Отделимость выпуклых множеств экстремальными гиперплоскостями*

А. Р. АЛИМОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: alexey.alimov@gmail.com

В. Ю. ПРОТАСОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: v-protassov@yandex.ru

УДК 517.982.252

Ключевые слова: экстремальный функционал, экстремальная отделимость, брус, отделимость брусов, выпуклость по Болтянскому—Солтану.

Аннотация

Изучаются вопросы отделимости выпуклых подмножеств линейного нормированного пространства при помощи экстремальных гиперплоскостей (функционалов). Вводится понятие бруса (выпуклого замкнутого множества специального вида) и доказывается, что брусы характеризуются свойством отделимости экстремальной гиперплоскостью от любой точки, им не принадлежащей. В двумерных пространствах, в пространствах со строго выпуклым сопряжённым шаром, а также в пространстве непрерывных функций два непересекающихся бруса экстремально отделимы. Также показано, что пространства суммируемых функций этим свойством не обладают. Приводится ряд примеров и обобщений.

Abstract

A. R. Alimov, V. Yu. Protasov, Separation of convex sets by extreme hyperplanes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 3—12.

The problem of separation of convex sets by extreme hyperplanes (functionals) in normed linear spaces is examined. A concept of a bar (a closed set of a special form) is introduced; it is shown that a bar is characterized by the property that any point not lying in it can be separated from it by an extreme hyperplane. In two-dimensional spaces, in spaces with strictly convex dual, and in the space of continuous functions, any two bars are extremely separated. This property is shown to fail in the space of summable functions. A number of examples and generalizations are given.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (первый автор — грант № 10-01-00442, второй автор — гранты № 08-01-00208 и № 10-01-00293).

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 4, с. 3—12.

1. Введение

Согласно классическим теоремам отделимости в нормированном пространстве два выпуклых множества, внутренность одного из которых непуста и не пересекаются со вторым множеством, могут быть (нестрого) отделены друг от друга при помощи линейного непрерывного функционала, а точка, не принадлежащая выпуклому замкнутому множеству, может быть строго от него отделена. При этом отделяющие функционалы не конкретизируются. Между тем во многих задачах важна отделимость при помощи функционалов специального вида. В данной работе изучается вопрос об отделимости экстремальными функционалами — крайними (экстремальными) элементами единичного шара сопряжённого пространства. Важность данной задачи объясняется многочисленными применениями экстремальных функционалов в выпуклом анализе (теоремы об очистке для субдифференциального исчисления), теории приближений (точные константы, неравенства колмогоровского типа), оптимизации (теоремы о минимаксе) и т. д. (см. работы [8, 10] и имеющиеся в них ссылки).

Мы вводим понятие бруса, которое оказывается весьма удобным для характеризации отделимости экстремальными функционалами. Понятие бруса является в некотором смысле усилением понятия выпуклого замкнутого множества, а для пространств со строго выпуклым сопряжённым шаром совпадает с ним. Как будет показано, брусы обладают следующим характеристическим свойством: они строго экстремально отделяются от любой точки, им не принадлежащей (предложение 2). Для двумерных пространств, а также для пространств вида $C(K)$, где K — метрический компакт, имеет место аналог теорем отделимости: два непересекающихся бруса строго отделяются экстремальным функционалом (теорема 1). Однако это верно не для всех пространств. Как будет показано в теореме 2, в пространстве $L_1(\Omega)$ всегда существуют два бруса с непустыми внутренностями, которые нельзя даже нестрого экстремально отделить.

2. Брусы. Определения о основные свойства

Числовым промежутком будем называть непустое замкнутое выпуклое подмножество $\mathbb{R}$. Таким образом, промежуток — это отрезок, замкнутый луч или всё $\mathbb{R}$. Пусть X — линейное нормированное пространство, $D \subset X^*$ — произвольное подмножество сопряжённого пространства. Для данных $M \subset X$ и $f \in X^*$ пусть $(f, M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ и $p_f(M)$ — замыкание выпуклой оболочки множества (f, M). Таким образом, $p_f(M) \subset \mathbb{R}$ — это числовой промежуток между $\inf(f, M)$ и $\sup(f, M)$.

Определение 1. Замкнутое выпуклое множество $M \subset X$ вида

$$M = \bigcap_{f \in D} f^{-1}\bigl(p_f(M)\bigr)$$

называется *D-брусом*.

Любой D-брус есть пересечение замкнутых полупространств, поэтому каждый D-брус является выпуклым (в обычном смысле) и замкнутым множеством. Если D — шар или сфера пространства X^*, то верно и обратное: всякое выпуклое замкнутое множество является D-брусом. Это следует из теоремы отделимости. Пересечение любого числа и сумма конечного числа D-брусов снова является D-брусом.

Пример 1. Пусть $D' \subset D$ — произвольное подмножество, каждому элементу $y \in D'$ поставлен в соответствие промежуток $P(y) \subset \mathbb{R}$. Тогда множество $\{x \in X \mid (y, x) \in P(y),\ y \in D'\}$ является D-брусом.

Важную роль в работе будет играть понятие бруса, порождённого семейством крайних точек сопряжённого шара. Везде далее обозначаем через B, B^* единичные шары в пространстве X и в сопряжённом пространстве X^* соответственно, через S, S^* — соответствующие единичные сферы, через $\operatorname{ext} M$ — множество экстремальных (крайних) точек выпуклого множества M, т. е. точек, не являющихся серединами отрезков, целиком лежащих в M.

Определение 2. Множество $M \subset X$ называется *брусом*, если M является *D-брусом* для $D \subset \operatorname{ext} S^*$, где $\operatorname{ext} S^*$ — множество экстремальных (крайних) точек единичной сферы S^* сопряжённого пространства X^*.

Замкнутый единичный шар является брусом. Действительно, для шара B имеем, что $p_f(B) = [-1, 1]$, $f \in \operatorname{ext} S^*$. Если для некоторого $x \in X$ имеем, что $-1 \leqslant (f, x) \leqslant 1$, $f \in \operatorname{ext} S^*$, то по теореме Крейна—Мильмана это неравенство распространяется на все $f \in B^*$, откуда следует, что $\|x\| \leqslant 1$, т. е. $x \in B$. Если $S^* = \operatorname{ext} S^*$ (т. е. норма сопряжённого пространства строго выпукла), то брусы — это выпуклые замкнутые множества.

Пример 2. Если в конечномерном пространстве X единичный шар B является многогранником, то брусы — это многогранные множества, ограниченные плоскостями, параллельными граням B.

Таким образом, понятие бруса является вариацией понятия выпуклого замкнутого множества. Для пространств со строго выпуклым сопряжённым эти понятия совпадают. Так будет, например, для всех пространств $L_p(\Omega)$ при $1 < p < \infty$, в частности для гильбертова пространства. Брус всегда является выпуклым и замкнутым множеством, но, вообще говоря, не наоборот. Шар является брусом. Для пространств $C(K)$, где K — метрический компакт, сопряжённое пространство (пространство борелевских зарядов ограниченной вариации) не является строго выпуклым. Поэтому не все выпуклые замкнутые множества в $C(K)$ будут брусами. Тем не менее множество брусов в $C(K)$ допускает простое описание: брусы — это замкнутые функциональные промежутки. Перед тем как формулировать соответствующие результаты, дадим необходимые определения.

Пусть K — метрический компакт, $C(K)$ — пространство непрерывных скалярных функций на K. Следуя работам [4—9, 12], для $f_1, f_2 \colon K \to Y$ определим *интервал* $[\![f_1, f_2]\!]$ функций, лежащих между f_1 и f_2:

$$[\![f_1, f_2]\!] = \{f \in C(T) \mid f(t) \in [f_1(t), f_2(t)] \text{ для всех } t \in T\}.$$

Напомним, что подмножество $M \subset C(K)$ называется *промежутком* [4], если из того, что $f, g \in M$, следует, что $[\![f, g]\!] \subset M$.

Согласно [4, теорема 1; 5] подмножество $M \subset C(K, \mathbb{R})$ является замкнутым промежутком, если и только если M является обобщённым интервалом, т. е. множеством вида $[\![f_1, f_2]\!]$, где $f_1, f_2 \colon K \to \bar{\mathbb{R}}$, f_1 полунепрерывна сверху на K, а f_2 — снизу и $f_1 \leqslant f_2$. Отметим, что в [5] также дана характеризация замкнутых промежутков в пространствах $C(K, X)$ и $L_\varphi(K, X)$.

Стоит отметить, что промежутки в функциональных пространствах находят своё применение не только в задачах выпуклого анализа, но и в задачах теории приближений (см. [5, 6]), в частности в задаче о расстоянии до чебышёвского подпространства и связанной с ней задаче о сильной единственности экстремальных элементов [9].

Предложение 1. *Все брусы в $C(K)$ — замкнутые промежутки.*

Доказательство. В случае $X = C(K)$ мы имеем, что $\operatorname{ext} S^* = \{\pm\delta_t \mid t \in K\}$, где $(\delta_t, x) = x(t)$, $x \in C(K)$. Поэтому для $M = [\![a, b]\!]$ имеем, что $p_{\delta_t}(M) = [a(t), b(t)]$, $t \in K$. Следовательно, если функция $x \in C(K)$ такова, что $(y, x) \in p_y(M)$, $y \in \operatorname{ext} S^*$, то $x(t) \in [a(t), b(t)]$, $t \in K$, и, таким образом, $x \in M$. Итак, любой замкнутый промежуток является брусом. Обратно, для любого множества $M \subset C(K)$ функция $a(t) = \inf\limits_{x \in M} x(t)$, $t \in K$, полунепрерывна сверху, а функция $b(t) = \sup\limits_{x \in M} x(t)$ полунепрерывна снизу. Поэтому если M — брус, то $M = [\![a, b]\!]$. □

Стоить отметить, что, используя приведённую выше характеризацию замкнутых промежутков в $C(Q)$, предложение 1 можно вывести из леммы Какутани о представлении порядковых интервалов (см., например, [7, предложение 10.8.7]).

3. Отделимость экстремальными функционалами

Несмотря на широкую применимость экстремальных функционалов в выпуклом анализе, теории приближений и оптимизации, вопросы отделимости выпуклых множеств экстремальными функционалами практически не рассматривались. В этой связи отметим работу И. Зингера [14], в которой изучалась задача об экстремальном продолжении экстремальных функционалов и рассматривался вопрос об экстремальной отделимости точки от замкнутого шара.

Определение 3. Множества $M_1, M_2 \subset X$ *экстремально отделимы*, если $\sup(f, M_1) \leqslant \inf(f, M_2)$ для некоторого $f \in \operatorname{ext} S^*$. В случае строгого неравенства отделимость называется строгой.

Брус в линейном нормированном пространстве строго отделяется экстремальным функционалом от любой точки, не принадлежащей ему. Это легко следует из определения. Верно и обратное: если множество $M \subset X$ строго отделяется экстремальным функционалом от любой не принадлежащей ему точки, то оно является брусом. В самом деле, для произвольной точки $x \notin M$ обозначим через $x^* \in S^*$ функционал, который строго отделяет её от множества M. Таким образом, $(x^*, x) > \sup(x^*, M)$. Если такой функционал не единственный, то берём любой из них в качестве x^*. Множество $P_x = \{y \in X \mid (x^*, y) \leqslant \sup(x^*, M)\}$ является полупространством, порождённым экстремальным функционалом, и, значит, является брусом. Тогда $M = \bigcap\limits_{x \in X \setminus M} P_x$, поэтому M является брусом как пересечение брусов. Таким образом, нами доказано следующее утверждение.

Предложение 2. *Брусы — множества, обладающие следующим свойством: любая точка, не принадлежащая множеству, строго отделима от него экстремальным функционалом.*

Поскольку замкнутый шар является брусом, немедленно получаем следствие.

Следствие 1. *Любая точка, не лежащая в замкнутом шаре, строго отделима от него экстремальным функционалом.*

На самом деле для шаров верно более сильное утверждение.

Предложение 3. *Два непересекающихся замкнутых шара в линейном нормированном пространстве строго экстремально отделимы.*

Доказательство. Если шары $B_i = B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2$, не пересекаются, то шар $B(x_2 - x_1, r_1 + r_2)$ не содержит нуля, а значит, строго отделятся от нуля экстремальным функционалом $y \in E$. Тогда y строго разделят B_1 и B_2. □

Итак, два непересекающихся шара строго экстремально отделимы, а любой брус строго отделяется от не принадлежащей ему точки. В силу предложения 2 брусы, и только они, обладают свойством экстремальной отделимости от точек. Поэтому они являются наиболее естественными объектами при изучении отделимости экстремальными функционалами. Возникает естественный вопрос: верно ли, что любые два непересекающихся бруса экстремально отделимы друг от друга? Для шаров это верно (предложение 4). Но для произвольных брусов, вообще говоря, ответ отрицательный даже в предположении, что оба бруса имеют непустую внутренность (соответствующий пример даёт теорема 2). Тем не менее, как мы увидим, экстремальная отделимость брусов имеет место для двумерных пространств, а также для пространств непрерывных функций $C(K)$, в частности для $\mathbb{R}^n_\infty$ (предложение 4 и теорема 1). Кроме того, конечно же, это верно для всех пространств со строго выпуклой сопряжённой нормой, например для $L_p(X)$, $p \in (1, +\infty)$, где экстремальная отделимость означает обычную отделимость.

Покажем сначала, что в случае $\dim X = 2$ непересекающиеся брусы строго экстремально отделимы. Для ограниченного множества $\varnothing \neq M \subset X$ через

$\mathcal{E}(M)$ обозначим *экстремальную оболочку* множества M, т. е. пересечение всех брусов, содержащих M. Для краткости далее обозначаем $\mathcal{E}(\{x,y\}) = \mathcal{E}(x,y)$. Поскольку любой D-брус — это пересечение замкнутых полупространств, то, как несложно показать,

$$\mathcal{E}(x,y) = \\ = \{z \in X \mid \min\{f(x), f(y)\} \leqslant f(z) \leqslant \max\{f(x), f(y)\} \text{ для всех } f \in \operatorname{ext} S^*\}.$$

Для выпуклого множества M через $\operatorname{ri} M$ будем обозначать его относительную внутренность.

Предложение 4. *Пусть P, Q — брусы в двумерном банаховом пространстве X. Предположим, что $\operatorname{ri} P \cap \operatorname{ri} Q = \varnothing$. Тогда P и Q отделимы некоторой экстремальной прямой L, причём хотя бы одно из множеств P, Q не содержится в L (если P и Q не пересекаются, то отделимость строгая).*

Доказательство. Рассмотрим *ассоциированную* (по А. Брауну) *норму* $|\cdot|$ на X (см. [1, 11, 13]), определяемую как

$$|x| = \sum_{i \in I} \alpha_i |f_i(x)|, \quad x \in X,$$

где $F = (f_i)_{i \in I} \subset \operatorname{ext} S^*$, $\operatorname{card} I \leqslant \aleph_0$, — такое семейство крайних точек сферы сопряжённого пространства, что $F \cup (-F)$ плотно в $\operatorname{ext} S^*$, а $(\alpha_i)_{i \in I}$ — произвольная суммируемая последовательность положительных чисел ($\alpha_i > 0$, $\sum\limits_{i \in I} \alpha_i < \infty$).

В произвольном конечномерном банаховом пространстве несложно показать (см., например, [11, теорема 3.1; 13, теоремы 3.2, 4.2]), что для фиксированных $x, y \in X$

$$z \in \mathcal{E}(x,y) \text{ тогда и только тогда, когда } z \text{ находится } |\cdot|\text{-между } x \text{ и } y, \tag{1}$$

где последнее по определению означает, что $|x-y| = |x-z| + |z-y|$.

Напомним, что множество M называется *d-выпуклым* (в смысле Болтянского—Солтана [3, гл. II]), если для любых двух точек $x, y \in M$ множество M содержит целиком весь d-отрезок

$$\langle x, y \rangle_d := \{z \mid d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)\}.$$

Из (1) следует, что $\mathcal{E}(x,y) = \langle x, y \rangle_{|\cdot|}$. Напомним также, что одномерное подпространство в $\mathbb{R}^n$ является d-выпуклым в том и только в том случае, когда оно пересекает единичную сферу в экстремальной точке [3, следствие 7.2]. Полупространство в $\mathbb{R}^n$ является d-выпуклым тогда и только тогда, когда d-выпукла ограничивающая его гиперплоскость [3, теорема 6.8]. Из этих двух утверждений вытекает, что если M — брус в двумерном пространстве, то M является d-выпуклым множеством относительно ассоциированной нормы $d(\cdot) = |\cdot|$.

Теперь для завершения доказательства предложения 4 остаётся воспользоваться теоремой отделимости для d-выпуклых множеств [2, теорема 3.1], в которой утверждается, что если X — двумерное нормированное пространство и

$P, Q \subset X$ — такие d-выпуклые множества, что $\operatorname{ri} P \cap \operatorname{ri} Q = \varnothing$, то P и Q отделимы некоторой d-выпуклой прямой L, причём хотя бы одно из множеств P, Q не содержится в L. $\square$

Рассмотрим теперь вопрос экстремальной отделимости в пространстве $C(K)$. Напомним, что брусы в этом пространстве — это замкнутые функциональные промежутки (предложение 1).

Теорема 1. *Два непересекающихся бруса в $C(K)$ строго экстремально отделимы.*

Доказательство. По предложению 1 любой брус в $C(K)$ является промежутком $[\![a, b]\!]$, где $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ — несобственные функции на K, полунепрерывные соответственно сверху и снизу, $a \leqslant b$. Если данные промежутки $[\![a_1, b_1]\!]$ и $[\![a_2, b_2]\!]$ не отделяются строго функционалом δ_t, где $t \in K$, то числовые промежутки $\big[a_1(t), b_1(t)\big]$ и $\big[a_2(t), b_2(t)\big]$ пересекаются. Обозначим их пересечение через $q(t) = [\alpha(t), \beta(t)]$, где

$$\alpha(t) = \max\{a_1(t), a_2(t)\}, \quad \beta(t) = \min\{b_1(t), b_2(t)\}.$$

В нашем случае для каждого t множество $q(t)$ — непустой замкнутый промежуток, возможно бесконечный. Взятие поточечного максимума конечного числа функций сохраняет полунепрерывность сверху, поэтому функция $\alpha(\cdot)$ полунепрерывна сверху. Аналогично $\beta(\cdot)$ полунепрерывна снизу на K. Следовательно, многозначное отображение $q\colon K \to 2^{\mathbb{R}}$ полунепрерывно снизу (образ предела содержится в пределе образов). Так как оно имеет выпуклые замкнутые образы, то согласно теореме Майкла о селекции существует непрерывная выборка $x \in C(K)$, $x(t) \in q(t)$, $t \in K$. Таким образом, $x \in [\![a_1, b_1]\!] \cap [\![a_2, b_2]\!]$. Следовательно, если промежутки не являются строго экстремально отделимыми, то они пересекаются. Теорема 1 доказана. $\square$

В конечномерном пространстве $\mathbb{R}^n_\infty$ (т. е. в пространстве $\mathbb{R}^n$ с нормой L_∞) теорему 1 можно немного усилить. Именно: в пространстве $\mathbb{R}^n_\infty$ любые два бруса с непересекающимися относительными внутренностями можно отделить экстремальной гиперплоскостью. Этот результат доказывается применением теоремы Солтана [3, теорема 9.2] об отделимости d-выпуклых множеств в $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Итак, любые два непересекающихся бруса в пространстве $C(K)$ строго экстремально отделимы. Как упоминалось ранее, этим свойством обладают также все нормированные пространства со строго выпуклым сопряжённым (например, L_p при $p \in (1, +\infty)$) и все двумерные пространства.

Обратный пример даётся пространством $L_1(\Omega)$, если только мощность множества Ω больше двух. Заметим, что если эта мощность конечна и равна n, то пространство $L_1(\Omega)$ n-мерно. Поэтому для любого $n \geqslant 3$ существуют n-мерные пространства, не обладающие свойством экстремальной отделимости брусов. В частности, предложение 4 не обобщается на бо́льшие размерности.

Пусть Ω — пространство с σ-аддитивной мерой μ. Через $|\Omega|$ обозначим минимальную мощность подмножеств Ω, эквивалентных Ω по мере μ, т. е. отличающихся от Ω на множество меры нуль.

Теорема 2. *Если $|\Omega| \geqslant 3$, то в пространстве $L_1(\Omega)$ найдутся два непересекающихся бруса, каждый из которых имеет непустую внутренность и которые нельзя экстремально отделить даже нестрого.*

Следствие 2. *Пространства $L_1(\mathbb{R}^n)$, $L_1[0,1]$, l_1 и $\mathbb{R}^n_1$ при $d \geqslant 3$ не обладают свойством экстремальной отделимости брусов.*

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем утверждение для пространства $\mathbb{R}^3_1$. Единичный шар сопряжённого пространства $\mathbb{R}^3_\infty$ является кубом с вершинами $(\pm 1, \pm 1, \pm 1) \in \mathbb{R}^3$. Возьмём четыре его вершины $c_1 = (1,1,1)$, $c_2 = (1,1,-1)$, $c_3 = (1,-1,1)$, $c_4 = (1,-1,-1)$. Рассмотрим два множества:

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (c_1, x) \leqslant 6,\ (c_i, x) \leqslant 1,\ i = 2,3,4\},$$
$$V = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (c_1, x) \geqslant 4,\ (c_i, x) \geqslant -1,\ i = 2,3,4\}.$$

Они не пересекаются, поскольку для каждой точки $x \in U$ выполнено $2x^1 \leqslant 2$ (сложили неравенства $(c_2, x) \leqslant 1$ и $(c_3, x) \leqslant 1$), в то время как для каждой точки $x \in V$ выполнено $2x^1 \geqslant 3$ (сложили неравенства $(c_1, x) \geqslant 4$ и $(c_4, x) \geqslant -1$). Каждое из множеств U, V имеет непустую внутренность и является брусом (пример 1). Покажем, что они не разделяются экстремальным функционалом. Заметим сначала, что для любого $i = 1, \ldots 4$ существует точка $u_i \in U$, которая обращает в равенство i-е неравенство, определяющее U. Это $u_1 = (0,3,3)$ и $u_2 = u_3 = u_4 = (1,0,0)$. Такие же точки есть для множества V: $v_1 = (2,2,0)$, $v_2 = (3,-1,3)$, $v_3 = (3,3,-1)$, $v_4 = (3,2,2)$. Ни для какого $i = 1, \ldots, 4$ неравенство $\sup\limits_{x \in U}(c_i, x) \leqslant \inf\limits_{y \in V}(c_i, y)$ невозможно, поскольку $(c_i, u_i) > (c_i, v_i)$. С другой стороны, неравенство $\inf\limits_{x \in U}(c_i, x) \geqslant \sup\limits_{y \in V}(c_i, y)$ также невозможно, поскольку $\inf\limits_{x \in U}(c_i, x) = -\infty$ (при $x^1 \to -\infty$). Поэтому ни один из функционалов c_i не разделяет U и V. Так как все крайние функционалы в $\mathbb{R}^3_1$ пропорциональны c_i, множества U и V не являются экстремально отделимыми даже нестрого.

Так же рассматривается случай весового пространства $\mathbb{R}^3_1$, где каждой координате ставится в соответствие положительный вес.

Рассмотрим теперь произвольное пространство $L_1(\Omega)$. Поскольку $|\Omega| \geqslant 3$, существуют непересекающиеся подмножества $P_1, P_2, P_3 \subset \Omega$ конечной положительной меры. Предположим пока, что $\mu(P_1) = \mu(P_2) = \mu(P_3) = 1$. Для $i = 1, \ldots, 4$ обозначим через $\mathcal{C}_i$ совокупность всех функций из $L_\infty(\Omega)$, принимающих значения ± 1 и тождественно равных c_i^j на множестве P_j, $j = 1,2,3$, где $c_i = (c_i^1, c_i^2, c_i^3)$ определены выше в доказательстве для $\mathbb{R}^3_1$. Аналогично множествам U и V определим

$$\mathcal{U} = \{f \in L_1(\Omega) \mid (\tilde{c}_1, f) \leqslant 6,\ (\tilde{c}_i, f) \leqslant 1,\ i = 2,3,4, \text{ для всех } \tilde{c}_j \in \mathcal{C}_j\},$$
$$\mathcal{V} = \{f \in L_1(\Omega) \mid (\tilde{c}_1, f) \geqslant 4,\ (\tilde{c}_i, f) \geqslant -1,\ i = 2,3,4, \text{ для всех } \tilde{c}_j \in \mathcal{C}_j\}.$$

Множества $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ являются брусами (пример 1). По доказанному для $\mathbb{R}^3_1$ они не пересекаются, имеют непустую внутренность и в каждом из них есть элементы, обращающие неравенства, определяющие эти множества, в равенства. Покажем, что эти множества не отделимы экстремальным функционалом. По доказанному для $\mathbb{R}^3_1$ никакой элемент множества $\mathcal{C}_i$ не разделяет даже те подмножества множеств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, которые состоят из функций с носителем на $P = \bigcup_{j=1}^{3} P_j$. Если функция $\varphi \in L_\infty(\Omega)$, являющаяся крайней точкой единичного шара, постоянна на каждом из множеств P_1, P_2, P_3, то она пропорциональна функции из $\mathcal{C}_i$, поэтому φ не разделяет $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Если φ не является постоянной на каком-то из этих множеств, то область значений функционала φ на $\mathcal{U}$ и на $\mathcal{V}$ равна $\mathbb{R}$, следовательно, φ не разделяет $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. В самом деле, если φ не является постоянной, скажем, на множестве P_1, то P_1 разбивается на множества Q_1 и Q_2, такие что $\varphi|_{Q_1} \equiv 1$, $\varphi|_{Q_2} \equiv -1$, $\mu(Q_1) = \alpha$, $\mu(Q_2) = 1 - \alpha$, $\alpha \in (0, 1)$. Обозначив через χ_1 и χ_2 характеристические функции множеств Q_1 и Q_2 соответственно, получим, что для любого $f \in \mathcal{U}$ и любого $t \in \mathbb{R}$ функция $f_t = f + t(1-\alpha)\chi_1 - t\alpha\chi_2$ также принадлежит $\mathcal{U}$. С другой стороны, $(\varphi, f_t) = (\varphi, f) + 2t\alpha(1-\alpha)$. Следовательно, $(\varphi, \mathcal{U}) = \mathbb{R}$. Аналогично $(\varphi, \mathcal{V}) = \mathbb{R}$. Таким образом, φ не разделяет $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

Случай, когда меры множеств P_1, P_2, P_3 различны, рассматривается аналогично с использованием весового пространства $\mathbb{R}^3_1$. $\square$

Литература

[1] Алимов А. Р. Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Мат. сб. — 2006 — Т. 197, № 9. — С. 3—18.

[2] Болтянский В. Г., Солтан П. С. Комбинаторная геометрия и классы выпуклости // Успехи мат. наук. — 1978. — Т. 33, № 1. — С. 3—42.

[3] Болтянский В. Г., Солтан П. С. Комбинаторная геометрия различных классов выпуклых множеств. — Кишинёв: Штиинца, 1978.

[4] Васильева А. А. Замкнутые промежутки в $C(T)$ и $L_\varphi(T)$ и их аппроксимативные свойства // Мат. заметки. — 2003. — Т. 73, № 1. — С. 135—138.

[5] Васильева А. А. Замкнутые промежутки в векторнозначных функциональных пространствах и их аппроксимативные свойства // Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — Т. 68, № 4. — С. 75—116.

[6] Васильева А. А. Критерий существования гладкой функции при ограничениях // Мат. заметки. — 2007. — Т. 82, № 3. — С. 335—346.

[7] Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа. — Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000.

[8] Тихомиров В. М. Теория приближений // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. — 1986. — Т. 14. — С. 103—260.

[9] Хавинсон С. Я. Аппроксимативные свойства некоторых множеств в пространствах непрерывных функций // Anal. Math. — 2003. — Vol. 29 — P. 87—105.

[10] Borwein J. M., Lewis A. S. Convex Analysis and Nonlinear Optimization. — New York: Springer, 2000.

[11] Brown A. L. Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional // Math. Ann. — 1987. — Vol. 279. — P. 87—101.

[12] Franchetti C., Cheney E. W. The embedding of proximinal sets // J. Approx. Theory. — 1986. — Vol. 48, no. 2. — P. 213—225.

[13] Franchetti C., Roversi S. Suns, M-connected sets and P-acyclic sets in Banach spaces: Preprint no. 50139. — Istituto di Matematica Applicata "G. Sansone", 1988.

[14] Singer I. On the extension of continuous linear functionals and best approximation in normed linear spaces // Math. Ann. — 1965. — Vol. 159, no. 5. — P. 344—355.