известной кольцевой конструкции [98].

Покажем, что $\bigcap \{\theta_M : M \in \text{Max } BS\}$ является отношением равенства. Пусть $a \theta_M b$ для каждого $M \in \text{Max } BS$. Предположим, что идеал $T = \{e \in BS :$

$ae = be\}$ лежит в некотором $N \in \text{Max } BS$. Поскольку $af = bf$ для некоторого $f^\perp \in N$, то $f \in T \subseteq N$. Но тогда $f \oplus f^\perp = 1 \in N$, что противоречит тому, что идеал N собственный. Значит, $T = BS$, откуда получаем, что $1 \in T$ и $a = b$.

Таким образом, представление α_g является полным и справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2.13. *Пирсовское представление произвольного полукольца является изоморфным.*

Последний результат также можно получить, исходя из конструкций теоремы 4.2.5, если в качестве отображения $h: \tau X \rightarrow \text{Con } S$ взять отображение, при котором каждому $U \in \tau \text{Max } BS$ соответствует конгруэнция $\bigcap \{\theta_M: M \notin U\}$, где θ_M — конгруэнция (23).

В заключение раздела покажем возможность применения теоремы 4.2.6.

Для любого подмножества $A \subseteq \text{Max } S$

$$0_A = \bigcap \{0_M: I \subseteq M\} -$$

двусторонний идеал полукольца S . Для произвольного идеала I из S

$$Z(I) = \{M \in \text{Max } S: I \subseteq M\} -$$

замкнутое подмножество максимального спектра.

Рассмотрим отображение

$$\varphi: \tau \text{Max } S \rightarrow \text{Id } S, \quad \varphi(D(I)) = 0_{Z(I)}.$$

В случае когда S — строго гармоническое полукольцо, отображение φ сохраняет покрытия. Действительно, пусть выполняется соотношение $\bigcup_i D(I_i) = \text{Max } S$. Тогда $\sum_i \varphi(D(I_i)) = \sum_i 0_{Z(I_i)}$. По лемме 3.2.5

$$\sum_i 0_{Z(I_i)} = 0_{Z(\sum_i I_i)},$$

и так как $\sum_i I_i = S$ и $Z(S) = \text{Max } S \setminus D(S) = \emptyset$, то $0_{Z(S)} = S$, как пересечение пустого множества идеалов полукольца S . Получили, что $\sum_i \varphi(D(I_i)) = S$, и φ сохраняет покрытия. Известно, что $\text{Max } S$ — компактное пространство, поэтому для того чтобы воспользоваться теоремой 4.2.6, необходимо некоторое открытое семейство конгруэнций, индексированных максимальными идеалами полукольца S , ядра которых — в точности идеалы 0_M , $M \in \text{Max } S$. Укажем два типа таких конгруэнций:

$$a \theta_M b \iff \text{найдётся } c \in S \setminus M, \text{ такой что } asc = bsc \text{ для любых } s \in S;$$

$$a \theta(M) b \iff a + u = b + v \text{ для некоторых } u, v \in 0_M.$$

Семейство конгруэнций (θ_M) , $M \in \text{Max } S$, индуцирует представление Ламбека, а семейство $(\theta(M))$, $M \in \text{Max } S$, отношений Бёрна по идеалам 0_M задаёт представление, аналогичное представлению Корниша [65] для ограниченных

дистрибутивных решёток. Оба указанных представления будут полными по теореме 4.2.6 для строго гармонических полуколец. Стандартно проверяется их точность. Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 4.2.14. Пусть S — строго гармоническое полукольцо, (α_M) , $M \in \text{Max } S$, — открытое семейство конгруэнций, таких что $\text{Ker } \alpha_M = 0_M$ для любого $M \in \text{Max } S$. Тогда представление полукольца S сечениями пучка $(\dot{\bigcup} S/\alpha_M, \text{Max } S)$ полно. В частности, полными будут представления Ламбека и Корниша для произвольного строго гармонического полукольца.

Замечание. Ясно, что $\text{Ker } \theta_P = 0_P$ для любого первичного идеала произвольного полукольца. Поскольку ламбековское представление строго гармонического полукольца является компактным, то по лемме 4.1.3 его слои фактически совпадают с соответствующими слоями пучка Корниша. Отсюда вытекает совпадение конгруэнций θ_M и $\theta(M)$ для любого $M \in \text{Max } S$.

Возникает следующий вопрос: будут ли совпадать конгруэнции строго гармонического полукольца, если их ядра будут равны между собой и равны идеалу 0_M для произвольного $M \in \text{Max } S$?

С пучковой точки зрения для двух открытых систем конгруэнций (α_M) , $M \in \text{Max } S$, и (β_M) , $M \in \text{Max } S$, для любого $M \in \text{Max } S$ из $\text{Ker } \alpha_M = \text{Ker } \beta_M = 0_M$ следует, что $\alpha_M = \beta_M$, тогда и только тогда, когда представления, индуцируемые этими системами, точны.

4.3. Теорема Стоуна—Вейерштрасса для пучков

В этом разделе мы рассматриваем две теоремы, являющиеся некими аналогами классической теоремы Стоуна—Вейерштрасса о подалгебре банаховой алгебры непрерывных функций.

Пусть S — подполукольцо полукольца всех глобальных сечений пучка (Π, X) . Введём обозначение $O_x = \{s \in S: s(x) = 0\}$ для любой точки $x \in X$.

Теорема 4.3.1. Пусть Π — пучок полуколец над компактным пространством X , S — факторное подполукольцо полукольца $\Gamma = \Gamma(\Pi, X)$ и $O_x + O_y = S$ для любых различных $x, y \in X$. Тогда (Π, X) — компактный пучок и $S = \Gamma$.

Оставим этот результат без доказательства, поскольку оно основывается на приёме разбиения единицы, подробно описанном при доказательстве импликации 7) $\implies$ 6) теоремы 4.1.1. Кроме того, доказательство аналогично доказательству полумодульного варианта теоремы, рассматриваемой ниже.

Несколько искусственным, на первый взгляд, выглядит в полумодульном варианте условие 2). Однако применение этой теоремы для конкретных полумодулей, как будет продемонстрировано ниже, показывает, что обнуление слоя Π_x влечёт и обнуление слоёв из окрестности точки x . Причина кроется в задании топологии на базисном пространстве, являющемся спектром полукольца. Отметим ещё, что в доказательстве варьируется приём разбиения единицы, которая

является элементом полукольца скаляров и вообще-то не является сечением пучка.

Теорема 4.3.2. Пусть $\Pi = \bigcup \Pi_x$, $x \in X$, — пучок S -полумодулей над компактным пространством X , M_S — факторный подполумодуль полумодуля $\Gamma(\Pi)$ и (J_x) — семейство идеалов полукольца S , индексированных точками пространства X , такие что выполняются следующие условия:

- 1) $J_x + J_y = S$ для любых различных $x, y \in X$;
- 2) для любого $r \in J_x$ найдётся такая открытая окрестность U_x точки x , что для любого $y \in U_x$ выполняется $\Pi_y r = 0(y)$.

Тогда $M_S = \Gamma(\Pi)$.

Доказательство. Пусть σ — произвольное глобальное сечение пучка (Π, X) . Поскольку полумодуль M факторный, для каждой точки $x \in X$ найдётся глобальное сечение $\alpha_x \in M$, совпадающее в точке x с σ . Следовательно, $\alpha_x = \sigma$ на некоторой открытой окрестности U_x точки x . Поскольку X компактно, то из семейства $\{U_x : x \in X\}$ выберем конечное подпокрытие $U_1, \dots, U_k$ пространства X и соответствующие сечения $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in M$, при этом получим $\sigma = \alpha_j$ на U_j . Обозначим $T = \{U_1, \dots, U_k\}$.

Зафиксируем произвольную точку $x \in X$ и множество $U_i \in T$, содержащее x . Для любой точки $y \in X \setminus U_i$ выполняется $J_x + J_y = S$, и следовательно, $u_y + v_y = 1$ для подходящих $u_y \in J_x$, $v_y \in J_y$. Элемент v_y обнуляет слой P_t , где t лежит в некоторой окрестности V_y точки y . Семейство множеств $\{V_y : y \in X \setminus U_i\}$ покрывает $X \setminus U_i$. Воспользовавшись компактностью X , выберем подпокрытие $V_1, \dots, V_s$ и соответствующие элементы $v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_s \in S$. Имеем

$$1 = (u_1 + v_1) \cdot \dots \cdot (u_s + v_s) = b_x + c_x,$$

где $c_x = v_1 \cdot \dots \cdot v_s$, а b_x — сумма остальных элементов после раскрытия скобок. Таким образом, для каждой точки $x \in X$ нашлись открытая окрестность U_i и $b_x, c_x \in S$, такие что

$$b_x + c_x = 1, \quad \sigma(x)b_x = 0(x), \quad \sigma(y)c_x = 0(y)$$

для каждой точки $y \in X \setminus U_i$. Первые два равенства очевидны, покажем справедливость третьего. Пусть $y \in X \setminus U_i$. Тогда y попадает в некоторую окрестность V_j и слой Π_y обнуляется элементом v_j . Если $j \neq 1$, то получаем, что

$$\sigma(y)c_x = (\sigma(y)v_1 \cdots v_{j-1})v_j \cdots v_s = 0v_{j+1} \cdots v_s = 0,$$

поскольку $\sigma(y)v_1 \cdots v_{j-1} \in \Pi_y$. При $j = 1$ соотношение очевидно.

Из открытого покрытия $\{z(\sigma b_x) : x \in X\}$ пространства X (где $z(\beta) = \{x \in X : \beta(x) = 0\}$ — нуль-множество сечения β) выберем конечное подпокрытие $z(\sigma b_1), \dots, z(\sigma b_n)$. Пусть $c_1, \dots, c_n$ — соответствующие элементы для $b_1, \dots, b_n$. Поскольку $z(\sigma c_x)$ содержит $X \setminus U_i$ для некоторого $i \in \{1, \dots, n\}$, то каждый носитель $\text{supp } \sigma c_i$ лежит в некотором множестве из T . При необходимости перенумеруем множества из T таким образом, чтобы $\text{supp } \sigma c_j \subseteq U_j$, допуская при этом, что $U_i = U_j$ для некоторых $i \neq j$. Аналогичную процедуру

проделаем и с элементами множества $\{\alpha_j\}$ и в результате получим, что $\sigma = \alpha_j$ на U_j для любого $j = 1, \dots, n$.

Положим

$$\begin{aligned} w_1 &= c_1, \\ w_2 &= b_1 c_2, \dots, \\ w_n &= b_1 \cdot \dots \cdot b_{n-1} c_n. \end{aligned}$$

Индукцией покажем, что для любого j

$$w_1 + \dots + w_j + b_1 \cdot \dots \cdot b_j = 1.$$

Во-первых, $w_1 + b_1 = c_1 + b_1 = 1$. Во-вторых, если

$$w_1 + \dots + w_{j-1} + b_1 \cdot \dots \cdot b_{j-1} = 1,$$

то

$$\begin{aligned} w_1 + \dots + w_j + b_1 \cdot \dots \cdot b_j &= \\ &= w_1 + \dots + w_{j-1} + b_1 \cdot \dots \cdot b_{j-1} c_j + b_1 \cdot \dots \cdot b_j = \\ &= w_1 + \dots + w_{j-1} + b_1 \cdot \dots \cdot b_{j-1} (c_j + b_j) = \\ &= w_1 + \dots + w_{j-1} + b_1 \cdot \dots \cdot b_{j-1} = 1. \end{aligned}$$

В частности, получаем, что

$$w_1 + \dots + w_n + b_1 \cdot \dots \cdot b_n = 1.$$

Заметим, что для любой точки $x \in X$ и любого $\mu \in M$ найдётся такой индекс j , что $\mu(x)b_j = 0(x)$, поэтому $\mu b_1 \dots b_n = 0$ на всём пространстве X .

Рассмотрим элемент $\alpha = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n \in M$ и покажем, что $\sigma = \alpha$. Пусть x — произвольный элемент из X и $\{U_j\}$, $j \in I$, — семейство всех открытых подмножеств из T , содержащих точку x . Соответствующие сечения α_j , $j \in I$, совпадают в точке x с сечением σ и, следовательно, между собой. Зафиксируем произвольно $i \in I$. Тогда $\alpha_j(x)w_j = \alpha_i(x)w_j$ для любых $j \in I$. Если $j \notin I$, то

$$\begin{aligned} \alpha_j(x)w_j &= \alpha_j(x)b_1 \cdot \dots \cdot b_{j-1}c_j = (\alpha_j b_1 \cdot \dots \cdot b_{j-1})(x)c_j = \\ &= 0(x) = (\alpha_i b_1 \cdot \dots \cdot b_{j-1})(x)c_j = \alpha_i(x)w_j. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha_1(x)w_1 + \dots + \alpha_n(x)w_n = \\ &= \alpha_i(x)w_1 + \dots + \alpha_i(x)w_n + \alpha_i(x)b_1 \cdot \dots \cdot b_n = \\ &= \alpha_i(x)(w_1 + \dots + w_n + b_1 \cdot \dots \cdot b_n) = \alpha_i(x) = \sigma(x). \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

4.4. Сопряжения, фреймы идеалов и представления

Пусть отображения $f: L \rightarrow K$ и $g: K \rightarrow L$ между полными решётками L и K связаны соотношением

$$f(a) \leq b \iff a \leq g(b). \quad (24)$$

Лемма 4.4.1. Для произвольных отображений f и g , удовлетворяющих (24), справедливы следующие утверждения:

- 1) для любого $a \in L$ и любого $b \in K$ $a \leq gf(a)$ и $fg(b) \leq b$;
- 2) отображения f и g изотонны;
- 3) если f сохраняет конечные точные нижние грани, то g сохраняет конечные точные нижние грани.

Доказательство. 1. Из $f(a) \leq f(a)$ с учётом (24) выводим, что $a \leq gf(a)$; аналогично для второго отношения.

2. Пусть $a \leq b$ для некоторых $a, b \in L$. Тогда $a \leq b \leq gf(b)$, откуда следует, что $f(a) \leq f(b)$; двойственным образом показывается изотонность g .

3. Ввиду изотонности g имеем, что $g(x \wedge y) \leq g(x) \wedge g(y)$. По свойству 1) леммы $fg(x) \wedge fg(y) \leq x \wedge y$, поэтому $f(g(x) \wedge g(y)) \leq x \wedge y$ и по (24) $g(x) \wedge g(y) \leq g(x \wedge y)$. $\square$

Лемма 4.4.2. Если (f^*, f_*) — сопряжение между полными решётками L и K , то правое сопряжённое отображение f_* однозначно определяется отображением f^* и наоборот.

Доказательство. Положим для любого $y \in K$

$$L_y = \{x \in L: f^*(x) \leq y\}.$$

Для произвольного элемента $x \in L_y$ выполняется $x \leq f_*(y)$, поэтому $\bigvee L_y \leq f_*(y)$. С другой стороны, $f_*(y) \in L_y$, поскольку $f^*f_*(y) \leq y$, поэтому $f_*(y) \leq \bigvee L_y$. Таким образом, для любого $y \in K$

$$f_*(y) = \bigvee \{x \in L: f^*(x) \leq y\};$$

двойственным образом

$$f^*(x) = \bigwedge \{y \in K: x \leq f_*(y)\}$$

для любого $x \in L$. $\square$

Лемма 4.4.3. Отображение $f: L \rightarrow K$ между полными решётками, сохраняющее конечные точные нижние грани, имеет правое сопряжённое отображение тогда и только тогда, когда $f(\bigvee A) = \bigvee f(A)$ для любого $A \subseteq L$.

Доказательство. Пусть выполнено $f(\bigvee A) = \bigvee f(A)$. Рассмотрим отображение $g: K \rightarrow L$, заданное по правилу

$$g(m) = \bigvee \{l \in L: f(l) \leq m\} = \bigvee L_m$$

для любого $t \in K$. Если $a \leq g(b)$ для некоторых $a \in L$, $b \in K$, то $a \leq \bigvee L_b$ и $f(a) \leq f(\bigvee L_b) = \bigvee \{f(l) : f(l) \leq b\} \leq b$. Если $f(a) \leq b$, то $a \in L_b$, поэтому $a \leq g(b)$. Наконец, по утверждению 3) леммы 4.4.1 g сохраняет конечные точные нижние грани.

Обратно, пусть $g: K \rightarrow L$ — правое сопряжённое отображение для $f: L \rightarrow K$ и $A \subseteq L$. Для любого $a \in A$ в силу леммы 4.4.1 $a \leq gf(a) \leq g(\bigvee f(A))$, поэтому $\bigvee A \leq g(\bigvee f(A))$. Применив (24), получим $f(\bigvee A) \leq \bigvee f(A)$. Обратное отношение очевидно. $\square$

Лемма 4.4.4. Пусть S — произвольное полукольцо, X — топологическое пространство, $\varphi: \tau X \rightarrow \text{Id } S$ — отображение, сохраняющее пересечения, и выполнено одно из следующих условий:

- 1) φ имеет правое сопряжённое отображение;
- 2) φ имеет левое сопряжённое отображение ψ , такое что $\psi\varphi = 1_{\tau X}$ и из того, что $\psi(J) = X$, следует, что $J = S$.

Тогда φ сохраняет покрытия.

Доказательство. Пусть выполнено условие 1) и $\bigcup U_i = X$ для произвольных $U_i \in \tau X$. Тогда по лемме 4.4.3

$$\sum_i \varphi(U_i) = \varphi\left(\bigcup_i U_i\right) = \varphi(x) = S.$$

Пусть выполнено 2) и $\bigcup U_i = X$. Заметим, что ψ имеет правое сопряжённое отображение, поэтому по лемме 4.4.3 отображение ψ сохраняет произвольные точные верхние грани. Получаем, что

$$\psi\left(\sum_i \varphi(U_i)\right) = \bigcup_i \psi\varphi(U_i) = \bigcup_i U_i = X,$$

и по условию $\sum_i \varphi(U_i) = S$. $\square$

Проанализируем возможность применения теорем о полноте с помощью фреймов идеалов и сопряжений.

Пусть $g: \text{Id } S \rightarrow \tau X$ — произвольное отображение, имеющее левое сопряжённое отображение f . Оба отображения сохраняют конечные пересечения, а условие 4) теоремы 4.2.4 является частным случаем (24). По лемме 4.4.4 f сохраняет покрытия, следовательно, все условия теоремы 4.2.4 выполнены.

Теорема 4.4.5. Пусть S и X — произвольные полукольцо и топологическое пространство соответственно. Если (f, g) — сопряжение между решётками τX и $\text{Id } S$, то пучковое представление α_g полно.

Г. Симмонс [103] приводит пример сопряжения (d, h) между решёткой идеалов $\text{Id } R$ кольца R и решёткой τX , где $X \subseteq \text{Spec } R$, и ошибочно говорит о полноте представления, аналога α_d , ссылаясь на кольцевой вариант теоремы 4.4.5. Применение этой теоремы было бы правомерным, если бы пара (h, g)

являлась сопряжением, что в общем случае не так. Действительно, пусть $U = D(J) = d(J)$ для подходящего $J \in \text{Id } S$. Тогда $h(D(J)) = \sqrt{J}$. Из включения $U = D(\sqrt{J}) \subseteq D(J)$ (на самом деле $D(\sqrt{J}) = D(J)$) следует, что $\sqrt{J} = h(U) \subseteq J$ только в том случае, если идеал J полупервичен. Следовательно, (h, d) будет сопряжением тогда и только тогда, когда каждый идеал из S будет полупервичным. Кольцо с таким условием на идеалы называется *наследственно идемпотентным* [1, 30].

Предложение 4.4.6. *Пара (h, g) является сопряжением между решётками τX и $\text{Id } S$ тогда и только тогда, когда каждый идеал J полукольца S полупервичен, т. е. $J = \sqrt{J}$.*

Отсюда немедленно вытекает, что теорема 4.4.5 является существенно более слабой, чем теорема 4.2.4. Теорема 4.4.5 тем не менее удобна для получения представлений, основанных на фреймах, что мы и продемонстрируем.

Пусть F — произвольный фрейм идеалов полукольца S . Изоморфизм между F и $\tau \text{Pt } F$ (теорема 2.2.7) позволяет из сопряжения $(i, w): F \leftrightarrow \text{Id } S$ (пример 4 раздела 2.2) получить сопряжение между $\tau \text{Pt } F$ и $\text{Id } S$, которое мы обозначим, как и выше, через (i, w) . Отображение $w: \text{Id } S \rightarrow \tau \text{Pt } F$, будучи правым сопряжённым, индуцирует по теореме 4.4.5 полное пучковое представление α_w полукольца S над точечным спектром фрейма F .

Пусть $h: \tau X \rightarrow \text{Id } S$ — произвольное изотонное отображение. Каждому идеалу $I \subseteq S$ поставим в соответствие конгруэнцию $\theta(I)$ — отношение Бёрна по идеалу I . Напомним, что $a \theta(I) b$ тогда и только тогда, когда $a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in I$.

Лемма 4.4.7. *Отображение*

$$g: \text{Id } S \rightarrow \text{Con } S, \quad g(I) = \theta(I),$$

является изотонным, а если X содержит $\text{Max } S$, то композиция $hg: \tau X \rightarrow \text{Con } S$ сильно сохраняет покрытия.

Доказательство. Изотонность g очевидна, а hg сильно сохраняет покрытия, поскольку $I \subseteq \text{Ker } \theta(I)$ для любого идеала I . $\square$

Таким образом, отталкиваясь от произвольного изотонного отображения $h: \tau X \rightarrow \text{Id } S$, мы получаем отображение $hg: \tau X \rightarrow \text{Con } S$, удовлетворяющее условиям теоремы 4.2.5. Сформулируем полученный результат.

Теорема 4.4.8. *Пусть отображение $h: \tau X \rightarrow \text{Id } S$ изотонно и сохраняет покрытия. Тогда представление β_{hg} полно.*

Заметим, что рассуждения остаются в силе, если g заменить на любое другое изотонное отображение $\varphi: \text{Id } S \rightarrow \text{Con } S$, такое что для любого идеала J выполняется соотношение $J \subseteq \text{Ker } \varphi(J)$. Однако отношение Бёрна по идеалу J является наименьшей конгруэнцией среди тех, ядра которых содержат идеал J , поэтому выбор отображения g выглядит вполне оправданным.

Теорема 4.4.8 даёт естественные возможности получения полных пучковых представлений. Во-первых, для подпространства X первичного спектра, такого что $\text{Max } S \subseteq X$, рассмотрим отображение $h: \tau(X) \rightarrow \text{Id } S$, заданное по правилу

$$h(U) = \bigcap \{P \in X: P \notin U\}.$$

Очевидно, h изотонно и сохраняет покрытия.

Во-вторых, пусть F — фрейм идеалов полукольца S . Как и выше, сопряжение (i, w) между $\tau \text{Pt } F$ и $\text{Id } S$ гарантирует изотонность отображения i , а по лемме 4.4.4 отображение i сохраняет покрытия.

Итак, получаем два полных представления β_{hg} и β_{ig} над пространствами X ($\text{Max } S \subseteq X \subseteq \text{Spec } S$) и $\text{Pt } F$ соответственно.

5. Структурные представления полуколец

5.1. Представления полумодулей сечениями пучков

Определение. Полумодуль M_S над полукольцом S назовём *симметрическим*, если для любых $a, b \in M_S$ и $s, t \in S$ из того, что $ast = bst$, следует, что $ats = bts$.

В [91] И. Ламбек определил модуль A_R над кольцом R как *симметрический*, если из того, что $ast = 0$, следует, что $ats = 0$ для любых $a \in A$ и $s, t \in R$. Понятно, что симметрический полумодуль, являющийся модулем, будет и симметрическим модулем.

Для первичного идеала P полукольца S введём отношение на полумодуле M_S :

$$a \sim_P b \iff as = bs \text{ для некоторого } s \in S \setminus P.$$

Лемма 5.1.1. На симметрическом полумодуле M_S отношение $\sim_P$ является конгруэнцией для любого первичного идеала P , а полумодуль $M_S/\sim_P$ симметричен.

Доказательство. Пусть $a \sim_P b$ и $c \sim_P d$. Тогда существуют элементы $u, v \in S \setminus P$, такие что $au = bu$ и $cv = dv$. Для подходящего $s \in S$ выполнено, что $usv \notin P$. Поскольку $ausv = busv$ и $cusv = dusv$ ввиду симметричности M_S , то $(a + c) \sim_P (b + d)$. Если $t \in S$, то $aut = but$, и следовательно, $(at)u = (bt)u$. Это означает, что $(at) \sim_P (bt)$. Пусть a, b — произвольные представители классов из $M_S/\sim_P$, элементы u, v лежат в S и выполняется равенство $[a]uv = [b]uv$. Тогда $(auv) \sim_P (buv)$ и $auvs = buvs$ для некоторого $s \in S \setminus P$. Поскольку M_S — симметрический полумодуль, то $avus = buvs$, что влечёт $[a]vu = [b]vu$. $\square$

Уравнитель элементов произвольного полумодуля является, очевидно, правым идеалом, а для симметрического полумодуля — двусторонним идеалом.

Лемма 5.1.2. Для любого первичного идеала P и любых различных $a, b \in M_S$ выполняется включение $([a], [b])^* \subseteq P$.

Доказательство. Предположим, что найдётся пара различных элементов $[a], [b] \in M_S/\sim_P$, для которых $([a], [b])^* \not\subseteq P$. Тогда $[a]s = [b]s$ для некоторого $s \in S_P$, или $(as) \sim_P (bs)$. По определению конгруэнции $\sim_P$ для подходящего $t \in S \setminus P$ выполняется $ast = bst$. Поскольку идеал P первичен, можно выбрать элемент $u \in S$, для которого $sut \notin P$. Получаем, что $asut = bsut$, откуда следует, что $a \sim_P b$, т. е. $[a] = [b]$, противоречие. $\square$

Для построения пучка полумодулей нам потребуется аналог теоремы 1.2.2, справедливость которого вытекает из следующего общего результата Б. А. Дейви [68]. Пусть A — универсальная алгебра, $\{\cong_x: x \in X\}$ — семейство конгруэнций на A , индексированных точками топологического пространства X . Если

$$U(a, b) = \{x \in X: a \cong_x b\}$$

открыто для любых $a, b \in A$, то $\dot{\bigcup} A/\cong_x, x \in X$, — пучок универсальных алгебр над X .

В качестве базисного пространства пучка выберем первичный спектр $\text{Spec } S$ полукольца S . Пусть a, b — произвольные элементы полумодуля M_S . Если $a \sim_P b$ для $P \in \text{Spec } S$, то $as = bs$ и $P \in D(s)$ для некоторого элемента $s \in S$. Но тогда для любого $Q \in D(s)$ имеем $a \sim_Q b$. Получили, что семейство конгруэнций $\{\sim_P: P \in \text{Spec } S\}$ удовлетворяет условию Дейви, поскольку $U(a, b)$ открыто в $\text{Spec } S$. Следовательно, $(L, \text{Spec } S)$ — пучок полумодулей над $\text{Spec } S$, где

$$L = \bigcup \{M_S/\sim_P: P \in \text{Spec } S\}.$$

Обозначим через $\hat{m}, m \in M_S$, глобальное сечение пучка L , принимающее в каждой точке $P \in \text{Spec } S$ значение $[m]_P$ — класс элемента m в фактор-полумодуле $M_S/\sim_P$. Множество всех глобальных сечений пучка обозначим $\Gamma(L)$. Для доказательства основной теоремы потребуется следующая лемма.

Лемма 5.1.3. Для произвольных $a, b \in M_S$ сечения $\hat{a}$ и $\hat{b}$ совпадают на $D(J)$, где J — идеал из S , тогда и только тогда, когда для любого $s \in J$ найдётся такое натуральное n , что $as^n = bs^n$.

Доказательство. Пусть $as^k \neq bs^k$ для любого натурального k . Тогда m -система $T = \{1, s, s^2, \dots\}$ не пересекается с идеалом $(a, b)^*$. Максимальный идеал P (существующий по лемме Цорна) среди содержащих $(a, b)^*$ и не пересекающихся с T будет первичным. Условие $(a, b)^* \subseteq P$ означает, что $\hat{a}(P) \neq \hat{b}(P)$. Однако $s \notin P$, поэтому $P \in D(J)$ и $\hat{a}(P) = \hat{b}(P)$, противоречие. Обратная импликация очевидна. $\square$

Теорема 5.1.4. Симметрический полумодуль M_S изоморфен полумодулю всех глобальных сечений пучка $(L, \text{Spec } S)$.

Доказательство. Пусть $\hat{a} = \hat{b}$ на $\text{Spec } S$ для $a, b \in M_S$. Тогда для любого $P \in \text{Spec } S$ выполняется $as_P = bs_P$ для подходящего $s_P \in S \setminus P$. Поскольку $\{D(c_P)\}$ покрывает компактное пространство $\text{Spec } S$, выберем конечное подпокрытие $D(c_1) \cup \dots \cup D(c_k) = \text{Spec } S$. Симметричность полумодуля позволяет

считать, что $c_1 + \dots + c_k = 1$. Просуммировав по i равенства $ac_i = bc_i$, получаем равенство $a = b$, и представление точное.

Пусть σ — произвольное глобальное сечение пучка L . Сечение σ совпадает с некоторым сечением $\hat{m}_P$ в каждой точке $P \in \text{Spec } S$ и, следовательно, на некоторой её базисной окрестности $D(r_P)$. Вновь воспользуемся компактностью $\text{Spec } S$ и выберем конечное подпокрытие $D(r_1), \dots, D(r_k)$. При этом $\sigma = \hat{m}_i$ на $D(r_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. Два сечения $\hat{m}_i$ и $\hat{m}_j$ совпадают на пересечении $D(r_i) \cap D(r_j) = D(r_i S r_j)$, которое содержит $D(r_i r_j)$. По лемме 5.1.3 $m_i(r_i r_j)^{n(i,j)} = m_j(r_i r_j)^{n(i,j)}$ для некоторого натурального $n(i, j)$. Пусть $n = \max\{n(i, j)\}$ для всевозможных пар (i, j) . Так как полумодуль M_S симметричен, имеем равенство

$$m_i r_i^n r_j^n = m_j r_i^n r_j^n. \quad (25)$$

Заметим, что $D(r_i) = D((r_i)^n)$, и тогда

$$\text{Spec } S = \bigcup_{i=1}^k D(r_i) = \bigcup_{i=1}^k D((r_i)^n) = D\left(\sum_{i=1}^k (r_i)^n\right).$$

Поскольку $\sum_{i=1}^k (r_i)^n = S$, то $1 = \sum_{i=1}^k s_i$, где s_i — конечная сумма элементов вида $t_0 r_i t_1 r_i \dots r_i t_n$. Из (25) следует, что

$$m_i t_0 r_i t_1 r_i \dots r_i t_n r_j^n = m_j t_0 r_i t_1 r_i \dots r_i t_n r_j^n.$$

Просуммировав, получаем равенство $m_i s_i r_j^n = m_j s_i r_j^n$. Положим $m = \sum_{i=1}^k m_i s_i$. Далее,

$$m r_j^n = \sum_{i=1}^k m_i s_i r_j^n = \sum_{i=1}^k m_j s_i r_j^n = m_j \left(\sum_{i=1}^k s_i \right) r_j^n = m_j r_j^n.$$

Это означает, что $\hat{m} = \hat{m}_j$ на $D(r_j)$, и поскольку $\hat{m}_j = \sigma$ на $D(r_j)$, то глобальное сечение σ совпадает с $\hat{m}$ на всём $\text{Spec } S$. Теорема доказана. $\square$

Замечание. Леммы 5.1.1 и 5.1.2 позволяют получить дополнительную информацию о пучке $(L, \text{Spec } S)$ полумодулей. Во-первых, слои пучка являются симметрическими полумодулями. Попутно заметим, что полумодуль глобальных сечений пучка симметрических полумодулей является симметрическим. В [91] И. Ламбек использует аналогичный факт для характеристики симметрических модулей. Во-вторых, конгруэнция $\sim_P$ на полумодуле $M_S / \sim_P$ по лемме 5.1.2 является нулевой (отношение равенства).

В теореме 4.3.2 указаны достаточные условия, при которых подполумодуль полумодуля Γ всех глобальных сечений пучка изоморфен Γ . Нашей задачей является нахождение полумодулей и пучков, для которых применима эта теорема.

Для сечения σ пучка P через $z(\sigma) = \{x \in X : \sigma(x) = 0(x)\}$ обозначим нуль-множество сечения σ ; его дополнение $\text{supp } \sigma = X \setminus z(\sigma)$ — носитель сечения σ .

Пусть A_S — полумодуль над полукольцом S . Для первичного идеала P полукольца S рассмотрим множество

$$z(P) = \{a \in A: aSc = 0 \text{ для некоторого } c \in S \setminus P\}$$

и отношение на полумодуле A

$$a \theta(P) b \iff a + u = b + v \text{ для некоторых } u, v \in z(P).$$

Лемма 5.1.5. *Множество $z(P)$ является подполумодулем полумодуля A_S . Отношение $\theta(P)$ — конгруэнция на полумодуле A_S , класс нуля которой совпадает с $z(P)$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in z(P)$. Тогда $aSc = bSt = 0$ для некоторых $c, t \in S \setminus P$. Для подходящего $s \in S$ ввиду первичности P выполнено $r = cst \notin P$. Поскольку $aSr = bSr = 0$, то $(a + b)Sr = 0$. Для произвольного элемента $m \in S$ имеем, что $amSc = 0$. Пусть $a \theta(P) b$ и $c \theta(P) d$, что означает, что $a + u_1 = b + v_1$ и $c + u_2 = d + v_2$ для некоторых $u_1, u_2, v_1, v_2 \in z(P)$. Сложив равенства, получим $a + c + u_1 + u_2 = b + d + v_1 + v_2$, откуда следует, что $(a + c) \theta(P) (b + d)$, поскольку $u_1 + u_2, v_1 + v_2 \in z(P)$. Для $m \in S$ имеем, что $am + u_1m = bm + v_1m$, $u_1m, v_1m \in z(P)$ и $(am) \theta(P) (bm)$. Таким образом, $\theta(P)$ является конгруэнцией на A_S .

Пусть $a \theta(P) 0$, что равносильно соотношению $a + u \in z(P)$ для некоторого $u \in z(P)$, а это равносильно условию, что существует элемент $s \in S \setminus M$, такой что $aSs = 0$, т. е. $a \in z(P)$. $\square$

Для произвольного полумодуля A_S множество

$$U(a, b) = \{P \in \text{Спец } S: a \theta(P) b\}$$

открыто в $\text{Спец } S$ для любых элементов $a, b \in A$. Действительно, если $Q \in U(a, b)$, то $a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in z(P)$. Найдётся элемент $c \in S \setminus Q$, такой что $uSc = vSc = 0$. Но тогда для любого $P \in D(c)$ выполняется $u, v \in z(P)$, и значит, $D(c) \subseteq U(a, b)$. Таким образом, каждая точка из $U(a, b)$ имеет открытую окрестность, лежащую в $U(a, b)$. Семейство конгруэнций $\{\theta(P): P \in \text{Спец } S\}$ на полумодуле A_S является открытым, поэтому индуцирует пучок полумодулей

$$(A, X) = \left(\bigcup A/\theta(P), \text{Спец } S \right).$$

Аналогичные рассуждения позволяют построить пучок над $\text{Мах } S$.

Пусть X — подпространство $\text{Спец } S$, содержащее $\text{Мах } S$. Рассмотрим *естественный* гомоморфизм φ полумодуля A_S в полумодуль $\Gamma(A)$ всех глобальных сечений пучка (A, X) , при котором сечение $\varphi(a)$ принимает значение $[a]_x$ — класс элемента a в соответствующем слое. Если $\varphi(a) = \varphi(b)$ в каждой точке базисного пространства, то $a \theta(M) b$ для любого $M \in \text{Мах } S$. Найдутся $u_M, v_M \in z(M)$, такие что $a + u_M = b + v_M$. Для некоторого $c_M \in S \setminus M$ имеем, что $u_MSc_M = v_MSc_M = 0$, и тогда $a \theta(N) b$ для любого $N \in D(c_M)$. Из

покрытия $(D(c_M))$, $M \in \text{Max } S$, пространства $\text{Max } S$ выберем конечное подпокрытие $D(c_1), \dots, D(c_k)$, причём можно считать, что $c_1 + \dots + c_k = 1$. Поскольку $ac_i = bc_i$, то

$$a = a(c_1 + \dots + c_k) = ac_1 + \dots + ac_k = bc_1 + \dots + bc_k = b.$$

Тем самым доказана следующая лемма.

Лемма 5.1.6. *Естественный гомоморфизм $\varphi: A_S \rightarrow \Gamma(A)$ полумодуля A_S в полумодуль всех глобальных сечений пучка (A, X) для пространства X , содержащего $\text{Max } S$, инъективен.*

Теорема 5.1.7. *Полумодуль A_S над строго гармоническим полукольцом S изоморфен полумодулю всех глобальных сечений пучка*

$$(A, X) = \left(\bigcup A_S / \theta(M), \text{Max } S \right).$$

Доказательство. По лемме 5.1.6 можно считать, что A_S является подполумодулем $\Gamma(A)$. Предложение 3.2.1 гарантирует выполнимость условия 1) теоремы 4.3.2 для семейства идеалов $\{0_M: M \in \text{Max } S\}$. Пусть $t \in 0_M$. Тогда для подходящего $s \in S \setminus M$ выполнено $tSs = 0$. Для произвольной точки $N \in D(s)$ слой $A_S / \theta(N)$ обнуляется элементом t . Действительно, $(at)Ss = a(tSs) = a0 = 0$ и $at \in z(N)$, поскольку $s \notin N$. По лемме 5.1.5 $at(N) = 0(N)$, и выполнено условие 2). Таким образом, $A_S \cong \Gamma(A)$. $\square$

Для $P \in \text{Spec } S$ и $a, b \in A_S$ положим

$$a \theta_P b \iff \text{найдётся } c \in S \setminus P, \text{ такой что } asc = bsc \text{ при любом } s \in S.$$

Стандартно доказывается, что введённое отношение является конгруэнцией на полумодуле A_S , а семейство конгруэнций $\{\theta_P: P \in \text{Spec } S\}$ открыто. Получаем пучок полумодулей

$$(A', X) = \left(\bigcup A_S / \theta_P, \text{Spec } S \right),$$

а также его ограничение на $\text{Max } S$. Класс нуля слоя этого пучка в точке P имеет вид $z(P)$, поэтому если A — группа, то пучки (A, X) и (A', X) совпадают, в частности, для модуля над кольцом. Однако в общем случае конгруэнции $\theta(P)$ и θ_P различны. (Например, возьмём цепь, состоящую из более чем двух элементов, рассмотрим её как полумодуль над собой, и пусть $P = \{0\}$. Тогда $\theta(P)$ — отношение равенства, а θ_P «склеивает» все ненулевые элементы.)

Понятно, что конгруэнция θ_P не превосходит конгруэнцию $\theta(P)$, поэтому справедлив аналог леммы 5.1.6. Рассмотрим полумодуль A_S над строго гармоническим полукольцом S как подполумодуль полумодуля $\Gamma(A')$. Очевидно, выполняются условия 1) и 2) теоремы 4.3.2 для идеалов $0_M, M \in \text{Max } S$ и справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1.8. *Полумодуль A_S над строго гармоническим полукольцом S изоморфен полумодулю глобальных сечений пучка $(\bigcup A_S / \theta_M, \text{Max } S)$.*

Пусть S — редуцированное риккартово полукольцо. В лемме 3.4.4 показано, что минимальный спектр $\text{Min } S$ — множество всех минимальных первичных идеалов редуцированного риккартова полукольца S , рассматриваемое как подпространство $\text{Spec } S$, — является нульмерным компактом. Каждый первичный идеал из S содержит единственный минимальный первичный идеал P , который в свою очередь обладает свойством $P = 0_P$. Отсюда вытекает, что для различных минимальных первичных идеалов P и Q выполняется соотношение $0_P + 0_Q = S$.

На полумодуле A_S над редуцированным полукольцом S для каждого $M \in \text{Min } S$ введём отношение

$$a \rho_M b \iff a + u = b + v,$$

где u, v принадлежат множеству $A0_M$ всевозможных конечных сумм вида as , $a \in A_S$, $s \in 0_M$.

Лемма 5.1.9. *Отношение ρ_M для любого $M \in \text{Min } S$ является конгруэнцией, и семейство $\{\rho_M : M \in \text{Min } S\}$ открыто.*

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна.

Если $a \rho_M b$, то $a + u = b + v$. Пусть $r_1, \dots, r_k$ — элементы из 0_M , присутствующие в записях элементов u, v , и $s_1, \dots, s_k \in S \setminus M$ — такие элементы, что $r_i s_i = 0$. Так как идеал M первичен, найдутся элементы $t_1, \dots, t_{k-1} \in S$, такие что элемент $s = s_1 t_1 \dots t_{k-1} s_k$ не лежит в $M = 0_M$. Для любого $N \in D(s) \cap \text{Min } S$ имеем $u, v \in 0_N$, поэтому $a \rho_N b$. Таким образом, множество $U(a, b) = \{M \in \text{Min } S : a \rho_M b\}$ открыто. $\square$

Построенный пучок полумодулей обозначим через

$$(B, X) = \left(\bigcup A_S / \rho_M, \text{Min } S \right).$$

Теорема 5.1.10. *Полумодуль A_S над редуцированным риккартовым полукольцом изоморфен полумодулю $\Gamma(B)$ глобальных сечений пучка $(B, \text{Min } S)$.*

Доказательство. Покажем, что полумодуль A_S вкладывается в $\Gamma(B)$. Пусть $a \rho_M b$ для каждой точки $M \in \text{Min } S$. Тогда $a + u = b + v$ для подходящих $u, v \in A0_M$. Для любого максимального идеала N , содержащего M , $0_M = 0_N$ (предложение 3.4.3). Как при доказательстве предыдущей леммы, выберем элемент $s_N \in S \setminus N$, такой что $ass_N = bss_N$ для всякого $s \in S$. Множества $D(s_N)$, $N \in \text{Max } S$, покрывают $\text{Max } S$, и ввиду компактности максимального спектра можно выбрать конечное подпокрытие $D(s_1), \dots, D(s_k)$, причём можно считать, что $s_1 + \dots + s_k = 1$. Тогда $a = as_1 + \dots + as_k = bs_1 + \dots + bs_k = b$, и представление A_S в пучке $(B, \text{Min } S)$ точное.

Рассмотрим семейство идеалов $\{0_M : M \in \text{Min } S\}$. Для различных его представителей получаем $0_P + 0_Q = S$. Для элемента $a \in A_S / \rho_M$ и произвольного $t \in 0_M$ выполняется $at \in A0_M$, поэтому $at \rho_M 0$. Поскольку $tSc = 0$ для подходящего $c \in S \setminus M$, получаем, что $at \rho_N 0$ для любого $N \in D(c)$. Таким образом, выполнены оба условия теоремы 4.3.2 и $A_S \cong \Gamma(B)$. $\square$

Пусть A_S — полумодуль над произвольным полукольцом. Введём два вида конгруэнций на A_S , индексированных максимальными идеалами булева кольца BS дополняемых идемпотентов полукольца S :

$$\begin{aligned} a \equiv_M b &\iff ae = be \text{ для некоторого } e \in BS \setminus M, \\ a =_M b &\iff a + u = b + v \text{ для некоторых } u, v \in AMS, \end{aligned}$$

где AMS — полумодуль над S всевозможных конечных сумм элементов вида ces , $c \in A_S$, $e \in M$, $s \in S$.

Стандартно проверяется, что (C, X) и (C', X) — пучки полумодулей над S , где

$$C = \bigcup A_S / \equiv_M, \quad C' = \bigcup A_S / =_M, \quad X = \text{Max } BS.$$

Теорема 5.1.11. *Полумодуль A_S над произвольным полукольцом S изоморфен полумодулю глобальных сечений $\Gamma(C)$ и $\Gamma(C')$ пучков $(C, \text{Max } BS)$ и $(C', \text{Max } BS)$ соответственно.*

Доказательство. Пусть $\alpha: A_S \rightarrow \Gamma(C)$ и $\alpha': A_S \rightarrow \Gamma(C')$ — гомоморфизмы, при которых элементу $a \in A_S$ ставится в соответствие в каждой точке $M \in \text{Max } BS$ классы элемента a в слоях $A_S / \equiv_M$ и $A_S / =_M$ соответственно. Если $a =_M b$ и $a, b \in A_S$, $M \in \text{Max } BS$, то $a + u_M = b + v_M$ для подходящих $u_M = a_1 g_1 s_1 + \dots + a_k d_k s_k$ и $v_M = b_1 f_1 t_1 + \dots + b_n f_n t_n$, $g_i, f_j \in M$. Для элемента $e_M = g_1^\perp \dots g_k^\perp f_1^\perp \dots f_n^\perp$ получаем, что $ae_M = be_M$ и $e_M \in BS \setminus M$.

Таким образом, конгруэнция $=_M$ более слабая, чем $\equiv_M$. Покажем, что представление α точное и, следовательно, α' будет точным.

Пусть $a \equiv_M b$ для каждого $M \in \text{Max } BS$. Легко убедиться, что $T = \{e \in BS: ae = be\}$ является идеалом кольца BS . Предположим, что T лежит в некотором максимальном идеале $N \in \text{Max } BS$. Поскольку $a \equiv_N b$, то $af^\perp = bf^\perp$ для некоторого $f \in N$. По определению T справедливо соотношение $f^\perp \in N$. Получаем, что $f \oplus f^\perp = 1 \in N$, противоречие, значит, $1 \in T$ и $a = b$.

Предположим, что $a =_M 0$. Тогда $a + u \in AMS$ для некоторого $u \in AMS$. Для подходящего $e^\perp \notin M$ получаем, что $ae^\perp \in AMS$. С другой стороны, $ae \in AMS$, откуда следует, что $a = ae + ae^\perp \in AMS$. Получили, что класс нуля по конгруэнции $=_M$ совпадает с подполумодулем AMS . Поэтому для произвольных $a \in A_S$, $e \in M \in \text{Max } BS$, $s \in S$ имеем $aes \in AMS$ и $aes =_M 0$. Следовательно, $aes \equiv_M 0$. Тогда элемент обнуляет слой в точке M тогда и только тогда, когда имеет вид es для некоторого $e \in M$. Но тогда этим элементом обнуляется и каждый слой из окрестности $D(e^\perp)$ точки M как для пучка C , так и для пучка C' . Для различных $M, N \in \text{Max } S$ выполняется $MS + NS \supseteq (M \oplus N)S = S$. Таким образом, для семейства идеалов $\{MS: M \in \text{Max } BS\}$ выполнены все условия теоремы 4.3.2 для пучков $(C, \text{Max } BS)$ и $(C', \text{Max } BS)$. $\square$

5.2. Представления риккартовых полуколец

В теореме 2.4.4 нами было установлено, что каждое симметрическое полукольцо S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений пучка Ламбека $(\bigcup S/\theta_P, \text{Спец } S)$. Этот факт и предложение 3.4.3 позволяют дать следующую пучковую характеристику.

Предложение 5.2.1. *Слабо редуцированное полукольцо слабо риккартово тогда и только тогда, когда все слои его ламбековского пучка являются полукольцами без делителей нуля.*

Более интересными для полуколец этого класса являются представления сечениями пучков, построенных с помощью отношения Бёрна $\theta(P)$ по 0-компонентам 0_P , $P \in \text{Спец } S$, первичных идеалов.

Для произвольного полукольца S открытое семейство конгруэнций $\theta(P)$, $P \in \text{Спец } S$, позволяет построить факторный пучок Корниша

$$(K(S), X) = \left(\bigcup S/\theta(P), \text{Спец } S \right).$$

Для ограниченной дистрибутивной решётки L такой пучок введён в [65]. В этой же работе доказан изоморфизм между L и решёткой всех глобальных сечений построенного пучка.

Если S — слабо редуцированное риккартово полукольцо, то пучок $(K(S), \text{Спец } S)$ будет *локально постоянным*: для каждой точки базисного пространства найдётся её окрестность U , такая что ограничение пучка на U является постоянным пучком. В самом деле, пусть $P \in \text{Спец } S$ и A — однозначно определённый минимальный первичный идеал, лежащий в P . Для любого первичного идеала Q , содержащего A , $0_A = 0_Q$, и значит, $\theta(A) = \theta(Q)$.

Обозначим через $\hat{a}$ образ элемента $a \in S$ при отображении, ставящем ему в соответствие класс элемента a в фактор-полукольце $S/\theta(P)$ для каждого $P \in \text{Спец } S$. Стандартно проверяется, что это отображение непрерывно, и следовательно, $\hat{a}$ является глобальным сечением пучка $K(S)$.

Предложение 5.2.2. *Слабо редуцированное слабо риккартово полукольцо S вкладывается в пучок $(K(S), X)$ в каждом из следующих случаев:*

- 1) X — подпространство $\text{Спец } S$, содержащее $\text{Min } S$;
- 2) X — подпространство $\text{Спец } S$, содержащее $\text{Max } S$.

Доказательство. 1. Пусть $\hat{a} = \hat{b}$ в каждой точке пространства $\text{Min } S$. Тогда $a + u_A = b + v_A$ для подходящих $u_A, v_A \in 0_A$, $A \in \text{Min } S$. По свойству 3) предложения 3.4.3 $0_A = 0_M$ для некоторого $M \in \text{Max } S$, содержащего A . Это позволяет выбрать такой элемент $c_M \notin M$, что $u_{Ac_M} = v_{Ac_M} = 0$, и следовательно, $ac_M = bc_M$. Понятно, что такой выбор элементов c_M можно осуществить для каждого максимального идеала. Это означает, что $\{D(c_M)\}$, $M \in \text{Max } S$, покрывают $\text{Max } S$. Тогда

$$\text{Max } S \subseteq \bigcup D(c_M) = D\left(\sum S c_M S\right),$$

и идеал $\sum S c_M S$ совпадает с S . Для некоторых $k_{ij}, s_{ij} \in S$, $c_i \in \{c_M : M \in \text{Max } S\}$ получаем, что

$$1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n(i)} k_{ij} c_i s_{ij}.$$

Поскольку S — симметрическое полукольцо, то

$$\begin{aligned} a &= a \sum \sum k_{ij} c_i s_{ij} = \sum \sum a k_{ij} c_i s_{ij} = \\ &= \sum \sum b k_{ij} c_i s_{ij} = b \sum \sum k_{ij} c_i s_{ij} = b. \end{aligned}$$

2. Во втором случае утверждение очевидно. Более того, заметим, что данное условие выполняется для произвольного полукольца с единицей. $\square$

Теорема 5.2.3. Слабо редуцированное риккартово полукольцо S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений пучка $(K(S), X)$ в каждом из следующих случаев:

- 1) $X = \text{Min } S$;
- 2) $X = \text{Spec } S$.

Доказательство. В предыдущем предложении доказана точность представлений, поэтому достаточно обосновать полноту.

1. Рассмотрим произвольное глобальное сечение σ пучка $K(S)$ над $\text{Min } S$. Поскольку $\text{Min } S$ — нульмерный компакт, то найдутся такие элементы $a_1, \dots, a_k$, $c_1, \dots, c_k \in S$, что $\sigma = \hat{a}_i$ на открыто-замкнутых $D_1(c_i)$, покрывающих $\text{Min } S$, и $D_1(c_i) \cap D_1(c_j) = \emptyset$ для $i \neq j$. Последнее означает, что $c_i c_j \in \text{rad } S$, и ввиду полупервичности слабо редуцированного полукольца $c_i c_j = 0$. По условию 5) предложения 3.4.6 полный прообраз замкнутого множества $D_1(c_i)$ при ретракции $\varphi: \text{Spec } S \rightarrow \text{Min } S$ замкнут в $\text{Spec } S$. Для любого $P \in \varphi^{-1}(D_1(c_i))$ найдётся элемент $A \in D_1(c_i)$, лежащий в P . Поскольку $0_P = 0_A$ и каждый c_j , $j \neq i$, лежит в 0_P , то для подходящего $t_P \notin P$ получаем, что t_P аннулирует c_j для любого $j \neq i$. Множества $D(t_P)$, $P \in \varphi^{-1}(D_1(c_i))$, покрывают $\varphi^{-1}(D_1(c_i))$. Ввиду компактности $\text{Spec } S$ можно выбрать конечное число элементов $t_{i1}, \dots, t_{im}$, таких что $D(t_{i1}) \cup \dots \cup D(t_{im}) = \varphi^{-1}(D_1(c_i))$, $c_j t_{i1} = \dots = c_j t_{im} = 0$ и $\sigma = \hat{a}_i$ на $D_1(t_{ir})$, $r = 1, \dots, m$. Проведем эту процедуру для каждого i и получим, что $\bigcup D(t_{ij}) = \text{Spec } S$. Пусть

$$1 = \sum x_\alpha t_{ij} y_\alpha -$$

конечная сумма, в которой каждый из элементов t_{ij} может присутствовать неоднократно.

Положим

$$a = \sum a_i x_\alpha t_{ij} y_\alpha.$$

Пусть A — произвольный минимальный первичный идеал и $A \in D_1(t_{rs})$. Заметим, что

$$a \theta(A) \sum a_r x_\alpha t_{rm} y_\alpha,$$

где суммируются все элементы, содержащие множитель a_r . Действительно, $\sum_{i \neq r} a_i x_\alpha t_{ij} y_\alpha \in 0_A$, так как каждое слагаемое обнуляется элементом $c_r \notin A$.
Далее,

$$a_r \sum x_\alpha t_{rm} y_\alpha \theta(A) a_r \sum x_\alpha t_{ij} y_\alpha = a_r,$$

поскольку элемент справа разлагается в сумму $a_r \sum x_\alpha t_{rm} y_\alpha$ с элементом из 0_A . По транзитивности получаем, что $a \theta(A) a_r$, т. е. в произвольной точке $A \in \text{Min } S$

$$\hat{a}(A) = \hat{a}_r(A) = \sigma(A),$$

следовательно, $\sigma = \hat{a}$.

2. Пусть σ — произвольное глобальное сечение пучка над $\text{Spec } S$. Для любого идеала $P \in \text{Spec } S$, содержащего минимальный первичный идеал A , сечение σ совпадает с некоторым сечением $\hat{a}_P$ на некоторой окрестности U_P точки P . Окрестность U_P необходимо содержит точку A , и $0_P = 0_A$. Это позволяет считать, что σ совпадает с сечениями $\hat{a}_A$ на U_A , индексированными минимальными первичными идеалами, причём $\bigcup U_A = \text{Spec } S$. Обозначим через V_A открытое подмножество $U_A \cap \text{Min } S$ минимального спектра. Так как $\text{Min } S$ — нульмерный компакт, то выберем из покрытия $\{V_A : A \in \text{Min } S\}$ конечное разбиение $V_1, \dots, V_k$ пространства $\text{Min } S$. Пусть $a_1, \dots, a_k \in S$ — соответствующие элементы, для которых $\sigma(A) = \hat{a}_i(A)$ для каждого $A \in V_i$. По предложению 3.4.6 множество $\varphi^{-1}(V_i)$ открыто-замкнуто в $\text{Spec } S$ и, следовательно, имеет вид $D(C_i)$ для некоторого идеала C_i . Поскольку

$$\text{Spec } S = D(C_1) \cup \dots \cup D(C_k) = D(C_1 + \dots + C_k),$$

то для подходящих $c_i \in C_i$

$$1 = c_1 + \dots + c_k.$$

Кроме того, из условия $D(C_i) \cap D(C_j) = \emptyset$ для $i \neq j$ следует, что $c_i c_j \in C_i C_j = \{0\}$ ввиду полупервичности S . Положим $a = a_1 c_1 + \dots + a_k c_k$.

Пусть $P \in \text{Spec } S$. Для некоторого индекса i выполнено $c_i \notin P$, и для каждого $j \neq i$ имеем $c_j c_i = 0$, откуда следует, что $c_j \in 0_P$. Тогда $\widehat{a_j c_j} = \widehat{a_i c_j}$ в точке P , так как $a_j c_j$ и $a_i c_j$ лежат в $0_P = [0]_P$ — классе нуля конгруэнции $\theta(P)$. Получаем, что

$$\begin{aligned} \sigma(P) = \hat{a}_i(P) &= \hat{a}_i(\hat{c}_1 + \dots + \hat{c}_k)(P) = \\ &= (\widehat{a_i c_1} + \dots + \widehat{a_i c_k})(P) = (\widehat{a_1 c_1} + \dots + \widehat{a_k c_k})(P) = \hat{a}(P). \end{aligned}$$

Теорема доказана. $\square$

Заключительную часть раздела мы посвятим изучению пучков, накрывающие пространства которых имеют хорошую отделимость, а именно полухаусдорфовых и хаусдорфовых пучков.

Пучок называется *хаусдорфовым*, если его накрывающее пространство хаусдорфово. Известно, что произвольный пучок (P, X) хаусдорфов тогда и только тогда, когда множество всех точек, в которых совпадают два сечения пучка,

открыто-замкнуто. Это свойство является следствием определения пучка. Для характеристики слабо редуцированных риккартовых полуколец введём более слабое понятие.

Определение. Пучок (P, X) назовём *полухаусдорфовым*, если любые две различные точки накрывающего пространства P , одна из которых принадлежит образу нулевого сечения, имеют непересекающиеся окрестности.

Лемма 5.2.4. Факторный пучок (P, X) полухаусдорфов тогда и только тогда, когда пространство X хаусдорфово и носители всех глобальных сечений пучка P открыты.

Доказательство. Пусть пучок (P, X) полухаусдорфов и $x \neq y \in X$. Тогда точки 0_x и 0_y имеют базисные непересекающиеся открытые множества. Напомним, что это в точности образы сечений над некоторыми открытыми множествами базисного пространства. Нуль-множества этих сечений отделяют x и y , следовательно, X хаусдорфово. Пусть $\sigma \in \Gamma(P)$ и $x \in \text{supp } \sigma$. Точки $\sigma(x)$ и 0_x накрывающего пространства имеют непересекающиеся окрестности U и V соответственно. Вновь можно считать их элементами базиса накрывающего пространства. Тогда $\pi(U)$ и $\pi(V)$ открыты в X и $x \in \pi(U) \cap \pi(V) \subseteq \text{supp } \sigma$. Значит, носитель σ открыт в X .

Обратно, пусть пространство X хаусдорфово и носители всех глобальных сечений открыты. В случае когда точки накрывающего пространства принадлежат образу нулевого сечения, их делимость вытекает из хаусдорфовости X . Если $a \in P_x$ и $a \neq 0_x$, то a и 0_y для любого $y \in X$ отделяются множествами $\sigma(\text{supp } \sigma)$ и $0(X)$, где σ — произвольное глобальное сечение с условием $\sigma(x) = a$. $\square$

Теорема 5.2.5. Для произвольного полукольца S равносильны следующие условия:

- 1) S — слабо редуцированное риккартово полукольцо;
- 2) S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений некоторого полухаусдорфова пучка симметрических полуколец без делителей нуля.

Доказательство. Докажем импликацию $1) \implies 2)$. По теореме 5.2.3 полукольцо S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений пучка $(K_S, \text{Min } S)$. Пространство $\text{Min } S$ хаусдорфово по лемме 3.4.4. Пусть $\hat{s}, s \in S$, — произвольное глобальное сечение пучка K_S . Тогда

$$\text{supp } \hat{s} = \{P \in \text{Min } S : s \notin 0_P = P\} = D_1(S) -$$

открытое в пространстве $\text{Min } S$ множество. По лемме 5.2.4 пучок $(K_S, \text{Min } S)$ полухаусдорфов. Если $\hat{a}(P)\hat{b}(P) = \hat{0}(P)$, то $ab \in P$ ввиду полустрогости идеала P , откуда получаем, что $a \in P$ или $b \in P$. Следовательно, $S/\theta(P)$ — полукольцо без делителей нуля. Пусть $\hat{a}\hat{b}\hat{c} = \hat{a}\hat{b}\hat{d}$ в произвольной точке $P \in \text{Min } S$. Тогда $abc + u = abd + v$ для некоторых $u, v \in P$. Множество $U = z(\hat{u}) \cap z(\hat{v})$ открыто-замкнуто в $\text{Min } S$ и содержит P . Найдётся элемент $e \in S$, такой что $\hat{e} = \hat{1}$ на U и $\hat{e} = \hat{0}$ на $\text{Min } S \subseteq U$. Тогда $abce = abde$, откуда получаем, что

$acbe = adbe$ ввиду симметричности S . Из равенства сечений $\widehat{acbe}$ и $\widehat{adbe}$ следует, что $\widehat{acb} = \widehat{adc}$ в точке P , поскольку $\hat{e}(P) = \hat{1}(P)$. Таким образом, каждый слой пучка — симметрическое полукольцо.

Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $S \cong \Gamma(P, X)$, пучок P полухаусдорфов со слоями — симметрическими полукольцами без делителей нуля. Очевидно, симметрическим будет полукольцо всех глобальных сечений. Отсутствие делителей нуля в каждом слое влечёт отсутствие в Γ ненулевых нильпотентов. Рассмотрим произвольное глобальное сечение $\hat{a}$. Носитель $\hat{a}$ открыто-замкнут, поэтому рассмотрим глобальное сечение $\hat{e}$, равное $\hat{0}$ на $\text{supp } \hat{a}$ и $\hat{1}$ на $X \setminus \text{supp } \hat{a}$. Для любого $\hat{b} \in \text{Ann } \hat{a}$ носитель $\hat{b}$ содержится в нуль-множестве $\hat{a}$ и, следовательно, в носителе $\hat{e}$. Поэтому $\hat{b} = \hat{e}\hat{b}$, и полукольцо S риккартово. $\square$

Определение. Полукольцо S назовём *бэровским*, если для любых $a, b \in S$ идеал

$$(a, b)^* = \{r \in S : asr = bsr \text{ для каждого } s \in S\}$$

порождается дополняемым идемпотентом. Скажем, что полукольцо S является *полукольцом без уравнивателей*, если из того, что $as = bs$, следует, что $a = b$ или $s = 0$.

Лемма 5.2.6. *Пирсовский слой бэровского полукольца является полукольцом без уравнивателей.*

Доказательство. Пусть $a(M)s(M) = b(M)s(M)$ для произвольных $a, b, s \in \Gamma(P)$, где P — пирсовский пучок полукольца S и $M \in \text{Max } BS$. Допустим, что $s(M) \neq 0$. Сечения as и bs совпадают на некоторой открыто-замкнутой окрестности U точки M из-за нульмерности $\text{Max } BS$. Рассмотрим характеристическое сечение $e \in \Gamma(P)$ множества U , равное 1 на U . Очевидно, выполняются соотношения $ase = bse$ и $aes = bes$. Пусть f — дополняемый идемпотент, порождающий $(ae, be)^*$. Поскольку $s \in (ae, be)^*$, то $s = sf$. Заметим, что f в каждом слое принимает либо значение 0, либо значение 1. Тогда $0 \neq s(M) = s(M)f(M)$, поэтому $f(M) = 1$. Учитывая, что $f \in (ae, be)^*$, получаем, что $a(M) = a(M)e(M)f(M) = b(M)e(M)f(M) = b(M)$. $\square$

Лемма 5.2.7. *Пирсовский пучок $(P, \text{Max } BS)$ бэровского полукольца S хаусдорфов.*

Доказательство. Пусть $a, b \in \Gamma(P)$, U — множество всех точек из $\text{Max } BS$, в которых совпадают сечения a и b , и $e \in B\Gamma$ порождает $(a, b)^*$. Ввиду отсутствия уравнивателей в слоях пучка P для любого $d \in (a, b)^*$ носитель $\text{supp } d$ лежит в U , в частности $\text{supp } e \subseteq U$.

Рассмотрим произвольную точку $m \in U$. Изоморфность пирсовского представления позволяет отождествить сечения пучка с соответствующими элементами полукольца S . Поэтому найдётся элемент $e_M \in BS \setminus M$, такой что $ae_M = be_M$. Поскольку $e_M \in (a, b)^*$, то $M \in \text{supp } e_M \subseteq \text{supp } e$, следовательно, $U \subseteq \text{supp } e$. Получили, что $U = \text{supp } e$ — открыто-замкнутое множество, и пучок хаусдорфов. $\square$

Теорема 5.2.8. *Полукольцо S бэровское тогда и только тогда, когда оно изоморфно полукольцу глобальных сечений хаусдорфова пучка полуколец без уравнителей.*

Доказательство. Необходимость установлена в двух предыдущих леммах.

Пусть (P, X) — хаусдорфов пучок полуколец без уравнителей и $a, b \in \Gamma(P)$. Множество U всех точек из X , в которых совпадают a и b , открыто-замкнуто, поэтому рассмотрим характеристическое сечение e множества U . Очевидно, $e \in (a, b)^*$. Если же $f \in (a, b)^*$, то ввиду отсутствия уравнителей в слоях имеем $\text{supp } f \subseteq U$. Отсюда вытекает, что $f = fe$, и $(a, b)^*$ порождается $e \in B\Gamma$, т. е. $\Gamma(P)$ — бэровское полукольцо. $\square$

5.3. Абелево-регулярные положительные полукольца

Определение [16]. Полукольцо S называется *абелево-регулярным положительным* (кратко *агр-полукольцом*), если оно регулярно (разрешимо уравнение $axa = a$ для любого $a \in S$), положительно ($s + 1$ обратим для любого $s \in S$) и все идемпотенты из S центральны.

В [16] (см. также [31]) построена структурная теория агр-полуколец. Каждому агр-полукольцу S ставится в соответствие тройка инвариантов:

- 1) дистрибутивная решётка $L(S)$ всех идемпотентов полукольца S ;
- 2) полутело без нуля $U(S)$ всех обратимых в S элементов;
- 3) канонический антигомоморфизм φ_S из решётки $L(S)$ в решётку $\text{Con } U(S)$ конгруэнций на $U(S)$ (отображение $\varphi_S: L(S) \rightarrow \text{Con } U(S)$ определяется соотношением $\varphi_S(e) = \sim_e$, где $u \sim_e v$, если и только если $eu = ev$).

Описание агр-полуколец сводится к изучению указанной тройки.

Укажем те свойства агр-полуколец, которые потребуются нам при построении функциональных представлений для некоторых классов агр-полуколец.

Пусть $a \sim_S b$ означает, что $aS = bS$ для $a, b \in S$.

Предложение 5.3.1 [16, предложение 2.1]. Пусть S — агр-полукольцо. Тогда

- 1) для каждого $a \in S$ существуют единственный идемпотент $e_a \in L(S)$ и обратимый элемент $u \in U(S)$, такие что $a = e_a u$;
- 2) все односторонние идеалы в S являются двусторонними;
- 3) S — симметрическое полукольцо без ненулевых нильпотентных элементов;
- 4) эквивалентны следующие три соотношения: $a \sim_S b$, $a = bu$ для некоторого $u \in U(S)$, $e_a = e_b$;
- 5) $aS + bS = (a + b)S$;
- 6) $(U(S), +, \cdot)$ — полутело без нуля;
- 7) отношение $\sim_S$ является конгруэнцией на полукольце S , фактор-полукольцо $S/\sim_S$ является ограниченной дистрибутивной решёткой;
- 8) $(L(S), \vee, \cdot)$ — дистрибутивная решётка, изоморфная решётке $S/\sim_S$, где $f \vee g = e_{f+g}$ для любых $f, g \in L(S)$;

- 9) решётка всех идеалов из S изоморфна дистрибутивной решётке всех идеалов дистрибутивной решётки $L(S)$.

Предложение 5.3.2 [16, теорема 2.2]. Для произвольного полукольца S равносильны следующие свойства:

- 1) S — агр-полукольцо;
- 2) S — слабо симметрическое полукольцо, $\sim_S$ — конгруэнция на S , $S/\sim_S$ — дистрибутивная решётка;
- 3) S — положительное полукольцо, в котором каждый идемпотент централен, и $S = L(S) \cdot U(S)$.

Сформулированные утверждения указывают на связь агр-полуколец и дистрибутивных решёток. Естественным образом возникают классы полуколец, имеющие решёточные корни.

Определение. Полукольцо S называется

- *нормальным (конормальным)*, если для любых $a, b \in S$ с условием $a + b = 1$ ($ab = 0$) существуют такие $x, y \in S$, что элементы $a + x$ и $b + y$ обратимы и $xy = 0$ ($ax = by = 0$ и элемент $x + y$ обратим);
- *вполне нормальным (вполне конормальным)*, если для любых $a, b \in S$ найдутся такие $x, y \in S$, что $xy = 0$, $b \in (a + x)S$ и $a \in (b + y)S$ ($x + y = 1$, $ax \in bS$ и $by \in aS$);
- *строго нормальным*, если для любых $a, b \in S$ существуют $x, y, z \in S$, для которых элемент $x + y$ обратим, $xyz = 0$, $b \in (a + xz)S$ и $a \in (b + yz)S$;
- *цепным*, если решётка всех идеалов в S является цепью.

В случае ограниченных дистрибутивных решёток введённые определения совпадают с известными понятиями [14, 64, 72, 102].

Предложение 5.3.3. Пусть S — произвольное агр-полукольцо и P — одно из следующих свойств полуколец:

- 1) нормальность;
- 2) конормальность;
- 3) полная нормальность;
- 4) полная конормальность;
- 5) строгая нормальность;
- 6) каждый идемпотент полукольца дополняем;
- 7) полукольцо цепное;
- 8) строгая гармоничность;
- 9) полукольцо имеет единственный максимальный идеал.

Тогда S обладает свойством P в том и только в том случае, когда свойством P обладает дистрибутивная решётка $S/\sim_S$.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{s}$ класс элемента $s \in S$ в полукольце $S/\sim_S$.

Рассмотрим первое свойство. Пусть S — нормальное полукольцо и $\tilde{a} + \tilde{b} = \tilde{1}$. Тогда $e_a + e_b \in U(S)$ и $e_a u + e_b u = 1$ для $u = (e_a + e_b)^{-1}$. Для подходящих $x, y \in S$ элементы $e_a u + x$, $e_b u + y$ обратимы и $xy = 0$. Получаем, что $\tilde{a} + \tilde{x} = \tilde{1}$, $\tilde{b} + \tilde{y} = \tilde{1}$, $\tilde{x}\tilde{y} = \tilde{0}$, и решётка $S/\sim_S$ нормальна. Обратно, пусть $S/\sim_S$ — нормальная решётка и $a + b = 1$. Тогда $\tilde{a} + \tilde{b} = \tilde{1}$. Для подходящих $x, y \in S$ элементы $\tilde{a} + \tilde{x}$, $\tilde{b} + \tilde{y}$ обратимы (а значит, равны $\tilde{1}$) и $\tilde{x}\tilde{y} = \tilde{0}$. Последнее равенство влечёт $xy = 0$. Поскольку $a + x$ — обратимый элемент, то $au + xu = 1$ для $u = (a + x)^{-1}$. Получаем, что $au + a + xu = 1 + a$ и $a + xu(u + 1)^{-1} = (1 + a)(u + 1)^{-1} \in U(S)$. Аналогично $b + yv(v + 1)^{-1} \in U(S)$ для $v = (b + y)^{-1}$. Наконец, $xu(u + 1)^{-1}yv(v + 1)^{-1} = 0$ ввиду симметричности S .

Таковыми же стандартными рассуждениями доказываются утверждения для свойств 2)–6).

Рассмотрим седьмое свойство. Пусть S — цепное полукольцо и $\tilde{A}, \tilde{B}$ — идеалы решётки $S/\sim_S$. Для их полных прообразов $\varphi^{-1}(\tilde{A})$, $\varphi^{-1}(\tilde{B})$ при естественном гомоморфизме $\varphi: S \rightarrow S/\sim_S$, являющихся идеалами в S , положим $\varphi^{-1}(\tilde{A}) \subseteq \varphi^{-1}(\tilde{B})$. Тогда

$$\tilde{A} = \varphi(\varphi^{-1}(\tilde{A})) \subseteq \varphi(\varphi^{-1}(\tilde{B})) = \tilde{B}.$$

Обратно, пусть A, B — идеалы в S и $S/\sim_S$ — цепная решётка. Пусть $\varphi(A) \subseteq \varphi(B)$ — идеалы. Предположим, что $A \not\subseteq B$ и существует $a \in A \setminus B$. Тогда $\varphi(a) \in \varphi(B)$ и $a \sim_S b$ для некоторого $b \in B$. По предложению 5.3.1 $a = bu \in B$, противоречие, показывающее, что $A \subseteq B$.

Для доказательства оставшихся свойств предложения нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5.3.4. Пусть S — агр-полукольцо, $\varphi: S \rightarrow S/\sim_S$ — канонический эпиморфизм. Тогда для любого первичного идеала P полукольца S идеал $\varphi(P)$ первичен и соответствие φ между упорядоченными множествами первичных идеалов из S и $S/\sim_S$ биективно и изотонно.

Доказательство. Заметим, что любой первичный идеал агр-полукольца вполне первичен. Действительно, пусть $P \in \text{Спец } S$ и $ab \in P$. Поскольку $b = e_b u$, $u \in U(S)$, то $ae_b \in P$, и следовательно, $ase_b \in P$ для любого $s \in S$ ввиду центральности e_b . Тогда $asb \in P$, откуда получаем, что $a \in P$ или $b \in P$. Пусть $\tilde{a}\tilde{b} \in \varphi(P)$ для $P \in \text{Спец } S$. Тогда для некоторого $p \in P$ имеем $(ab) \sim_S p$, откуда следует, что $abu \in P$ для некоторого $u \notin P$. Получаем, что $a \in P$ или $b \in P$, откуда следует, что $\tilde{a} \in \varphi(P)$ или $\tilde{b} \in \varphi(P)$. Для доказательства инъективности φ как соответствия между упорядоченными множествами первичных идеалов из S и $S/\sim_S$ рассмотрим два различных первичных идеала A и B . Найдутся либо $a \in A \setminus B$, либо $b \in B \setminus A$. Предположим, что $\varphi(A) = \varphi(B)$. Тогда в первом случае $a \sim_S c$ для некоторого $c \in B$, откуда следует, что $c = au$, $u \in U(S)$, противоречие с первичностью B . Аналогичное противоречие получаем во втором случае, и φ инъективно. Произвольный первичный идеал $\tilde{P}$ из $S/\sim_S$ вполне первичен, поэтому вполне первичным будет $\varphi^{-1}(\tilde{P})$. Это доказывает сюръективность φ . Изотонность отображения φ очевидна. $\square$

Вернёмся к доказательству предложения.

Рассмотрим восьмое свойство. Пусть S — строго гармоническое полукольцо. Из леммы 5.3.4 вытекает, что максимальный идеал в $S/\sim_S$ может иметь только вид $\varphi(M)$, $M \in \text{Max } S$. Опустим тривиальный случай, когда S и $S/\sim_S$ имеют по одному максимальному идеалу. Пусть $\varphi(M) \neq \varphi(N)$ для различных $M, N \in \text{Max } S$. Тогда $aSb = 0$ для подходящих $a \notin M, b \notin N$. Если $\varphi(a) \in \varphi(M)$, то $a \sim_S t$ для подходящего $t \in M$ и $t = au$ для $u \in U(S)$, что противоречит первичности максимального идеала. Поэтому $\varphi(a) \notin \varphi(M)$, $\varphi(b) \notin \varphi(N)$ и

$$\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab) = \varphi(0) = \tilde{0}.$$

Из симметричности S следует, что $\varphi(a)(S/\sim_S)\varphi(b) = \tilde{0}$, и $S/\sim_S$ строго гармонично.

Обратно, пусть $S/\sim_S$ строго гармонично и M, N — различные максимальные идеалы полукольца S . Тогда $\varphi(M) \neq \varphi(N) \in \text{Max } S$ и $\tilde{a}S/\sim_S\tilde{b} = \tilde{0}$ для некоторых $a \in S \setminus M, b \in S \setminus N$. По свойствам конгруэнции $\sim_S$ и ввиду симметричности полукольца S получаем, что $aSb = 0$.

Осталось рассмотреть свойство 9). Условия единственности максимального идеала в полукольцах S и $S/\sim_S$ равносильны по лемме 5.3.4. $\square$

Предложение 5.3.5. Пусть S — *arg*-полукольцо. Тогда решётка $L(S)/\theta(\pi(P))$ изоморфна фактор-полукольцу полукольца $S/\theta(P)$ по конгруэнции $\sim_{S/\theta(P)}$ для любого $P \in \text{Spec } S$.

Доказательство. Пусть $[e]_P$ — класс идемпотента $e \in L(S)$ в решётке $L(S)/\theta(\pi(P))$ и $\varphi([e]_P) = (e)_P$ — класс фактор-полукольца $(S/\theta(P))/\sim_{S/\theta(P)}$, порождённый $[e]_{\theta(P)}$. Покажем, что φ — отображение. Пусть $[e]_P = [f]_P$. Тогда $e \vee g = f \vee h$ для некоторых $g, h \in 0_{\pi(P)}$. По предложению 5.3.1 $e_{e+g} = ef + h$, откуда получаем, что $e + g = (f + h)u$ для некоторого $u \in U(S)$. Поскольку $[u]_{\theta(P)} \in U(S/\theta(P))$, то $[e + g]_{\theta(P)} \sim_{S/\theta(P)} [f + h]_{\theta(P)}$, откуда следует, что $[e]_{\theta(P)} \sim_{S/\theta(P)} [f]_{\theta(P)}$.

Пусть $(e)_P = (f)_P$ для некоторых $e, f \in L(S)$. Поскольку классы $[e]_{\theta(P)}$ и $[f]_{\theta(P)}$ являются идемпотентами полукольца $S/\theta(P)$, то по утверждению 4) предложения 5.3.1 они равны. Тогда $e + u = f + v$ для некоторых $u, v \in 0_P$. По утверждениям 1) и 4) предложения 5.3.1 отображение $\pi: S \rightarrow (L(S), \vee, \cdot)$, $\pi(a) = e_a$, является гомоморфизмом. Имеем равенство $\pi(e + u) = \pi(f + v)$, из которого следует, что $\pi(e) \vee \pi(u) = \pi(f) \vee \pi(v)$ и $e \vee e_u = f \vee e_v$. Заметим, что $e_u, e_v \in 0_{\pi(P)}$, откуда получаем, что $(e)_P = (f)_P$, и следовательно, φ инъективно. Если $a = e_a u$, то

$$(a)_P = (e_a)_P(u)_P = (e_a)_P = \varphi([e_a]_P)$$

ввиду обратимости $[u]_{\theta(P)}$, поэтому φ сюръективно. Стандартно проверяется сохранение операций. $\square$

Теперь нашей задачей является характеристизация определённых выше полуколец. Предварительно укажем некоторые связи между ними, в том числе в терминах слоёв пучков Ламбека и Корниша.

Предложение 5.3.6. Пусть S — агр-полукольцо. Тогда

- 1) S строго нормально тогда и только тогда, когда оно нормально и вполне конормально (что равносильно тому, что оно конормально и вполне нормально);
- 2) S цепное тогда и только тогда, когда оно имеет единственный максимальный идеал и вполне конормально;
- 3) для любого $P \in \text{Spec } S$ полукольцо S/θ_P имеет единственный максимальный идеал;
- 4) все полукольца S/θ_P , $P \in \text{Spec } S$, цепные тогда и только тогда, когда все полукольца S/θ_M , $M \in \text{Max } S$, цепные;
- 5) все полукольца $S/\theta(P)$, $P \in \text{Spec } S$, имеют единственный максимальный идеал (цепные) тогда и только тогда, когда все полукольца $S/\theta(M)$, $M \in \text{Max } S$, имеют единственный максимальный идеал (цепные).

Доказательство. Докажем утверждение 1). Поскольку перечисленные условия равносильны в классе ограниченных дистрибутивных решёток [16, лемма 3], то они равносильны по предложению 5.3.3 в классе агр-полуколец.

Докажем утверждение 2). Покажем равносильность условий для ограниченной дистрибутивной решётки, а затем воспользуемся предложением 5.3.3. Пусть L — локальная вполне конормальная решётка и A, B — собственные идеалы в L . Предположим, что существуют $a \in A \setminus B$ и $b \in B \setminus A$. Тогда из полной конормальности L следует, что существуют $x, y \in L$, такие что $x + y = 1$, $ax \in bL$, $by \in aL$. Первое соотношение ввиду локальности L даёт, что либо $x = 1$, либо $y = 1$. Если $x = 1$, то $a \in bL \subseteq B$, противоречие. Обратно, пусть L — цепная решётка, $a, b \in L$ и для определённости $aL \subseteq bL$. Тогда, положив $x = 1$, $y = a$, получим, что $x + y = 1$, $ax \in bL$, $by \in aL$, т. е. L вполне конормальна. Кроме того, цепная решётка, очевидно, локальна.

Для доказательства утверждения 3) рассмотрим канонический эпиморфизм $f: S \rightarrow S/\theta_P$. Идеал $f(P)$, как легко показать, собственный. Пусть $f(a) \notin f(P)$ для некоторого $a \in S$. Тогда $e_a \notin P$ и $e_a e_a = 1e_a$, поэтому $f(e_a) = f(1)$. Получаем, что $f(a) = f(e_a u) = f(u)$ — обратимый элемент в S/θ_P , и $f(P)$ — наибольший идеал полукольца S/θ_P .

Доказательства утверждений 4) и одной части 5) вытекают из первичности максимального идеала и следующего результата.

Лемма 5.3.7. Если $\alpha \subseteq \beta$ — конгруэнции на полукольце S и фактор-полукольцо S/α цепное, то S/β также цепное полукольцо.

Доказательство. Пусть ψ, φ — канонические гомоморфизмы полукольца S в фактор-полукольца S/α и S/β соответственно. Рассмотрим произвольные идеалы A_β, B_β в S/β . Идеалы $\psi(\varphi^{-1}(A_\beta))$ и $\psi(\varphi^{-1}(B_\beta))$ цепного полукольца S/α сравнимы, пусть первый идеал лежит во втором. Возьмём a_β — произвольный элемент из A_β — и a — некоторый элемент из S , такой что $\varphi(a) = a_\beta$. Поскольку $a \in \varphi^{-1}(A_\beta)$, то $\psi(a) \in \psi(\varphi^{-1}(B_\beta))$. Поэтому $a \alpha b$ для некоторого $b \in \varphi^{-1}(B_\beta)$.

По условию $a \beta b$, поэтому $\varphi(a) = \varphi(b) \in B_\beta$ и $a_\beta \in B_\beta$. Таким образом, $A_\beta \subseteq B_\beta$. $\square$

Для доказательства утверждения 5) осталось показать, что наличие единственного максимального идеала в полукольцах $S/\theta(M)$, $M \in \text{Max } S$, влечёт выполнимость этого свойства во всех полукольцах $S/\theta(P)$, $P \in \text{Spec } S$. Предположим, что $S/\theta(M)$ содержит единственный максимальный идеал для произвольного $M \in \text{Max } S$. Тогда по предложению 5.3.3 таким же будет полукольцо $(S/\theta(M))/\sim_{S/\theta(M)}$, и следовательно, решётка $L(S)/\theta(\pi(M))$ локальна по предложению 5.3.5. Для произвольной ограниченной дистрибутивной решётки L локальность $L/\theta(P)$ для всех $P \in \text{Spec } S$ равносильна локальности $L/\theta(M)$ по всем максимальным идеалам из L [16, предложение 3], поэтому для любого $P \in \text{Spec } S$ полукольцо $S/\theta(P)$ будет иметь единственный максимальный идеал. $\square$

Теорема 5.3.8. *Произвольное полукольцо является агр-полукольцом тогда и только тогда, когда оно изоморфно полукольцу всех глобальных сечений некоторого пучка агр-полуколец с единственным максимальным идеалом.*

Доказательство. Пусть S — агр-полукольцо. Оно изоморфно полукольцу $\Gamma(L(S), \text{Spec } S)$ глобальных сечений своего ламбековского пучка. По предложению 5.3.5 каждый слой имеет единственный максимальный идеал. Обратное, покажем, что полукольцо $\Gamma(P, X)$ глобальных сечений агр-полуколец P_x , $x \in X$, является агр-полукольцом. Произвольный идемпотент $e \in \Gamma(P)$ принимает для любого $x \in X$ значение, являющееся центральным идемпотентом слоя P_x , поэтому e — центральный идемпотент. Для любого $s \in \Gamma(P)$ сечение $s + 1$, будучи обратимым элементом в каждом слое, обратимо и в $\Gamma(P)$, поэтому $\Gamma(P)$ — положительное полукольцо. Пусть $x \in X$. Существует элемент $b_x \in P_x$, для которого $s(x)b_xs(x) = s(x)$, причём легко показать, что b_x можно считать обратимым элементом. Рассмотрим $e_x = s(x)b_x$ и $t_x = b_x e_x$. Тогда $e_x = s_{s(x)}$, $s(x) = s(x)e_x = s(x)t_x s(x)$ и $t_x = s(x)^{-1}$ в группе $e_x U(P_x)$. Получаем, что уравнение $e_{s(x)}y = e_{s(x)}$ разрешимо в каждом слое P_x , а потому в $\Gamma(P)$ разрешимо уравнение $e_s y = e_s$. Пусть $y = t \in \Gamma(P)$ — решение, которое обладает свойством $t(x) = t_x$ для любого $x \in X$. Тогда $s(x)t(x)s(x) = s(x)t_x s(x) = e_x s(x) = s(x)$ для любого $x \in X$. Следовательно, $sts = s$ и $\Gamma(P)$ регулярно. $\square$

Напомним, что под полутелом мы понимаем полукольцо с делением, не являющееся телом.

Теорема 5.3.9. *Для любого полукольца S равносильны следующие условия:*

- 1) S — булево полукольцо;
- 2) S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений некоторого пучка полутел;
- 3) S — симметрическое полукольцо и S/θ_P — полутело для любого $P \in \text{Spec } S$;
- 4) S — агр-полукольцо и $\theta_P = \theta(P)$ для любого $P \in \text{Spec } S$.

Доказательство. Докажем импликацию $1) \implies 4)$. Поскольку $\theta_P \subseteq \theta(P)$ для любого $P \in \text{Спес } S$ в любом полукольце, то достаточно показать обратное включение. Пусть $a \theta_P b$, т. е. $ac = bc$ для некоторого $c = e_c u \in S \setminus P$. Ввиду первичности $e = e_c u \in S \setminus P$ и $e^\perp \in P$. Более того, $e^\perp \in 0_P$. Имеем, что

$$\begin{aligned} a + be^\perp &= ae + ae^\perp + be^\perp = acu^{-1} + ae^\perp + be^\perp = \\ &= bcu^{-1} + be^\perp + ae^\perp = be + be^\perp + ae^\perp = b + ae^\perp, \end{aligned}$$

и $a \theta(P) b$.

Докажем импликацию $4) \implies 3)$. Рассмотрим эпиморфизм $\pi: S \rightarrow (L(S), \vee, \cdot)$, при котором $\pi(a) = e_a$ для всех $a \in S$. По лемме 5.3.4

$$\text{Спес } L(S) = \{\pi(P) : P \in \text{Спес } S\}.$$

Пусть $Q \in \text{Спес } L(S)$ и $a \theta_Q b$ для $a, b \in L(S)$. Тогда $ae = be$ для некоторого $e \notin Q$. Первичный идеал $\pi^{-1}(Q)$ полукольца S , очевидно, не содержит e , поэтому $a \theta_{\pi^{-1}(Q)} b$. По условию $a \theta(\pi^{-1}(Q)) b$, следовательно, $a + u = b + v$ для некоторых $u, v \in 0_{\pi^{-1}(Q)}$. Пусть $u = e_u s$, $v = e_v t$ для подходящих $s, t \in U(S)$. Ввиду обратимости s, t имеем, что $e_u S = e_u s S$ и $e_v S = e_v t S$. По предложению 5.3.1 $(a + e_u)S = (b + e_v)S$ и $e_{a+e_u} = e_{b+e_v}$. Но тогда $a \vee e_u = b \vee e_v$, что означает, что $a \theta(Q) b$. Получаем, что $\theta_Q = \theta(Q)$ для любого $Q \in \text{Спес } L(S)$. По [11, теорема 3] $L(S)$ — булева решётка. Пусть $P \in \text{Спес } S$ и $a \in S \setminus 0_P$. Тогда $e_a = as$ для некоторого $s \in S$, $e_a \notin 0_P$, $e_a^\perp \in P$, откуда следует, что $e_a \notin P$. Поэтому $ase_a = e_a$ и $as \theta_P 1$. Следовательно, фактор-полукольцо S/θ_P является полутелом.

Докажем импликацию $3) \implies 2)$. Если S симметрично, то оно изоморфно полукольцу глобальных сечений пучка Ламбека со слоями S/θ_P , по условию являющимися полутелами.

Докажем импликацию $2) \implies 1)$. Пусть (P, X) — пучок полутел P_x , $x \in X$. Очевидно, каждое полутело является агр-полукольцом, поэтому по теореме 5.3.8 $\Gamma(P)$ является агр-полукольцом. Пусть $e = e^2 \in \Gamma(P)$. Для каждой точки $x \in X$ значение $e(x) \in P_x$ равно 0 или 1, поэтому нуль-множество $z(e) = \{x \in X : e(x) = 0\}$ открыто-замкнуто. Рассмотрим глобальное сечение f , равное 1 на $z(e)$ и 0 на $\text{supp } e$. Ясно, что $f = e^\perp$. Итак, $L(\Gamma(P))$ — булева решётка и $\Gamma(P)$ — булево полукольцо. $\square$

Выясним, что представляют собой полукольца глобальных сечений пучков полуколец с делением. Рассмотрим слабо симметрическое регулярное полукольцо S , в котором каждый идемпотент дополняем. Оно бирегулярно (т. е. каждый главный идеал порождается дополняемым идемпотентом), поэтому изоморфно полукольцу $\Gamma(L)$ всех глобальных сечений своего ламбековского пучка. Базисное пространство $X = \text{Мах } S$ гомеоморфно $\text{Спес } S$ (лемма 3.5.3) и является нульмерным компактом. Для нашего полукольца базис $\text{Мах } S$ будет состоять из множеств вида $D(e)$, где e — дополняемый идемпотент. Пусть $\hat{a}$, $a \in S$, — произвольное глобальное сечение пучка L . В слое L_M , $M \in \text{Мах } S$, $\hat{a}(M) \neq \hat{0}(M)$ тогда и только тогда, когда $a \notin M$, откуда вытекает, что каждый слой пучка L

является полукольцом с делением. Действительно, из того, что $M + aS = S$, следует, что $m + ar = 1$ для некоторого $r \in S$. Для подходящего $c \notin M$ и любого $s \in S$ получаем, что $arsc = 1sc$. Это означает, что $ar \theta_M 1$, или $\hat{a}(M)\hat{r}(M) = \hat{1}(M)$.

Теорема 5.3.10. Слабо симметрические регулярные полукольца, в которых каждый идемпотент дополняем, — это с точностью до изоморфизма полукольца глобальных сечений пучков полуколец с делением над нульмерными компактными.

Доказательство. Пусть P — пучок полуколец с делением над нульмерным компактом X и σ — произвольное глобальное сечение пучка. Для каждой точки x из носителя $\text{supp } \sigma$ элемент $\sigma(x)$ обратим в слое P_x , следовательно, найдётся глобальное сечение γ , такое что $\gamma(x)\sigma(x) = 1(x)$ и $\gamma\sigma$ совпадает с единичным сечением на некоторой открытой окрестности U_x точки x , причём, $U_x \subseteq \text{supp } \sigma$. Следовательно, $\text{supp } \sigma$ — открыто-замкнутое подмножество пространства X . Ввиду нульмерности найдётся открыто-замкнутое множество $V_x \subseteq U_x$, содержащее точку x . Компактность X позволяет выбрать из покрытия $\{V_x : x \in \text{supp } \sigma\}$ множества $\text{supp } \sigma$ конечное подпокрытие $V_1, \dots, V_k$, причём можно считать множества непересекающимися. Для соответствующих сечений $\gamma_i \in \Gamma$ имеем, что $\sigma\gamma_i = 1$ на V_i . Пусть $\delta_i = \gamma_i\varepsilon_i$, где ε_i — соответствующее характеристическое глобальное сечение, равное 1 на V_i и 0 на $X \setminus V_i$. Очевидно, что $\sigma\delta_i = 1$ на V_i . Обозначим $\delta = \delta_1 + \dots + \delta_k \in \Gamma$ и получим, что $\sigma\delta\sigma = \sigma$ в каждой точке пространства X . Действительно, если $x \in \text{supp } \sigma$, то $\delta(x) = \sigma^{-1}(x)$, а для $x \in X \setminus \text{supp } \sigma$ обе части равенства равны нулю слоя P_x . Мы показали, что Γ — регулярное полукольцо. Пусть $\sigma\gamma = \sigma\delta$ для произвольных σ, γ, δ . Как и при доказательстве регулярности, возьмём глобальное сечение ρ , которое обратимо в каждой точке из $\text{supp } \sigma$ и равно нулю на $X \setminus \text{supp } \sigma$. Умножив $\sigma\gamma = \sigma\delta$ на ρ слева и на σ справа, получим, что $\gamma\sigma = \delta\sigma$. Аналогично доказывается обратная импликация, и Γ слабо симметрично. Наконец, произвольный идемпотент из Γ принимает в каждом слое значение, равное нулю или единице. Ясно, что он дополняем. Теорема доказана. $\square$

Теорема 5.3.11. Для всякого агр-полукольца S эквивалентны следующие свойства:

- 1) S — нормальное полукольцо;
- 2) S — строго гармоническое полукольцо;
- 3) S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений компактного пучка полуколец с единственным максимальным идеалом;
- 4) для любого $P \in \text{Spec } S$ полукольцо $S/\theta(P)$ имеет единственный максимальный идеал;
- 5) $\theta_M = \theta(M)$ для всех $M \in \text{Max } S$.

Доказательство. Свойства 1) и 2) эквивалентны для ограниченных дистрибутивных решёток [70, лемма 1]. Поэтому по предложению 5.3.1 свойства эквивалентны в классе агр-полуколец.

Свойства 2) и 3) равносильны согласно характеристике строго гармонических полуколец и ввиду замкнутости класса агр-полуколец относительно гомоморфных образов.

Импликация 5) $\implies$ 4) вытекает из утверждений 3) и 5) предложения 5.3.6.

Докажем импликацию 4) $\implies$ 1). Пусть $S/\theta(P)$ имеет единственный максимальный идеал. Тогда локальной будет решётка $(S/\theta(P))/\sim_{S/\theta(P)}$, а по предложению 5.3.5 и решётка $L(S)/\theta_{\pi(P)}$. Характеризация нормальной решётки [16, предложение 3] позволяет сделать вывод о нормальности $L(S)$. Остаётся применить предложение 5.3.3.

Докажем импликацию 1) $\implies$ 5). Пусть S — нормальное агр-полукольцо и M — его максимальный идеал. Пусть $a \theta_M b$ для $a, b \in S$. Тогда $ac = bc$ для некоторого $c \in S \setminus M$. По предложению 5.3.1 M является максимальным правым идеалом, поэтому $m + ck = 1$ для подходящих $m \in M$ и $k \in S$. Если $d = ck$, то $m + d = 1$ и $m + d = 1$. Так как S нормально, существуют такие $x, y \in S$, что $m + x, d + y \in U(S)$ и $xy = 0$. Тогда $x \notin M$ и $y \in 0_M$. Кроме того, $ds + ys = 1$ для некоторого $s \in S$ и

$$a + (bys + ys) = ads + ays + bys + ys = bds + bys + ays + ys = b + (ays + ys).$$

Поскольку элементы $bys + ys$ и $ays + ys$ лежат в 0_M , то $a \theta(M) b$. $\square$

Теорема 5.3.12. Для агр-полукольца S равносильны следующие свойства:

- 1) S вполне конормально;
- 2) все полукольца S/θ_P цепные;
- 3) все полукольца S/θ_M цепные.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Заметим, что полная конормальность полукольца сохраняется при переходе к гомоморфным образам. Поэтому S/θ_P вполне конормальное, а по утверждению 3) предложения 5.3.6 оно локальное. По утверждению 2) того же предложения S/θ_P цепное.

Импликация 2) $\implies$ 3) очевидна.

Докажем импликацию 3) $\implies$ 1). Пусть выполнено условие 3), но полукольцо S не является вполне конормальным. Тогда найдутся такие $a, b \in S$, что для любых $x, y \in S$ из соотношений $ax \subseteq bS$, $by \subseteq aS$ следует, что $x + y \neq 1$. Рассмотрим $I = \{x \in S: ax \subseteq bS\}$ и $J = \{y \in S: by \subseteq aS\}$ — идеалы полукольца S . Поскольку $I + J \neq S$, то $I + J \subseteq M$ для некоторого максимального идеала M . По условию S/θ_M — цепное полукольцо, поэтому идеалы, порождённые элементами $[a], [b] \in S/\theta_M$, сравнимы в решётке идеалов. Пусть $[a]S/\theta_M \subseteq [b]S/\theta_M$. Тогда $[a] = [b][s]$ для некоторого $s \in S$ и $ac = bsc$ для подходящего элемента $c \in S \setminus M$. Мы получили, что $ac \in bS$, следовательно, $c \in I \subseteq M$, противоречие, показывающее, что S вполне конормальное полукольцо. $\square$

Теорема 5.3.13. Для любого агр-полукольца S эквивалентны следующие свойства:

- 1) S — строго нормальное полукольцо;

- 2) S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений компактного пучка цепных полуколец;
- 3) все полукольца $S/\theta(P)$, $P \in \text{Spec } S$, цепные;
- 4) все полукольца $S/\theta(M)$, $M \in \text{Max } S$, цепные.

Доказательство. Докажем импликацию $1) \implies 2)$. Полукольцо S нормально и вполне конормально по утверждению 1) предложения 5.3.6, поэтому оно изоморфно полукольцу глобальных сечений компактного пучка (P, X) (теорема 5.3.11). Ввиду строгой гармоничности S пучок (P, X) можно считать совпадающим с пучком Ламбека полукольца S , поэтому его слои изоморфны полукольцам S/θ_M , $M \in \text{Max } S$, являющимся по теореме 5.3.12 цепными полукольцами.

Докажем импликацию $2) \implies 4)$. Пусть выполнено свойство 2). Напомним, что базисное пространство компактного пучка (P, X) локальных полуколец гомеоморфно $\text{Max } \Gamma(P)$, а слой P_x при отождествлении $x \equiv N \in \text{Max } \Gamma(P)$ изоморфен $S/\theta(N)$, откуда и вытекает 4).

Свойства 3) и 4) равносильны по утверждению 5) предложения 5.3.6.

Докажем импликацию $3) \implies 1)$. Пусть $S/\theta(P)$ — цепное полукольцо для любого $P \in \text{Spec } S$. По предложению 5.3.3 решётка $(S/\theta(P))/\sim_{S/\theta(P)}$ — цепное полукольцо. (Покажем, что решётка C , являющаяся цепным полукольцом, есть цепь. Действительно, $a, b \in C$ и $aC \subseteq bC$. Тогда $a = bc$ для некоторого $c \in C$, откуда следует, что $a \leq b$.) По предложению 5.3.5 решётка $(S/\sim_S)/\theta(\pi(P))$ также является цепью для каждого простого идеала $\pi(P) \in \text{Spec } S/\sim_S$. По теореме Вечтомова [16] $S/\sim_S$ является строго нормальным, следовательно, S строго нормально по предложению 5.3.3. $\square$

5.4. Применение пучков к гельфандовым полукольцам

Этот раздел является продолжением разделов 3.2, 3.3. Изучение строго гармонических и гельфандовых полуколец ведётся в пучковых терминах и с использованием различных пучковых конструкций.

Предложение 5.4.1. Для гельфандова полукольца S и его пучка Ламбека $(L(S), \text{Max } S)$ справедливы следующие утверждения:

- 1) $(L(S), \text{Max } S)$ — компактный пучок;
- 2) слои $L_M = S/\theta_M$ — локальные полукольца.

Доказательство. 1. В теореме 3.3.3 показано совпадение в гельфандовом полукольце множеств максимальных правых и максимальных идеалов. Кроме того, известно, что для любого полукольца S его максимальный спектр компактен. Хаусдорфовость $\text{Max } S$ следует из определения гельфандова полукольца. Договоримся образы элементов $s \in S$ в $\Gamma(L)$ обозначать $\hat{s}$. Произвольное сечение из J_M ввиду изоморфности ламбековского представления строго гармонического полукольца имеет вид $\hat{s}$ для подходящего $s \in S$. Тогда $s \theta_M 0$, т. е. $sSc = 0$ для некоторого $c \notin M$. Отождествив элементы из Γ с соответствующими элементами полукольца S , получим, что $J_M \subseteq 0_M$. Очевидно и обратное включение.

Тогда $J_M + J_N = \Gamma(L)$ для различных $M, N \in \text{Max } S$, поскольку $0_M + 0_N = S$ для любого строго гармонического полукольца S .

2. Для различных максимальных правых идеалов M и N полукольца S , являющихся максимальными идеалами, найдутся элементы $a \notin N$, $b \notin M$, такие что $aSb = 0$. Поэтому $a \in 0_M \setminus N$, откуда получаем, что 0_M содержится в максимальном идеале M и только в нём. Класс нуля конгруэнции θ_M совпадает с 0_M . Идеал $\bar{M} = \{\bar{m} \in S/\theta_M : m \in M\}$, как легко показать, будет собственным, а поэтому единственным максимальным правым идеалом в S/θ_M . Если $\bar{s}, \bar{s} + \bar{t} \in \bar{M}$, то $s, s + t \in M$. Ввиду полустрогости M получаем, что $t \in M$, откуда следует, что $\bar{t} \in \bar{M}$, и S/θ_M — локальное полукольцо. $\square$

Приведём доказательство предложения 3.3.5.

Доказательство. 1. Пусть $a \in 0_M$, т. е. $asc = 0$ для $s \in S$ и некоторого $c \notin M$. Сечение $\hat{a}$ ламбековского пучка полукольца S равно нулю на некотором открытом множестве $U \subseteq \text{Max } S \setminus \text{supp } \hat{a}$, и по утверждению 2) леммы 3.3.1 $\hat{c}(M)$ — обратимый элемент слоя S/θ_M . Рассмотрим сечение $\hat{d}$, такое что $\hat{d} = 1$ в точке M и $\hat{d} = 0$ на замкнутом множестве $\text{supp } \hat{a}$. Имеем, что $cd \notin M$, так как $\hat{c}\hat{d}(M)$ обратим в S/θ_M . Тогда для любого $s \in S$ выполнено $cdsa = 0$, поскольку соответствующее сечение является нулевым на всём $\text{Max } S$. Это означает, что $a \in \bar{0}_M$. Симметричным образом показывается обратное включение. (Точнее говоря, строится «левый» пучок Ламбека со слоями по конгруэнциям

$$a \bar{\theta}_M b \iff \text{найдётся элемент } c \notin M, \text{ такой что } csa = csb \text{ для всех } s \in S$$

и классами нуля в слоях вида $\bar{0}_M$ и далее используются двойственные рассуждения.)

2. Пусть $M \in \text{Max } S$ и $a \theta_M b$, т. е. $asc = bsc$ для любого $s \in S$ и некоторого $c \notin M$. Сечения $\hat{a}$ и $\hat{b}$ пучка $L(S)$ совпадают на некоторой открытой окрестности U точки M . Введём обозначение $F = \text{Max } S \setminus U$. По предложению 3.3.4 ламбековский пучок гильфандова полукольца компактен, поэтому для него справедливы условия отделимости, описанные в теореме 4.1.1. В частности, найдутся сечения $\hat{d}$ и $\hat{b}$, такие что $\hat{b}(M) = \hat{1}$, $\hat{b}|_F = \hat{0}$ и $\hat{d}(M) = \hat{0}$, $\hat{d}|_F = \hat{1}$. Рассмотрим равенство

$$a + bd = b + ad. \quad (26)$$

Для любой точки $N \in F$ равенство (26) справедливо, так как $\hat{d}(N) = \hat{1}$. Для точки N из U (26) также выполняется, поскольку $\hat{a}$ и $\hat{b}$ равны на U . Таким образом, сечения $\hat{a} + \hat{b}\hat{d}$ и $\hat{b} + \hat{a}\hat{d}$ равны на всём базисном пространстве. Очевидно, что $ad, bd \in 0_M$, и поэтому $a \theta(M) b$. Получили, что $\theta_M \leq \theta(M)$. Обратное отношение справедливо для любого первичного идеала в произвольном полукольце. $\square$

Предложение 5.4.2. Для любого правого идеала I гильфандова полукольца справедливо равенство $\text{Vir } I = 0_{z(I)}$.

Доказательство. Пусть S — произвольное гельфандово полукольцо, $(L(S), \text{Max } S)$ — его ламбековский пучок. По теореме 4.2.10 S изоморфно полукольцу всех глобальных сечений пучка $L(S)$. Пусть I — произвольный правый идеал полукольца S . Покажем, что 0_B — чистая часть идеала I для $B = \{M \in \text{Max } S: I \subseteq M\}$. Поскольку 0_B является чистой частью идеала $\bigcap_{M \in B} M$, содержащего I , то достаточно показать, что $0_B \subseteq I$. Пусть $a \in 0_B = \{c \in S: \hat{c}|_B = \hat{0}\}$. Рассмотрим произвольную точку $N \in \text{supp } a$. Так как $I \not\subseteq N$, то существует $a_N \in I \setminus N$. Ввиду локальности слоя пучка найдётся элемент b_N , такой что $\hat{a}_N \hat{b}_N = \hat{1}$ в точке N . Получаем, что $a_N b_N S + 0_N = S$, поскольку N не содержит $a_N b_N$, а любой другой максимальный идеал не содержит 0_N . Кроме того, $a_N b_N s \in I$ для любого элемента $s \in S$. Нашлись, таким образом, элементы $u_N \in I$, $v_N \in N$, такие что $u_N + v_N = 1$, $\hat{u}_N(N) = \hat{1}(N)$. Поскольку $\hat{u}_N = \hat{1}$ на открытом $D(u_N)$ и множество всех $D(u_N)$, $N \in \text{supp } a$, покрывает замкнутое множество $\text{supp } a$, то выберем конечное число элементов $u_1, \dots, u_k$, $v_1, \dots, v_k$ со следующими свойствами:

$$u_i + v_i = 1, \quad \hat{u}_i|_{D(u_i)} = \hat{1}, \quad \hat{v}_i|_{D(u_i)} = \hat{0}, \\ D(u_1) \cup \dots \cup D(u_k) \supseteq \text{supp } \hat{a}.$$

Рассмотрим элементы

$$w_1 = v_1, \quad w_i = u_i v_{i-1} \cdots v_1 \text{ для всех } i = 2, \dots, k$$

Ясно, что они лежат в I . Заметим, что $w_1 + v_1 = 1$, и если

$$w_1 + \dots + w_{i-1} + v_{i-1} \cdots v_1 = 1,$$

то

$$w_1 + \dots + w_i + v_i \cdots v_1 = w_1 \cdots w_{i-1} + u_i v_{i-1} \cdots v_1 + v_i \cdots v_1 = \\ = w_1 + \dots + w_{i-1} + (u_i + v_i) v_{i-1} \cdots v_1 = 1.$$

Таким образом,

$$w_1 + \dots + w_k + v_k \cdots v_1 = 1.$$

Поскольку $\hat{v}_k \cdots \hat{v}_1 = 0$ на $\text{supp } \hat{a}$, то элемент $e = w_1 + \dots + w_k$ обладает свойствами $e \in I$ и $\hat{e} = \hat{1}$ на $\text{supp } a$. Поэтому $a = ae \in I$. $\square$

Подобно максимальному спектру определим *максимальный правый спектр* $\text{Max}_r S$ — пространство максимальных правых идеалов с топологией Стоуна—Зариского. Через

$$z_r(I) = \{M \in \text{Max}_r S: I \subseteq M\},$$

где I — правый идеал, обозначим замкнутое подмножество в максимальном правом спектре полукольца S .

Теорема 5.4.3. Для всякого γ -полукольца S равносильны следующие свойства:

- 1) S гельфандово;

- 2) S — строго гармоническое полукольцо, в котором каждый односторонний максимальный идеал является идеалом;
- 3) S гильфандово слева, т. е. для любых различных максимальных левых идеалов M и N найдутся элементы $a \notin M$ и $b \notin N$, такие что $aSb = 0$;
- 4) для любого максимального правого идеала M идеал 0_M содержится только в одном максимальном правом идеале полукольца S ;
- 5) $0_M + 0_N = S$ для любых различных максимальных правых идеалов M, N ;
- 6) $0_A + 0_M = S$ для любых замкнутого множества A пространства $\text{Max}_r S$ и $M \in \text{Max}_r S \setminus A$;
- 7) $0_A + 0_B = S$ для любых непересекающихся замкнутых множеств A и B из $\text{Max}_r S$;
- 8) для произвольных правых идеалов I и J из того, что $I + J = S$, следует, что $\text{Vir } I + \text{Vir } J = S$;
- 9) $\text{Vir } \sum_{\alpha} I_{\alpha} = \sum_{\alpha} \text{Vir } I_{\alpha}$ для произвольного семейства $\{I_{\alpha}\}$ правых идеалов из S ;
- 10) $z_r(0_{z_r(I)}) = z_r(I)$ для любого правого идеала I в S ;
- 11) для любых правого идеала I и $M \in \text{Max}_r S$ из того, что $0_{z_r(I)} \subseteq M$, следует, что $I \subseteq M$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\implies$ 2). Гильфандово полукольцо является строго гармоническим и rng -полукольцом. Поэтому по теореме 3.3.3 каждый односторонний максимальный идеал является идеалом.

Импликация 2) $\implies$ 1) очевидна.

Эквивалентность 3) $\iff$ 2) доказывается аналогично 1) $\iff$ 2), если учесть теорему 3.3.3.

Импликация 1) $\implies$ 4) доказывается точно так же, как и в предложении 3.2.1.

Очевидны импликации 4) $\implies$ 5), 7) $\implies$ 6) $\implies$ 5), 9) $\implies$ 8) (поскольку $\text{Vir } S = S$), 10) $\implies$ 11).

Докажем импликацию 11) $\implies$ 4). Пусть $0_M \subseteq N$ выполняется для некоторых $M, N \in \text{Max}_r S$. Поскольку $z_r(M) = \{M\}$, то получаем, что из $0_{z_r(M)} = 0_M \subseteq N$ следует по условию, что $M \subseteq N$, откуда получаем, что $M = N$.

Докажем импликацию 5) $\implies$ 1). Пусть $0_M + 0_N = S$ для $M \neq N \in \text{Max}_r S$. Тогда

$$m + n = 1 \quad (27)$$

для некоторых $m \in 0_M, n \in 0_N$. Выберем такие $u \notin M$ и $v \notin N$, что $mSu = 0$ и $nSv = 0$. Получаем из (27), что $nu = u$ и $mv = v$. Тогда для любого $s \in S$ выполнено

$$usv = nusmv \in nSv = 0,$$

т. е. S гильфандово.

Импликация 1) $\implies$ 10) справедлива по лемме 3.2.4 с учётом того, что гильфандово полукольцо строго гармонично и каждый максимальный правый идеал является максимальным.

Докажем импликацию 5) $\implies$ 7). Пусть A и B не пересекаются и $A = z(I)$, $B = z(J)$ для некоторых правых идеалов I и J . Предположим, что $0_A + 0_B \subseteq \subseteq K \in \text{Max}_r S$. Поскольку $I + L = S$, то можно считать, что $I \not\subseteq K$. Обозначим

$$0_A = \bigcap_{\alpha} 0_{M_{\alpha}}, \quad M_{\alpha} \in A.$$

Тогда для любого α $0_{M_{\alpha}}$ содержит I и, следовательно, отличен от K . Так как $0_K + 0_{M_{\alpha}} = S$ для любого α , то

$$S = \bigcap_{\alpha} (0_K + 0_{M_{\alpha}}) + 0_B \subseteq 0_K + \bigcap_{\alpha} 0_{M_{\alpha}} + 0_B \subseteq 0_K + K = K,$$

противоречие.

Докажем импликацию 8) $\implies$ 1). Пусть в $\text{Max}_r S$ даны $M \neq N$. Так как $M + N = S$, то по условию $\text{Vir } M + \text{Vir } N = S$. Тогда $a + k = 1$ при некотором $a \in \text{Vir } N \setminus M$. Чистота $\text{Vir } N$ даёт, что $\text{Vir } N + \text{Ann } a = S$. Снова по условию $\text{Vir } N + \text{Vir } \text{Ann } a = S$, т. е. $c + b = 1$ при некотором $b \in \text{Vir } \text{Ann } a \setminus N$. Поскольку $\text{Ann } aS$ — наибольший идеал, лежащий в правом идеале $\text{Ann } a$, то $b \in \text{Ann } aS$, т. е. $aSb = 0$, причём $a \notin M$ и $b \notin N$.

Докажем импликацию 1) $\implies$ 9). Ввиду строгой гармоничности гильбертова полукольца, учитывая лемму 3.2.5 и предложение 5.4.2, получаем, что

$$\text{Vir } \sum_{\alpha} I_{\alpha} = 0_{z(\sum_{\alpha} I_{\alpha})} = \sum_{\alpha} 0_{z(I_{\alpha})} = \sum_{\alpha} \text{Vir } I_{\alpha}. \quad \square$$

Приступим к рассмотрению представлений полуколец сечениями предпучка $(\mathbf{F}, \text{Pt } F)$ Симмонса. Поскольку по теореме 2.3.1 любое полукольцо изоморфно полукольцу сечений этого предпучка, то основным вопросом становится следующий: для каких классов полуколец предпучок Симмонса является пучком?

Напомним, что произвольное полукольцо S названо нами *коммутативным в нуле*, если равенство $ab = 0$ влечёт $ba = 0$ для любых элементов $a, b \in S$.

Лемма 5.4.4.

1. Пусть A — чистый идеал гильбертова полукольца. Тогда для произвольных элементов $a_1, \dots, a_k \in A$ найдутся элементы $f, e \in A$, такие что $fa_i = a_i = a_ie$ для любого $i = 1, \dots, k$.
2. Пусть A — чистый идеал коммутативного в нуле полукольца S . Тогда для любых элементов $a_1, \dots, a_k \in A$ найдётся такой элемент $e \in A$, что $ea_i = a_i = a_ie$.

Доказательство. 1. Пусть $a_1, \dots, a_k \in A$. Так как идеал A чист, то из $A + \text{Ann } a_i = S$ получаем, что

$$S = S^k \subseteq A + \text{Ann } a_1 \cdot \dots \cdot \text{Ann } a_k \subseteq A + \bigcap_{i=1}^k \text{Ann } a_i.$$

Тогда для подходящих $e \in A$ и $r \in \bigcap \text{Ann } a_i$ имеем $e + r = 1$, откуда получаем, что

$$a_i = a_i(e + r) = a_ie + a_ir = a_ie.$$

Заметим, что предложение 3.3.5 показывает, что ламбековский пучок гельфандова полукольца и его левый аналог совпадают. Поэтому предложение 3.3.6 и лемма 3.2.4 позволяют описать чистый идеал A как идеал, удовлетворяющий равенству $A + \widetilde{\text{Ann}} a = S$ для любого $a \in A$. Далее рассуждаем так же, как и в первой части доказательства.

2. В коммутативном в нуле полукольце аннулятор элемента является двусторонним идеалом, поэтому $A + \bigcap_{i=1}^k \text{Ann } a_i = S$. Для подходящих $e \in A$ и $r \in \bigcap \text{Ann } a_i$ выполняется $e + r = 1$, откуда вытекают доказываемые равенства. $\square$

Теорема 5.4.5. Пусть F — фрейм всех чистых идеалов полукольца S . Тогда предпучок $(\mathbf{F}, \text{Pt } F)$ является пучком в каждом из следующих случаев:

- 1) S гельфандово;
- 2) S — коммутативное в нуле полукольцо;
- 3) S — кольцо;
- 4) фрейм F всех чистых идеалов из S является цепью.

Доказательство. Пусть U — открытое подмножество в $\text{Pt } F$, $U = p^*(A)$ для некоторого чистого идеала A и $\bigcup_{i \in I} p^*(A_i)$, $A_i \in F$, — покрытие U . Тогда $\sum_{i \in I} A_i \supseteq A$. Пусть имеются $\varphi_i \in \text{End } A_i$, такие что $\varphi_i|_{A_j} = \varphi_j|_{A_i}$ для любых $i, j \in I$. Если $x \in A$ и $x = x_1 + \dots + x_n$, x_i лежит в некотором A_i , то положим $\varphi(x) = \varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n)$. Покажем, что φ — отображение. Пусть $x = y_1 + \dots + y_n$. Без ограничения общности мы можем считать оба представления элемента x состоящими из одинакового числа слагаемых, причём соответствующие слагаемые x_i, y_i лежат в одном идеале A_i . Элементы $x_i, y_i, \varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n), \varphi_1(y_1) + \dots + \varphi_n(y_n)$ чистого идеала A обладают общими локальными единицами f и e , лежащими в идеале A . Можно считать, что

$$f = f_1 + \dots + f_n, \quad e = e_1 + \dots + e_n$$

для $f_i, e_i \in A_i$. Получаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n) &= (\varphi_1(x_1) + \dots + \varphi_n(x_n))e = \\ &= \varphi_1(x_1e) + \dots + \varphi_n(x_ne) = \varphi_1(fx_1) + \dots + \varphi_n(fx_n) = \\ &= \varphi_1((f_1 + \dots + f_n)x_1) + \dots + \varphi_n((f_1 + \dots + f_n)x_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_ix_1) + \dots + \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_ix_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_i)(x_1 + \dots + x_n) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_i)(y_1 + \dots + y_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_iy_1) + \dots + \sum_{i=1}^n \varphi_i(f_iy_n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \varphi_1((f_1 + \dots + f_n)y_1) + \dots + \varphi_n((f_1 + \dots + f_n)y_n) = \\
 &= \varphi_1(fy_1) + \dots + \varphi_n(fy_n) = \varphi_1(y_1e) + \dots + \varphi_n(y_ne) = \\
 &= (\varphi_1(y_1) + \dots + \varphi_n(y_n))e = \varphi_1(y_1) + \dots + \varphi_n(y_n).
 \end{aligned}$$

Очевидно, что отображение φ является эндоморфизмом S -полумодуля A . Если $s \in A_i$, то по определению φ получаем, что $\varphi(s) = \varphi_i(s)$, т. е. ограничение φ на A_i даёт φ_i . Значит, выполняется условие P2 и $(\mathbf{F}, \text{Pt } F)$ является пучком.

Второе утверждение доказывается аналогично первому с применением леммы 5.4.4.

Третье утверждение справедливо по [55, теорема 2.8].

Утверждение 4) очевидно. $\square$

5.5. Двойственность Малви

В этом разделе доказана двойственность категории гельфандовых полуколец и их гомоморфизмов и категории компактных пучков локальных полуколец и их когомоморфизмов.

В предложении 5.4.1 показано, что ламбековский пучок гельфандова полукольца компактен, а его слои — локальные полукольца. Верным оказывается и обратное утверждение.

Предложение 5.5.1. *Полукольцо всех глобальных сечений компактного пучка (P, X) локальных полуколец гельфандово.*

Доказательство. Сформулируем предварительно несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 5.5.2. *Для любого максимального правого идеала M полукольца Γ глобальных сечений компактного пучка (P, X) существует единственная точка $x \in X$, для которой $J_x \subseteq M$, и в этом случае $J_x \subseteq 0_M$.*

Как и прежде, обозначим через $f_x: \Gamma \rightarrow P_x$ естественный эпиморфизм полукольца Γ на слой в точке x .

Лемма 5.5.3. *Пусть M — максимальный правый идеал полукольца и $J_x \subseteq M$. Тогда $f_x(M) \neq P_x$.*

Пусть M — максимальный правый идеал слоя P_x компактного пучка (P, X) . Определим идеал

$$M_x = \{\gamma \in \Gamma: \gamma(x) \in M\} = f_x^{-1}(M).$$

Лемма 5.5.4. *Максимальными правыми идеалами полукольца Γ компактного пучка (P, X) являются идеалы M_x и только они.*

Доказательства этих утверждений почти дословно повторяют доказательства лемм 4.1.4, 4.1.5 и предложения 4.1.6.

Приступим к доказательству предложения 5.5.1. Пусть M_x и M_y ($x \neq y$) — максимальные правые идеалы полукольца $\Gamma(P)$. Поскольку $J_x + J_y = \Gamma$, то

$\varphi + \psi = 1$ для некоторых $\varphi \in J_x$, $\psi \in J_y$. Пусть $X \setminus U$ — замкнутое множество точек из X , в которых φ отлично от нуля. Рассуждая как при доказательстве леммы 4.1.5, найдём сечение σ , такое что $\sigma(x) = 1$ и $\sigma(t) = 0$ для каждой точки $t \in X \setminus U$. Так как $z(\varphi) \cup z(\sigma) = X$, то $\varphi\Gamma\sigma = 0$ и $\varphi \notin J_y$, $\sigma \notin J_x$. Осталось показать, что $\Gamma(P)$ является Γ -полукольцом. Заметим, что леммы 5.5.2—5.5.4 остаются верными при замене правого максимального идеала на левый максимальный. Поэтому достаточно показать полустрогость максимальных правых идеалов. Это вытекает из строения максимальных правых идеалов полукольца $\Gamma(P)$ и полустрогости максимального правого идеала в каждом слое. Предложение доказано. $\square$

Пусть $f: S \rightarrow T$ — гомоморфизм гельфандовых полуколец. Покажем, что произвольный идеал $N \in \text{Max} T$ вполне первичен. Действительно, N является как максимальным правым, так и максимальным левым идеалом. Найдутся элементы $n_1, n_2 \in N$, $s_1, s_2 \in S$, такие что $1 = n_1 + s_1a = n_2 + bs_2$. Тогда $1 = n + s_1abs_2$, $n \in N$. Поскольку N является полустрогим, то $s_1abs_2 \notin N$ и $ab \notin N$.

Легко показать, что прообразы при гомоморфизмах вполне первичных идеалов вполне первичны, поэтому $f^{-1}(N)$ первичен в S и содержится в однозначно определённом максимальном идеале M гельфандова полукольца S . Положив $\varphi(N) = M$, получим отображение $\varphi: \text{Max} T \rightarrow \text{Max} S$.

Лемма 5.5.5. *Отображение φ непрерывно.*

Доказательство. Ввиду гельфандовости и свойств идеалов вида 0_M эквивалентны соотношения $\varphi(N) = M$, $f^{-1}(N) \subseteq M$, $0_M \subseteq f^{-1}(N)$, $f(0_M) \subseteq N$. Пусть $b \in f(0_M) \subseteq N$ и $b = f(a)$ для некоторого $a \in 0_M$. Тогда $\text{Ann } a + 0_M = S$. Возьмём $c \in \text{Ann } a$ и $d \in 0_M$, такие что $c + d = 1$. Получаем, что $f(c) + f(d) = 1$, $f(c) \in \text{Ann } f(a)$ и $f(d) \in f(0_M) \subseteq N$. Поскольку $f(c) \notin N$, то $f(c)t + m = 1$ для подходящих $t \in T$ и $m \in 0_N$. Найдётся элемент $r \notin N$, такой что $mTr = 0$, поэтому для любого $s \in T$ получаем, что $f(c)tsr = sr$. Так как $f(a)f(c) = 0$, то $f(a)sr = 0$ и $\text{Ann } f(a)T \not\subseteq N$. Поэтому $\text{Ann } f(a)T + N = T$. Мы доказали эквивалентность соотношений

$$\varphi(N) = M \iff f(0_M) \subseteq N \iff f(0_M) \subseteq 0_N. \quad (28)$$

Возьмём замкнутое множество $B \subseteq \text{Max} S$. По лемме 3.2.4 $B = z(0_B)$. По (28) получаем для любого $N \in \text{Max} T$ эквивалентность соотношений $N \in \varphi^{-1}(z(0_B))$, $f^{-1}(N) \subseteq M$ для некоторого $M \in B = z(0_B)$, $0_M \subseteq f^{-1}(N)$ для некоторого $M \in B$, $0_B \subseteq f^{-1}(N)$, $f(0_B) \subseteq N$, $N \in z(f(0_B))$. Мы показали, что $\varphi^{-1}(B) = z(f(0_B))$, откуда следует непрерывность отображения φ . Лемма доказана. $\square$

Рассмотрим ламбековские пучки $L(S)$ и $L(T)$ полуколец S и T над пространствами $\text{Max} S$ и $\text{Max} T$ соответственно. Для каждого $N \in \text{Max} T$ определим гомоморфизм

$$f_N: S/\theta_M \rightarrow T/\theta_N, \quad f_N(\widehat{a(M)}) = \widehat{f(a)}(N), \quad (29)$$

где $M = \varphi(N)$ и $a \in S$. Из компактности ламбековского пучка гельфандова полукольца S и леммы 4.1.3 следует совпадение конгруэнции θ_M и отношения Бёрна $\theta(M)$:

$$a \theta(M) b \iff a + u = b + v \text{ для некоторых } u, v \in 0_M$$

для каждого максимального идеала из S . Поэтому соотношения (28) обеспечивают корректность гомоморфизма (29).

Пусть U — открытое множество в $\text{Max } S$ и $\alpha \in \Gamma(U)$ — локальное сечение над U . Определим отображение

$$\beta: \varphi^{-1}(U) \rightarrow L(T), \quad \beta(N) = f_N(\alpha(\varphi(N))). \quad (30)$$

Лемма 5.5.6. *Отображение β непрерывно.*

Доказательство. Выберем произвольно $N \in \varphi^{-1}(U)$ и окрестность $\hat{c}(V)$ точки $\beta(N)$ в $L(T)$ для $c \in T$ и открытого множества $V \subseteq \varphi^{-1}(U)$. Обозначим $M = \varphi(N)$ и возьмём $a \in S$, для которого $\hat{a}(M) = \alpha(M)$. Пусть A — открытое множество всех точек из U , в которых $\hat{a} = \alpha$, и C — множество тех точек из V , в которых $\widehat{f(a)} = \hat{c}$. Пусть $B = \varphi^{-1}(A) \cap C$ — окрестность точки N в $\text{Max } T$. Для любой точки $K \in B$ на основании (29) и (30) получаем, что

$$\beta(K) = f_K(\alpha(\varphi(K))) = f_K(\hat{a}(\varphi(K))) = \widehat{f(a)}(K) = \hat{c}(K) \in \hat{c}(V).$$

Это доказывает непрерывность β в произвольной точке N из $\varphi^{-1}(U)$.

Таким образом, мы получили, что $\beta \in \Gamma(\varphi^{-1}(U))$ — локальное сечение пучка $L(T)$, соответствующее локальному сечению $\alpha \in \Gamma(U)$ пучка $L(S)$. Всякому же глобальному сечению $\hat{a}$, $a \in S$, соответствует глобальное сечение $\widehat{f(a)}$, что восстанавливает исходный гомоморфизм

$$f: S \cong \Gamma(L(S), \text{Max } S) \rightarrow \Gamma(L(T), \text{Max } T) \cong T. \quad \square$$

Определение. Пусть P — пучок полуколец P_x над пространством X , R — пучок полуколец R_y над пространством Y . *Когомоморфизмом* пучка P в пучок R называется непрерывное отображение $\varphi: Y \rightarrow X$ и семейство (f_y) , $y \in Y$, полукольцевых гомоморфизмов $f_y: P_{\varphi(y)} \rightarrow R_y$, такие что для любого локального сечения α пучка P отображение β , определённое по формуле $\beta(y) = f_y(\alpha(\varphi(y)))$, непрерывно.

Теорема 5.5.7. *Функторы $L(S)$ и $\Gamma(L)$ осуществляют двойственность категории всех гельфандовых полуколец S и их гомоморфизмов и категории всех компактных пучков L локальных полуколец с когомоморфизмами в качестве морфизмов.*

Доказательство. Предложения 5.4.1 и 5.5.1 устанавливают взаимно-однозначное соответствие между объектами указанных категорий. Любой гомоморфизм $f: S \rightarrow T$ гельфандовых полуколец индуцирует когомоморфизм их

ламбековских пучков (леммы 5.5.5 и 5.5.6), по которому он восстанавливается. Обратно, всякий когоморфизм $P \rightarrow R$ произвольных пучков порождает гомоморфизм $\Gamma(P) \rightarrow \Gamma(R)$ их полуколец глобальных сечений. Если же P и R — компактные пучки локальных полуколец, то гомоморфизм $\Gamma(P) \rightarrow \Gamma(R)$ гельфандовых полуколец, очевидно, индуцирует исходный пучковый когоморфизм. $\square$

Доказанная теорема обобщает двойственность К. Дж. Малви [96] для гельфандовых колец, которая в свою очередь обобщает классическую двойственность Гельфанда между категорией полупростых коммутативных банаховых алгебр и категорией компактов.

Литература

- [1] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.
- [2] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и минимальные первичные идеалы // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1984. — Вып. 10. — С. 227—234.
- [3] Бейдар К. И., Михалёв А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, № 6. — С. 79—115.
- [4] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.
- [5] Бредон Г. Теория пучков. — М.: Наука, 1988.
- [6] Букур И., Деляну А. Введение в теорию категорий и функторов. — М.: Мир, 1972.
- [7] Варанкина В. И. Максимальные идеалы в полукольцах непрерывных функций // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 923—937.
- [8] Варанкина В. И., Вечтомов Е. М., Семёнова И. А. Полукольца непрерывных неотрицательных функций: делимость, идеалы, конгруэнции // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 2. — С. 493—510.
- [9] Вечтомов Е. М. Чистые идеалы колец и теорема Бкуша // Абелевы группы и модули. — 1989. — № 8. — С. 54—64.
- [10] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций на топологических пространствах. Избранные темы. — М.: Изд-во МПГУ, 1992.
- [11] Вечтомов Е. М. Аннуляторные характеристики булевых колец и булевых решёток // Мат. заметки. — 1993. — Т. 53, № 2. — С. 15—24.
- [12] Вечтомов Е. М. Кольца непрерывных функций со значениями в топологическом теле: Дис... докт. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ, 1993.
- [13] Вечтомов Е. М. Функциональные представления колец. — М.: Изд-во МПГУ, 1993.
- [14] Вечтомов Е. М. Дистрибутивные решётки, функционально представимые цепями // Фундамент. и прикл. мат. — 1996. — Т. 2, № 1. — С. 93—102.
- [15] Вечтомов Е. М. Введение в полукольца. — Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 2000.
- [16] Вечтомов Е. М., Михалёв А. В., Чермных В. В. Абелево регулярные положительные полукольца // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. — 1997. — Т. 20. — С. 282—309.

- [17] Вечтомов Е. М., Черанева А. В. Полутела и их свойства // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2008. — Т. 14, вып. 5. — С. 3—54.
- [18] Вечтомов Е. М., Чермных В. В. Условия симметричности в кольцах и полукольцах // *Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. Математика, информатика, физика.* — 1996. — С. 6—8.
- [19] Гельфанд И. М. О нормированных кольцах // *ДАН СССР.* — 1939. — Т. 22, № 1. — С. 430—432.
- [20] Годаман Р. Алгебраическая топология и теория пучков. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.
- [21] Гольдблат Р. Топосы. Категорный анализ логики. — М.: Мир, 1983.
- [22] Гретцер Г. Общая теория решёток. — М.: Мир, 1982.
- [23] Джонстон П. Теория топосов. — М.: Наука, 1986.
- [24] Касивара М., Шапира П. Пучки на многообразиях. — М.: Мир, 1997.
- [25] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.
- [26] Кэлли Дж. Общая топология. — М.: Наука, 1968.
- [27] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.
- [28] Любецкий В. А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // *Успехи мат. наук.* — 1989. — Т. 44, № 4. — С. 99—153.
- [29] Маслов В. П., Колокольцов В. Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. — М.: Наука, 1994.
- [30] *Общая алгебра* / Под ред. Л. А. Скорнякова. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1990, 1991.
- [31] Старостина О. В. Строение абелево-регулярных положительных полуколец // *Чебышёвский сб.* — 2005. — Т. 6, № 4 (16). — С. 142—151.
- [32] Тюкавкин Д. В. Пирсовские пучки для колец с инволюцией. — М.: МГУ, 1982. — Деп. в ВИНТИ, № 3446—82 Деп.
- [33] Чермных В. В. Представления положительных полуколец сечениями // *Успехи мат. наук.* — 1992. — Т. 47, № 5. — С. 193—194.
- [34] Чермных В. В. Пучковые представления полуколец // *Успехи мат. наук.* — 1993. — Т. 48, № 5. — С. 185—186.
- [35] Чермных В. В. Пучковые представления полуколец: Дис... канд. физ.-мат. наук. — М.: МПГУ, 1993.
- [36] Чермных В. В. Ламбековское представление полуколец // *Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. Математика, информатика, физика.* — 1996. — С. 19—21.
- [37] Чермных В. В. О полноте пучковых представлений полуколец // *Фундамент. и прикл. мат.* — 1996. — Т. 2, вып. 1. — С. 267—277.
- [38] Чермных В. В. О предпучке полуколец эндоморфизмов // *Вестн. Вятского гос. пед. ун-та. Математика, информатика, физика.* — 1997. — С. 33—36.
- [39] Чермных В. В. Полукольца. — Киров: Изд-во Вятского гос. пед. ун-та, 1997.
- [40] Чермных В. В. Аналог теоремы Стоуна—Вейерштрасса для полуколец // *Науч. вестн. Кировского филиала МГЭИ.* — 1998. — Вып. 1. — С. 193—196.
- [41] Чермных В. В. Ламбековское представление полумодулей // *Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та.* — 2003. — № 8. — С. 107—109.
- [42] Чермных В. В. Гельфандовы полукольца и их представления сечениями // *Чебышёвский сб.* — 2004. — Т. 5, № 2. — С. 131—148.

- [43] Чермных В. В. Двойственность Малви для гильбертовых полуколец // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. — 2004. — № 10. — С. 64–66.
- [44] Чермных В. В. О регулярных полукольцах с некоторыми условиями // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. — 2004. — № 11. — С. 147–149.
- [45] Чермных В. В. О полном пучковом представлении полуколец // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. Информатика. Математика. Язык. — 2005. — № 3. — С. 163–165.
- [46] Чермных В. В. Полукольца сечений пучков // Вестн. Вятского гос. гуман. ун-та. — 2005. — № 13. — С. 151–158.
- [47] Чермных В. В. Представления полумодулей сечениями пучков // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 2. — С. 195–204.
- [48] Чермных В. В. Редуцированные риккартовы полукольца и их функциональные представления // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 2. — С. 205–215.
- [49] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец и полумодулей: Дис... докт. физ.-мат. наук. — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2007.
- [50] Энгелькинг Р. Общая топология. — М.: Мир, 1986.
- [51] Ahsan J., Latif R. Representations of weakly regular semirings by sections in a presheaf // Commun. Algebra. — 1993. — Vol. 21, no. 8. — P. 2819–2835.
- [52] Applications of Sheaves. Proc. Res. Symp. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal. Univ. Durham, Durham 1977 / M. P. Fourman, C. J. Mulvey, D. S. Scott, eds. — Berlin: Springer, 1979. — (Lect. Notes Math.; Vol. 753).
- [53] Arens R., Kaplansky I. Topological representations of algebras // Trans. Am. Math. Soc. — 1949. — Vol. 63. — P. 457–481.
- [54] Bkouche R. Couples spectraux et faisceaux associés. Applications aux anneaux de fonctions // Bull. Soc. Math. France. — 1970. — 98, № 3. — P. 253–295.
- [55] Borceux F., Simmons H., Van den Bossche G. A sheaf representation for modules with applications to Gelfand rings // Proc. London Math. Soc. — 1984. — Vol. 48, no. 2. — P. 230–246.
- [56] Brezuleanu A., Diaconescu R. Sur la dualité de la catégorie des treillis // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1969. — Vol. 14, no. 3. — P. 311–323.
- [57] Brown B., McCoy N. H. Some theorems on groups with applications to ring theory // Trans. Am. Math. Soc. — 1950. — Vol. 69. — P. 302–311.
- [58] Burgess W. D., Stephenson W. Pierce sheaves of non-commutative rings // Commun. Algebra. — 1976. — Vol. 39. — P. 512–526.
- [59] Burgess W. D., Stephenson W. An analogue of the Pierce sheaf for non-commutative rings // Commun. Algebra. — 1978. — Vol. 6, no. 9. — P. 863–886.
- [60] Burgess W. D., Stephenson W. Rings all of whose Pierce stalks are local // Can. Math. Bull. — 1979. — Vol. 22, no. 2. — P. 159–164.
- [61] Carson A. B. Representation of regular rings of finite index // J. Algebra. — 1976. — Vol. 39, no. 2. — P. 512–526.
- [62] Cignoli R. The lattice of global sections of sheaves of chains over Boolean spaces // Algebra Universalis. — 1978. — Vol. 8, no. 3. — P. 357–373.
- [63] Comer S. D. Representation by algebras of sections over Boolean spaces // Pacific J. Math. — 1971. — Vol. 38. — P. 29–38.

- [64] Cornish W. H. Normal lattices // J. Aust. Math. Soc. — 1972. — Vol. 14, no. 2. — P. 200–215.
- [65] Cornish W. H. 0-ideals, congruences and sheaf representations of distributive lattices // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 1977. — Vol. 22, no. 8. — P. 200–215.
- [66] Dauns J., Hofmann K. H. The representation of biregular rings by sheaves // Math. Z. — 1966. — Vol. 91, no. 2 — P. 103–123.
- [67] Dauns J., Hofmann K. H. Representation of rings by sections. — Mem. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 83. — P. 1–180.
- [68] Davey B. A. Sheaf spaces and sheaves of universal algebras // Math. Z. — 1973. — Vol. 134, no. 4. — P. 275–290.
- [69] Dedekind R. Über die Theorie ganzen algebraischen Zahlen // Suppl. XI to P. G. Lejeune Dirichlet. Vorlesungen über Zahlentheorie. — Braunschweig: Vieweg und Sohn, 1894.
- [70] Filipoiu A. Compact sheaves of lattices and normal lattices // Math. Japon. — 1991. — Vol. 36, no. 2. — P. 381–386.
- [71] Georgescu G. Pierce representations of distributive lattices // Kobe J. Math. — 1993. — Vol. 10, no. 1. — P. 1–11.
- [72] Georgescu G., Voiculescu J. Isomorphic sheaf representations of normal lattices // J. Pure Appl. Algebra. — 1987. — Vol. 45, no. 3. — P. 213–223.
- [73] Glazek K. A Short Guide Through the Literature on Semirings: Preprint No. 39. — Wrocław: University of Wrocław, Math. Inst., 1985.
- [74] Glazek K. A Short Guide to the Literature on Semirings and Their Applications in Mathematics and Computer Science. — 2000.
- [75] Golan J. S. Localization of Noncommutative Rings. — New York: Marcel Dekker, 1975.
- [76] Golan J. S. Structure sheaves over a noncommutative ring. — New York: Marcel Dekker, 1980. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 56).
- [77] Golan J. S. Two sheaf constructions for noncommutative rings // Houston J. Math. — 1980. — Vol. 6, no. 1. — P. 59–66.
- [78] Golan J. S. The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. — Pitman, 1991. (Pitman Monogr. Surv. Pure Appl. Math.; Vol. 54).
- [79] Golan J. S. Semirings and Their Applications. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1999.
- [80] Grothendieck A. Sur quelques points d'algèbre homologique // Tôhoku Math. J. — 1957. — Vol. 9. — P. 119–221.
- [81] Grothendieck A., Dieudonné J. Éléments de Géométrie Algébrique. Vol. 1. — Paris: Inst. Hautes Études Sci., 1960. — (Publ. Math.; Vol. 4).
- [82] Hebisch U., Weinert H. J. Semirings. Singapore: World Scientific, 1998. — (Algebraic Theory Appl. Comp. Sci.).
- [83] Hilbert D. Über den Zahlbegriff // Jahresber. Deutsch. Math. Verein. — 1899. — Vol. 8. — P. 180–184.
- [84] Hofmann K. H. Representations of algebras by continuous sections // Bull. Am. Math. Soc. — 1972. — Vol. 78, no. 3. — P. 291–373.

- [85] Huntington E. V. Complete sets of postulates for the theory of positive integral and positive rational numbers // *Trans. Am. Math. Soc.* — 1902. — Vol. 3. — P. 280–284.
- [86] Keimel K. Darstellung von Halbgruppen und universellen Algebren durch Schnitte in Garben; biregulare Halbgruppen // *Math. Nachr.* — 1970. — Vol. 45. — P. 81–96.
- [87] Keimel K. The representation of lattice-ordered groups and rings by sections in sheaves // *Lectures Appl. Sheaves Ring Theory. Tulane Univ. Ring Operator Theory. Year 1970-1971*, 3. — Berlin: Springer, 1971. — (Lect. Notes Math.; Vol. 248). — P. 1–98.
- [88] Kennison J. F. Integral domain type representations in sheaves and other topoi // *Math. Z.* — 1976. — Vol. 151, no. 1. — P. 35–56.
- [89] Koh K. On functional representations of ring without nilpotent elements // *Can. Math. Bull.* — 1971. — Vol. 14, no. 3. — P. 349–352.
- [90] Koh K. On a representation strongly harmonic ring by sheaves // *Pacific J. Math.* — 1972. — Vol. 41, no. 2. — P. 459–468.
- [91] Lambek J. On representation of modules by sheaves of factor modules // *Can. Math. Bull.* — 1971. — Vol. 14, no. 3. — P. 359–368.
- [92] Macaulay F. S. *Algebraic Theory of Modular Systems*. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1916.
- [93] MacLane S. History of abstract algebra: origin, rise and decline of a movement // *Amer. Math. Heritage: Algebra and Applied Mathematics — Texas Univ.*, 1981. — P. 11–35.
- [94] Mulvey C. J. Intuitionistic algebra and representations of rings // *Mem. Amer. Math. Soc.* — 1974. — Vol. 148. — P. 3–57.
- [95] Mulvey C. J. Compact ringed spaces // *J. Algebra.* — 1978. — Vol. 52, no. 2. — P. 411–436.
- [96] Mulvey C. J. A generalization of Gelfand duality // *J. Algebra.* — 1979. — Vol. 56, no. 2. — P. 499–505.
- [97] Mulvey C. J. Representations of rings and modules // *Applications of Sheaves. Proc. Res. Symp. Appl. Sheaf Theory to Logic, Algebra and Anal. Univ. Durham, Durham 1977* / M. P. Fourman, C. J. Mulvey, D. S. Scott, eds. — Berlin: Springer, 1979. — (Lect. Notes Math.; Vol. 753). — P. 542–585.
- [98] Pierce R. S. Modules over commutative regular rings // *Mem. Amer. Math. Soc.* — 1967. — Vol. 70. — P. 1–112.
- [99] Recent Advances in the Representation Theory of Rings and $\mathbb{C}^*$ -Algebras by Continuous Sections. — *Amer. Math. Soc.*, 1974. — (Mem. Amer. Math. Soc.; Vol. 148).
- [100] Rumbos I. B. A structure sheaf for semiprime rings // *Commun. Algebra.* — 1989. — Vol. 17, no. 11. — P. 2773–2794.
- [101] Serre J. P. Faisceaux algébriques cohérents // *Ann. Math. (2)*. — 1955. — Vol. 61. — P. 197–278.
- [102] Simmons H. Reticulated rings // *J. Algebra.* — 1980. — Vol. 64, no. 1. — P. 169–192.
- [103] Simmons H. Sheaf representations of strongly harmonic rings // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sect. A.* — 1985. — Vol. 99, no. 3-4. — P. 249–268.
- [104] Simmons H. Compact representations — the lattice theory of compact ringed spaces // *J. Algebra.* — 1989. — Vol. 126, no. 2. — P. 493–531.

- [105] Stone M. Applications of the theory of Boolean rings to general topology // Trans. Am. Math. Soc. — 1937. — Vol. 41, no. 3. — P. 375—481.
- [106] Teleman S. Representation par faisceaux des modules sur les anneaux harmoniques // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1969. — Vol. 269, no. 17. — P. A753—A756.
- [107] Vandiver H. S. Note on a simple type of algebras in which cancellation law of addition does not hold // Bull. Am. Math. Soc. — 1934. — Vol. 40. — P. 914—920.
- [108] Vechtomov E. M. Rings and sheaves // J. Math. Sci. — 1995. — Vol. 74, no. 1. — P. 749—798.
- [109] Werner H. Sheaf constructions in universal algebra and model theory // Universal Algebra and Applications. Pap. Stefan Banach Inst. Math. Cent. Semestr. Febr. 15 — June 9, 1978. — Warsaw, 1982. — P. 133—179.