О линейно $\mathcal{K}$-упорядоченных кольцах

В. Н. БИБАЕВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: vikousisbi@mail.ru

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченное кольцо, частично упорядоченная группа, линейно упорядоченная группа, выпуклая подгруппа.

Аннотация

Рассматривается подход к упорядочению колец, предложенный В. М. Копытовым для алгебр Ли. Найдены условия существования линейного порядка в кольцах. Исследуются свойства идеалов линейно упорядоченных колец.

Abstract

V. N. Bibaeva, E. E. Shirshova, On linear $\mathcal{K}$-ordered rings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 4, pp. 13—23.

This paper deals with an approach of ordering of rings, which was introduced by V. M. Kopytov for Lie algebras. The conditions of existence of a linear order in rings are found. The properties of ideals of linear ordered rings are investigated.

1. Введение

Пусть $R = \langle R, +, \cdot \rangle$ — кольцо. Напомним, что R называется *частично упорядоченным кольцом* (см. [1, 10]), если $\langle R, + \rangle$ — частично упорядоченная группа, удовлетворяющая следующему условию: если $a \leqslant b$ и $c > 0$ в $\langle R, + \rangle$, то $ac \leqslant bc$ и $ca \leqslant cb$.

Пример 11 данной статьи показывает, что не всякий порядок аддитивной группы ассоциативного кольца удовлетворяет этому условию.

Определение 1. Кольцо R называется (частично) $\mathcal{K}$-упорядоченным кольцом, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) $\langle R, + \rangle$ — частично упорядоченная группа;
2) если $a > 0$ в $\langle R, + \rangle$, то $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$ для всех $b \in R$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 4, с. 13—23.

Если при этом порядок в группе $\langle R, +\rangle$ линейный (решёточный, направленный), то кольцо R называется линейно (решёточно, направленно) $\mathcal{K}$-упорядоченным кольцом.

Данное определение частичного порядка является аналогом определения частичного порядка для алгебр Ли, которое было введено В. М. Копытовым в 1972 году (см. [2, 3]). Позднее свойства частично упорядоченных по Копытову алгебр над полями исследовались в работах Ю. В. Кочетовой [4—7], а также Ю. В. Кочетовой и Е. Е. Ширшовой [8, 9].

Из замечания А данной статьи следует, что $\mathcal{K}$-упорядочить можно только кольца без единицы.

Второй раздел данной статьи содержит доказательства утверждений о свойствах частично $\mathcal{K}$-упорядоченных колец.

Теорема 2. *Подмножество P кольца R является положительным конусом относительно некоторого $\mathcal{K}$-порядка в том и только в том случае, если P — положительный конус группы $\langle R, +\rangle$, удовлетворяющий условию*

3) *$a + ax, a + xa \in P$ для всех $a \in P$ и $x \in R$.*

Напомним, что подгруппа H частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если из неравенств $a \leqslant x \leqslant b$ следует, что $x \in H$ для любых $a, b \in H$ и $x \in G$.

Теорема 3. *Если R — частично $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо, I — его выпуклый идеал, то R/I — частично $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо.*

Теорема 4. *Пусть R — кольцо, I — его идеал, удовлетворяющий следующим условиям:*

1) *кольца $\langle I, \leqslant_1\rangle$ и $\langle R/I, \leqslant_2\rangle$ являются частично $\mathcal{K}$-упорядоченными;*
2) *если $a \in I$ и $a >_1 0$, то для любого $x \in R$ имеют место неравенства $a + ax \geqslant_1 0$ и $a + xa \geqslant_1 0$.*

Тогда на кольце R можно определить частичный $\mathcal{K}$-порядок $\leqslant$, индуцирующий порядок $\leqslant_1$ в кольце I и порядок $\leqslant_2$ в кольце R/I; при этом I будет выпуклым идеалом относительно порядка $\leqslant$.

Теорема 5. *Если R — частично $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо, то любая выпуклая направленная подгруппа частично упорядоченной группы $\langle R, +\rangle$ является идеалом кольца R.*

Пусть G — частично упорядоченная аддитивная группа.

Определение 6. Скажем, что элемент $x \in G$ бесконечно мал по сравнению с $y \in G$ ($x \ll y$), если $nx \leqslant y$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

В третьем разделе приводится доказательство следующей теоремы.

Теорема 7. *Пусть R — кольцо. Если $\langle R, +\rangle$ — частично упорядоченная группа, то условие 2) определения 1 эквивалентно следующему условию:*

2′) *если $a > 0$ в $\langle R, +\rangle$, то $ab \ll a$ и $ba \ll a$ для всех $b \in R$.*

Применение теоремы 5 и леммы 15 доказывает верность следующего утверждения.

Теорема 8. *Если R — частично $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо, $a, b \in R^+ \setminus \{0\}$, где $a \ll b$, то существует выпуклый идеал I кольца R, обладающий следующими свойствами*:

1) *I — наименьший выпуклый идеал, содержащий элемент a*;
2) *$b \notin I$*;
3) *любой элемент I бесконечно мал по сравнению с элементом b.*

Основными результатами данной статьи следует считать теоремы 9 и 10.

Теорема 9. *Если R — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо, то в нём существует центральная система идеалов* (*см. раздел* 4).

Теорема 10. *Пусть R — кольцо без единицы, в котором существует центральная система идеалов, удовлетворяющая условию, что если $A \subset B$ — любой скачок идеалов в системе, то фактор-группа $\langle B/A, +\rangle$ является группой без кручения. Тогда R может быть линейно $\mathcal{K}$-упорядочено.*

В статье используются терминология и обозначения, общепринятые в теории частично упорядоченных групп и колец.

2. Основные понятия

Пример 11. Пусть R — кольцо верхнетреугольных матриц над кольцом $\mathbb{Z}$. Будем считать матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(где $a, b, c \in \mathbb{Z}$) положительной, если 1) $a > 0$, или 2) $a = 0$ и $b > 0$, или 3) $a = b = 0$ и $c \geqslant 0$. Тогда аддитивная группа кольца R является линейно упорядоченной. При этом для положительных матриц

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

их произведение

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

положительным не является.

Пример 12. Пусть R — кольцо матриц из примера 11 и группа $\langle R, +\rangle$ линейно упорядочена указанным выше способом. Тогда если матрица $A \neq 0$ является положительной, то для любой матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 0 & d & f \\ 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

матрицы

$$A - AB = \begin{pmatrix} 0 & a & c - ae \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - BA = \begin{pmatrix} 0 & a & c - db \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

положительны, т. е. $AB \leqslant A$ и $BA \leqslant A$. Таким образом, кольцо R является линейно $\mathcal{K}$-упорядоченным.

Замечание A. В $\mathcal{K}$-упорядоченном кольце R нет единицы.

Доказательство. Действительно, если $1 \in R$, то для любого $a > 0$ и $b = 1+1$ выполняется $a+a = ba \leqslant a$, т. е. $a \leqslant 0$, что противоречит выбору элемента a. □

Пусть G — аддитивная абелева группа. Доказательство следующего утверждения можно найти в [3, 10].

Предложение 13. *Подмножество P группы G является множеством положительных элементов (положительным конусом) группы G относительно частичного порядка $\leqslant$ в том и только в том случае, если P удовлетворяет следующим условиям:*

1) $P + P \subseteq P$;
2) $-P \cap P = \{0\}$.

При этом $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $b - a \in P$.

Доказательство теоремы 2. Пусть R — частично $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо. Тогда множество $P = \{a \in R \mid a \geqslant 0\}$ является положительным конусом частично упорядоченной группы $\langle R, + \rangle$.

Если $a \in P$ и $a = 0$, то $a + ax = a + xa = 0 \in P$ для любого $x \in R$.

Если $a \in P$ и $a > 0$, то по условию 2) определения 1 для любого $x \in R$ и $b = -x$ имеют место неравенства $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$. Отсюда следует, что $-ax \leqslant a$ и $-xa \leqslant a$. Поэтому $a + ax, a + xa \in P$, т. е. выполняется условие 3).

Обратно, пусть P — положительный конус частично упорядоченной группы $\langle R, + \rangle$, удовлетворяющий условию 3) теоремы. При этом по предложению 13 неравенство $a \leqslant b$ справедливо в группе $\langle R, + \rangle$, если $b - a \in P$.

Пусть $a \in P$, $a > 0$ и $b \in R$. Тогда по условию 3) для элемента $x = -b$ верно, что $a + ax \in P$ и $a + xa \in P$, т. е. $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$ для любого $b \in R$. Следовательно, для R справедливо условие 2) определения 1, значит, R — частично $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо. Теорема доказана. □

Будем обозначать положительный конус $\mathcal{K}$-упорядоченного кольца R через R^+.

Доказательство теоремы 3. Так как $\langle I, +\rangle$ — выпуклая подгруппа группы $\langle R, +\rangle$, то существует частично упорядоченная группа $R/I = \{a + I \mid a \in R\}$ с положительным конусом P, содержащим классы с положительными представителями. Докажем, что P удовлетворяет условию 3) теоремы 2.

Пусть $a + I \in P$ и $x + I \in R/I$. Тогда $a' + I = a + I$ для некоторого элемента $a' \in R^+$. Отсюда следует, что $(a + I) + (a + I)(x + I) = (a' + a'x) + I$, где $a' + a'x \in R^+$ по теореме 2 для R^+. Следовательно, $(a + I) + (a + I)(x + I) \in P$, и аналогично доказывается, что $(a + I) + (x + I)(a + I) \in P$. Значит, P удовлетворяет условию 3) теоремы 2 и является положительным конусом частично $\mathcal{K}$-упорядоченного кольца R/I. Теорема доказана. □

Следствие 14. *Если R — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо, I — его выпуклый идеал, то R/I — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо.*

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим в кольце R подмножество

$$P = \{a \in R \mid a \in I^+, \text{ или } a \notin I \text{ и } a + I \in (R/I)^+\}.$$

Покажем, что P является положительным конусом частично упорядоченной группы $\langle R, +\rangle$.

Пусть $a, b \in P$. Если $a, b \in I^+$, то по условию 1) предложения 13 для подмножества I^+ верно, что $a + b \in I^+$. Отсюда получаем, что $a + b \in P$.

Если $a \notin I$ или $b \notin I$, то $I <_2 a+I$ или $I <_2 b+I$. Отсюда следует, что в кольце R/I для класса $(a+b)+I$ имеют место соотношения $I <_2 (a+I) \leqslant_2 (a+b)+I$ или $I <_2 (b+I) \leqslant_2 (a+b)+I$, где $a+b \notin I$. Из этих соотношений следует, что $a + b \in P$, т. е. условие 1) предложения 13 для множества P выполнено.

Если $a \in -P \cap P$, то $a \in I$. Иначе в кольце R/I получим неравенства $I <_2 a + I$ и $I <_2 (-a) + I$, т. е. $a + I <_2 I$, что приводит к противоречию.

Следовательно, $a \in I^+$ и $-a \in I^+$, т. е. $a = 0$. Значит, P удовлетворяет условию 2) предложения 13.

Пусть $a \in P$ и $x \in R$. Если $a \in I^+$ и $a = 0$, то $0 \leqslant_1 0 = a + ax = a + xa \in P$.

Если $a \in I^+$ и $a >_1 0$, то по условию 2) данной теоремы заключаем, что $a + ax \in P$ и $a + xa \in P$.

Если $a \notin I$, то $a + I >_2 I$. Но тогда в силу условия 3) теоремы 2 для порядка $\leqslant_2$ и класса $x + I \in R/I$ имеют место соотношения

$$I \leqslant_2 (a + I) + (a + I)(x + I) = (a + ax) + I.$$

При этом $a + ax \notin I$. Действительно, если $a + ax \in I$, то из равенства $(a + ax) + I = I$ следует, что $a + I = (a + I)(-x + I)$. Отсюда по условию 2) определения 1 для порядка $\leqslant_2$ получаем, что

$$(a + I) + (a + I) = (a + I)\big((-x + I) + (-x + I)\big) \leqslant_2 a + I,$$

что невозможно в частично упорядоченной группе $\langle R/I, +\rangle$. Следовательно, $a + ax \in P$. Аналогично доказывается, что $a + xa \in P$.

Таким образом, P удовлетворяет условию 3) теоремы 2 и поэтому является положительным конусом частичного $\mathcal{K}$-порядка $\leqslant$, при котором $a \leqslant b$ в R тогда и только тогда, когда $b - a \in P$.

Пусть $a \leqslant x \leqslant b$, где $a, b \in I$ и $x \in R$. Тогда $x - a, b - x \in P$.

Если $x \notin I$, то $x - a$ и $b - x \notin I$, поэтому $I <_2 (x - a) + I$ и $I <_2 (b - x) + I$. Отсюда следует, что $I <_2 (x - a) + I <_2 (x - a) + I + (b - x) + I = I$, чего быть не может. Значит, $x \in I$. Теорема доказана. $\square$

Доказательство теоремы 5. Так как H — подгруппа группы $\langle R, +\rangle$, то остаётся доказать, что H выдерживает умножение на все элементы R, т. е. что имеет место равенство $RHR = H$.

Пусть $a \in H$ и $r \in R$. Если $a \in R^+$ и $a > 0$, то по условию 2) определения 1 заключаем, что $ar \leqslant a$, $-ar = a(-r) \leqslant a$, откуда следует, что $-a \leqslant ar \leqslant a$. Из выпуклости подгруппы H следует, что $ar \in H$.

Если $a = 0$, то $ar = 0 \in H$.

Так как H — направленная подгруппа, то любой элемент $h \in H$ представи́м в виде $h = a - b$, где $a, b \in H^+ \subseteq R^+$ (см. [10, предложение 1, с. 23]). Тогда $hr = ar - br$, где по доказанному выше $ar, br \in H$. Значит, $hr \in H$.

Аналогично доказывается, что $rh \in H$, т. е. $RHR = H$, и H — идеал кольца R. Теорема доказана. $\square$

3. Отношение «бесконечно мал» в частично $\mathcal{K}$-упорядоченных кольцах

Напомним, что $nx = \underbrace{x + x + \ldots + x}_{n}$ при $n > 0$, $nx = 0$ при $n = 0$ и $nx = (-n)(-x)$ при $n < 0$ в любой частично упорядоченной группе G.

Замечание B. При $x > 0$ в G соотношение $x \ll x$ выполняться не может.

Действительно, если $x \ll x$, то $2x = x + x \leqslant x$, т. е. $x \leqslant 0$, что противоречит условию.

Доказательство теоремы 7. Пусть порядок группы $\langle R, +\rangle$ удовлетворяет условию 2) определения 1.

Если $a > 0$ и $b \in R$, то для $n \in \mathbb{Z}$ и $n > 0$ получим, что

$$n(ab) = \underbrace{ab + ab + \ldots + ab}_{n} = a\Big(\underbrace{b + b + \ldots + b}_{n}\Big) = a(nb) \leqslant a.$$

Для $n = 0$ имеем $n(ab) = 0 < a$.

Если $n < 0$, то $n(ab) = (-n)(-ab) = (-n)\big(a(-b)\big) \leqslant a$ по доказанному.

Таким образом, $n(ab) \leqslant a$ для любого $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $ab \ll a$.

Аналогично доказывается, что $ba \ll a$. Значит, порядок группы $\langle R, +\rangle$ удовлетворяет условию $2')$.

Обратно, пусть порядок группы $\langle R, +\rangle$ удовлетворяет условию $2')$, $a > 0$ и $b \in R$.

Тогда для $n = 1$ получаем, что $ab = n(ab) \leqslant a$ и $ba = n(ba) \leqslant a$. Поэтому $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$ для любого $b \in R$.

Следовательно, порядок группы $\langle R, +\rangle$ удовлетворяет условию 2). Теорема доказана. $\square$

Лемма 15. *Пусть G — частично упорядоченная группа, $a, b \in G$, $0 < a \ll b$. Тогда в G существует направленная подгруппа H, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) *H — наименьшая выпуклая подгруппа, содержащая элемент a;*
2) *$b \notin H$;*
3) *если $h \in H$, то $h \ll b$.*

Доказательство. Рассмотрим множество

$$H = \{g = x - y \in G \mid 0 \leqslant x \leqslant ka,\ 0 \leqslant y \leqslant la \text{ для некоторых } k, l \in \mathbb{N}\}.$$

H — выпуклая направленная подгруппа, удовлетворяющая условию 1) леммы (см. [11, предложения 2.1 и 2.2]).

Если $x \in H^+$, то $x \leqslant na$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ по условию леммы справедливы неравенства $kx \leqslant kna \leqslant b$.

Если $k = 0$, то $0 \cdot x \leqslant b$.

Пусть $k < 0$. Тогда $kx = (-k)(-x)$. Так как $-x \leqslant 0$ и $-k \geqslant 0$, то $(-k)(-x) \leqslant 0$, т. е. $kx \leqslant b$.

Пусть $g \in H$. Тогда по определению подгруппы H элемент g имеет вид $x - y$, где $x, y \in H^+$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда $ng = nx - ny \leqslant nx \leqslant b$ по доказанному.

Если $n = 0$, то $0 \cdot g = 0 \leqslant b$.

Если $n < 0$, то $-n > 0$, откуда следует, что

$$ng = (-n)(-g) = (-n)(y - x) = (-n)y - (-n)x \leqslant (-n)y \leqslant b$$

по доказанному.

Следовательно, $ng \leqslant b$ для любого $n \in \mathbb{Z}$, т. е. $g \ll b$.

Из замечания В следует, что $b \notin H$. Лемма доказана. $\square$

4. Линейно $\mathcal{K}$-упорядоченные кольца

Пусть R — частично $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо, $a > 0 \in R$. Рассмотрим множество

$$M_a = \{x \in R \mid x \ll a\}.$$

Предложение 16. *Если R — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо, $a \in R$, $a > 0$, то M_a — выпуклый идеал кольца R и $M_a \neq R$.*

Доказательство. Пусть $b, c \in M_a^+$. Докажем, что $b - c \in M_a$.

От противного, пусть найдётся $k \in \mathbb{Z}$, для которого $k(b - c) > a$. Тогда $k \neq 0$.

Для $k > 0$ получим, что $k(b - c) = kb - kc$. Отсюда следует, что $kb - kc > a$, т. е. $kb > kc + a$. Тогда $a \geqslant kb > kc + a$, значит, $kc < 0$. Поэтому $c < 0$, но это противоречит выбору элемента c.

Если $k < 0$, то $k(b-c) = (-k)(c-b) > a$. Тогда для $n = -k$ получим, что $nc > a + nb$. Отсюда следует, что $a \geqslant nc > a + nb$, т. е. $nb < 0$ и $b < 0$, что противоречит выбору элемента b.

Таким образом, M_a — подгруппа группы $\langle R, +\rangle$.

Пусть $b \leqslant x \leqslant c$, где $b, c \in M_a$ и $x \in R$. Тогда $0 \leqslant x - b \leqslant c - b$, где $c - b \in M_a$ по доказанному выше.

Пусть $k \in \mathbb{Z}$. Если $k > 0$, то $k(x-b) \leqslant k(c-b) \leqslant a$.

Если $k = 0$, то $0 \cdot (x-b) = 0 < a$.

Если $k < 0$, то $-k > 0$. Тогда $k(x-b) = (-k)(b-x) \leqslant 0 < a$.

Таким образом, $k(x-b) \leqslant a$ для всех $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому $x - b \in M_a$, т. е. $x = (x-b) + b \in M_a$.

Следовательно, M_a — выпуклая подгруппа.

Так как M_a — линейно упорядоченное множество, то M_a — направленная подгруппа. Остаётся применить теорему 5.

Из замечания В следует, что $a \notin M_a$. Значит, $M_a \neq R$. Предложение доказано. □

Предложение 17. *Пусть R — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо, $a > 0 \in R$ и $b > 0 \in R \setminus M_a$. Тогда для любого $x \in M_a$ выполняется $x \ll b$. При этом $M_a \subseteq M_b$.*

Доказательство. Пусть, от противного, найдётся такое $k \in \mathbb{Z}$, что $kx > b$.

Если $k > 0$, то $kx \in M_a$. Тогда из неравенств $0 < b < kx$ по предложению 16 получаем, что $b \in M_a$, что противоречит выбору элемента b.

Если $k < 0$, то $0 < b < (-k)(-x)$, где $-x \in M_a$, т. е. $(-k)(-x) \in M_a$. Отсюда по предложению 16 выводим, что $b \in M_a$, чего быть не может.

Таким образом, $kx \leqslant b$ для любого $k \in \mathbb{Z}$, т. е. $x \ll b$. Значит, $x \in M_b$, что доказывает включение $M_a \subseteq M_b$. Предложение доказано. □

Предложение 18. *Пусть R — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо. Если в группе $\langle R, +\rangle$ нет нетривиальных выпуклых подгрупп, то R — кольцо с нулевым умножением. При этом для любых $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$, существуют $k, m \in \mathbb{Z}$, для которых $a < kb$ и $b < ma$.*

Доказательство. Пусть $a \in R$. Тогда $a > 0$ или $a \leqslant 0$.

В первом случае по предложению 16 существует выпуклая подгруппа M_a, $M_a \neq R$. Тогда по условию $M_a = \{0\}$.

Так как для любого $b \in R$ по теореме 7 выполнено $ab \ll a$, то $ab \in M_a = \{0\}$. Другими словами, $aR = \{0\}$.

Если $a = 0$, то $aR = \{0\}$.

Если $a < 0$, то $-a > 0$, откуда по доказанному выше получаем, что $aR = (-a)(-R) = \{0\}$, т. е. умножение нулевое.

Далее, пусть $a, b \in R$, $a > 0$, $b > 0$. Так как $b \neq 0$ и $M_a = \{0\}$, то $b \notin M_a$. Следовательно, найдётся $k \in \mathbb{Z}$, для которого $kb > a$.

Аналогичные рассуждения показывают, что $a \notin M_b$, поэтому найдётся такое $m \in \mathbb{Z}$, что $ma > b$. Предложение доказано. □

Пусть R — кольцо (группа), A, B — его идеалы (подгруппы) и $A \subset B$. Говорят, что идеалы (подгруппы) A и B *образуют скачок*, если из включений $A \subseteq J \subseteq B$ для всех идеалов (подгрупп) J следует, что $A = J$ или $J = B$.

Теорема 19. *Если R — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо, $A \subset B$ — скачок выпуклых подгрупп группы $\langle R, +\rangle$, то $RB \subseteq A$ и $BR \subseteq A$.*

Доказательство. Покажем, что в фактор-группе B/A нет нетривиальных выпуклых подгрупп.

Пусть J — выпуклая подгруппа группы $\langle B/A, +\rangle$, где множество $T = \{x \in B \mid x + A \in J\}$ — полный прообраз подгруппы J при естественном гомоморфизме $B \to B/A$. Известно (см. [10, с. 33]), что T является выпуклой подгруппой группы $\langle B, +\rangle$ и $A \subseteq T$. Значит, T — выпуклая подгруппа группы $\langle R, +\rangle$ и имеют место включения $A \subseteq T \subseteq B$. Так как по условию теоремы $A \subset B$ — скачок выпуклых подгрупп, то $A = T$ или $T = B$. Поэтому $\{A\} = J$ или $J = B/A$.

Таким образом, в B/A нет нетривиальных выпуклых подгрупп. По теореме 5 подгруппы A и B являются идеалами R. По предложению 16 фактор-кольцо B/A — кольцо с нулевым умножением.

Теперь покажем, что для любого элемента $b \in B$ верно $Rb \subseteq A$.

Если $b \in A$, то $Rb \subseteq A$, так как по теореме 5 A — идеал R.

Пусть $b \in B \setminus A$. Если $b > 0$, то по условию 2′) теоремы 7 заключаем, что $xb \ll b$ для всех $x \in R$.

Допустим, от противного, что включение $Rb \subseteq A$ не имеет места, т. е. существует такой элемент $x \in R$, что $xb \in B \setminus A$ и $xb > 0$. (Если $xb < 0$, то $(-x)b > 0$ и $(-x)b \in B \setminus A$.) Таким образом, в B/A имеют место неравенства $b + A > A$ и $xb + A > A$. Из полученного соотношения $xb \ll b$ следует, что $xb + A \ll b + A$ в группе B/A.

По предложению 16 для строго положительных классов $b + A, xb + A \in B/A$ найдётся число $m \in \mathbb{Z}$, для которого $b + A < m(xb + A) = (mxb) + A \leqslant b + A$, чего быть не может. Значит, $Rb \subseteq A$.

Если $b < 0$, то из $-b > 0$ по доказанному выше выводим, что $Rb = R(-b) \subseteq A$.

Если $b = 0$, то $R \cdot 0 \subseteq A$. Значит, $RB \subseteq A$.

Аналогичными рассуждениями можно доказать, что $BR \subseteq A$. Теорема доказана. □

Предложение 20. *Пусть R — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченное кольцо и $A \subset B$ — скачок выпуклых подгрупп группы $\langle R, +\rangle$. Тогда для всех $b > 0$, $b \in B \setminus A$, верно равенство $A = M_b$.*

Доказательство. Покажем, что $A \subseteq M_b$. От противного, пусть $x \in A \setminus M_b$ и $x > 0$, т. е. найдётся $n \in \mathbb{Z}$, для которого $nx > b > 0$. Но $nx \in A$, где A — выпуклая подгруппа по условию, значит, $b \in A$, получили противоречие. Следовательно, $A \subseteq M_b$. При этом включение $B \subseteq M_b$ не имеет места, так как $b \in B \setminus M_b$.

По предложению 16 множество M_b — идеал кольца R, т. е. выпуклая подгруппа группы $\langle R, +\rangle$. Известно, что выпуклые подгруппы линейно упорядоченной группы образуют цепь, значит, $M_b \subset B$.

Таким образом, имеют место включения $A \subseteq M_b \subset B$, что в случае скачка идеалов означает верность равенства $A = M_b$. Предложение доказано. □

Далее нам понадобятся следующие понятия.

Пусть $\mathcal{U}$ — система идеалов кольца R, включающая $\{0\}$ и R. Система идеалов $\mathcal{U}$ называется *полной*, если для любой её подсистемы и объединение и пересечение идеалов, составляющих подсистему, принадлежат системе $\mathcal{U}$. Полная система идеалов $\mathcal{U}$ называется *центральной системой идеалов*, если для любого скачка идеалов $A \subset B$ в системе $\mathcal{U}$ имеют место включения $RB \subseteq A$ и $BR \subseteq A$.

Доказательство теоремы 9. Рассмотрим систему всех выпуклых подгрупп группы $\langle R, +\rangle$. Она, как известно, полная и образует цепь (см. [10, с. 80]). Но по теореме 5 эта система совпадает с системой выпуклых идеалов кольца R.

Если $A \subset B$ — скачок выпуклых подгрупп, то по предложению 17 заключаем, что $RB \subseteq A$ и $BR \subseteq A$. Теорема доказана. □

Замечание C. Если кольцо R обладает центральной системой идеалов $\mathcal{U}$, то любому элементу $r \neq 0 \in R$ соответствует скачок идеалов $I_r \subset I^r$ в системе $\mathcal{U}$, где I_r — объединение тех идеалов из $\mathcal{U}$, которые не содержат элемента r, а I^r — пересечение всех идеалов из системы $\mathcal{U}$, которые содержат элемент r. Здесь $r \in I^r \setminus I_r$.

Лемма 21. *Если кольцо R удовлетворяет условиям теоремы* 10, *то в любом скачке идеалов $A \subset B$ центральной системы фактор-группу $\langle B/A, +\rangle$ можно линейно упорядочить.*

Доказательство. Утверждение верно, так как $\langle B/A, +\rangle$ — абелева группа без кручения (см., например, [3, следствие 5, с. 56]). □

Лемма 22. *Пусть кольцо R удовлетворяет условиям теоремы* 10. *Если $r \neq 0 \in R$, то $r + I_r > I_r$ или $-r + I_r > I_r$ в линейно упорядоченной группе $\langle B/A, +\rangle$.*

Доказательство. Утверждение является следствием замечания C и леммы 21. □

Доказательство теоремы 10. Пусть множество $P \subset R$ содержит 0 и все элементы $r \in R$, для которых $r + I_r > I_r$ в соответствующем скачке идеалов центральной системы (см. лемму 22).

Пусть $a, b \in P$. Если $a = 0$ или $b = 0$, то $a + b \in P$.

Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Рассмотрим скачок идеалов $I_a \subset I^a$ в центральной системе.

Если $b \in I_a$, то $(a + b) + I_a = a + I_a > I_a$, т. е. $a + b \in P$.

Если $b \in I^a \setminus I_a$, то $b + I_a > I_a$ в группе I^a/I_a. Поэтому $(a + b) + I_a > I_a$ и $a + b \in P$.

Пусть $b \notin I^a$. Тогда рассмотрим скачок $I_b \subset I^b$ в центральной системе.

По определению идеала I_b заключаем, что $I^a \subseteq I_b$ (см. замечание С). Поэтому $(a+b)+I_b = b+I_b > I_b$ в группе I^b/I_b, т. е. $a+b \in P$.

Следовательно, $a+b \in P$ в любом случае, т. е. $P+P \subseteq P$.

Пусть $x \in P \cap -P$. Тогда $x \in P$ и $-x \in P$. Если $x \neq 0$, то в группе I^x/I_x имеют место соотношения $x+I_x > I_x$ и $-(x+I_x) = -x+I_x > I_x$, чего быть не может. Таким образом, $x=0$ и P — положительный конус группы $\langle R,+\rangle$. По лемме 22 заключаем, что $\langle R,+\rangle$ — линейно упорядоченная группа.

Далее, пусть $x \neq 0 \in P$. Тогда по условию теоремы для любого элемента $r \in R$ элементы xr, rx принадлежат I_x и $x+I_x > I_x$ в группе I^x/I_x. Поэтому $(x+xr)+I_x = x+I_x > I_x$ и $(x+rx)+I_x = x+I_x > I_x$. При этом $x+xr, x+rx \notin I_x$. Следовательно, $x+xr, x+rx \in P$. По теореме 2 множество P является положительным конусом кольца R, а R — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченным кольцом. □

Литература

[1] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[2] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.

[3] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[4] Кочетова Ю. В. О некоторых свойствах идеалов решёточно упорядоченных алгебр Ли // Вестн. СамГУ. Естественнонаучная серия. Мат. — 2007. — Т. 57, № 7. — С. 73—83.

[5] Кочетова Ю. В. О нижнем слабо разрешимом l-радикале решёточно упорядоченных алгебр Ли // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 8. — С. 137—149.

[6] Кочетова Ю. В. Первичные и полупервичные решёточно упорядоченные алгебры Ли // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 137—143.

[7] Кочетова Ю. В. Первичный радикал решёточно упорядоченных алгебр Ли // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 191—192.

[8] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах частично упорядоченных алгебр Ли // Избранные вопросы алгебры: Сб. статей, посвящённый памяти Н. Я. Медведева. — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. — С. 131—142.

[9] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 53—63.

[10] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[11] Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах pl-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 1. — С. 303—314.